Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πάτρα, 29.06.2022

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ**

Πρόγραμμα Σπουδών ΗΜΜΥ (Πανεπιστήμιο)

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………………………………………… **ΑΜ** ……………………………

Ομάδα 1

ΘΕΜΑ 1 (3 μονάδες)

Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_a(t) = 2cos(2\pi At) + \sin(2\pi Bt)$, όπου Α και Β είναι τα δύο τελευταία μη-μηδενικά ψηφία του Αριθμού Μητρώου σας.

(α) Να καθοριστεί η συχνότητα Nyquist του δοθέντος αναλογικού σήματος. **[0.5]**

(β) Αν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας δεκαπλάσια της συχνότητας Nyquist, να γραφεί το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει. **[1]**

(γ) Αν κάθε δείγμα του σήματος του ερωτήματος (β) κβαντίζεται σε 1024 στάθμες, να βρεθεί ο ρυθμός παροχής πληροφορίας. **[0.5]**

(δ) Αν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας ίση με τη συχνότητα Nyquist, να βρεθούν οι ψευδεπίγραφες συχνότητες. **[1]**

Απάντηση:

(α) Έστω Α=2 και Β=3. Το αναλογικό σήμα είναι $x_a(t) = 2cos(2\pi 2t) + \sin(2\pi 3t)$. Επομένως οι συχνότητες του αναλογικού σήματος είναι $f_1 = 2$ Hz και $f_2 = 3$Hz. Επομένως, $f_{max} = 3$ Hz, άρα $f_N = 2f_{max} = 6$ Hz.

(β) Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 10f_N = 60$ Hz. Επομένως η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_s = 1/f_s = 1/60$ sec και το δειγματοληπτημένο σήμα γράφεται:

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nTs} = 2cos(2\pi 2t) + \sin(2\pi 3t)$$
$$= 2cos\left(\frac{2\pi 2n}{60}\right) + \sin\left(\frac{2\pi 3n}{60}\right) = 2cos\left(\frac{2\pi n}{30}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{20}\right)$$

(γ) Ο ρυθμός πληροφορίας δίνεται από τη σχέση $R = n\, f_s$, όπου $n = \log_2(L) = \log_2(1024) = 10$ bits/sample. Επομένως είναι:

$$R = n\, f_s = 10 \text{ bits/sample x } 60 \text{ samples/sec} = 600 \text{ bps}$$

(δ) Αν $f_s = f_N = 6$ Hz, τότε και για τις δύο συχνότητες $f_1 = 2$ Hz και $f_2 = 3$Hz τηρείται το κριτήριο του Nyquist, οπότε δεν θα δημιουργηθούν ψευδεπίγραφες συχνότητες.

ΘΕΜΑ 2 (1 μονάδα)

Δίνεται το ΓΑΚΜ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n) = \{\hat{1}, 2,3,4\}$. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ του συστήματος για είσοδο $x(n) = \{\hat{1}, -1, -1, 1\}$.

Απάντηση: Θα υπολογίσουμε τη συνέλιξη με τη μέθοδο του πίνακα. Είναι:

*Παρακαλώ σημειώστε επάνω στο γραπτό σας το **Ονοματεπώνυμό** σας και τον **Αριθμό Μητρώου** σας*

*Διάρκεια εξέτασης: **2,5 ώρες*** *ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!*

n_0		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7		n	$\boldsymbol{y[n]}$
	k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7			
	$x[k]$						1	-1	-1	1							
	$h[k]$						1	2	3	4							
	$h[-k]$			4	3	2	1										
-1	$h[-1-k]$		4	3	2	1										-1	**0**
0	$h[-k]$			4	3	2	1									0	**1**
1	$h[1-k]$				4	3	2	1								1	**1**
2	$h[2-k]$					4	3	2	1							2	**0**
3	$h[3-k]$						4	3	2	1						3	**0**
4	$h[4-k]$							4	3	2	1					4	**-5**
5	$h[5-k]$								4	3	2	1				5	**-1**
6	$h[6-k]$									4	3	2	1			6	**4**
7	$h[7-k]$										4	3	2	1		7	**0**

ΘΕΜΑ 3 (3 μονάδες)

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα διακριτού χρόνου έχει ΓΕΔΣΣ $y[n] = 0.13y[n-1] + 0.42y[n-2] + x[n]$ και αρχικές συνθήκες $y[-1] = 2$ και $y[-2] = 5$. Με χρήση του μετασχηματισμού Ζ να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = (0.3)^n\, u[n]$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Z^+ κάθε ενός από τους όρους της ΓΕΔΣΣ:

$$Y^+(z) = 0.13\left[z^{-1}Y^+(z) + y[-1]\right] + 0.42\left[z^{-2}\,Y^+(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\right] + X^+(z)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αρχικών συνθηκών, έχουμε:

$$Y^+(z) = 0.13\,[z^{-1}\,Y^+(z) + 2] + 0.42\,[z^{-2}\,Y^+(z) + 2z^{-1} + 5] + X^+(z) \Rightarrow$$
$$Y^+(z) = 0.13\,z^{-1}\,Y^+(z) + 0.26 + 0.42\,z^{-2}\,Y^+(z) + 0.84z^{-1} + 2.1 + X^+(z)$$

Μεταφέροντας τους όρους που περιέχουν την $Y^+(z)$ στο αριστερό μέλος, έχουμε:

$$Y^+(z)[1 - 0.13z^{-1} - 0.42z^{-2}] = 2.36 + 0.84z^{-1} + X^+(z)$$

Η ακολουθία $x[n] = (0.3)^n u[n]$ έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό $X^+(z)$ που δίνεται από τη σχέση:

$$X^+(z) = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}}$$

Άρα ισχύει:

$$Y^+(z)[1 - 0.13z^{-1} - 0.42z^{-2}] = (2.36 + 0.84z^{-1}) + \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}}$$

Επιλύοντας ως προς $Y^+(z)$ έχουμε:

$$Y^{+}(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z) = \frac{2.36 + 0.84z^{-1}}{1 - 0.13z^{-1} - 0.42z^{-2}} + \frac{\dfrac{1}{1 - 0.3z^{-1}}}{1 - 0.13z^{-1} - 0.42z^{-2}}$$

$$= \frac{2.36 + 0.84z^{-1}}{(1 - 0.13z^{-1} - 0.42z^{-2})} + \frac{1}{(1 - 0.13z^{-1} - 0.42z^{-2})(1 - 0.3z^{-1})} \quad (1)$$

Εκτελώντας την πρόσθεση των κλασμάτων και κατόπιν παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή, έχουμε:

$$Y^{+}(z) = \frac{(2.36 + 0.84z^{-1})(1 - 0.3z^{-1}) + 1}{(1 - 0.13z^{-1} - 0.42z^{-2})(1 - 0.3z^{-1})} = \frac{-0.252z^{-2} + 0.132z^{-1} + 3.36}{(1 - 0.13z^{-1} - 0.42z^{-2})(1 - 0.3z^{-1})}$$

$$= \frac{0.252z^{-2} - 1.548z^{-1} + 3.36}{(1 - 1.76z^{-1})(1 - 1.45z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > 1$ και οι πόλοι του συστήματος είναι $z_1 = 1.76$, $z_2 = 1.45$, $z_3 = 0.3$. Επειδή δύο πόλοι βρίσκονται έξω από τον μοναδιαίο κύκλο το σύστημα είναι ασταθές.

Για το ανάπτυγμα του $Y^{+}(z)$ σε μερικά κλάσματα θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα R_1, R_2 και R_3:

$$Y^{+}(z) = \frac{R_1}{1 - 1.76z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - 1.45z^{-1}} + \frac{R_3}{1 - 0.3z^{-1}}$$

Επειδή οι πόλοι είναι απλοί και διακριτοί υπολογίζουμε υπόλοιπα R_1, R_2 και R_3 από τη σχέση (9.38) και έχουμε:

$$R_1 = [Y^{+}(z)(1 - 1.76z^{-1})]_{z=1.76} = \left[\frac{0.252z^{-2} - 1.548z^{-1} + 3.36}{(1 - 1.45z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})}\right]_{z=1.76} = -1.93$$

$$R_2 = [Y^{+}(z)(1 - 1.45z^{-1})]_{z=1.45} = \left[\frac{0.252z^{-2} - 1.548z^{-1} + 3.36}{(1 - 1.76z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})}\right]_{z=1.45} = -1.88$$

$$R_3 = [Y^{+}(z)(1 - 0.3z^{-1})]_{z=0.3} = \left[\frac{0.252z^{-2} - 1.548z^{-1} + 3.36}{(1 - 1.76z^{-1})(1 - 1.45z^{-1})}\right]_{z=0.3} = -10.94$$

Επομένως, το ανάπτυγμα της $Y^{+}(z)$ σε μερικά κλάσματα είναι:

$$Y^{+}(z) = -1.93\frac{1}{1 - 1.76z^{-1}} - 1.88\frac{1}{1 - 1.45z^{-1}} - 10.94\frac{1}{1 - 0.3z^{-1}}$$

Εκτελώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ προκύπτει η ζητούμενη λύση:

$$y[n] = -1.93\,(1.76)^{n}u[n] - 1.88\,(1.45)^{n}u[n] - 10.94\,(0.3)^{n}u[n]$$

ΘΕΜΑ 4 (3 μονάδες)

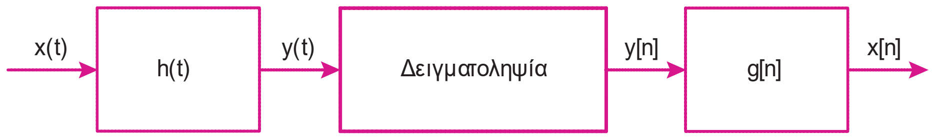
Ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $h(t)$ βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας και περιγράφεται από τη ΓΔΕΣΣ:

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{d(t)} = b\frac{dx(t)}{d(t)} + cx(t)$$

όπου a, b και c είναι τα τρία τελευταία μη-μηδενικά ψηφία του Αριθμού Μητρώου σας.

(α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος, καθώς επίσης οι πόλοι και τα μηδενικά της. **[1.5]**

(β) Ποια πρέπει να είναι η συνάρτηση $g[n]$ στην παρακάτω συνδεσμολογία, ώστε στην έξοδο του συνολικού συστήματος να παραχθεί το σήμα $x[n]$, το οποίο είναι δειγματοληψία του $x(t)$; **[1.5]**



<u>Απάντηση</u>: (α) Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της ΓΔΕΣΣ και επειδή οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, έχουμε:

$$s^2Y(s) + asY(s) = bsX(s) + cX(s) \Rightarrow$$

$$Y(s)[s^2 + as] = X(s)[bs + c] \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{bs + c}{s^2 + as} = \frac{bs + c}{s(s + a)}$$

Το σύστημα έχει ένα μηδενικό στη συχνότητα $s = -c/b$ και δύο απλούς πόλους στις συχνότητες $s_1 = 0$ και $s_2 = -a$.

(β) Ισχύουν οι σχέσεις:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s) \qquad (1)$$

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} \qquad (2)$$

Λόγω της δειγματοληψίας, ισχύει:

$$y[n] = y(t)|_{t=nT_s} \qquad (3)$$

Η έξοδος $x[n]$ δίνεται από τη συνέλιξη:

$$x[n] = y[n] * g[n] \overset{z}{\Rightarrow} X(z) = Y(z)\,G(s) \;\Rightarrow\; G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \qquad (4)$$

Η συνάρτηση $Y(z)$ υπολογίζεται με διγραμμικό μετασχηματισμό στη συνάρτηση $Y(s)$ και είναι:

$$Y(z) = Y(s)|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = Y\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \qquad (5)$$

Ομοίως και για τη συνάρτηση $X(z)$ ισχύει:

$$X(z) = X(s)\big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \left.\frac{Y(s)}{H(s)}\right|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{Y\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{H\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5) και (6) στη σχέση (4), λαμβάνουμε:

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{Y\left(\frac{z-1}{z+1}\right)/H\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{Y\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = \frac{1}{H\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} \qquad (7)$$