Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Λυμένα Παραδείγματα

Διδάσκων: Μ. Παρασκευάς

ΣΕΤ #2 – Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Άρτια και Περιττά ΣΔΧ
- Σήματα Ενέργειας και Σήματα Ισχύος
- Μιγαδική Εκθετική Ακολουθία
- Ημιτονοειδής Ακολουθία

1. Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

🕮 Παράδειγμα 1

Η δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t) = sin(t + \pi/6)\,, -\infty < t < \infty$ με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1\ sec$.

(α) Να ελεγχθεί αν το σήμα $x[n]$ είναι περιοδικό και σε θετική περίπτωση να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδός του.

(β) Σε αρνητική περίπτωση να καθοριστούν οι τιμές της περιόδου δειγματοληψίας που ικανοποιούν το κριτήριο Nyquist και καθιστούν περιοδικό το σήμα $x[n]$.

Απάντηση: Το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ έχει προέλθει από τη δειγματοληψία του $x(t)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_s} = sin(n + \pi/6)$$

και έχει συχνότητα $\omega = 1\ rad$. Η τιμή αυτή δεν μπορεί να εκφραστεί στη μορφή $2\pi m/N$ με θετικούς ακέραιους m και N που δεν διαιρούνται μεταξύ τους, λόγω της ύπαρξης του άρρητου π. Επομένως, το σήμα $x[n]$ δεν είναι περιοδικό.

Η συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t) = sin(t + \pi/6)$ είναι $\Omega_0 = 1\ rad/sec$, οπότε η περίοδος δειγματοληψίας σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist είναι:

$$T_s \le \frac{\pi}{\Omega_0} = \pi$$

Αν δειγματοληπτήσουμε το σήμα συνεχούς χρόνου με περίοδο δειγματοληψίας T_s θα λάβουμε το σήμα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_s} = sin(nT_s + \pi/6)$$

Για να είναι περιοδικό αυτό το σήμα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$sin((n + N)T_s + \pi/6) = sin(nT_s + \pi/6)$$

δηλαδή είναι αναγκαίο να ισχύει $NT_s = 2k\pi$ για ακέραιο k. Έτσι, η περίοδος δειγματοληψίας $T_s = 2k\pi/N \leq \pi$ πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist και ταυτόχρονα να εξασφαλίζει την περιοδικότητα του σήματος. Για Παράδειγμα , αν επιθυμούμε ένα ημίτονο με θεμελιώδη περίοδο $N = 10$, τότε $T_s = k\pi/5$ για τιμή του k που ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist

$$0 < T_s = \frac{k\pi}{5} \leq \pi \Rightarrow 0 < k \leq 5$$

Από όλες τις πιθανές τιμές του k επιλέγουμε τις τιμές 1 και 3 που δεν διαιρούνται με το $N = 10$ (αποκλείουμε το 2 και το 4 επειδή διαρούνται με το 10). Για $k = 1$ προκύπτει $T_s = \pi/5 < \pi$, που ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist και παράγει το σήμα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = sin(n\pi/5 + \pi/6) = sin\left(\frac{2n\pi}{10} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Αντίστοιχα, για $k = 3$ προκύπτει $T_s = 3\pi/5 < \pi$, που ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist και παράγει το σήμα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = sin(3n\pi/5 + \pi/6) = sin\left(\frac{2\pi\ x\ 3}{10} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Σχόλια: Όταν δειγματοληπτούμε ένα ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = A\,cos(\Omega_0 t + \theta),\ -\infty < n < \infty$$

λαμβάνουμε ένα **περιοδικό ημιτονοειδές σήμα** διακριτού χρόνου:

$$x[n] = A\,cos(\Omega_0 n T_s + \theta) = A cos\left(\frac{2\pi T_s}{T_0} n + \theta\right)$$

μόνο εφόσον ισχύει:

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N}$$

όπου m και N είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί που δεν διαιρούνται μεταξύ τους. Για να μην εμφανίζεται το φαινόμενο της αναδίπλωσης συχνοτήτων πρέπει η περίοδος δειγματοληψίας να ικανοποιεί και το κριτήριο Nyquist:

$$T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_0} = \frac{T_0}{2}$$

2. Άρτια και Περιττά Σήματα Διακριτού Χρόνου

📖 Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το άρτιο και το περιττό μέρος του ΣΔΧ $x[n] = u[n]$

Απάντηση: Το άρτιο μέρος δίνεται από τη σχέση:

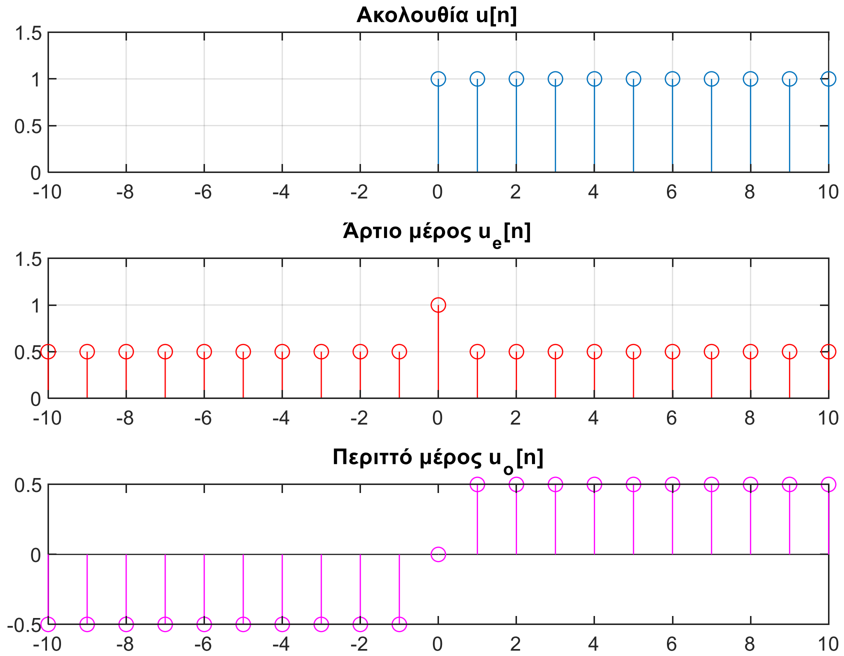
$$x_e[n] = \frac{1}{2}\big[x[n] + x[-n]\big] = \frac{1}{2}[u[n] + u[-n]] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ \frac{1}{2}, n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \delta[n]$$

Το περιττό μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\big[x[n] - x[-n]\big] = \frac{1}{2}[u[n] - u[-n]] = \begin{cases} \frac{1}{2}, n > 0 \\ 0, n = 0 \\ -\frac{1}{2}, n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(n)$$

όπου $\mathrm{sgn}(n)$ είναι η συνάρτηση προσήμου, η οποία επιστρέφει: $+1$ όταν $n > 0$, 0 όταν $n = 0$ και 1 όταν $n < 0$.

(α)
(β)
(γ)



(α) Μοναδιαία βηματική ακολουθία $u[n]$, (β) Άρτιο μέρος $u_e[n]$,
(γ) Περιττό μέρος $u_o[n]$

📖 Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το συζυγές συμμετρικό (άρτιο) και το συζυγές αντισυμμετρικό (περιττό) μέρος του μιγαδικού σήματος $x[n] = j\,e^{\,j\,\pi/4}$.

Απάντηση: Το συζυγές συμμετρικό μέρος του $x[n]$ είναι:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\big[x[n] + x^*[-n]\big] = \frac{1}{2}\big[\,j\,e^{\,j\,\pi/4} - j\,e^{\,j\,\pi/4}\big] = 0$$

Το συζυγές αντισυμμετρικό είναι:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\big[x[n] - x^*[-n]\big] = \frac{1}{2}\big[\,j\,e^{\,j\,\pi/4} + j\,e^{\,j\,\pi/4}\big] = j\,e^{\,j\,\pi/4}$$

Άρα το σήμα είναι συζυγές αντισυμμετρικό (περιττό).

3. Σήματα Ενέργειας και Σήματα Ισχύος

📖 Παράδειγμα 4

Να εξεταστεί αν το σήμα $x[n] = 0.5^n u[n]$ είναι σήμα ενέργειας ή ισχύος ή και τα δύο.

Απάντηση: Η ενέργεια του σήματος $x[n]$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5^n u[n] = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n = \frac{1}{1-0.5} = \frac{1}{0.5} = 2$$

Επομένως πρόκειται για σήμα ενέργειας. Η μέση ισχύς του σήματος είναι μηδενική, όπως προκύπτει από τη σχέση:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} 2 = 0$$

4. Μιγαδική Εκθετική Ακολουθία

📖 Παράδειγμα 5

Να υπολογιστεί για ποιες τιμές των παραμέτρων β, Ω_0 και T_s λαμβάνεται ένα σήμα διακριτού χρόνου $y[n] = a^n \cos(n\omega_0), n \geq 0$, από το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = e^{-\beta t} \cos(\Omega_0 t)\, u(t)$.

Απάντηση: Αν δειγματοληπτήσουμε το σήμα συνεχούς χρόνου με περίοδο δειγματοληψίας T_s λαμβάνουμε:

$$x(nT_s) = x(t)|_{t=nT_s} = e^{-\beta n T_s} \cos(\Omega_0 n T_s)\, u[n] = \left(e^{-\beta T_s}\right)^n \cos\big((\Omega_0 T_s) n\big)\, u[n]$$

Συγκρίνοντας το δειγματοληπτημένο σήμα $x(nT_s)$ με το $y[n]$ διαπιστώνουμε ότι είναι ίσα όταν:

$$\alpha = e^{-\beta T_s} \ (1) \text{ και } \Omega_0 T_s = \omega_0 \ (2)$$

Στις σχέσεις αυτές έχουμε δύο γνωστές παραμέτρους α και ω_0 και τρεις άγνωστες β, Ω_0 και T_s. Άρα δεν μπορεί να προκύψει μοναδική λύση. Ωστόσο σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist η περίοδος δειγματοληψίας πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_{max}}$$

Υποθέτοντας ότι η μέγιστη συχνότητα είναι $\Omega_{max} = N\Omega_0$, για $N \geq 2$ έχουμε:

$$T_s = \frac{\pi}{N\Omega_0}$$

Αντικαθιστούμε το T_s στις σχέσεις (1) και (2) και λαμβάνουμε:

$$\alpha = e^{-\beta\pi/N\Omega_0} \ (3) \text{ και } \omega_0 = \pi/N \ (4)$$

Από τη σχέση (4) έχουμε $N = \pi/\omega_0$. Αντικαθιστούμε το N στη σχέση (3), λύνουμε ως προς β και βρίσκουμε:

$$\beta = -\frac{\Omega_0}{\omega_0} \log a$$

Θεωρώντας $\Omega_0 = 2\pi, \omega_0 = \pi$ και $\alpha = 0.8$, βρίσκουμε $\beta = -2\log 0.8$ και $T_s = \omega_0/\Omega_0 = \pi/2\pi = 0.5$.

5. Ημιτονοειδής Ακολουθία

📖 Παράδειγμα 6

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικές οι ημιτονοειδείς ακολουθίες άπειρης διάρκειας ($-\infty < n < \infty$):

(α) $x_1[n] = sin(0.1\pi n)$ (β) $x_2[n] = sin(0.2\pi n)$

(γ) $x_3[n] = sin(0.6\pi n)$ (δ) $x_4[n] = sin(0.7\pi n)$

Μπορούν αυτές οι ακολουθίες να είναι δειγματοληπτημένες εκδοχές των αντίστοιχων συναρτήσεων συνεχούς χρόνου;

Απάντηση: Οι δοθείσες ακολουθίες γράφονται:

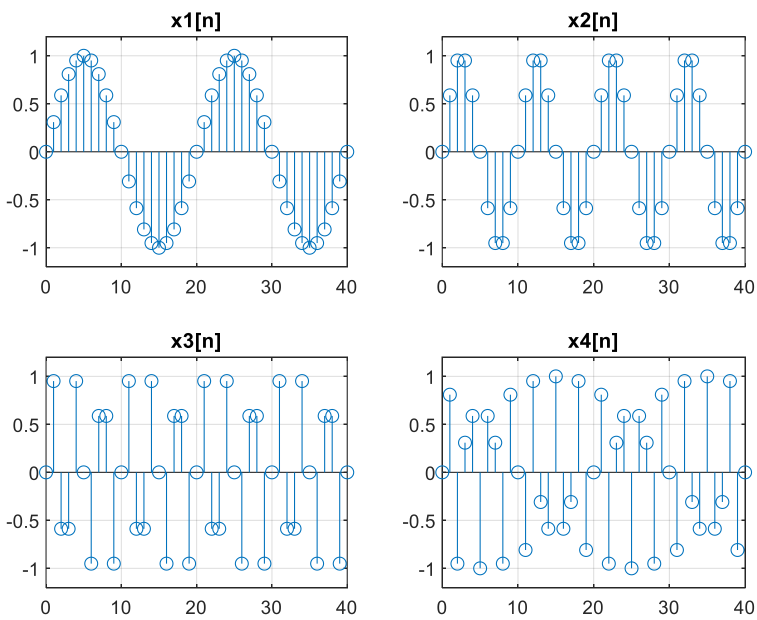
$$x_1[n] = sin(0.1\pi n) = \sin\left(\frac{2\pi}{20}n\right)$$

$$x_2[n] = sin(0.2\pi n) = \sin\left(\frac{2\pi}{20}2n\right)$$

$$x_3[n] = sin(0.6\pi n) = \sin\left(\frac{2\pi}{20}6n\right)$$

$$x_4[n] = sin(0.7\pi n) = \sin\left(\frac{2\pi}{20}7n\right)$$

Επομένως, οι ακολουθίες είναι περιοδικές και αρμονικά συνδεδεμένες μεταξύ τους.



Ημιτονοειδής ακολουθία για διαφορετικές τιμές συχνότητας f_0

Στο παραπάνω σχήμα δείχνονται οι γραφικές παραστάσεις τους. Από τη σχεδίαση των τεσσάρων ακολουθιών προκύπτει ότι οι δύο πρώτες, δηλαδή οι $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι οι δειγματοληπτημένες εκδοχές των αντίστοιχων συναρτήσεων συνεχούς χρόνου. Αυτό όμως δεν ισχύει για τις ακολουθίες $x_3[n]$ και $x_4[n]$. Θα ήταν λάθος να υποθέσουμε ότι αυτό συμβαίνει εξαιτίας παραβίασης του κανόνα Nyquist, δηλαδή λόγω λανθασμένης συχνότητας δειγματοληψίας.

Ας εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό: Για να λάβουμε τη διακριτή ακολουθία $sin(\omega_0 n)$ πρέπει από τη συνάρτηση συνεχούς χρόνου $sin(\Omega_0 t)$ να πάρουμε δείγματα με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1$ σύμφωνα με τη συνθήκη Nyquist:

$$T_s = 1 \leq \frac{\pi}{\Omega_0}$$

όπου π/Ω_0 είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της περιόδου δειγματοληψίας για την οποία δεν εμφανίζεται το φαινόμενο της αναδίπλωσης συχνοτήτων (aliasing). Για την ακολουθία $x_3[n] = sin(0.6\pi n) = sin(0.6\pi t)|_{t=nT_s=n}$ όταν $T_s = 1$, ισχύει:

$$T_s = 1 \leq \frac{\pi}{0.6\,\pi} \approx 1{,}66$$

Αντίθετα, στην περίπτωση της ακολουθίας $x_2[n]$ έχουμε:$x_2[n] = sin(0.2\pi n) = sin(0.2\pi t)|_{t=nT_s=n}$ όταν $T_s = 1$, οπότε έχουμε:

$$T_s = 1 \leq \frac{\pi}{0.2\,\pi} = 5$$

Επομένως, η δημιουργία της ακολουθίας $x_2[n]$ γίνεται λαμβάνοντας μεγαλύτερο πλήθος δειγμάτων από τη συνάρτηση $sin(0.2\pi t)$, σε σχέση με τη δημιουργία της ακολουθίας $x_3[n]$ από τη συνάρτηση $sin(0.6\pi t)$, χρησιμοποιώντας και στις δύο περιπτώσεις την ίδια περίοδο δειγματοληψίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η ακολουθία $x_2[n]$ να μοιάζει περισσότερο με αναλογικό ημίτονο από ότι η $x_3[n]$, ωστόσο και στις δύο περιπτώσεις δεν προκύπτει φαινόμενο αναδίπλωσης συχνοτήτων.

Σχόλια:

- Η αναλογική συχνότητα Ω των αναλογικών ημιτόνων μεταβάλλεται στην περιοχή $[0, \infty)$, ενώ οι διακριτές (ψηφιακές) συχνότητες ω είναι ακτινικές και μεταβάλλονται στην περιοχή $[0, \pi]$.
- Αρνητικές συχνότητες χρειάζονται στην ανάλυση πραγματικών (real-valued) σημάτων και έτσι καταλήγουμε σε περιοχές συχνοτήτων: (α) για τα σήματα συνεχούς χρόνου: $-\infty < \Omega < \infty$ και (β) για τα σήματα διακριτού χρόνου: $-\pi < \omega \leq \pi$.

📖 Παράδειγμα 7

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικές οι παρακάτω ακολουθίες άπειρης διάρκειας:

(α) $x_1[n] = e^{j(\pi n/2+\pi/4)}$ (β) $x_2[n] = e^{-j\pi n/8} + e^{-jn/2}$ (γ) $x_3[n] = e^{-j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2}$

Σε θετική περίπτωση, να υπολογιστεί η περίοδος.

Απάντηση: (α) Από τη σχέση Euler έχουμε:

$$x_1[n] = \cos(\pi n/2 + \pi/4) + j\sin(\pi n/2 + \pi/4)$$

Η συχνότητα του συνημιτόνου και του ημιτόνου είναι $\omega_1 = \pi/2 = (1/4)2\pi$, δηλαδή $m = 1$ και $N = 4$, άρα η συχνότητα εκφράζεται σαν πηλίκο θετικών ακεραίων που δεν διαιρούνται μεταξύ τους. Άρα τα δοθέντα ημίτονο και συνημίτονο και το άθροισμά τους είναι περιοδικές ακολουθίες με θεμελιώδη περίοδο $N = 4$ δείγματα.

(β) Έχουμε:

$$x_2[n] = e^{-j\pi n/8} + e^{-jn/2} = \cos(\pi n/8) - j\sin(\pi n/8) + \cos(n/2) - j\sin(n/2)$$

Η συχνότητα του πρώτους ζεύγους συνημιτόνου και ημιτόνου μπορεί να εκφραστεί σαν πηλίκο ακεραίων που δεν διαιρούνται μεταξύ τους. Όμως, αυτό δεν ισχύει για τη συχνότητα του δεύτερου συνημιτόνου και ημιτόνου, για την οποία είναι $\omega_2 = n/2 = (1/4\pi)2\pi$, δηλαδή $m = 1$ και $N = 4\pi$. Επειδή το N είναι άρρητος αριθμός προκύπτει ότι το δεύτερο ζεύγος δεν είναι περιοδικό άρα η συνολική ακολουθία δεν είναι περιοδική.

(γ) Η ακολουθία γράφεται:

$$x_3[n] = e^{-j\pi n/4} + e^{-j\pi n/4} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

Επειδή $\omega_3 = \pi/4 = (1/8)\ 2\pi$, δηλαδή $m = 1$ και $N = 8$, η ακολουθία είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $N = 16$ δείγματα.