Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πάτρα, 28.06.2023

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ**

Πρόγραμμα Σπουδών ΗΜΜΥ (Πανεπιστήμιο)

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………………………………… ΑΜ ………………………………

Ομάδα 1

ΘΕΜΑ 1 (3 μονάδες)

Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_a(t) = 2\cos(200\pi t)\cos(300\pi t)$.

(α) Να καθοριστεί η συχνότητα Nyquist του αναλογικού σήματος. **[0.5]**

(β) Αν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας τριπλάσια της συχνότητας Nyquist, να γραφεί το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει και να υπολογιστούν οι συχνότητές του. Έχει γίνει σωστά η δειγματοληψία; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **[1]**

(γ) Αν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας ίση με το ένα τέταρτο (1/4) της συχνότητας Nyquist, να βρεθούν οι ψευδεπίγραφες συχνότητες. **[0.5]**

(δ) Το αναλογικό σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας δεκαπλάσια της συχνότητας Nyquist και κβαντίζεται σε 64 στάθμες. Να υπολογιστεί το βήμα κβαντισμού, το μήκος λέξης, ο λόγος σήματος προς θόρυβο κβαντισμού, ο ρυθμός πληροφορίας και το εύρος ζώνης κωδικοποίησης PCM. **[1]**

Απάντηση: (α) Με χρήση της τριγωνομετρικής σχέσης:

$$cos(A)\,cos(B) = \left(\frac{1}{2}\right)[cos(A+B) + cos(A-B)]$$

το αναλογικό σήμα γράφεται:

$$x_a(t) = cos(500\pi t) + cos(100\pi t) = cos(2\pi(250)\,t) + cos(2\pi(50)t)$$

Επομένως οι συχνότητές του είναι $f_1 = 250$ Hz και $f_2 = 50$Hz. Άρα, η μέγιστη συχνότητα είναι $f_{max} = f_1 = 250$ Hz και η συχνότητα Nyquist είναι $f_N = 2f_{max} = 500$ Hz.

(β) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 3f_N = 1500$ Hz, η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_s = 1/f_s = 1/1500$ (sec) και το δειγματοληπτημένο σήμα είναι:

$$x[n] = x_a(t)|_{t=nTs} = cos(500\pi t) + cos(100\pi t)\,|_{t=n/1500}$$

$$= cos\left(\frac{500\pi}{1500}n\right) + cos\left(\frac{100\pi}{1500}n\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{15}n\right)$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $cos(\pi n/3)$ είναι:

$$\omega_1 = \pi/3 \Rightarrow \Omega_1 T_s = \pi/3 \Rightarrow 2\pi f_1/f_s = \pi/3 \Rightarrow f_1 = f_s/6 = 250\ Hz$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $cos(\pi n/15)$ είναι:

$$\omega_2 = \pi/15 \Rightarrow \Omega_2 T_s = \pi/15 \Rightarrow 2\pi f_2/f_s = \pi/15 \Rightarrow f_2 = f_s/30 = 50\ Hz$$

Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες είναι ίδιες με του αναλογικού σήματος και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο ρυθμός δειγματοληψίας ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist.

(γ) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = f_N/4 = 125$ Hz, η περιοχή συχνοτήτων που θα δειγματοληπτηθεί σωστά είναι $[-f_s/2, f_s/2] = [-62.5, 62.5]$ Hz. Επομένως, η συχνότητα $f_2 = 50$Hz θα δειγματοληπτηθεί σωστά, ενώ η συχνότητα $f_1 = 250$ Hz θα παράξει ψευδεπίγραφη συχνότητα, η οποία είναι:

$$f_1' = f_1 - k\,f_s = 250 - 2x125 = 0\ Hz$$

(δ) Η δυναμική περιοχή Vp-p του σήματος είναι από -2 έως +2 (Volts), δηλ. Vpp = 4 Volts.
Το βήμα κβαντισμού είναι:

$$\Delta = \text{Vp-p} / L = 4 / 64 = 1/6 \text{ (Volt)}$$

Το μήκος λέξης είναι:

$$n = \log_2(L) = \log_2(64) = 6 \text{ bits/sample}$$

Ο λόγος σήματος προς θόρυβο κβαντισμού είναι:

$$SNRq = 10 \log_{10}(L^2) = 20 \log_{10}(L) = 20 \log_{10}(64) = 36{,}12 \text{ dB}$$

Ο ρυθμός πληροφορίας είναι:

$$R = n\, f_s = 6 \text{ bits/sample x } 10 \text{ x } 500 \text{ samples/sec} = 30.000 \text{ bits/sec} = 30 \text{ kbps}$$

Το εύρος ζώνης κωδικοποίησης PCM είναι:

$$B_{PCM} = (1/2)\, n\, f_s = (1/2) \text{ x } 6 \text{ bits/sample x } 10 \text{ x } 500 \text{ samples/sec} = 15 \text{ kHz}$$

ΘΕΜΑ 2 (2 μονάδες)

(α) Ένα ΓΑΚΜ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(n) = \{\hat{1}, 2, 3, 4\}$. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ του συστήματος για είσοδο $x(n) = \{\hat{1}, -1, 0, 1\}$ με χρήση του μετασχηματισμού Ζ. **[1.5]**
(β) Να σχεδιαστούν τα σήματα εισόδου και εξόδου **[0.5]**

<u>Απάντηση</u>: Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Ζ κάθε ακολουθίας χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο και έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, z^{-n} = 1 - z^{-1} + z^{-3}$$

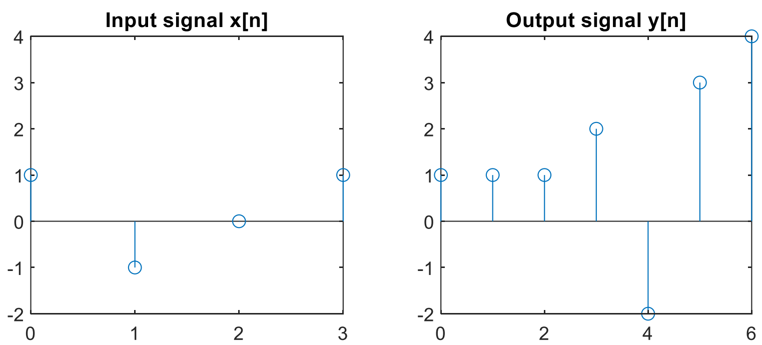
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{3} h[n]\, z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

Με βάση την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε:

$$Y(z) = X(z)\, H(z) = (1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-4})(2z + 3 + z^{-2})$$
$$= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} - z^{-1} - 2z^{-2} - 3z^{-3} - 4z^{-4} + z^{-3} + 2z^{-4} + 3z^{-5}$$
$$+ 4z^{-6} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3} - 2z^{-4} + 3z^{-5} + 4z^{-6} = \sum_{n=0}^{6} y[n]\, z^{-n}$$

Χρησιμοποιώντας για μία ακόμα φορά την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

$$y[n] = \{\hat{1}, 1, 1, 2, -2, 3, 4\}$$



ΘΕΜΑ 3 (3 μονάδες)

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα που βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{z-1}{z^2 - z + 0.25}$$

Να υπολογιστεί:

(α) Η εξίσωση διαφορών (ΓΕΔΣΣ) που περιγράφει το σύστημα **[1]**

(β) Η κρουστική απόκριση του συστήματος. **[1.5]**

(γ) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών και να εξηγηθεί το είδος ευστάθειας του συστήματος **[0.5]**

<u>Απάντηση</u>: (α) Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από τη σχέση $H(z) = Y(z)/X(z)$, οπότε έχουμε:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z^2 - z + 0.25} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

Πολλαπλασιάζουμε χιαστί τα κλάσματα και λαμβάνουμε:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.25z^{-2}Y(z) = z^{-1}X(z) - z^{-2}X(z)$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ και λαμβάνουμε τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] - y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n-1] - x[n-2] \Rightarrow$$
$$y[n] = y[n-1] - 0.25y[n-2] + x[n-1] - x[n-2]$$

(β) Επειδή στην έκφραση της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ με όρους z^{-n} ο βαθμός του αριθμητή είναι ίδιος με βαθμό του παρονομαστή θα αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα τη συνάρτηση $\widetilde{H}(z)$:

$$\widetilde{H}(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{z-1}{z(z^2 - z + 0.25)} = \frac{(z-1)}{z(z-0.5)^2}$$

Το ανάπτυγμα είναι:

$$\widetilde{H}(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{R_1}{z} + \frac{R_2}{(z-0.5)^2} + \frac{R_3}{(z-0.5)} \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.38) βρίσκουμε τα υπόλοιπα R_1και R_2:

$$R_1 = \left[z\,\widetilde{H}(z)\right]_{z=0} = \left[\frac{(z-1)}{(z-0.5)^2}\right]_{z=0} = -4$$

$$R_2 = \left[(z-0.5)^2\,\widetilde{H}(z)\right]_{z=0.5} = \left[\frac{(z-1)}{z}\right]_{z=0.5} = -1$$

Για την εύρεση του υπολοίπου R_3 αντικαθιστούμε τυχαίες τιμές του z, οι οποίες δεν πρέπει να είναι πόλοι. Θέτουμε $z = 1$ στη σχέση (1) και έχουμε:

$$\widetilde{H}(1) = \frac{H(1)}{1} = \frac{(1-1)}{1(1-0.5)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-4}{1} + \frac{-1}{(1-0.5)^2} + \frac{R_3}{(1-0.5)} = 0 \Rightarrow = -4 - 4 + \frac{R_3}{0.5} \Rightarrow R_3 = 4$$

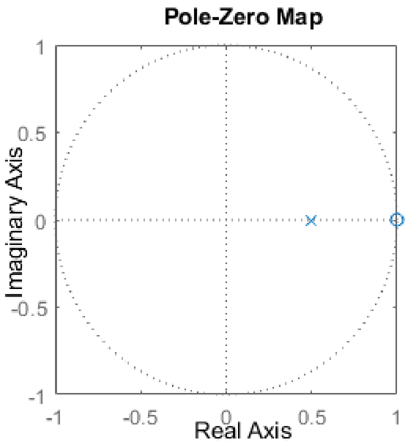
Άρα:

$$H(z) = \frac{R_1\,z}{z} + \frac{R_2\,z}{(z-0.5)^2} + \frac{R_3\,z}{(z-0.5)} = -4 - 2\frac{0.5\,z}{(z-0.5)^2} + 4\frac{z}{(z-0.5)}$$

Με βάση τον Πίνακα 9.1 του βιβλίου η κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = -4\delta[n] - 2n(0.5)^n\, u[n] + 4(0.5)^n\, u[n]$$

(γ)



Το σύστημα είναι ευσταθές επειδή όλοι οι πόλοι βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο.

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)

Ο μετασχηματισμός Z μιας ακολουθίας $x[n]$ είναι:

$$X(z) = \frac{z + z^{-2} - z^{-3}}{1 - 2z^{-3} + z^{-4}}$$

Αν η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, να βρεθεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n]$ στη συχνότητα $\omega = \pi/2$.

Απάντηση: Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας $x[n]$ και ο μοναδιαίος κύκλος βρίσκεται μέσα στη περιοχή σύγκλισης, τότε ο DTFT της $x[n]$ μπορεί να βρεθεί από τον υπολογισμό της $X(z)$ επάνω στον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή:

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

Επειδή $e^{j\omega} = cos\omega + jsin\omega$ για $\omega = \pi/2$ έχουμε $e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + jsin(\pi/2) = 0 + 1j = j$ και ο DTFT στο σημείο $\omega = \pi/2$, είναι:

$$X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi/2} = X(z)\big|_{z=e^{j\pi/2}} = X(z)\big|_{z=j}$$

Επομένως έχουμε:

$$X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi/2} = \left.\frac{z + z^{-2} - z^{-3}}{1 - 2z^{-3} + z^{-4}}\right|_{z=j} = \frac{j + (j)^{-2} - (j)^{-3}}{1 - 2(j)^{-3} + (j)^{-4}} = \frac{j - 1 - j}{1 - 2j + 1} = \frac{-1}{2 - 2j} = -0.25 - 0.25j$$

Ομάδα 2

ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες)

Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_a(t) = \cos(200\pi t) + \sin(400\pi t)$.

(α) Να καθοριστεί η συχνότητα Nyquist του αναλογικού σήματος. **[0.5]**

(β) Αν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας 1000 Hz, να γραφεί το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει και να υπολογιστούν οι συχνότητές του. Έχει γίνει σωστά η δειγματοληψία; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **[1]**

(γ) Αν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας 200 Hz, να βρεθούν οι ψευδεπίγραφες συχνότητες. **[0.5]**

Απάντηση: (α) Το αναλογικό σήμα $x_a(t) = cos(200\pi t) + sin(400\pi t)$ έχει συχνότητες $f_1 = 100$ Hz και $f_2 = 200$Hz. Άρα, η μέγιστη συχνότητα είναι $f_{max} = f_2 = 200$ Hz και η συχνότητα Nyquist είναι $f_N = 2f_{max} = 400$ Hz.

(β) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1000$ Hz, η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_s = 1/f_s = 1/1000$ (sec) και το δειγματοληπτημένο σήμα είναι:

$$x[n] = x_a(t)|_{t=nTs} = cos(200\pi t) + sin(400\pi t)\,|_{t=n/1000}$$

$$= cos\left(\frac{200\pi}{1000}n\right) + sin\left(\frac{400\pi}{1000}n\right) = cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $cos(\pi n/5)$ είναι:

$$\omega_1 = \pi/5 \Rightarrow \Omega_1 T_s = \pi/5 \Rightarrow 2\pi f_1/f_s = \pi/5 \Rightarrow f_1 = f_s/10 = 100\ Hz$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $cos(2\pi n/5)$ είναι:

$$\omega_2 = 2\pi/5 \Rightarrow \Omega_2 T_s = 2\pi/5 \Rightarrow 2\pi f_2/f_s = 2\pi/5 \Rightarrow f_2 = f_s/5 = 200\ Hz$$

Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες είναι ίδιες με του αναλογικού σήματος και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο ρυθμός δειγματοληψίας ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist.

(γ) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 200$ Hz, η περιοχή συχνοτήτων που θα δειγματοληπτηθεί σωστά είναι $[-f_s/2, f_s/2] = [-100, 100]$ Hz. Επομένως, η συχνότητα $f_1 = 100$Hz θα δειγματοληπτηθεί σωστά, ενώ η συχνότητα $f_2 = 200$ Hz θα παράξει ψευδεπίγραφη συχνότητα, η οποία είναι:

$$f_2' = f_2 - k\, f_s = 200 - 1\text{x}200 = 0 \text{ Hz}$$

ΘΕΜΑ 2 (4 μονάδες)

(α) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του ΓΑΚΜ συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς: **[2]**

$$H(z) = \frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}, \qquad R_h: |z| > 1$$

(β) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του ΓΑΚΜ συστήματος (μηδενικές αρχικές συνθήκες) με ΓΕΔΣΣ: **[2]**

$$y[n] = 0.6\,y[n-1] - 0.08\,y[n-2] + x[n]$$

Απάντηση: (α) Ο βαθμός του αριθμητή είναι $M = 2$ και ο βαθμός του παρονομαστή $N = 2$. Επειδή τα πολυώνυμα είναι εκφρασμένα σε θετικές δυνάμεις του z, θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της παράστασης $H(z)/z$.

$$\frac{H(z)}{z} = \widetilde{H}(z) = \frac{2(z-0.5)}{(z-1)(z+1)} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z+1}$$

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Z της συνάρτησης $\widetilde{H}(z)$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο μερικών κλασμάτων. Είναι:

$$\widetilde{H}(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z+1}$$

όπου τα υπόλοιπα R_1 και R_2 της πολυωνυμικής διαίρεσης για τους αντίστοιχους πόλους δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις (9.38):

$$R_1 = \left[(z-1)\,\widetilde{H}(z)\right]_{z=1} = \left[(z-1)\frac{2(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}\right]_{z=1} = \left[\frac{2(z-0.5)}{(z+1)}\right]_{z=1} = 0.5$$

$$R_2 = \left[(z+1)\,\widetilde{H}(z)\right]_{z=-1} = \left[(z+1)\frac{2(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}\right]_{z=-1} = \left[\frac{2(z-0.5)}{(z-1)}\right]_{z=-1} = 1.5$$

Επομένως, το ανάπτυγμα της συνάρτησης $H(z)$ είναι:

$$H(z) = z\,\widetilde{H}(z) = \frac{0.5\,z}{z-1} + \frac{1.5\,z}{z+1}$$

από το οποίο προκύπτει:

$$h[n] = 0.5\,u[n] + 1.5(-1)^n\,u[n] = [0.5 + 1.5(-1)^n]\,u[n]$$

(β) Γράφουμε τη ΓΕΔΣΣ, μεταφέροντας τους όρους $y[\,]$ στο αριστερό μέλος:

$$y[n] - 0.6\,y[n-1] + 0.08\,y[n-2] = x[n]$$

Ο μετασχηματισμός Z της κρουστικής εισόδου δ[n] είναι 1.

Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Z και των δύο μελών της ΓΕΔΣΣ. Με χρήση της ιδιότητας της μετατόπισης στο χρόνο του μετασχηματισμού Z λαμβάνουμε:

$$Y(z) - 0.6\,z^{-1}Y(z) + 0.08\,z^{-2}Y(z) = X(z) \Rightarrow Y(z)[1 - 0.6z^{-1} + 0.08z^{-2}] = 1 \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - 0.6z^{-1} + 0.08z^{-2})} = \frac{1}{(1 - 0.2z^{-1})\,(1 - 0.4z^{-1})}$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (9.39) του βιβλίου και λαμβάνουμε το ανάπτυγμα:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 - 0{,}2\,z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - 0.4z^{-1}}, \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τα R_1 και R_3 από τη σχέση (9.38):

$$R_1 = [(1 - 0.2z^{-1})\,Y(z)]_{z^{-1}=5} = \left[\frac{1}{1 - 0.4z^{-1}}\right]_{z^{-1}=5} = \cdots = -1$$

$$R_2 = [(1 - 0.4z^{-1})\,Y(z)]_{z^{-1}=2.5} = \left[\frac{1}{1 - 0.2z^{-1}}\right]_{z^{-1}=2.5} = \cdots = 2$$

Άρα το ανάπτυγμα είναι:

$$Y(z) = -\frac{1}{1 - 0{,}2\,z^{-1}} + \frac{2}{1 - 0.4z^{-1}}$$

και από τον Πίνακα 9.1 βρίσκουμε:

$$y[n] = -(0.2)^n u[n] + 2(0.4)^n u[n] = [-(0.2)^n + 2(0.4)^n]\,u[n]$$

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες)

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{1 + 0.7z^{-1}}{(1 + 0.1z^{-1})(1 - 0.5z^{-2})(1 - 0.6z^{-1})}$$

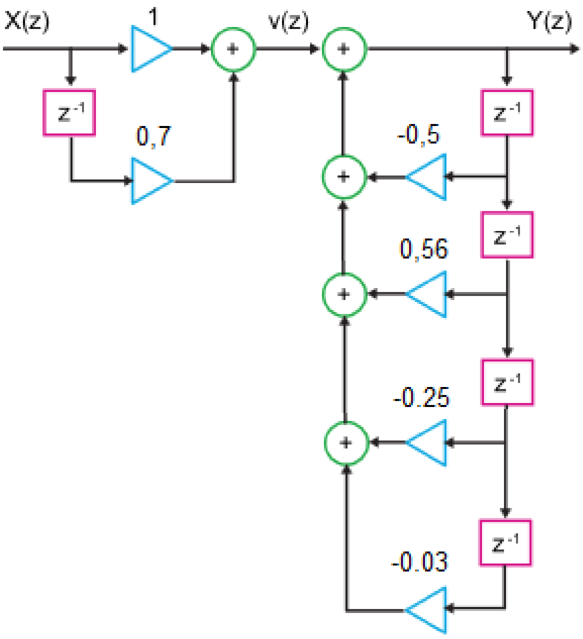
(α) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα βαθμίδων ευθείας μορφής Ι και ΙΙ. **[1.5]**

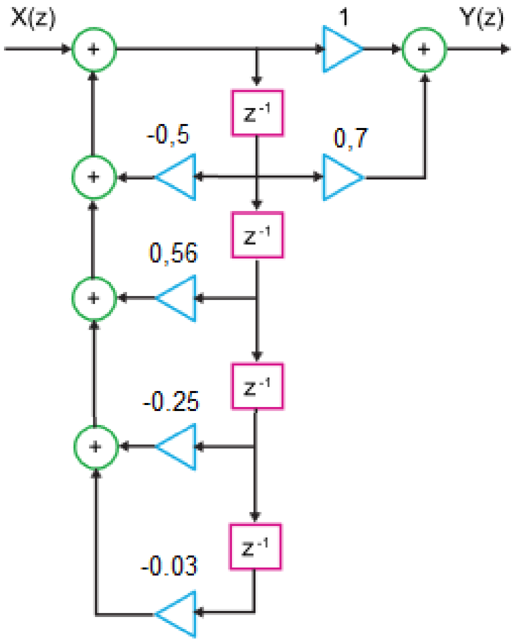
(β) Για κάθε μία μορφή να υπολογιστεί το πλήθος των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου, καθώς και το πλήθος των καταχωρητών καθυστέρησης. **[0.5]**

Απάντηση: (α) Κάνουμε τις πράξεις στον παρονομαστή, οπότε η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(z) = \frac{1 + 0.7z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} - 0.56z^{-2} + 0.25z^{-3} + 0.03z^{-4}}$$

Τα διαγράμματα βαθμίδων ευθείας μορφής Ι και ΙΙ δείχνονται στο σχήμα:





(β) Σύμφωνα με τα παραπάνω διαγράμματα βαθμίδων (ευθείας μορφής Ι και ΙΙ, αντίστοιχα), το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή Ι είναι:

- Πολλαπλασιασμοί: 6 για κάθε δείγμα εξόδου
- Προσθέσεις: 5 για κάθε δείγμα εξόδου
- Καθυστερήσεις: 5

και στην ευθεία μορφή ΙΙ είναι:

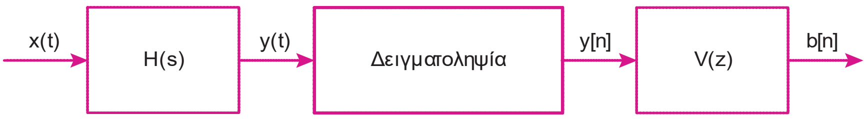
- Πολλαπλασιασμοί: 6 για κάθε δείγμα εξόδου
- Προσθέσεις: 5 για κάθε δείγμα εξόδου
- Καθυστερήσεις: 4

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)

(α) Με χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού να μετατραπεί σε ψηφιακό το αναλογικό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς **[1]**

$$H(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 3s + 2}$$

(β) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $V(z)$ του συστήματος διακριτού χρόνου του παρακάτω σχήματος αν είναι επιθυμητό να ισχύει $b[n] = x[n]$. Όπου H(s) είναι η συνάρτηση μεταφοράς του ερωτήματος (α). **[1]**



Απάντηση: (α) Χρησιμοποιούμε τη σχέση μετατροπής $s \longleftrightarrow z$. Είναι:

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

Η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = H(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{\left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 1}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 3\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 2}$$

Με απλοποίηση λαμβάνουμε:

$$H(z) = \frac{-2z-2}{5z^2-1} = \frac{-2z^{-1}+2z^{-2}}{5-z^{-2}}$$

(β) Το σήμα $y(t)$ υπολογίζεται από τη συνέλιξη:

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad (1)$$

όπου:

$$h(t) = F^{-1}\{H(s)\} \qquad (2)$$

Αντίστοιχα, στο πεδίο της αναλογικής μιγαδικής συχνότητας (s) ισχύει:

$$Y(s) = X(s)\, H(s) \qquad (3)$$

Επομένως:

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} \qquad (4)$$

Επειδή στις σχέσεις (1) και (3) τα μόνα γνωστά είναι οι συναρτήσεις $H(s)$ και $h(t)$, θα χρειαστεί να «συνδέσουμε» το σήμα $y(t)$ με την έξοδο $b[n]$ του συνολικού συστήματος, ώστε να διατυπώσουμε μία σχέση ανάμεσα στα $x[n]$ και $b[n]$, που θα μας οδηγήσει στην εύρεση της συνάρτησης $V(z)$. Λόγω της δειγματοληψίας, ισχύει:

$$y[n] = y(t)\big|_{t=nT_s} \qquad (5)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό, προκειμένου να εκφράσουμε τη σχέση (5) στο επίπεδο της μιγαδικής ψηφιακής συχνότητας z και να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $Y(z)$. Είναι:

$$Y(z) = Y(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} \qquad (6)$$

Σε ότι αφορά το σύστημα διακριτού χρόνου $V(z)$, η έξοδός του στα πεδία χρόνου και συχνότητας δίνεται από τις σχέσεις:

$$b[n] = y[n] * v[n] \qquad (7)$$

$$B(z) = Y(z)\, V(z) \qquad (8)$$

Στη σχέση (8) οι συναρτήσεις $Y(z)$ και $V(z)$ είναι γνωστές. Η $Y(z)$ υπολογίστηκε από τη σχέση (6), ενώ η $V(z)$ είναι δεδομένη. Επειδή δίνεται ότι:

$$b[n] = x[n] \qquad (9)$$

προκύπτει:

$$B(z) = X(z) \qquad (10)$$

Η συνάρτηση $X(z)$ συνδέεται με τη συνάρτηση $X(s)$ μέσω του διγραμμικού μετασχηματισμού, δηλαδή είναι:

$$X(z) = X(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} \qquad (11)$$

Λύνοντας τη σχέση (8) ως προς $V(z)$, και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (6), (11) και (4) έχουμε:

$$V(z) = \frac{B(z)}{Y(z)} = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{X(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}}}{Y(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}}} = \frac{Y(s)/H(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}}}{Y(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}}} = \frac{1}{H(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}}} \qquad (12)$$

Όπου:

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

Η σχέση (12) περιγράφει την ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς $V(z)$ του συστήματος διακριτού χρόνου. Παρατηρούμε ότι είναι η αντίστροφη της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος διακριτού χρόνου, υπολογισμένη κατάλληλα με τον διγραμμικό μετασχηματισμό λόγω της δειγματοληψίας που μεσολάβησε μεταξύ των δύο συστημάτων. Επομένως, η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς $V(z)$ είναι:

$$V(z) = \frac{1}{H(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}}} = \frac{1}{H(z)} = \frac{5-z^{-2}}{-2z^{-1}+2z^{-2}}$$