Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 08: Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενο Διάλεξης

- Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)
  - DFT Περιοδικών Σημάτων
  - DFT Απεριοδικών Σημάτων
  - Παράγοντες Φάσης
  - Φάσματα Πλάτους και Φάσης
- Σχέση DFT με άλλους Μετασχηματισμούς
  - Με τον μετασχηματισμό DTFT
  - Με τον μετασχηματισμό Z
- Υπολογισμός DFT με Πίνακες
- Κυκλική Επέκταση Ακολουθίας – Κυκλική Συνέλιξη

Περιεχόμενο Διάλεξης

- Ιδιότητες DFT
  - Γραμμικότητα
  - Κυκλική Αναδίπλωση στο Χρόνο
  - Κυκλική Μετατόπιση στο Χρόνο
  - Συζυγία
  - Συμμετρία του DFT για Πραγματικές Ακολουθίες
  - Συμμετρία του DFT για Μιγαδικές Ακολουθίες
  - Κυκλική Μετατόπιση στη Συχνότητα
  - Κυκλική Συνέλιξη
  - Πολλαπλασιασμός Ακολουθιών
  - Θεώρημα Parseval

Περιεχόμενο Διάλεξης

- Σχέση Κυκλικής Συνέλιξη με Γραμμική
  - Υπολογισμός Κυκλικής Συνέλιξης με τον DFT
- Υπολογισμός Συνέλιξης κατά Τμήματα
  - Μέθοδος Επικάλυψης – Κράτησης
  - Μέθοδος Επικάλυψης – Πρόσθεσης
- Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier
  - Υπολογιστικό Κόστος DFT
  - Στρατηγική Κατασκευής Αποδοτικών Αλγορίθμων Υπολογισμού DFT
  - Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στο Χρόνο
  - Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στη Συχνότητα

Διακριτή Σειρά Fourier (DFS)

Διακριτή Σειρά Fourier (DFS)

Μια περιοδική ακολουθία $x[n]$ με περίοδο N και θεμελιώδη κυκλική συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/N$, αναλύεται σε άθροισμα N αρμονικά συσχετιζόμενων μιγαδικών εκθετικών όρων:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{\,j2\pi nk/N}, \qquad 0 \le n \le N-1$$

όπου οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier $X[k]$ υπολογίζονται από:

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi nk/N}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

Οι συντελεστές $X[k]$ αντιστοιχούν στις αρμονικές συχνότητες $k\omega_0 n$, όπου $0 \le k \le N-1$. Στις ενδιάμεσες τιμές συχνότητας το σήμα $\tilde{x}[n]$ δεν έχει φασματικό περιεχόμενο.

Η εκθετική σειρά Fourier και στη διακριτή μορφή της είναι **εγγενώς περιοδική** με περίοδο N, εξαιτίας του όρου $e^{-j2\pi/N}$.

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

- DFT Περιοδικών Σημάτων
- DFT Απεριοδικών Σημάτων
- Παράγοντες Φάσης
- Φάσματα Πλάτους και Φάσης

DFT Περιοδικών Σημάτων

Ευθύς DFT (σχέση ανάλυσης):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi nk/N} \ , \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

Οι συντελεστές $X[k]$ αντιστοιχούν στις αρμονικές συχνότητες $2\pi nk/N$, όπου $0 \leq k \leq N-1$. Στις ενδιάμεσες τιμές συχνότητας το φασματικό περιεχόμενο του σήματος $x[n]$ είναι μηδενικό.

Αντίστροφος DFT (σχέση σύνθεσης):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{-j2\pi nk/N} \, , \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Αν υπολογίσουμε την τιμή του $x[n]$ για $n \geq N$ τότε θα λάβουμε μία περιοδική επέκταση $\tilde{x}[n]$ του $x[n]$ και όχι μηδενικές τιμές, όπως ίσως ανέμενε κανείς.

DFT Απεριοδικών Σημάτων

Αν $x[n]$ είναι ένα απεριοδικό σήμα, μπορούμε να υπολογίσουμε τον DFT του με δειγματοληψία L σημείων στον DTFT $X\left(e^{j\omega}\right)$, δηλ. στις συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/L$, $0 \leq k \leq L-1$.

Όμως η δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου δημιουργεί περιοδικότητα στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα. Επομένως, η κατά L σημεία δειγματοληψία του DTFT $X\left(e^{j\omega}\right)$ θα δημιουργήσει **περιοδικότητα** στο χρόνο, δηλαδή κατά τον υπολογισμό του αντίστροφου DFT θα παραχθεί το περιοδικό σήμα:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n+kL]$$

Αν το απεριοδικό σήμα $x[n]$ είναι πεπερασμένου μήκους N και μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $[0, N-1]$, τότε η περιοδική επέκταση $\tilde{x}[n]$ του σήματος $x[n]$ είναι:

$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N] = x\big[[n]\big]_N$$

Η πράξη $x[n \bmod N]$ μετατοπίζει τις τιμές της ακολουθίας στο διάστημα από 0 έως $N-1$.

DFT Απεριοδικών Σημάτων

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων L και N:

- Αν $L = N$ τότε η πρώτη περίοδος της περιοδικής επέκτασης $\tilde{x}[n]$ ταυτίζεται ακριβώς με το σήμα $x[n]$.
- Αν $L \geq N$ τότε η πρώτη περίοδος της περιοδικής επέκτασης $\tilde{x}[n]$ ταυτίζεται με το σήμα $x[n]$ με την προσθήκη $L - N$ μηδενικών στο τέλος του.
- Αν $L < N$ τότε η πρώτη περίοδος της περιοδικής επέκτασης $\tilde{x}[n]$ δεν ταυτίζεται με το σήμα $x[n]$, καθώς χρονικά μετατοπισμένες εκδοχές του σήματος προστίθενται και δημιουργούν το φαινόμενο της αναδίπλωσης στο χρόνο (time-aliasing), όπως φαίνεται στο σχήμα της επόμενης διαφάνειας.

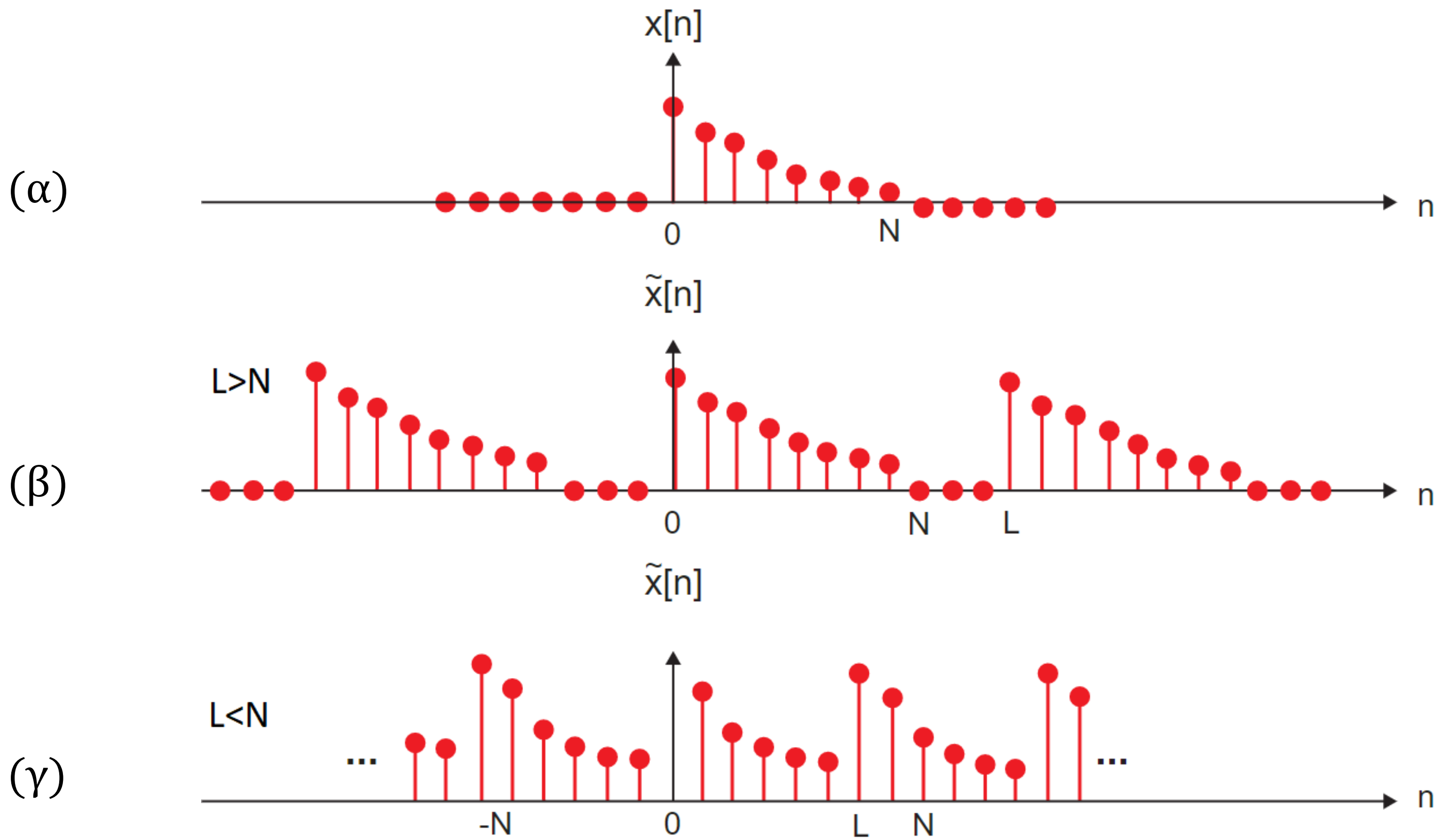
Οι δύο πρώτες περιπτώσεις είναι αποδεκτές, ενώ η τρίτη δεν είναι.

Για την αποφυγή αναδίπλωσης στο χρόνο πρέπει το μήκος L του DFT να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τη διάρκεια N του απεριοδικού σήματος ($L \geq N$).

Στην περίπτωση αυτή ο DFT της περιοδικής επέκτασης $\tilde{x}[n]$ είναι:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j2\pi nk/L}, \qquad 0 \leq k \leq L-1$$

DFT Απεριοδικών Σημάτων



(α) Απεριοδικό σήμα $x[n]$, (β) Περιοδική επέκτασή του $\tilde{x}[n]$ για $L \geq N$, (γ) Για περιοδική επέκταση για $L < N$ εμφανίζεται αναδίπλωση στο πεδίο του χρόνου.

DFT Απεριοδικών Σημάτων

Ο DFT του απεριοδικού σήματος $x[n]$ είναι:

$$X[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=2\pi k/L} = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]\, e^{-\,j2\pi nk/L}, \qquad 0 \le k \le L-1$$

Ο αντίστροφος DFT είναι η εκθετική σειρά Fourier του $\tilde{x}[n]$, δηλαδή:

$$x[n] = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} X[k]\, e^{\,j2\pi nk/L}, \qquad 0 \le n \le L-1$$

όπου $X[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=2\pi k/L}$, δηλαδή τα L δείγματα του DTFT.

Στην πράξη δεν χρειάζεται να δημιουργήσουμε περιοδική επέκταση του απεριοδικού σήματος, αλλά αρκεί να προσθέσουμε ένα πλήθος **μηδενικών** (zero padding) στο τέλος του ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη $L \ge N$.

Ορισμός DFT

Και στις δύο περιπτώσεις σημάτων (περιοδικά, απεριοδικά) ο όρος $e^{-j2\pi/N}$ καθιστά περιοδική την ακολουθία $X[k]$ των συντελεστών DFT, με περίοδο ίση με το πλήθος N των δειγμάτων της ακολουθίας $x[n]$.

Τα δείγματα της $X[k]$ ξεκινούν από $k = 0$, που αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = 0$ και φθάνουν έως $k = N - 1$. Δεν περιλαμβάνουν το $k = N$, το οποίο αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = 2\pi$ και περιλαμβάνεται στην επόμενη περίοδο.

Θέτοντας τον όρο $W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$, λαμβάνουμε τους ορισμούς:

- **Ευθύς DFT**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, {W_N}^{nk}\,, \qquad 0 \le k \le N - 1$$

- **Αντίστροφος DFT**

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, {W_N}^{-nk}\,, \qquad 0 \le n \le N - 1$$

Οι μιγαδικοί όροι $W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$ ονομάζονται **παράγοντες φάσης** (phase factors) ή **παράγοντες αναδιάταξης** (twiddle factors).

Παράγοντες Φάσης

- Οι παράγοντες φάσης W_N^k δίνονται από τη σχέση:

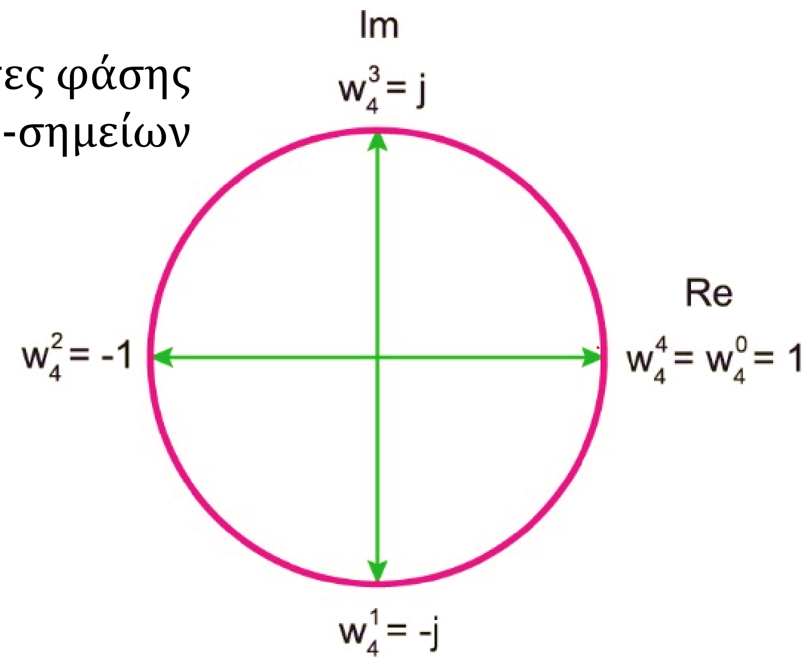
$$W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

- Αποτελούν την N-οστή μιγαδική ρίζα της μονάδας, καθώς έχουν μοναδιαίο μέτρο και απλά διαφορετική φάση.
- Αποδίδονται ως ανύσματα στον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο.
- Παράγοντες φάσης για N=4:

$$\begin{array}{ccc}
W_4^0 = 1 & W_4^4 = W_4^0 = 1 & W_4^8 = W_4^0 = 1 \\
W_4^1 = -j & W_4^5 = W_4^1 = -j & W_4^9 = W_4^1 = -j \\
W_4^2 = -1 & W_4^6 = W_4^2 = -1 & W_4^{10} = W_4^2 = -1 \\
W_4^3 = j & W_4^7 = W_4^3 = j & W_4^{11} = W_4^3 = j
\end{array}$$

Ιδιότητες των Παραγόντων Φάσης

Παράγοντες φάσης
DFT 4-σημείων



Ιδιότητες Παραγόντων Φάσης

- $W_N^{k+N} = W_N^k$ (περιοδικότητα)
- $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ (συμμετρία)
- $W_N^2 = W_{N/2}$
- Αν το N είναι δύναμη του 2, τα ανύσματα εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Η εφαρμογή των ιδιοτήτων στον υπολογισμό του DFT οδηγεί σε σημαντική μείωση του πλήθους των πράξεων για τον υπολογισμό των παραγόντων φάσης και έτσι μειώνεται θεαματικά το κόστος υπολογισμού του DFT.

Φάσματα Πλάτους, Φάσης και Ισχύος

- **Φάσμα Πλάτους**:

$$|X[k]| = \sqrt{X_R^2[k] + X_I^2[k]}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

Άρτια συμμετρία επειδή: $|X[N-k]| = |X[k]|$

- **Φάσμα Φάσης**:

$$\varphi_X[k] = tan^{-1}\left[\frac{X_I[k]}{X_R[k]}\right], \qquad 0 \le k \le N-1$$

Περιττή συμμετρία επειδή: $\measuredangle X[N-k] = -\measuredangle X[k]$

- **Φάσμα Ισχύος**

$$P[k] = \frac{1}{N^2}|X[k]|^2 = \frac{1}{N^2}\left\{X_R^2[k] + X_I^2[k]\right\}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων των παρακάτω ακολουθιών:

(α) $x[n] = \delta[n]$ (β) $x[n] = \delta[n - n_0]$

Απάντηση: (α) Ο DFT της $\delta[n]$ θα υπολογιστεί από τον ορισμό:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{nk} = \delta[0] W_N^0 = 1, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

Είναι δηλαδή $X[k] = [1,1,1,\dots 1]$ (πλήθος N).

(β) Ομοίως:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n - n_0] W_N^{nk} = \delta[0] W_N^{n_0} = W_N^{n_0}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

Είναι δηλαδή $X[k] = \left[1, W_N^{n_0}, W_N^{2n_0}, \dots, W_N^{(N-1)n_0}\right]$

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι η χρονική μετατόπιση της $\delta[n]$ κατά n_0 παράγει DFT το <u>ίδιο πλάτος</u> αλλά με <u>ολίσθηση φάσης</u>.

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων του $x[n] = u[n] - u[n - n_0]$, $(0 \leq n_0 \leq N - 1)$.

Απάντηση: Ο DFT του δοθέντος παλμού υπολογίζεται από τον ορισμό, ως εξής:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{n_0-1} W_N^{nk} = \frac{1 - W_N^{kn_0}}{1 - W_N^{k}}, \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο $W_N^{kn_0/2}$ στον αριθμητή και τον όρο $W_N^{k/2}$ στον παρονομαστή, ο DFT γράφεται:

$$X[k] = \frac{W_N^{kn_0/2}\left(W_N^{-kn_0/2} - W_N^{kn_0/2}\right)}{W_N^{k/2}\left(W_N^{-k/2} - W_N^{k/2}\right)} = W_N^{k(n_0-1)/2}\frac{\left(W_N^{-kn_0/2} - W_N^{kn_0/2}\right)}{\left(W_N^{-k/2} - W_N^{k/2}\right)}$$

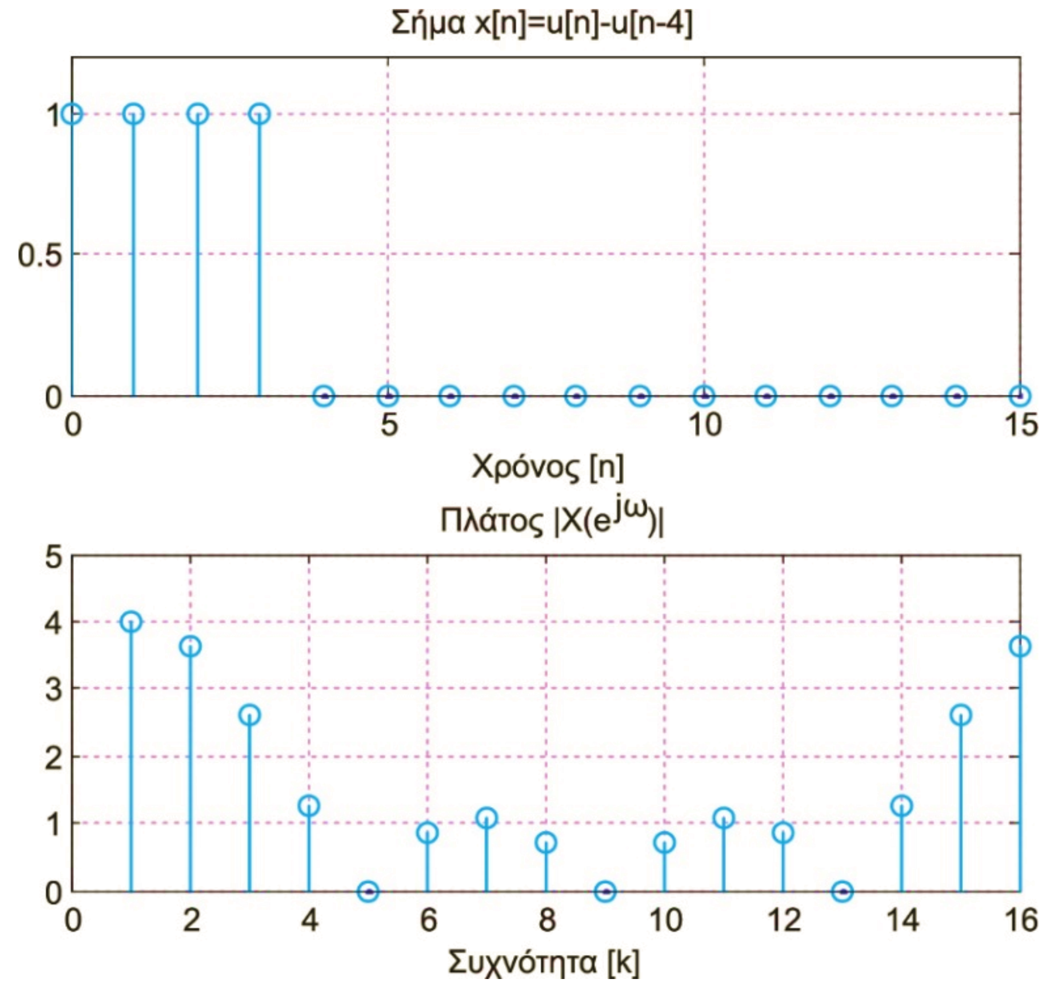
Χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler, έχουμε:

$$X[k] = e^{-j\frac{2\pi k}{N}\left(\frac{n_0-1}{2}\right)}\frac{sin(n_0\pi k/N)}{sin(\pi k/N)}, \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(α) Παλμός
$x[n] = u[n] - u[n-4]$,

(β) Φάσμα πλάτους
DFT 16-σημείων



Σχέση DFT με άλλους μετασχηματισμούς

- Με τον μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)
- Με τον μετασχηματισμό Ζ

Σχέση DFT με τον DTFT

- DTFT απεριοδικής ακολουθίας $x[n]$ πεπερασμένου μήκους N σημείων:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jn\omega}\,, \qquad 0 \le \omega \le 2\pi$$

- Μετατρέπουμε τη συνεχή συχνότητα ω σε διακριτή συχνότητα ω_k:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

- Λαμβάνουμε δείγματα της συνεχούς συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ και προκύπτει:

$$X[k] \equiv X\left(\frac{2\pi}{N} k\right) = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\frac{j2\pi}{N}nk}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

- Επομένως, ο DFT $X[k]$ προκύπτει από **δειγματοληψία του DTFT $\boldsymbol{X\left(e^{j\omega}\right)}$**.

- Δείκτες: n – χρόνος, k – συχνότητα

Σχέση DFT με τον DTFT

- Η ποσότητα $\Delta\omega = 2\pi/N$ είναι η απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικά δείγματα του DTFT και ονομάζεται **πυκνότητα** του DFT στο πεδίο της συχνότητας.
- Η πυκνότητα βελτιώνεται όσο αυξάνεται το πλήθος N των συντελεστών του DFT.
- <u>Προσοχή</u>: Δεν πρέπει να συγχέουμε την πυκνότητα του φάσματος με την **ευκρίνεια** του φάσματος (βλ. επόμενη άσκηση).

Σημαντικές παρατηρήσεις για τον DTFT

- Αν $x[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο N, τότε οι τιμές του DFT είναι οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier, οι οποίοι υπάρχουν μόνο στις αρμονικές συχνότητες $2k\pi/N$.
- Αν $x[n]$ είναι απεριοδικό, τότε το πλήθος των πιθανών συχνοτήτων εξαρτάται από το μήκος L που επιλέχθηκε για τον υπολογισμό του DFT. Αν $L \geq N$ οι συχνότητες που υπολογίζουμε τον DFT μπορούν να θεωρηθούν ως συχνότητες επάνω στον μοναδιαίο κύκλο.
- Και στις δύο περιπτώσεις σήματος (περιοδικό, απεριοδικό) είναι επιθυμητό να έχουμε ένα σημαντικό πλήθος σημείων επάνω στον μοναδιαίο κύκλο ώστε να περιγράφουμε επαρκώς το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος.
- Το πλήθος των συχνοτήτων σχετίζεται με την ευκρίνεια συχνοτήτων του DFT.

Σημαντικές παρατηρήσεις για τον DTFT

- Αν το σήμα είναι απεριοδικό, μπορούμε να αυξήσουμε την ευκρίνεια συχνοτήτων του DFT αυξάνοντας το πλήθος των δειγμάτων του σήματος, προσθέτοντας μηδενικά στο τέλος του σήματος. Η προσθήκη μηδενικών δεν επηρεάζει το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος, αλλά αυξάνει το πλήθος των φασματικών συντελεστών που παράγει ο DFT.
- Αν το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο N, τότε οι αρμονικές συχνότητες είναι τοποθετημένες στις θέσεις $2k\pi/N$. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να προσθέσουμε μηδενικά σημεία επειδή αυτά δεν αποτελούν τμήμα του περιοδικού σήματος, αλλά μπορούμε να λάβουμε περισσότερες περιόδους του σήματος στον υπολογισμό του DFT.
- Οι τιμές του DFT αντιστοιχούν στις αρμονικές συχνότητες ανεξάρτητα από το πλήθος των περιόδων που θα χρησιμοποιήσουμε. Όσο περισσότερες περιόδους περιλάβουμε τόσο πιο υψηλή θα είναι η ευκρίνεια συχνοτήτων.

Άσκηση 3

(α) Να υπολογιστεί ο DFT 4-σημείων του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$

Απάντηση: Ισχύει: $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$. Ο DFT 4-σημείων είναι:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, W_4^{nk} = W_4^0 + W_4^{1k} + W_4^{2k} + W_4^{3k}, \qquad 0 \leq k \leq 3$$

Υπολογίζουμε τα σημεία $X[k]$ για $0 \leq k \leq 3$. Είναι:

$$\begin{aligned} X[0] &= W_4^0 + W_4^0 + W_4^0 + W_4^0 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\ X[1] &= W_4^0 + W_4^1 + W_4^2 + W_4^3 = 1 - j - 1 + j = 0 \\ X[2] &= W_4^0 + W_4^2 + W_4^4 + W_4^6 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ X[3] &= W_4^0 + W_4^3 + W_4^6 + W_4^9 = 1 + j - 1 - j = 0 \end{aligned}$$

Επομένως ο DFT 4-σημείων είναι:

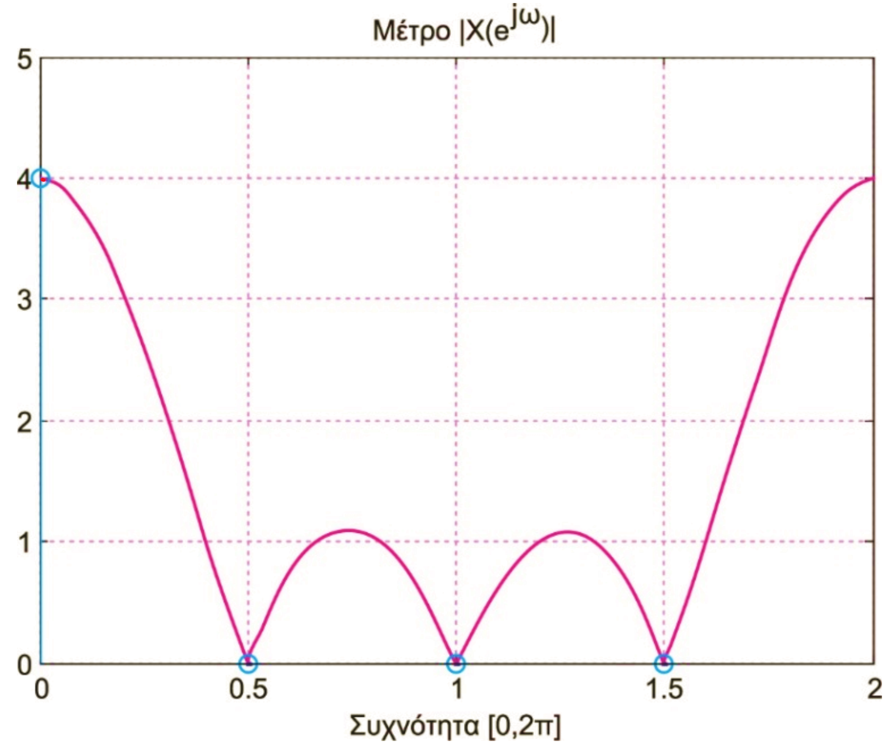
$$X[k] = \begin{cases} 4, & n = 0 \\ 0, & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Ο DTFT είναι:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = e^{-\frac{j3\omega}{2}} \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Φάσμα πλάτους DTFT (κόκκινο χρώμα) και DFT 4-σημείων (γαλάζιο χρώμα) του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ στην περιοχή συχνοτήτων $[0,2\pi)$



Τα σημεία του DFT προκύπτουν με δειγματοληψία στον DTFT, σύμφωνα με τη σχέση:

$$X[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\pi k/2}, \qquad k = 0,1,2,3$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

(β) Να επαναληφθεί η επίλυση για DFT 8-σημείων ($N = 8$), αφού εφαρμοστεί η διαδικασία προσθήκης μηδενικών (zero padding) στην ακολουθία $x[n]$.

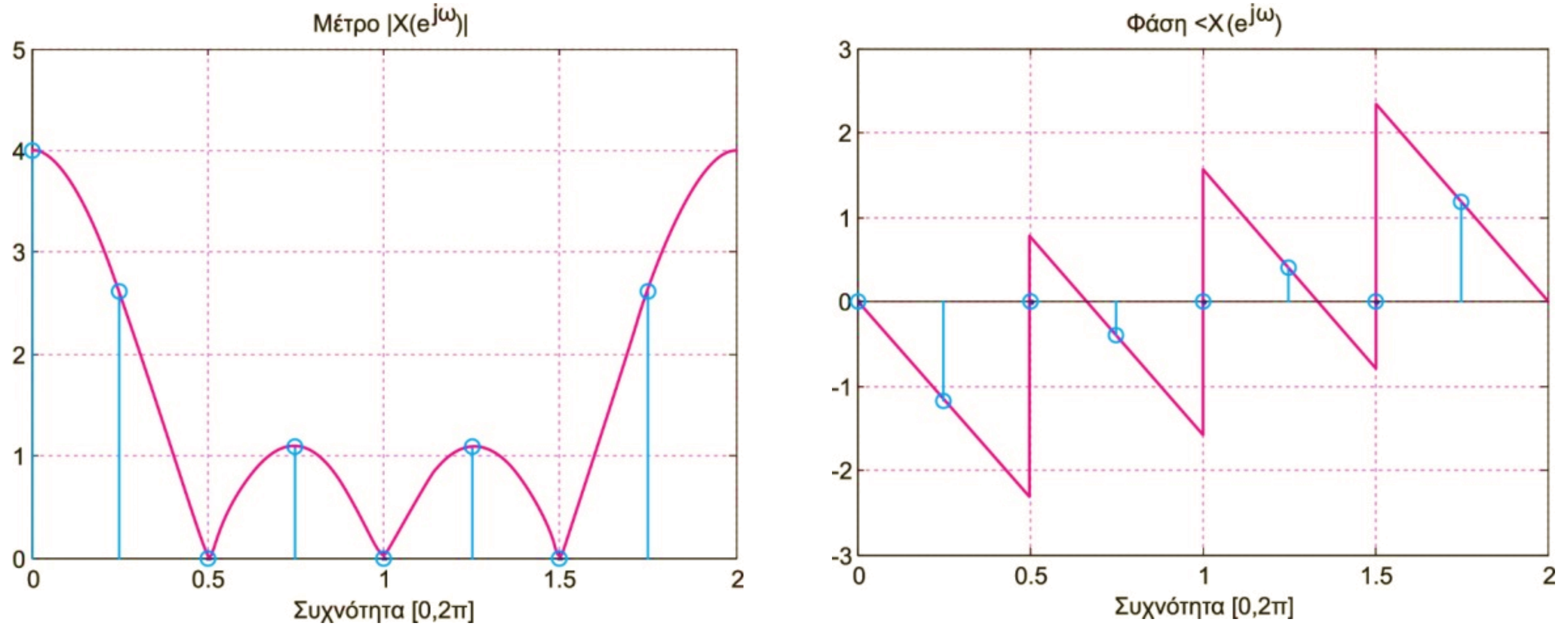
Απάντηση: Ο DFT 8-σημείων του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ είναι:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} x[n]\, W_8^{nk}, \qquad 0 \leq k \leq 7$$

Υπολογίζουμε τα σημεία $X[k]$ για $0 \leq k \leq 7$. Είναι:

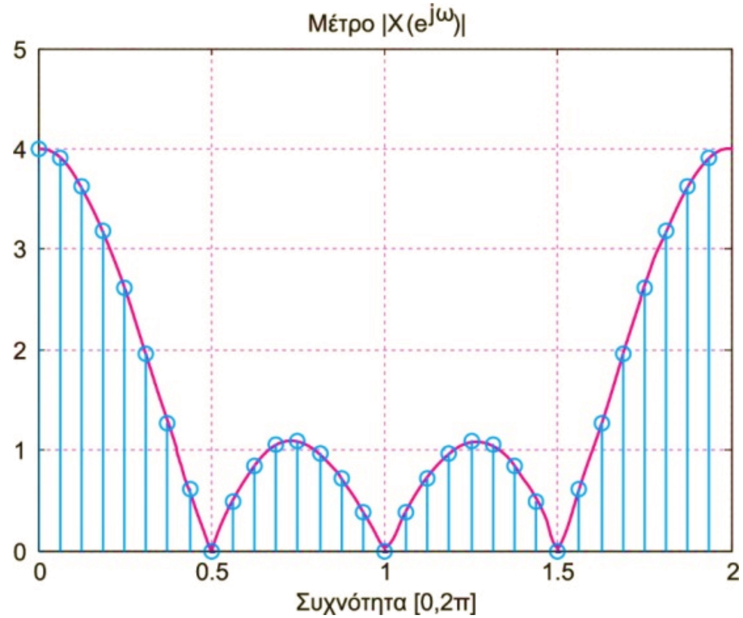
- $X[0] = 1W_8^0 + 1W_8^0 + 1W_8^0 + 1W_8^0 + 0W_8^0 + 0W_8^0 + 0W_8^0 + 0W_8^0 = 4$
- $X[1] = 1W_8^0 + 1W_8^1 + 1W_8^2 + 1W_8^3 + 0W_8^4 + 0W_8^5 + 0W_8^6 + 0W_8^7 = 1 - 2.41j$
- $X[2] = 1W_8^0 + 1W_8^2 + 1W_8^4 + 1W_8^6 + 0W_8^8 + 0W_8^{10} + 0W_8^{12} + 0W_8^{14} = 0$
- $X[3] = 1W_8^0 + 1W_8^3 + 1W_8^6 + 1W_8^9 + 0W_8^{12} + 0W_8^{15} + 0W_8^{18} + 0W_8^{21} = 1 - 0.41j$
- $X[4] = 1W_8^0 + 1W_8^4 + 1W_8^8 + 1W_8^{12} + 0W_8^{16} + 0W_8^{20} + 0W_8^{24} + 0W_8^{28} = 0$
- $X[5] = 1W_8^0 + 1W_8^5 + 1W_8^{10} + 1W_8^{15} + 0W_8^{20} + 0W_8^{25} + 0W_8^{30} + 0W_8^{35} = 1 + 0.41j$
- $X[6] = 1W_8^0 + 1W_8^6 + 1W_8^{12} + 1W_8^{18} + 0W_8^{24} + 0W_8^{30} + 0W_8^{36} + 0W_8^{42} = 0$
- $X[7] = 1W_8^0 + 1W_8^7 + 1W_8^{14} + 1W_8^{21} + 0W_8^{28} + 0W_8^{35} + 0W_8^{42} + 0W_8^{49} = 1 + 2.41j$

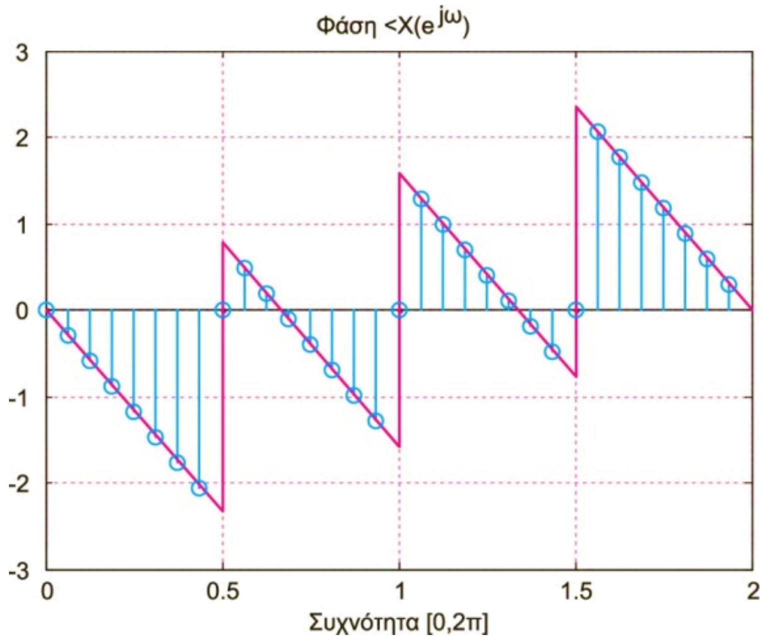
Άσκηση 3 (συνέχεια)



Φάσματα πλάτους και φάσης DTFT (κόκκινο χρώμα) και DFT 8-σημείων (μπλε χρώμα) του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ στην περιοχή συχνοτήτων $[0,2\pi)$. Η φάση είναι μηδενική.

Άσκηση 3 (συνέχεια)





Φάσματα πλάτους και φάσης DTFT (κόκκινο χρώμα) και DFT 32-σημείων (μπλε χρώμα) του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ στην περιοχή συχνοτήτων $[0,2\pi)$

Άσκηση 3 (συμπεράσματα)

- Το **πλάτος** και η **φάση** του DFT έχουν **άρτια** και **περιττή συμμετρία**, αντίστοιχα. Επομένως, κρατάμε μόνο το τμήμα $[0, \pi)$, δηλαδή $X[k], \ k = 0,1, \dots, (N/2) - 1$.
- Για δοθείσα ακολουθία, η **πυκνότητα** των δειγμάτων του DFT αυξάνει ανάλογα με **το πλήθος** των δειγμάτων της $x[n]$. Αυτό γίνεται με τη διαδικασία **προσθήκης μηδενικών** (zero padding):
  - Δημιουργούμε μία περιοδική επέκταση $\tilde{x}[n]$ μήκους $L \geq N$ της $x[n]$, προσθέτοντας $L - N$ μηδενικά στο τέλος της.
  - Υπολογίζουμε τον DFT $\tilde{X}[k]$ μήκους L σημείων της ακολουθίας $\tilde{x}[n]$.
  - Ο DFT $X[k]$ της $x[n]$ είναι: $X[k] = \tilde{X}[k], \ \ $ για $0 \leq k \leq L - 1$.
- Η προσθήκη των μηδενικών δεν βελτιώνει την ευκρίνεια του DFT απλά μειώνει την απόσταση μεταξύ των διαδοχικών δειγμάτων της $X[k]$.
- Η **ευκρίνεια** του DTF αυξάνει ανάλογα με το πλήθος των δειγμάτων του σήματος.
- Αν η ακολουθία είναι **περιοδική**, τότε η ευκρίνεια του DFT αυξάνει εφόσον περιληφθούν στον υπολογισμό του DFT περισσότερες από μία περιόδους της ακολουθίας.

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί στο Matlab ο DFT του σήματος :

$$x[n] = cos\left(\frac{4\pi n}{9}\right) + \ cos\left(\frac{5\pi n}{9}\right)$$

για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) DFT 10-σημείων για $0 \leq n \leq 9$.

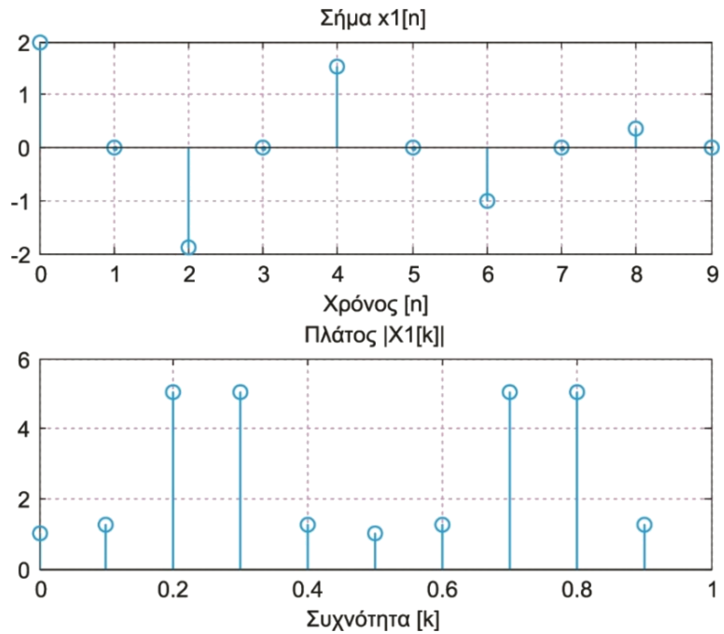
(β) DFT 100-σημείων για $0 \leq n \leq 9$ και τα υπόλοιπα 90 σημεία μηδενικά.

(γ) DFT 100-σημείων για $0 \leq n \leq 99$.

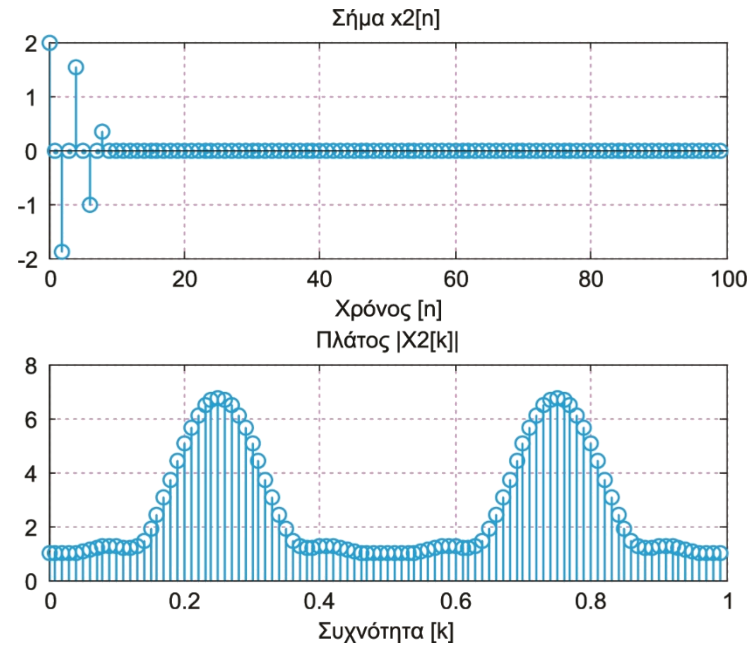
Απάντηση: Δίνοντας τον κώδικα Matlab του παραδείγματος 10.5 του βιβλίου , προκύπτουν τα επόμενα διαγράμματα.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

(α)



(β)



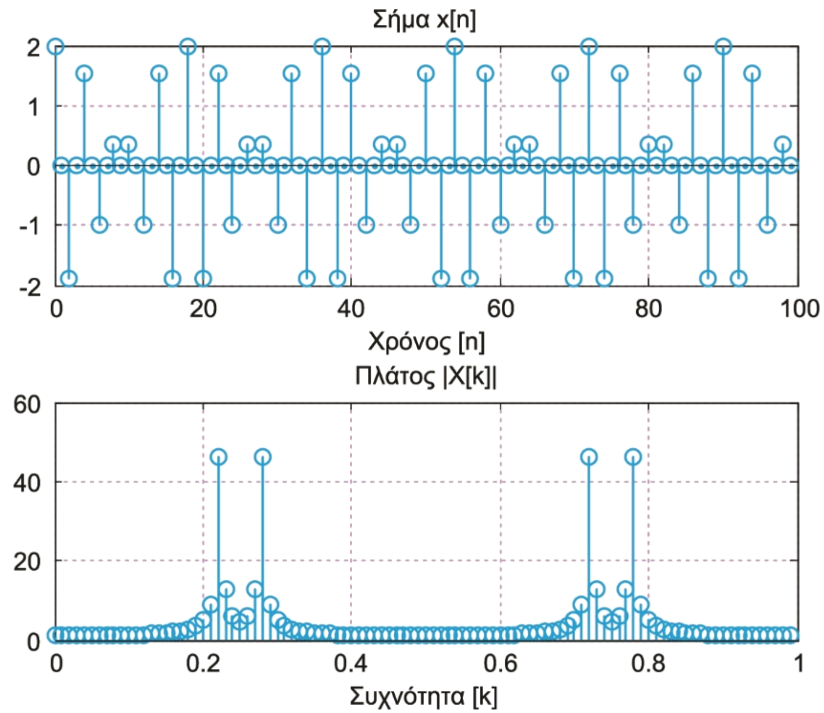
(α) Σήμα μήκους 10 σημείων και φάσμα πλάτους DFT 10 σημείων.

(β) Σήμα μήκους 10 σημείων και 90 μηδενικών και φάσμα πλάτους DFT 100 σημείων.

Η προσθήκη μηδενικών και ο υπολογισμός DFT μεγαλύτερου μήκους, **αύξησε την πυκνότητα** του φάσματος, δεν κατάφερε όμως να εντοπίσει τις δύο διαφορετικές συχνότητες που περιέχει το σήμα $x[n]$, καθώς και οι δύο αποδίδονται ως μία κορυφή.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

(γ) Σήμα μήκους 100 σημείων και φάσμα πλάτους DFT 100 σημείων



(γ)

Από τα διαγράμματα (β) και (γ), προκύπτει ότι η προσθήκη περισσότερων περιόδων του σήματος (αντί μηδενικών) και ο υπολογισμός DFT μεγαλύτερου μήκους, **αύξησε την ευκρίνεια** του φάσματος και εντοπίστηκαν με ακρίβεια οι δύο διαφορετικές συχνότητες που περιέχει το σήμα $x[n]$.

Σχέση DFT με τον Z

- Οι συντελεστές DFT αντιστοιχούν σε N δείγματα της $X(z)$, τα οποία έχουν ληφθεί σε N ισαπέχοντα σημεία επάνω στον μοναδιαίο κύκλο:

$$X[k] = X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi k/N}}$$

- Το παραπάνω ισχύει με την προϋπόθεση ότι ο μοναδιαίος κύκλος περιέχεται στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z.

Υπολογισμός DFT με Πίνακες

Υπολογισμός DFT με Πίνακες

Ο **<u>ευθύς DFT</u>** υπολογίζεται από:

$$\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{W_N}\, \boldsymbol{x}^T$$

- $\boldsymbol{x}^T = \{ x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ ανάστροφος πίνακας ακολουθίας εισόδου.
- $\boldsymbol{X}^T = \{ X[0], X[1], \dots, X[N-1]\}$ ανάστροφος πίνακας της ακολουθίας συντελεστών του DFT.
- $\boldsymbol{W_N}$ συμμετρικός πίνακας διαστάσεων NxN που δημιουργείται από τους παράγοντες φάσης:

$$\boldsymbol{W_N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός DFT με Πίνακες

Κάθε στήλη $\boldsymbol{W_i}$ του πίνακα $\boldsymbol{W_N}$ ονομάζεται **διάνυσμα βάσης** του DFT:

$$\boldsymbol{W_i} = \begin{bmatrix} 1 \\ W_N^{i} \\ W_N^{2i} \\ \vdots \\ W_N^{(N-1)i} \end{bmatrix}$$

Αν υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $\boldsymbol{W_N^{-1}}$, τότε ο **<u>αντίστροφος DFT</u>** δίνεται από:

$$\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{W_N^{-1}}\, \boldsymbol{X}^T$$

Επειδή ισχύει $\boldsymbol{W_N^{-1}} = (1/N)\boldsymbol{W_N^{*}}$, όπου $\boldsymbol{W_N^{*}}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός πίνακας του $\boldsymbol{W_N}$**,** προκύπτει ότι ο αντίστροφος DFT είναι:

$$\boldsymbol{x}^T = \frac{1}{N}\boldsymbol{W_N^{*}}\, \boldsymbol{X}^T$$

Σε επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε έναν πιο αποδοτικό τρόπο υπολογισμού του DFT, ο οποίος αξιοποιεί τις ιδιότητες συμμετρίας του DFT και του παράγοντα φάσης και μειώνει δραστικά το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων.

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο DFT 4-σημείων της ακολουθίας $x[n] = [1, 3, 5, 7]$

Απάντηση: Ο πίνακας $\boldsymbol{W_4}$ είναι:

$$\boldsymbol{W_4} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Οι τιμές του DFT υπολογίζονται από:

$$\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{W_N}\, \boldsymbol{x}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -4+4j \\ -4 \\ -4-4j \end{bmatrix}$$

Επομένως ο DFT είναι: $X[k] = \{16,\ -4+4j,\ -4,\ -4-4j\}$

Κυκλική Συνέλιξη

- Περιοδική επέκταση ακολουθίας
- Περιοδική συνέλιξη
- Κυκλική μετατόπιση ακολουθίας
- Υπολογισμός της κυκλικής συνέλιξης

Η Έννοια της Κυκλικής Συνέλιξης

Όταν οι ακολουθίες είναι περιοδικές, η διαδικασία υπολογισμού της συνέλιξης είναι διαφορετική.

Για να την εξηγήσουμε θα χρειαστεί να ορίσουμε :

– την **περιοδική επέκταση** μίας ακολουθίας

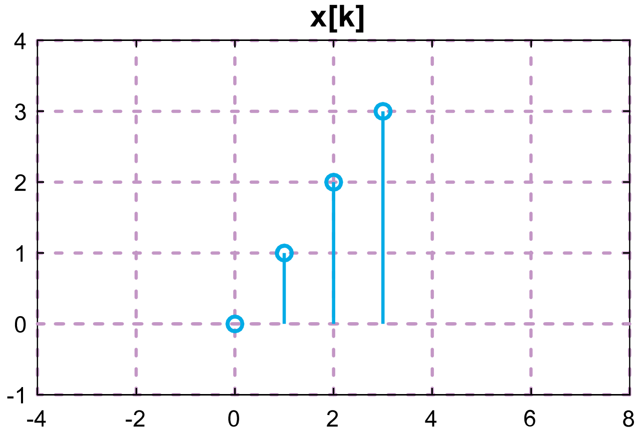
– την **κυκλική μετατόπιση** της περιοδικής επέκτασης

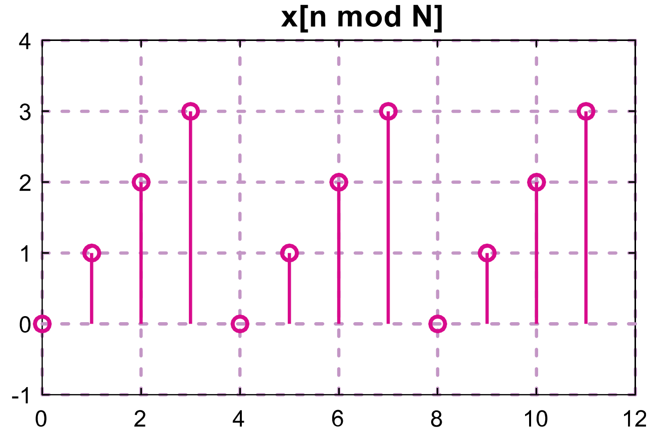
Επίσης, θα μελετήσουμε τους όρους της **περιοδικής συνέλιξης** και της **κυκλικής συνέλιξης**.

Περιοδική Επέκταση Ακολουθίας

Για κάθε ακολουθία $x[n]$ πεπερασμένου μήκους $0 \leq n \leq N-1$, μπορεί να οριστεί μία περιοδική ακολουθία $\tilde{x}[n]$ με θεμελιώδη περίοδο N, που ονομάζεται **περιοδική επέκταση** της ακολουθίας ανά N δείγματα, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N] = x\big[[n]\big]_N$$

(α)


(β)


(α) Ακολουθία πεπερασμένου μήκους $x[n]$
(β) Η περιοδική επέκτασή της $\tilde{x}[n] = x[n\ mod\ 4] = x\big[[n]\big]_4$

Περιοδική Συνέλιξη

Ορίζουμε την **περιοδική συνέλιξη** $\tilde{y}[n]$, δύο περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου $x_1[n]$ και $x_2[n]$ που έχουν την ίδια θεμελιώδη περίοδο N, από τη σχέση:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1[k]\, \tilde{x}_2[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-k]\, \tilde{x}_1[k]$$

όπου $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$ είναι οι περιοδικές επεκτάσεις των ακολουθιών $x_1[n]$ και $x_2[n]$, αντίστοιχα. Η περιοδική συνέλιξη συμβολίζεται ως ακολούθως:

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n]$$

- Παρατηρούμε ότι η μοναδική διαφορά μεταξύ των δύο ειδών συνέλιξης είναι ότι στην περιοδική συνέλιξη το άθροισμα υπολογίζεται σε μια **απλή περίοδο**, ενώ στη γραμμική συνέλιξη υπολογίζεται για **όλες τις τιμές του *k***.

- Για τον υπολογισμό της περιοδικής συνέλιξης μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ίδιοι τρόποι που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης.

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί η περιοδική συνέλιξη μεταξύ των ακολουθιών $x[n] = \{\hat{0}, 1, 2, 3\}$ και $h[n] = \{1, \hat{2}, 0, -1\}$.

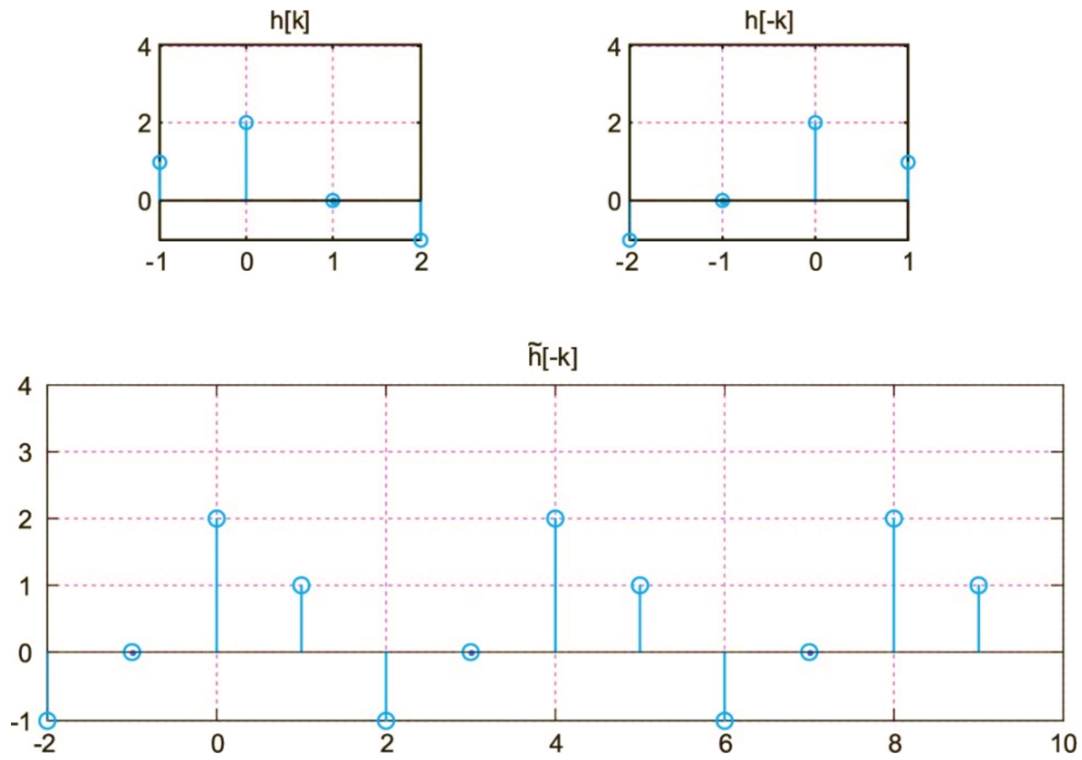
Απάντηση: Χρησιμοποιούμε τον γραφικό τρόπο υπολογισμού του αθροίσματος:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k]\, \tilde{h}[n-k]$$

Η γραφική παράσταση της $x[n]$ και της περιοδικής επέκτασής της $\tilde{x}[n]$ για $N = 4$ είναι:

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Η γραφική παράσταση της $h[n]$, της ανάκλασης $h[-k]$ και της περιοδικής επέκτασής της $\tilde{h}[-k]$ για $N = 4$, δείχνεται στο σχήμα:

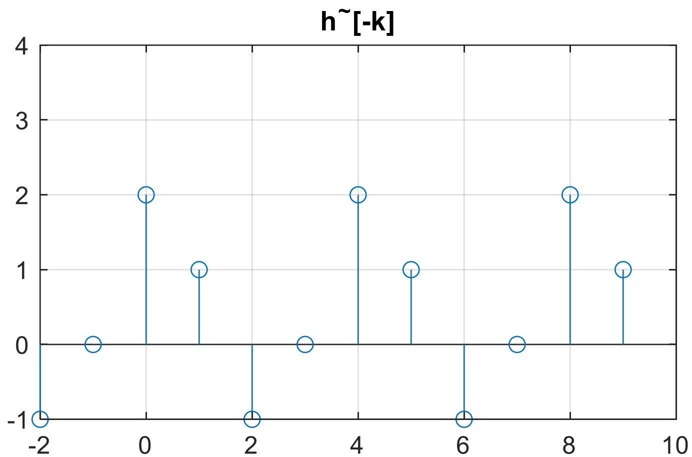


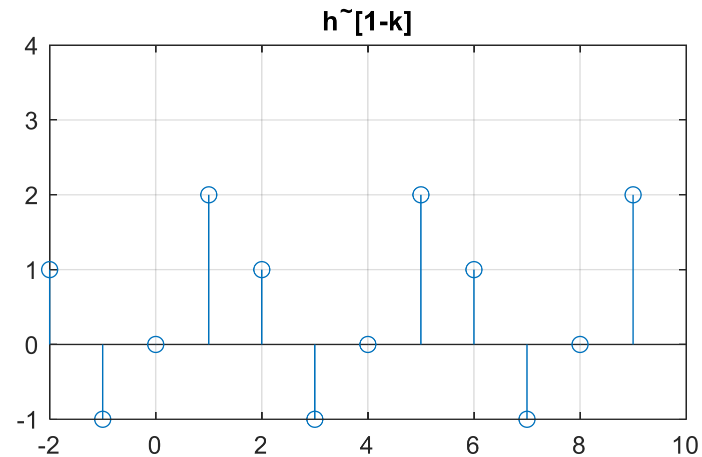
Το $\tilde{y}[0]$ βρίσκεται αθροίζοντας τα γινόμενα $\tilde{x}[k]\ \tilde{h}[-k]$ για $k = 0$ έως 3. Είναι:

$$\tilde{y}[0] = 0x2 + 1x1 + 2x(-1) + 3x0 = -1$$

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Κατόπιν η $\tilde{h}[-k]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά 1 δείγμα, οπότε προκύπτει το $\tilde{h}[1-k]$, όπως δείχνεται στο σχήμα:





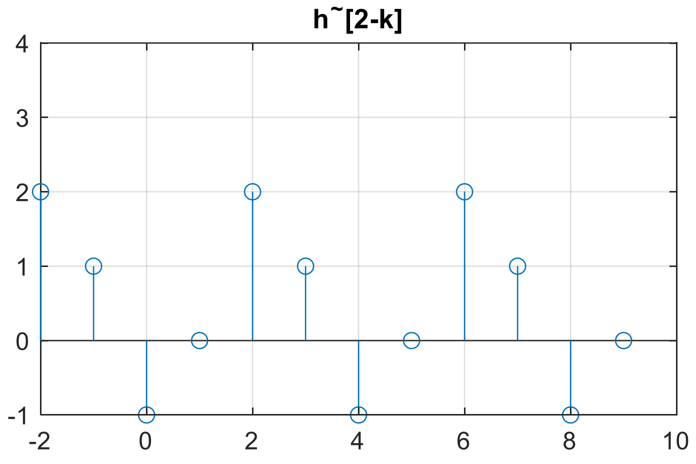
Περιοδική επέκταση $h\big[[-k]\big]_4$ και ολίσθηση περιοδικής επέκτασης $\tilde{h}[1-k] = h\big[[1-k]\big]_4$

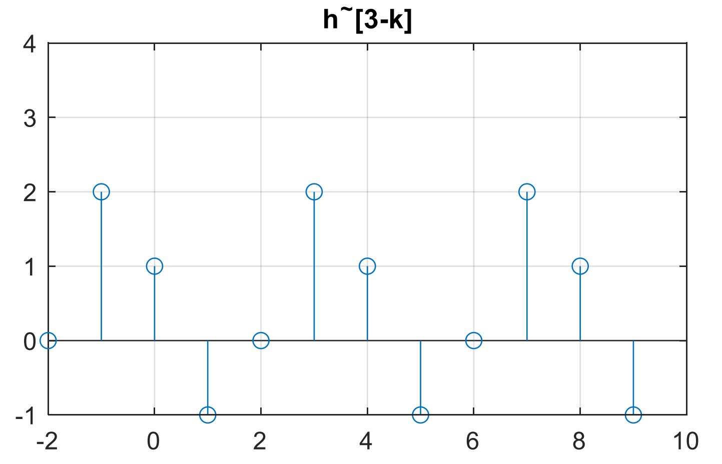
Το $\tilde{y}[1]$ βρίσκεται αθροίζοντας τα γινόμενα $\tilde{x}[k]\ \tilde{h}[1-k]$ για $k = 0$ έως 3. Είναι:

$$\tilde{y}[1] = 0x0 + 1x2 + 2x1 + 3x(-1) = 1$$

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Μετατοπίζοντας την $\tilde{h}[-k]$ προς τα δεξιά κατά 2 και 3 δείγματα προκύπτουν τα $\tilde{h}[2-k]$ και $\tilde{h}[3-k]$, όπως δείχνεται στο σχήμα:





Ολίσθηση περιοδικής επέκτασης $\tilde{h}\big[[2-k]\big]_4 = h\big[[2-k]\big]_4$
και ολίσθηση περιοδικής επέκτασης $\tilde{h}[3-k] = h\big[[3-k]\big]_4$

Το $\tilde{y}[2]$ βρίσκεται αθροίζοντας τα γινόμενα $\tilde{x}[k]\ \tilde{h}[2-k]$ για $k = 0$ έως 3. Είναι:

$$\tilde{y}[2] = 0x(-1) + 1x0 + 2x2 + 3x1 = 7$$

Το $\tilde{y}[3]$ βρίσκεται αθροίζοντας τα γινόμενα $\tilde{x}[k]\ \tilde{h}[3-k]$ για $k = 0$ έως 3. Είναι:

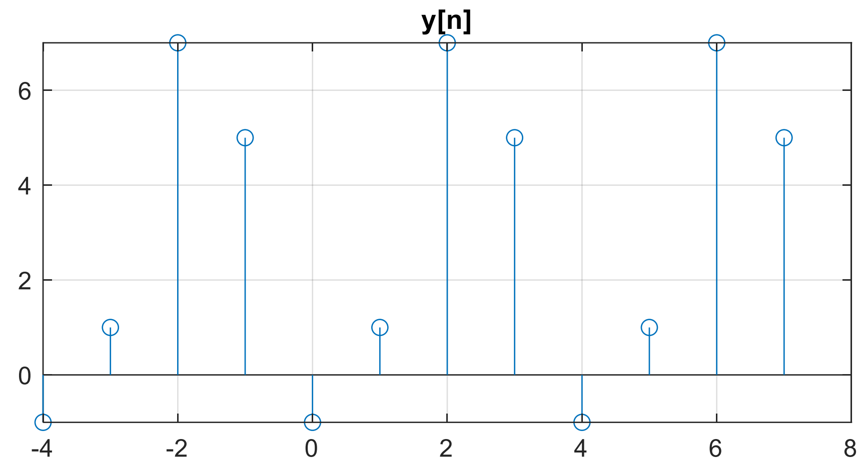
$$\tilde{y}[3] = 0x1 + 1x(-1) + 2x0 + 3x2 = 5$$

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Επομένως, η περιοδική συνέλιξη είναι:

$$\tilde{y}[n] = \{-1, 1, 7, 5, -\hat{1}, 1, 7, 5, -1, 1, 7, 5\}$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Περιοδική συνέλιξη $\tilde{y}[n]$

Κυκλική Μετατόπιση Ακολουθίας

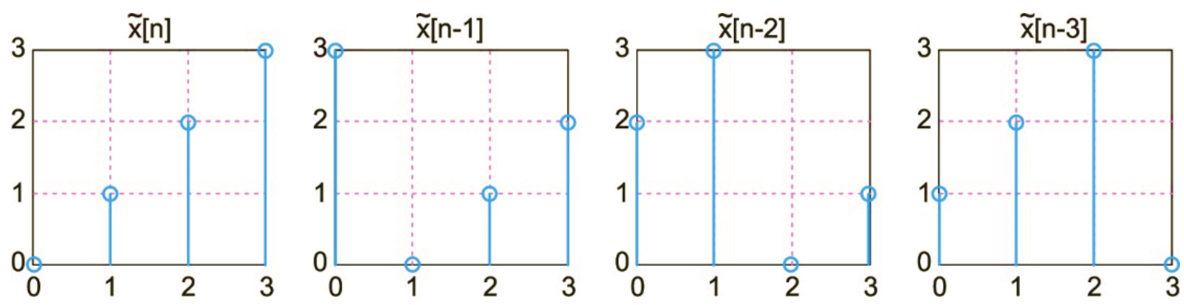
Η **κυκλική μετατόπιση** της περιοδικής επέκτασης $\tilde{x}[n]$ μιας ακολουθίας $x[n]$, κατά μία ποσότητα χρόνου n_0, ορίζεται από τη σχέση:

$$\tilde{x}[n-n_0] = x\big[[n-n_0]\big]_N R_N[n]$$

όπου το ορθογώνιο παράθυρο $R_N[n]$ ορίζεται από την παρακάτω σχέση και πολλαπλασιαζόμενο με το σήμα εξάγει μία περίοδο του σήματος:

$$R_N[n] = \begin{cases} 1, 0 \leq n < N \\ 0, \quad\quad αλλού \end{cases}$$

Η κυκλική μετατόπιση πραγματοποιείται με την ολίσθηση της ακολουθίας $\tilde{x}[n]$ κατά n_0 σημεία (προς τα αριστερά αν $n_0 < 0$ ή προς τα δεξιά αν $n_0 > 0$) και τη διατήρηση μόνο του τμήματος που βρίσκεται μέσα στη θεμελιώδη περίοδο N. Η διαδικασία δείχνεται στο σχήμα:



Κυκλική μετατόπιση της περιοδικής επέκτασης $\tilde{x}[n]$, σε μία περίοδο.

Κυκλική Μετατόπιση Ακολουθίας

Με εφαρμογή της σχέσης:

$$\tilde{x}[n-n_0] = x\big[[n-n_0]\big]_N R_N[n]$$

προκύπτει ότι οι ακολουθίες που απεικονίζονται στο προηγούμενο σχήμα περιγράφονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

- $\tilde{x}[n] = x\big[[n]\big]_4 R_4[n]$
- $\tilde{x}[n-1] = x\big[[n-1]\big]_4 R_4[n]$
- $\tilde{x}[n-2] = x\big[[n-2]\big]_4 R_4[n]$
- $\tilde{x}[n-3] = x\big[[n-3]\big]_4 R_4[n]$

Παρατηρούμε ότι η κυκλική μετατόπιση δημιουργεί διαφορετική ακολουθία από την απλή χρονική μετατόπιση που έχουμε μελετήσει στη διάλεξη 2.

Εξαιτίας αυτής της διαφοράς προκύπτει και το διαφορετικό αποτέλεσμα μεταξύ της γραμμικής συνέλιξης και της κυκλικής συνέλιξης, που θα δούμε στη συνέχεια.

Κυκλική Συνέλιξη

Η **κυκλική συνέλιξη** σημείων δύο ακολουθιών $x_1[n]$ και $x_2[n]$, μήκους N σημείων η καθεμία, ορίζεται ως:

$$y[n] = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1[k]\, \tilde{x}_2[n-k]\right] R_N[n] = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-k]\, \tilde{x}_1[k]\right] R_N[n]$$

όπου $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$ είναι οι περιοδικές επεκτάσεις των ακολουθιών $x_1[n]$ και $x_2[n]$, αντίστοιχα.

Επειδή $\tilde{x}_1[n] = x_1[n]$ για $0 \le n \le N-1$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$y[n] = \left[\sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, \tilde{x}_2[n-k]\right] R_N[n]$$

Η ακολουθία $y[n]$ ονομάζεται **κυκλική συνέλιξη** και συμβολίζεται ως εξής:

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] Ⓝ\, \tilde{x}_2[n] = \tilde{x}_2[n] Ⓝ\, \tilde{x}_1[n]$$

Κυκλική Συνέλιξη

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Η κυκλική συνέλιξη δύο ακολουθιών $x_1[n]$ και $x_2[n]$ ισοδυναμεί με μία περίοδο της περιοδικής συνέλιξης των περιοδικών επεκτάσεων $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$, δηλαδή ισχύει:

$$y[n] = x_1[n] \textcircled{N} \, x_2[n] = \left[\tilde{x}_2[n] \circledast \tilde{x}_1[n]\right] R_N[n]$$

- Αν το σήμα $x_1[n]$ είναι πεπερασμένου μήκους N_1 και το σήμα $x_2[n]$ είναι πεπερασμένου μήκους N_2, όπου $N_1 \neq N_2$, τότε η κυκλική συνέλιξη N σημείων είναι πεπερασμένου μήκους $N \geq \max(N_1, N_2)$ και υπολογίζεται συμπληρώνοντας τα σήματα στο τέλος με μηδενικά (zero-padding), ώστε να αποκτήσουν το ίδιο μήκος N.

- Η κυκλική συνέλιξη σημείων N και η κυκλική συνέλιξη M σημείων, όπου $N \neq M$, δεν είναι γενικά ίσες μεταξύ τους.

- Η κυκλική συνέλιξη δεν είναι ίδια με τη γραμμική συνέλιξη. Η διαφορά τους έγκειται στα όρια του αθροίσματος και στη μετατόπιση N σημείων.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 4 σημείων μεταξύ των σημάτων διακριτού χρόνου $x[n] = \{\hat{0}, 1, 2, 3\}$ και $h[n] = \{1, \hat{2}, 0, -1\}$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε την κυκλική συνέλιξη 4 σημείων από τη σχέση:

$$y[n] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[n-k]\right] R_4[n]$$

Για $n = 0$:

$$y[0] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \left\{\hat{0}, 1, 2, 3\right\} \left\{\hat{2}, 1, -1, 0\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \left\{\hat{0}, 1, -2, 0\right\} \Rightarrow y[0] = -1$$

Για $n = 1$:

$$y[1] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[1-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \left\{\hat{0}, 1, 2, 3\right\} \left\{\hat{0}, 2, 1, -1\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \left\{\hat{0}, 2, 2, -3\right\} \Rightarrow y[1] = 1$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Για $n = 2$:

$$y[2] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[2-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\,\{-\hat{1}, 0, 2, 1\}$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 0, 4, 3\} \Rightarrow y[2] = 7$$

Για $n = 3$:

$$y[3] = \left[\sum_{k=0}^{3} x[k]\,\tilde{h}[3-k]\right] R_4[n] = \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, 1, 2, 3\}\,\{\hat{1}, -1, 0, 2\}$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \{\hat{0}, -1, 0, 6\} \Rightarrow y[3] = 5$$

Επομένως είναι: $y[n] = h[n] \, ④ \, x[n] = \{-\hat{1}, 1, 7, 5\}$

- Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με το αποτέλεσμα της άσκησης 15, παρατηρούμε ότι **επαληθεύει** τη σχέση $y[n] = x_1[n] \, Ⓝ \, x_2[n] = \left[\tilde{x}_2[n] \circledast \tilde{x}_1[n]\right] R_N[n]$
- Η γραμμική συνέλιξη μεταξύ των $h[n]$ και $x[n]$, είναι η ακολουθία έξι σημείων:
  $$h[n] * x[n] = \{1, \hat{4}, 7, 5, -2, -3\}$$
- Παρατηρούμε ότι η γραμμική συνέλιξη και η κυκλική συνέλιξη των ίδιων ακολουθιών δίνουν **διαφορετικό** αποτέλεσμα.

Ιδιότητες DFT

- Γραμμικότητα
- Κυκλική Αναδίπλωση στο Χρόνο
- Κυκλική Μετατόπιση στο Χρόνο
- Συζυγία
- Συμμετρία του DFT για Πραγματικές Ακολουθίες
- Συμμετρία του DFT για Μιγαδικές Ακολουθίες
- Κυκλική Μετατόπιση στη Συχνότητα
- Κυκλική Μετατόπιση στο Χρόνο
- Κυκλική Συνέλιξη
- Πολλαπλασιασμός Ακολουθιών
- Θεώρημα Parseval

Γραμμικότητα

Αν οι μετασχηματισμοί DFT των ακολουθιών $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k] \text{ και } x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_2[k]$$

τότε ο DFT του γραμμικού συνδυασμού $a_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$ είναι:

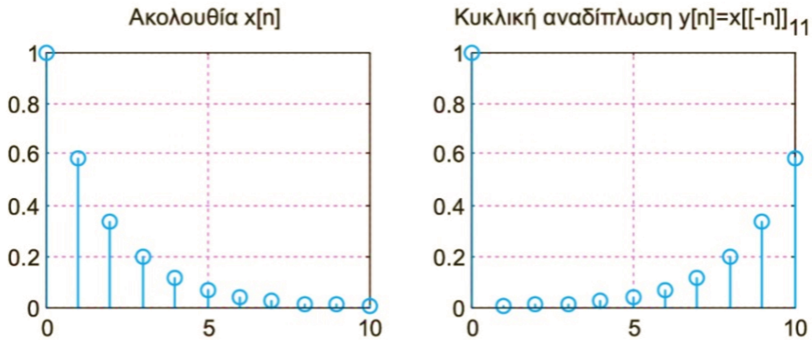
$$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} a_1 X_1[k] + \alpha_2 X_2[k]$$

- Η σχέση ισχύει για ακολουθίες ίσου μήκους.
- Αν τα μήκη των ακολουθιών είναι διαφορετικά, τότε συμπληρώνουμε με μηδενικά την μικρότερη σε μήκος ακολουθία ώστε να αποκτήσει το ίδιο μήκος με την μεγαλύτερη.

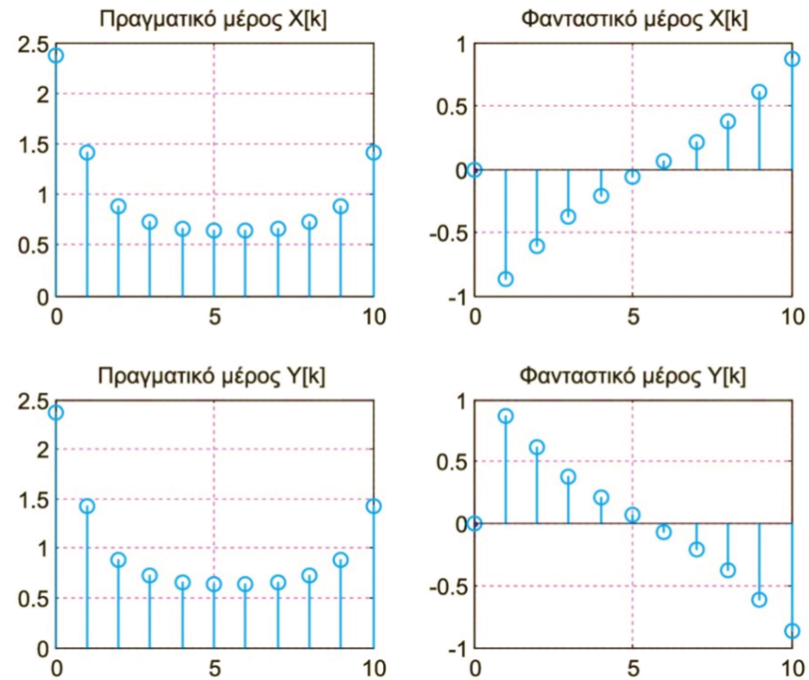
Κυκλική Αναδίπλωση στο Χρόνο

- Αν $x[n]$ είναι μία ακολουθία N σημείων και $X[k]$ είναι ο N-σημείων DFT αυτής, τότε για την κατά modulo N αντεστραμμένη ακολουθία $y[n]$ ισχύει:

$$y[n] = x[[-n]]_N \xleftrightarrow{DFT} X[[-k]]_N$$



Ακολουθία $x[n]$ και κυκλική αναδίπλωση $y[n] = x[[-n]]_{11}$



Πραγματικό και φανταστικό μέρος των DFT $X[k]$ και $Y[k]$

Κυκλική Μετατόπιση στο Χρόνο

Αν $x[n]$ είναι μία ακολουθία N σημείων και $X[k]$ είναι ο N-σημείων DFT αυτής, τότε για την κυκλικά μετατοπισμένη κατά n_0 ακολουθία, που ορίζεται ως :

$$\tilde{x}[n-n_0] = x\big[[n-n_0]\big]_N R_N[n]$$

όπου το ορθογώνιο παράθυρο $R_N[n]$ εξάγει μία περίοδο του σήματος και ορίζεται από τη σχέση:

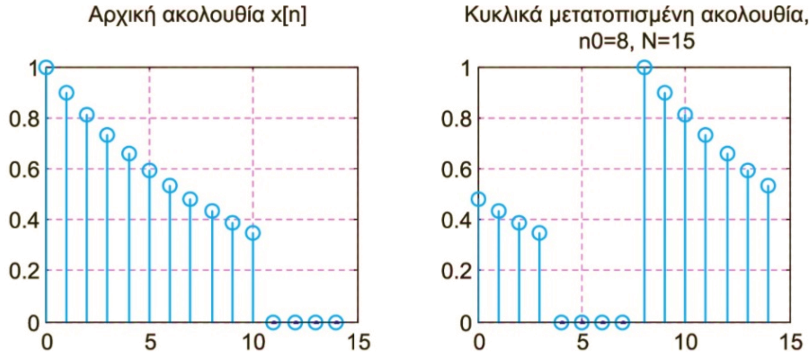
$$R_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

τότε ο DFT της κυκλικά μετατοπισμένης ακολουθίας $\tilde{x}[n-n_0]$ δίνεται από:

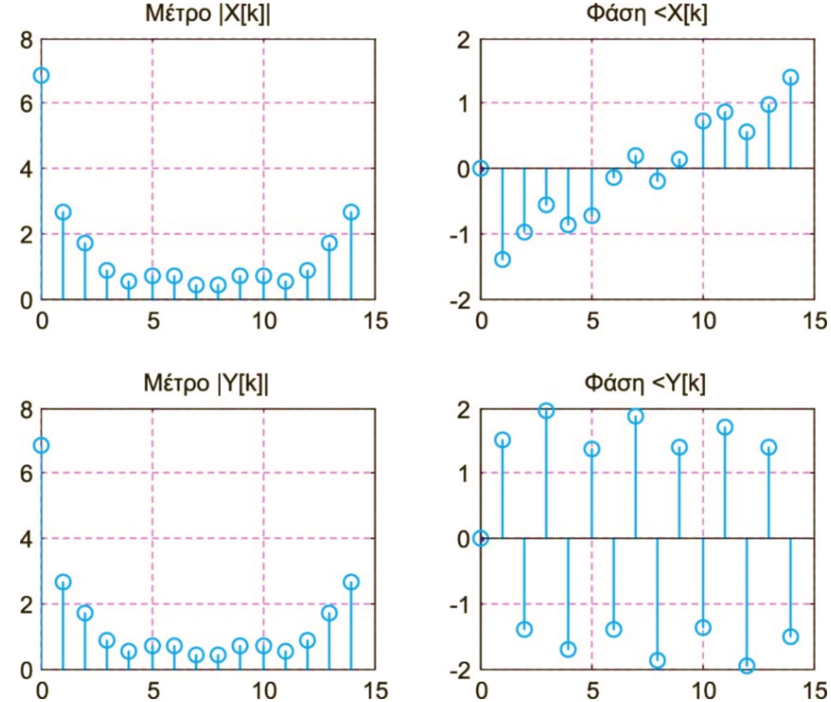
$$x\big[[n-n_0]\big]_N R_N[n] \xleftrightarrow{DFT} W_N^{kn_0}\, X[k]$$

- Επειδή $\left|W_N^{kn_0}\right| = 1$, το μέτρο του DFT της κυκλικά μετατοπισμένης ακολουθίας είναι ίδιο με το μέτρο του DFT της αρχικής ακολουθίας.
- Η φάση του DFT μετατοπίζεται κατά τη φάση του όρου $W_N^{kn_0}$.

Κυκλική Μετατόπιση στο Χρόνο



Ακολουθία $x[n]$ και κυκλικά μετατοπισμένη ακολουθία $y[n] = x[[n-8]]_{15}$



Μέτρο και φάση των DFT $X[k]$ και $Y[k]$

Κυκλική Μετατόπιση στη Συχνότητα

- Η ιδιότητα αυτή είναι δυϊκή της ιδιότητας κυκλικής μετατόπισης στο χρόνο και περιγράφεται από τη σχέση:

$$W_N^{-k_0 n} x[n] \xleftrightarrow{DFT} X\big[[k-k_0]\big]_N R_N(k)$$

- Επομένως, αν $x[n]$ είναι μία ακολουθία N σημείων και $X[k]$ είναι ο N σημείων DFT αυτής, τότε ο πολλαπλασιασμός της ακολουθίας με τον όρο $W_N^{-k_0 n}$ έχει DFT τον DFT της ακολουθίας κυκλικά μετατοπισμένο στη συχνότητα k_0.

Συζυγία

Η ιδιότητα της συμμετρίας συνδυάζεται με την ιδιότητα της **συζυγίας**, η οποία αναφέρει ότι αν $x[n]$ είναι μία ακολουθία N σημείων και $X[k]$ είναι ο N-σημείων DFT αυτής, τότε για τη συζυγή ακολουθία $x^*[n]$ επίσης N-σημείων, ισχύει:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{DFT} X^*\big[[-k]\big]_N = -X^*\left[[N-k]\right]_N$$

Η ιδιότητα αυτή εισάγει την έννοια της **κυκλικής αναδίπλωσης στη συχνότητα**.

Είδη Συμμετρίας Πραγματικών Ακολουθιών

Μια πραγματική ακολουθία $x[n]$ με μήκος N σημείων με $0 \leq n \leq N-1$, καλείται:

- **Κυκλικά άρτια** αν:

$$x[n] = x\big[[-n]\big]_N = x\big[[N-n]\big]_N$$

- **Κυκλικά περιττή** αν:

$$x[n] = -x\big[[-n]\big]_N = -x\big[[N-n]\big]_N$$

Η πραγματική ακολουθία $x[n]$ μπορεί να αποσυντεθεί σε μία **κυκλικά άρτια** $x_{ce}[n]$ και μία **κυκλικά περιττή** $x_{co}[n]$ συνιστώσα, δηλαδή:

$$x[n] = x_{ce}[n] + x_{co}[n], \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

όπου:

$$x_{ce}[n] = \frac{1}{2}\Big[x[n] + x\big[[-n]\big]_N\Big], \qquad 0 \leq n \leq N-1$$
$$x_{co}[n] = \frac{1}{2}\Big[x[n] - x\big[[-n]\big]_N\Big], \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Συμμετρία του DFT για Πραγματικές Ακολουθίες

- Οι συνιστώσες $x_{ce}[n]$ και $x_{co}[n]$ είναι ακολουθίες μήκους N σημείων και ο N-σημείων DFT αυτών είναι:

$$X_{ec}[k] = Re\{X[k]\} = Re\left\{X\left[[-k]\right]_N\right\}$$

$$X_{oc}[k] = Im\{X[k]\} = Im\left\{X\left[[-k]\right]_N\right\}$$

- Ο DFT μίας πραγματικής ακολουθίας είναι **κυκλικά συμμετρικός**, δηλαδή ισχύει:

$$X[k] = X^*\left[[-k]\right]_N = X^*\left[[N-k]\right]_N$$

- Η σχέση αυτή αναλύεται:

$$Re\{X[k]\} = Re\left\{X\left[[-k]\right]_N\right\}$$

$$Im\{X[k]\} = -Im\left\{X\left[[N-k]\right]_N\right\}$$

$$|X[k]| = \left|X\left[[-k]\right]_N\right|$$

$$\measuredangle X[k] = -\measuredangle X\left[[-k]\right]_N$$

Συμμετρία του DFT για Πραγματικές Ακολουθίες

- Για μία πραγματική ακολουθία $x[n]$, οι DFT συντελεστές $X[0]$ και $X[N/2]$ είναι πραγματικοί αριθμοί, καθώς ισχύει:

$$X[0] = X^*\big[[-0]\big]_N = X^*[0]$$

$$X\left[\frac{N}{2}\right] = X^*\left[\left[-\frac{N}{2}\right]\right]_N = X^*\left[\frac{N}{2}\right]$$

- Ο $X[N/2]$ καλείται **συντελεστής Nyquist**, καθώς για $k = N/2$ η συχνότητα είναι $\omega_{N/2} = (N/2)(2\pi/N) = \pi$, η οποία είναι η **ψηφιακή συχνότητα Nyquist**.

- Η ιδιότητα συμμετρίας μειώνει κατά **50%** τις πράξεις για τον υπολογισμό του DFT. Συγκεκριμένα, υπολογίζουμε τις τιμές $X[k]$ μόνο για:

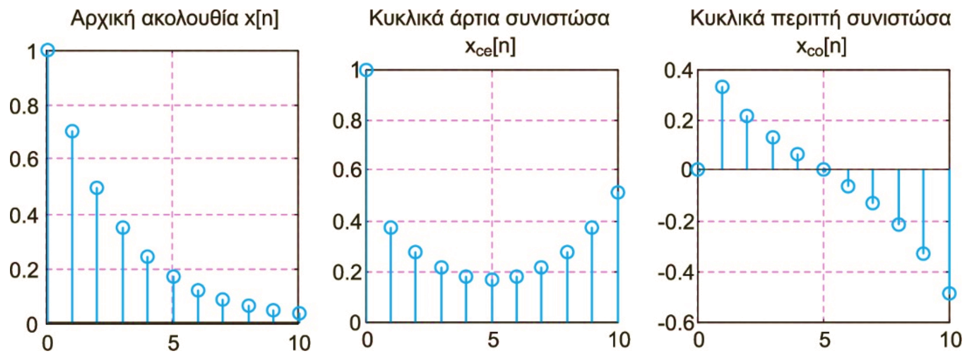
$$k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}, \qquad \text{αν } N \text{ άρτιο}$$

$$k = 0,1,\ldots,\frac{N-1}{2}, \qquad \text{αν } N \text{ περιττό}$$

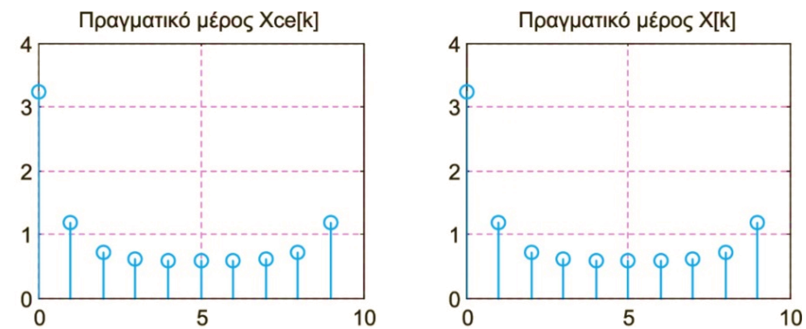
- Η ιδιότητα αυτή αξιοποιείται από τον Fast Fourier Transform (FFT).

Συμμετρία του DFT για Πραγματικές Ακολουθίες

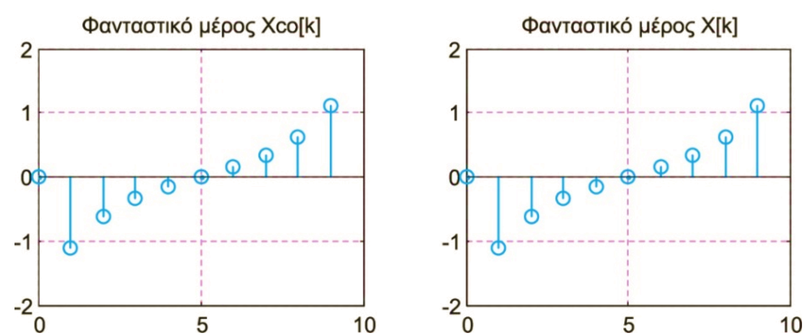
Αρχική ακολουθία, κυκλικά άρτια και κυκλικά περιττή συνιστώσες



Πραγματικό μέρος $X[k]$ και $X_{ce}[k]$



Φανταστικό μέρος $X[k]$και $X_{co}[k]$



Είδη Συμμετρίας Μιγαδικών Ακολουθιών

Μια μιγαδική ακολουθία $x[n]$ με μήκος N σημείων με $0 \leq n \leq N-1$, καλείται:

- **Συζυγής κυκλικά συμμετρική** αν:

$$x[n] = x^*\big[[-n]\big]_N = x^*\big[[N-n]\big]_N$$

- **Συζυγής κυκλικά αντισυμμετρική** αν:

$$x[n] = -x^*\big[[-n]\big]_N = -x^*\big[[N-n]\big]_N$$

Η μιγαδική ακολουθία $x[n]$ μπορεί να αποσυντεθεί σε μία **συζυγούς κυκλικά συμμετρική** $x_{cs}[n]$ και μία **συζυγούς κυκλικά αντισυμμετρικής** $x_{ca}[n]$ ακολουθίας, δηλαδή:

$$x[n] = x_{cs}[n] + x_{ca}[n], \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

όπου:

$$x_{cs}[n] = \frac{1}{2}\Big[x[n] + x^*\big[[-n]\big]_N\Big], \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

$$x_{ca}[n] = \frac{1}{2}\Big[x[n] - x^*\big[[-n]\big]_N\Big], \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Συμμετρία του DFT για Μιγαδικές Ακολουθίες

- Ο DFT μίας πραγματικής ακολουθίας είναι:
  - **Συζυγής κυκλικά συμμετρικός**, αν ισχύει:

$$X[k] = X^*\big[[-k]\big]_N = X^*\big[[N-k]\big]_N$$

  - **Συζυγής κυκλικά αντισυμμετρικός**, αν ισχύει:

$$X[k] = -X^*\big[[-k]\big]_N = -X^*\big[[N-k]\big]_N$$

- Η (μιγαδική) ακολουθία $X[k]$ του DFT μπορεί να γραφεί ως:

$$X[k] = X_{cs}[k] + X_{ca}[k], \qquad 0 \le k \le N-1$$

όπου:

$$X_{cs}[k] = \frac{1}{2}\Big[X[k] + X^*\big[[-k]\big]_N\Big], \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$X_{ca}[k] = \frac{1}{2}\Big[X[k] - X^*\big[[-k]\big]_N\Big], \qquad 0 \le k \le N-1$$

Κυκλική Συνέλιξη

- Όταν δύο ακολουθίες $x_1[n]$ και $x_2[n]$, μήκους N σημείων εκάστη συνελίσσονται, τότε η ακολουθία που προκύπτει έχει μεγαλύτερο μήκος.
- Αν θέλουμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης να είναι αυστηρά περιορισμένο στο διάστημα $0 \leq n \leq N-1$, τότε χρησιμοποιούμε την **κυκλική συνέλιξη**, η οποία ορίζεται από:

$$x_1[n]\ (\mathrm{N})\ x_2[n] = \left[\sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\ x_2[[n-k]]_N\right] R_N[n], \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

- Η κυκλική συνέλιξη παράγει ακολουθία μήκους N σημείων. Έχει ίδια δομή με τη γραμμική συνέλιξη, αλλά διαφέρει στο όριο υπολογισμού του αθροίσματος και στη χρήση της κυκλικής μετατόπισης.
- Η ιδιότητα του DFT για την κυκλική συνέλιξη είναι:

$$x_1[n]\ (N)\ x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_1[k]\ X_2[k]$$

- Επομένως, αν πολλαπλασιάσουμε δύο DFT N σημείων στο πεδίο της συχνότητας, το αποτέλεσμα είναι η **κυκλική συνέλιξη** (και όχι η γραμμική συνέλιξη) στο πεδίο του χρόνου.

Πολλαπλασιασμός Ακολουθιών

- Η ιδιότητα αυτή είναι δυαδική της προηγούμενης ιδιότητας και αναφέρει ότι ο DTFT του γινομένου δύο ακολουθιών $x[n]$ και $y[n]$ είναι η περιοδική συνέλιξη των επιμέρους DTFT $X(e^{j\omega})$ και $Y(e^{j\omega})$ των σημάτων

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega})$$

- Λόγω της περιοδικότητας του DTFT δεν υφίσταται τέλειος δυισμός μεταξύ της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου και του πολλαπλασιασμού στο πεδίο της συχνότητας. Συγκεκριμένα, ο πολλαπλασιασμός δύο απεριοδικών ακολουθιών είναι ισοδύναμος με την περιοδική (και όχι τη γραμμική) συνέλιξη των DTFT.

Θεώρημα Parseval

- Η γνωστή σχέση Parseval που ισχύει στον μετασχηματισμό Fourier, στον μετασχηματισμό Z και στον DTFT, και η οποία υπολογίζει την ενέργεια του σήματος στα πεδία χρόνου και συχνότητας, ισχύει και στον DFT:

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

- $|X[k]|^2/N$: **φασματική πυκνότητα ενέργειας,** εκφράζει την ποσότητα ενέργειας ανά φασματικό συντελεστή.

- Αν η ακολουθία είναι περιοδική, τότε η ποσότητα $\left|\tilde{X}[k]/N\right|^2$ ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ισχύος**.

Σχέση Κυκλικής Συνέλιξης με Γραμμική Συνέλιξη

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης με τον DFT

Σχέση Κυκλικής και Γραμμικής Συνέλιξης

- Η **γραμμική συνέλιξη** προσφέρει την εξόχως σημαντική δυνατότητα υπολογισμού της εξόδου ενός ΓΑΚΜ συστήματος όταν είναι γνωστή η είσοδος $x[n]$ και η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος, πλην όμως ο υπολογισμός της απαιτεί υψηλό υπολογιστικό κόστος.
- O DFT προσφέρει **αποδοτικά εργαλεία** ανάλυσης των σημάτων και των συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας μέσω γρήγορων υπολογιστικών υλοποιήσεων, όπως ο αλγόριθμος FFT.
- Επειδή η κυκλική συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από τον DFT, τίθεται το ερώτημα **πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο DFT για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης;**

Σχέση Κυκλικής και Γραμμικής Συνέλιξης

Αν $x[n]$και $h[n]$ ακολουθίες διάρκειας N_x και N_h σημείων αντίστοιχα, τότε:

- Η **γραμμική συνέλιξη** μεταξύ των $x[n]$και $h[n]$, είναι:

$$y_L[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=0}^{N_x+N_h} x[k]\, h[n-k]$$

- Η **κυκλική συνέλιξη** μεταξύ των $x[n]$και $h[n]$, διάρκειας $N = N_x + N_h - 1$ σημείων η κάθε μία, είναι:

$$y_C[n] = x[n] \qquad h[n] = \left[\sum_{k=0}^{N_x-1} x[k]\, h\big[[n-k]\big]_N\right] R_N[n]$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$y_C[n] = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_L[n+rN]\right] R_N[n]$$

- Άρα η κυκλική συνέλιξη $y_c[n]$ είναι μια αλλοιωμένη μορφή της γραμμικής $y_L[n]$.
- Αν η ακολουθία $y_L[n]$ έχει **διάρκεια** $\boldsymbol{N \geq N_x + N_h - 1}$, τότε η γραμμική συνέλιξη **ταυτίζεται** με την κυκλική.

Υπολογισμός Γραμμικής Συνέλιξης με τον DFT

- Η γραμμική συνέλιξη δύο ακολουθιών $x[n]$ και $h[n]$ διάρκειας N_x και N_h δειγμάτων αντίστοιχα, υπολογίζεται από τον DFT με τα ακόλουθα βήματα:
    - Οι ακολουθίες $x[n]$ και $h[n]$ επεκτείνονται με κατάλληλο πλήθος μηδενικών, ώστε η κάθε μία να έχει μήκος $N \geq N_x + N_h - 1$ δείγματα.
    - Υπολογίζονται οι DFT N σημείων των ακολουθιών $x[n]$ και $h[n]$ και παράγονται οι ακολουθίες $X[k]$ και $H[k]$.
    - Υπολογίζεται το γινόμενο $Y[k] = X[k]\, H[k]$.
    - Υπολογίζεται ο αντίστροφος DFT N σημείων της $Y[k]$, οπότε βρίσκεται η κυκλική συνέλιξη $y_C[n] = x[n]$ (N) $h[n]$.
    - Εφόσον $N \geq N_x + N_h - 1$ η γραμμική συνέλιξη ισούται με την κυκλική συνέλιξη.
- Αν το μήκος της κυκλικής συνέλιξης τεθεί $N = \max(N_x, N_h)$, τότε τα πρώτα $(M - 1)$ δείγματα της κυκλικής συνέλιξης είναι <u>διαφορετικά</u> από τα αντίστοιχα δείγματα της γραμμικής συνέλιξης, όπου $M = \min(N_x, N_h)$. Τα υπόλοιπα δείγματα συμπίπτουν.

Υπολογισμός Συνέλιξης κατά Τμήματα

- Μέθοδος Επικάλυψης – Κράτησης
- Μέθοδος Επικάλυψης – Πρόσθεσης

Υπολογισμός Συνέλιξης κατά Τμήματα

- Αν η ακολουθία $x[n]$ είναι μεγάλου μήκους, τότε ο DFT για μία μεγάλη τιμή του N δεν προσφέρει σημαντική πληροφορία για το φάσμα, επειδή ο υπολογισμός του προκύπτει ως μέσος όρος ενός υπολογισμού μεγάλου μήκους και δεν αποδίδει ευκρινώς το φάσμα των μεταβατικών περιοχών του σήματος.
- Στην περίπτωση αυτή προτιμούμε να **τεμαχίζουμε** το σήμα σε επιμέρους τμήματα πεπερασμένης διάρκειας και υπολογίζουμε τον DFT κάθε τμήματος.
- Ομοίως πράττουμε για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος για είσοδο ένα σήμα μεγάλου μήκους.
- Ο τεμαχισμός του σήματος σε επιμέρους τμήματα $x_r[n]$ πεπερασμένης διάρκειας γίνεται με τον πολλαπλασιασμό του με ένα παράθυρο $w_N[n]$ μήκους N:

$$x_r[n] = x[n]\, w_N[n - rN]$$

- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **τμηματική συνέλιξη** (block convolution) και υλοποιείται με τις τεχνικές:
    - **επικάλυψης – κράτησης** (overlap-save)
    - **επικάλυψης – πρόσθεσης** (overlap-add)

Μέθοδος Επικάλυψης – Κράτησης

Η μέθοδος περιγράφεται από τον παρακάτω αλγόριθμο:

1. Δημιουργούμε το πρώτο τμήμα $x_1[n]$ μήκους N σημείων από το συνολικό σήμα $x_1[n]$, μέσω της σχέσης:

$$x_1[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < M-1 \\ x[n-M+1], & M-1 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

2. Υπολογίζουμε τους DFT N σημείων $X_1[k]$ της ακολουθίας $x_1[n]$ και $H[k]$ της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ του συστήματος.

3. Υπολογίζουμε το γινόμενο $Y_1[k] = X_1[k]\, H[k]$.

4. Με αντίστροφο DFT N-σημείων στην $Y_1[k]$ λαμβάνουμε την $y_1[n]$, που ισοδυναμεί με την κυκλική συνέλιξη $x_1[n]$ $h[n]$. Οι πρώτες $(M-1)$ τιμές της ακολουθίας $y_1[n]$ είναι λανθασμένες και οι υπόλοιπες $(N-M+1)$ τιμές αντιστοιχούν στη γραμμική συνέλιξη $x_1[n] * h[n]$. Οι τελευταίες $(N-M+1)$ τιμές της $y_1[n]$ είναι οι πρώτες $(N-M+1)$ τιμές της ακολουθίας εξόδου $y[n]$, δηλαδή:

$$y[n] = y_1[n+M-1], \qquad 0 \leq n < M-1$$

Μέθοδος Επικάλυψης – Κράτησης

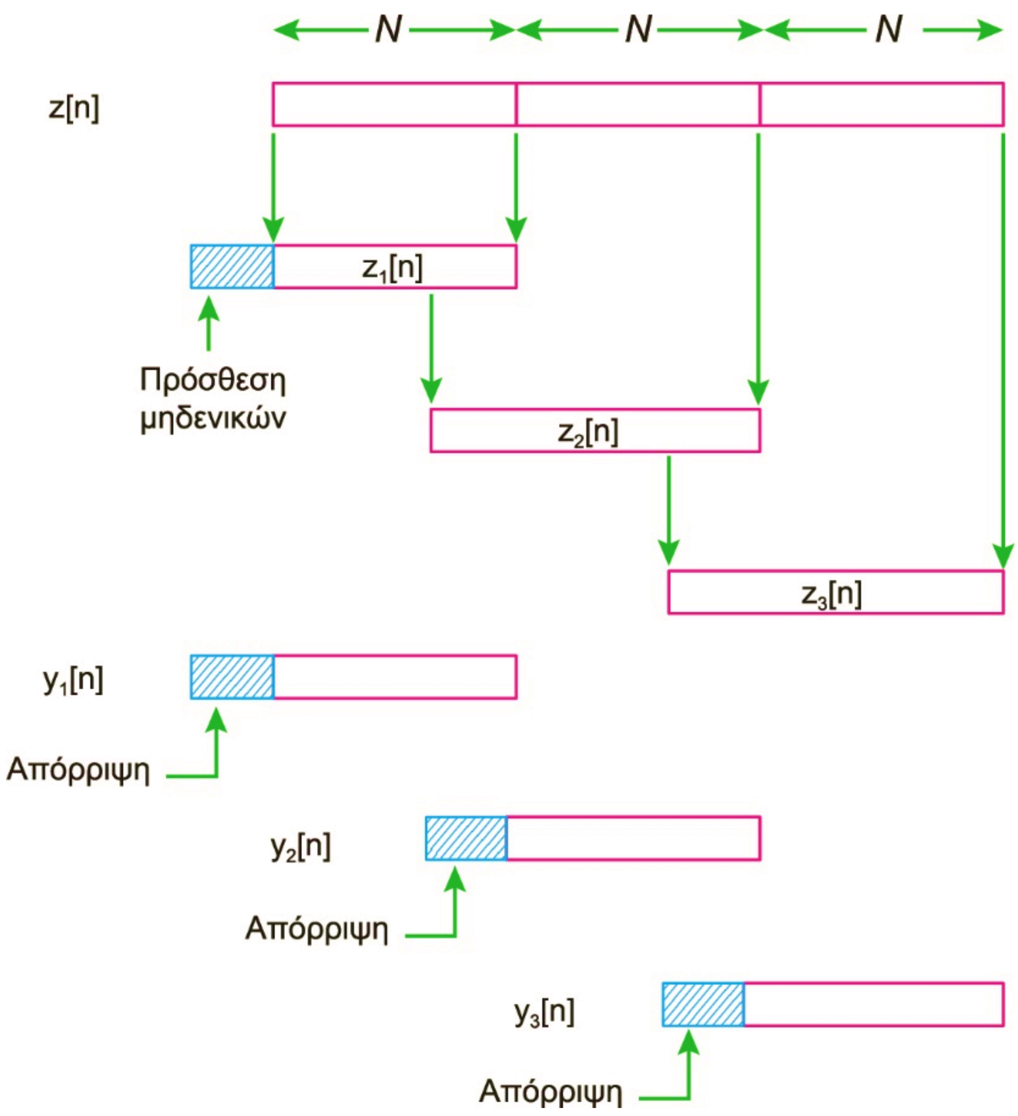
5. Έστω $x_2[n]$ ακολουθία N-σημείων που εξάγεται από την $x[n]$ με τις $(M-1)$ πρώτες τιμές της να επικαλύπτονται με εκείνες της $x_1[n]$.

6. Εκτελούμε τα βήματα 3 και 4 και λαμβάνουμε την $y_2[n]$. Οι πρώτες $(M-1)$ τιμές της $y_2[n]$ απορρίπτονται και οι τελευταίες $(N-M+1)$ τιμές κρατούνται και συνενώνονται με τις τιμές της $y_1[n]$ που έχουν κρατηθεί, δηλαδή:

$$y[n+N-M+1] = y_2[n+M-1], \qquad 0 \leq n < N-M$$

7. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 5 και 6 μέχρι να υπολογιστούν όλες οι τιμές της γραμμικής συνέλιξης.

Μέθοδος Επικάλυψης – Κράτησης



Μέθοδος Επικάλυψης – Πρόσθεσης

Η μέθοδος περιγράφεται από τον παρακάτω αλγόριθμο:

- Τεμαχίζουμε την ακολουθία $x[n]$ σε χρονικά μετατοπισμένες ακολουθίες μήκους N σημείων:

$$x[n] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i[n - Ni]$$

όπου $x_i[n] = \begin{cases} x[n + Ni], & n = 0,1,\dots,N-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

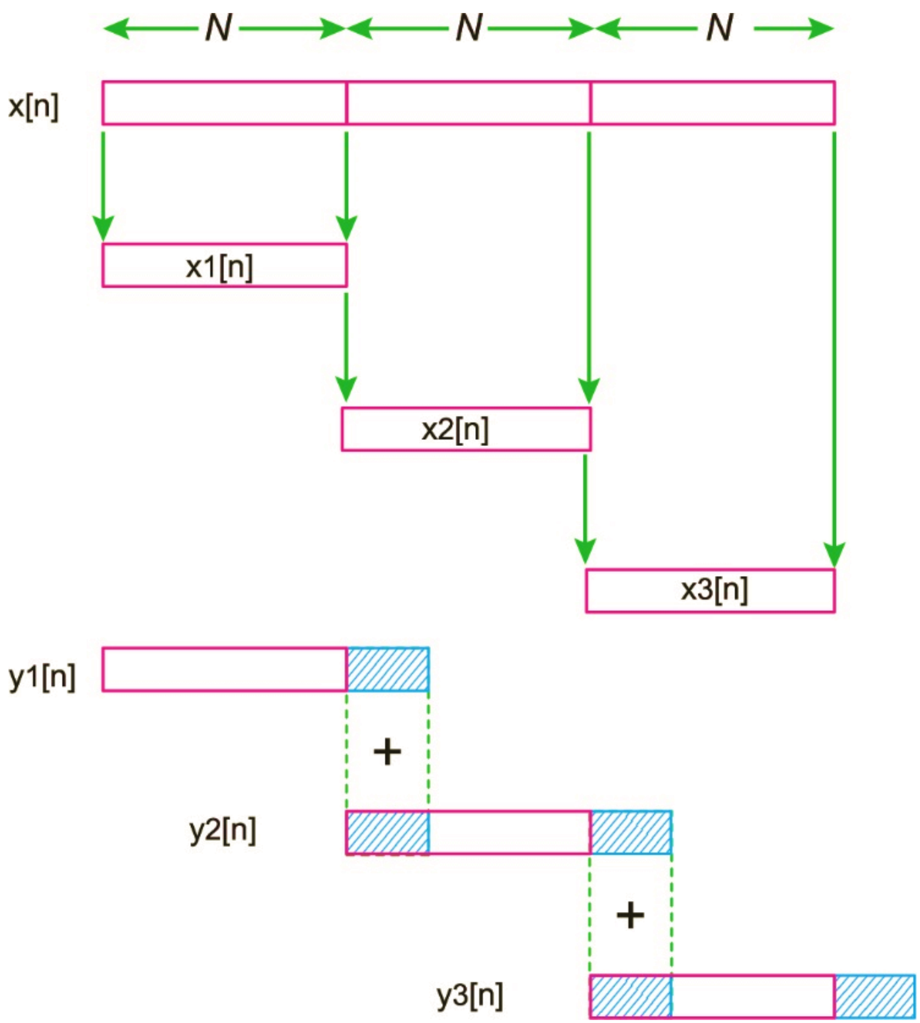
- Αν $h[n]$ είναι η κρουστική απόκριση μήκους M ενός ΓΑΚΜ συστήματος, τότε η έξοδός του για είσοδο το σήμα $x[n]$ θα είναι:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i[n - Ni] * h[n] = \sum_{i=0}^{\infty} y_i[n - Ni]$$

όπου $y_i[n] = x_i[n] * h[n]$

- Κάθε επιμέρους ακολουθία $y_i[n]$ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με DFT N σημείων των $x_i[n]$ και $h[n]$ και θα έχει μήκος $(N + M - 1)$ σημεία.
- Οι διαδοχικές ακολουθίες $y_i[n]$ και $y_{i+1}[n]$ επικαλύπτονται σε $(N - M)$ σημεία και τα επικαλυπτόμενα σημεία προστίθενται.

Μέθοδος Επικάλυψης – Πρόσθεσης



Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier

- Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στο Χρόνο (Radix-2)
- Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στη Συχνότητα (Radix-2)

Υπολογιστικό Κόστος DFT

Ο DFT N-σημείων μίας ακολουθίας $x[n]$ N-σημείων, είναι:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk} = x[0]W_N^{0k} + x[1]W_N^{1k} + \cdots + x[N-1]W_N^{(N-1)k}, \qquad k = 0,1, \dots N-1$$

- Για τον υπολογισμό κάθε σημείου $X[k]$ απαιτούνται:
  - N μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί
  - $(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις
- Για τον υπολογισμό όλων των N τιμών του DFT απαιτούνται:
  - N^2 μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και
  - $N(N-1) \cong N^2$ μιγαδικές προσθέσεις
- Για την αποθήκευση των παραγόντων φάσης W_N^{nk} απαιτούνται:
  - N^2 θέσεις
- Το υπολογιστικό κόστος του DFT είναι $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{N^2})$ και γίνεται απαγορευτικά υψηλό για μεγάλες τιμές του N.

Στρατηγική κατασκευής αποδοτικών αλγορίθμων υπολογισμού του DFT

- Ο υπολογισμός DFT N σημείων βασίζεται σε DFT με διαδοχικά μικρότερο μήκος, π.χ. $N/2$ σημείων. Γίνεται με διάσπαση της ακολουθίας $x[n]$ μήκους N σημείων (N άρτιο) σε δύο επιμέρους ακολουθίες $x_1[n]$ και $x_2[n]$, μήκους $N/2$ σημείων η καθεμία.

- Ο DFT $N/2$ σημείων έχει υπολογιστικό κόστος $O(N^2/4)$. Και για τις δύο ακολουθίες είναι 2 $O(N^2/4)$, σημαντικά μικρότερο από το $O(N^2)$, ειδικά για μεγάλες τιμές του N.

- Όταν το N είναι δύναμη του 2, τότε το υπολογιστικό κόστος είναι μόλις $\boldsymbol{O(N/2\ \ logN)}$.

- Ζητείται τρόπος υπολογισμού του DFT N σημείων από τον DFT $N/2$ σημείων. Κατόπιν, ο DFT $N/2$ σημείων μπορεί να διασπαστεί σε DFT $N/4$ σημείων, κλπ.

- Οι πιο δημοφιλείς τεχνικές για την υλοποίηση του FFT είναι:
    - **Διαίρεση στο Χρόνο** (Decimation in Time)
    - **Διαίρεση στη Συχνότητα** (Decimation in Frequency)

Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στο Χρόνο (Radix-2)

Ακολουθία $x[n]$ μήκους $N = 2^{\nu}$ διαιρείται σε δύο ακολουθίες, μήκους $N/2$ η κάθε μία:

- $g_1\,[n] = x[2n],\ 0 \le n \le N/2 - 1$ Δείγματα της $x[n]$ με άρτιο δείκτη
- $g_2[n] = x[2n+1], 0 \le n \le N/2 - 1$ Δείγματα της $x[n]$ με περιττό δείκτη

Ο DFT N σημείων της $x[n]$ έχει υπολογιστικό κόστος $O\left(N^2\right)$ και είναι $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk}$.

Επειδή $x[n] = g_1[n] + g_2[n]$, ισχύει:

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N/2-1} g_1[m]\, W_N^{2mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} g_2[m]\, W_N^{(2m+1)k}$$

Επειδή $W_N^{2mk} = W_{N/2}^{mk}$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N/2-1} g_1[m]\, W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} g_2[m]\, W_{N/2}^{mk}$$

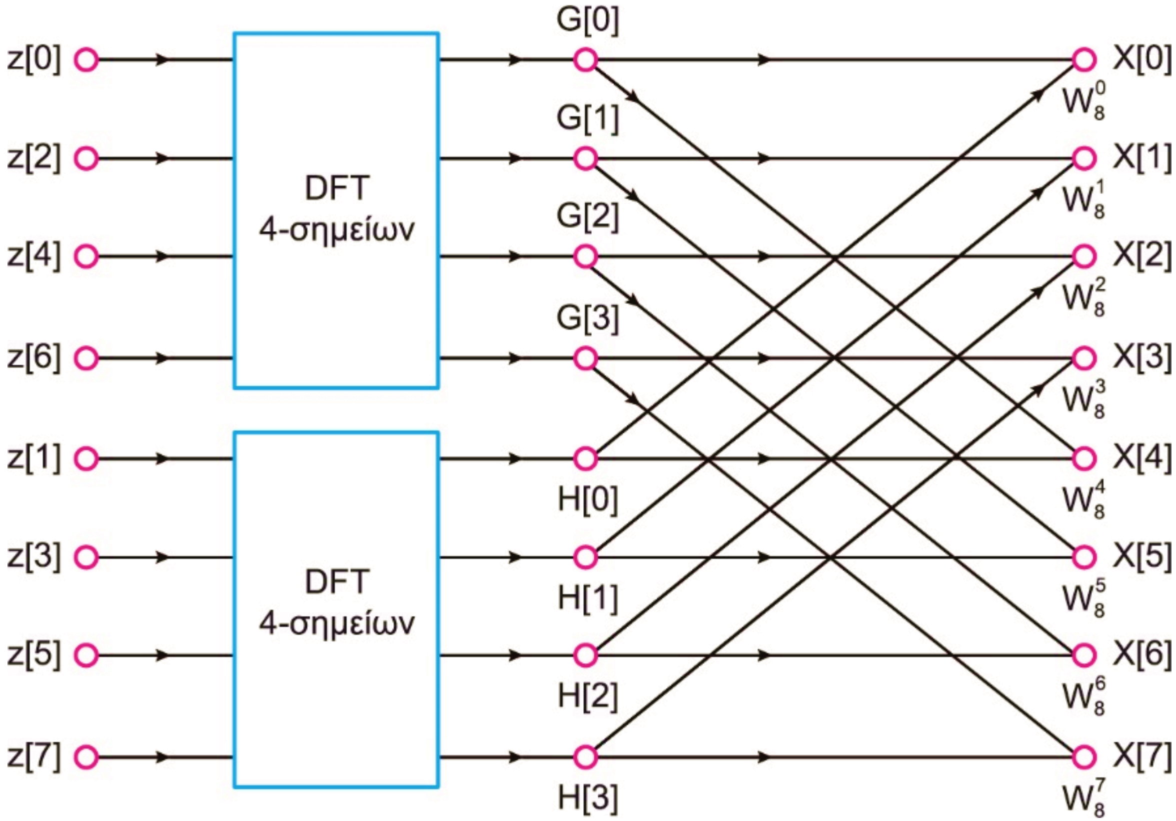
ή εν συντομία:

$$X[k] = G_1[k] + W_N^k G_2[k], \qquad 0 \le k \le N-1$$

Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στο Χρόνο (Radix-2)

- Επομένως, ο DFT N σημείων της $x[n]$ ισούται με το άθροισμα των DFT $N/2$ σημείων των $g_1[n]$ και $g_2[n]$.
- Ο DFT $N/2$ σημείων έχει υπολογιστικό κόστος $O(N^2/4)$. Άρα το συνολικό υπολογιστικό κόστος είναι 2 $O(N^2/4)$ (σημαντικά μικρότερο από το $O(N^2)$).
- Η παραπάνω διαδικασία της διάσπασης της ακολουθίας εισόδου σε ακολουθίες άρτιων και περιττών όρων επαναλαμβάνεται ν φορές, μέχρι να καταλήξουμε σε DFT 2 σημείων.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **«αποδεκατισμός στο χρόνο»** (Decimation in Time, DIT-FFT) και δείχνεται στο επόμενο σχήμα, για FFT 8 σημείων.
- Συνολικό υπολογιστικό κόστος FFT είναι $O(N\log_2 N)$. Αν το N είναι μεγάλο τότε μπορεί να μειωθεί ακόμα περισσότερο, σε $O\left(\frac{N}{2}\log_2 N\right)$.

Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στο Χρόνο (Radix-2)



Δομή FFT αποδεκατισμού στο χρόνο (DIT-FFT) για $N = 8$

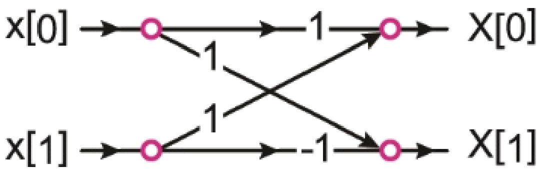
Μελέτη DFT 2 και 4 σημείων

- **DFT 2 σημείων:**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{1} x[n]\, W_2^{nk} = x[0]W_2^{0k} + x[1]W_2^{1k} = x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-j\pi k}$$

Επομένως $X[k] = \ x[0] + (-1)^k x[1],\ \ 0 \leq k \leq 1$, που αναλύεται σε $X[0] = x[0] + x[1]$ και $X[1] = x[0] - x[1]$

Διάγραμμα πεταλούδας
FFT 2-σημείων



- **DFT 4 σημείων:**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, W_4^{nk} = x[0]W_4^{0k} + x[1]W_4^{1k} + x[2]W_4^{2k} + x[3]W_4^{3k}, \qquad 0 \leq k \leq 3$$

Σε μορφή πινάκων είναι:

$$\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{W_4}\, \boldsymbol{x}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Επομένως ο υπολογισμός του DFT απαιτεί 16 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς.

Μελέτη DFT 2 και 4 σημείων

Οι παράγοντες φάσης που θα χρειαστούμε είναι οι $W_4^0, W_4^1, W_4^2, W_4^3, W_4^4, W_4^6, W_4^9$.

Λόγω των ιδιοτήτων συμμετρίας του παράγοντα φάσης βρίσκουμε:

$$W_4^0 = W_4^4 = 1, \quad W_4^1 = W_4^9 = -j, \quad W_4^2 = W_4^6 = -1, \quad W_4^3 = j$$

Επομένως ο πολλαπλασιασμός πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Αναλύουμε τον υπολογισμό για κάθε συντελεστή $X[k]$:

- $X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = \big[x[0] + x[2]\big] + \big[x[1] + x[3]\big] = g_1 + g_2$
- $X[1] = x[0] - j\,x[1] - x[2] + j\,x[3] = \big[x[0] - x[2]\big] - j\big[x[1] - x[3]\big] = h_1 - jh_2$
- $X[2] = x[0] - x[1] + x[2] - x[3] = \big[x[0] + x[2]\big] - \big[x[1] + x[3]\big] = g_1 - g_2$
- $X[3] = x[0] + j\,x[1] - x[2] - j\,x[3] = \big[x[0] - x[2]\big] + j\big[x[1] - x[3]\big] = h_1 + jh_2$

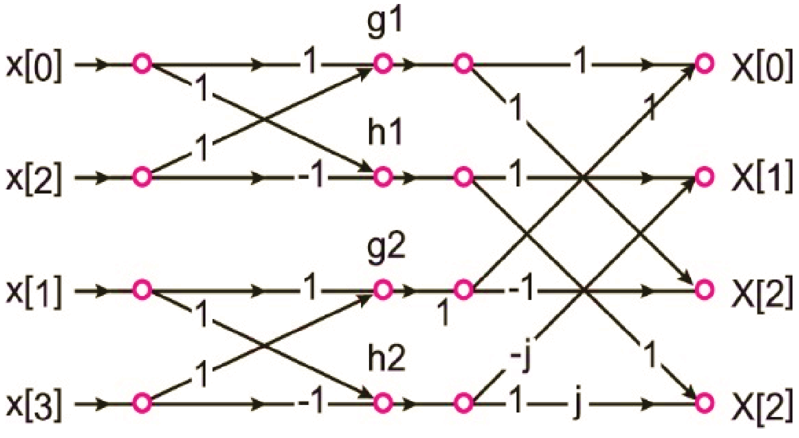
Μελέτη DFT 2 και 4 σημείων

- Οι συντελεστές $X[0]$ και $X[2]$ μπορούν να υπολογιστούν με πρόσθεση και αφαίρεση των g_1 και g_2, αντίστοιχα. Ανάλογα και οι $X[1]$ και $X[3]$.
- Επομένως, μπορούμε να εκτελέσουμε τον υπολογισμό των $X[k]$ από τον πίνακα:

Βήμα 1	Βήμα 2
$g_1 = x[0] + x[2]$ $g_2 = x[1] + x[3]$ $h_1 = x[0] - x[2]$ $h_2 = x[1] - x[3]$	$X[0] = g_1 + g_2$ $X[1] = h_1 - jh_2$ $X[2] = g_1 - g_2$ $X[3] = h_1 + jh_2$

- Αυτός ο τρόπος υπολογισμού του DFT 4 σημείων απαιτεί μόλις **2 μιγαδικούς πολλαπλα-σιασμούς**, έναντι των **16 από τον ορισμό.**

Η διαδικασία υπολογισμού αποδίδεται γραφικά στο διάγραμμα ροής FFT 4-σημείων



Άσκηση 8

Να υπολογιστεί ο DFT 4-σημείων της ακολουθίας $x[n] = \{1, 3, 5, 7\}$ με τον αλγόριθμο DIT-FFT.

Απάντηση: Με βάση το προηγούμενο διάγραμμα ροής του DIT-FFT 4 σημείων βρίσκουμε:

Βήμα 1	Βήμα 2
$g_1 = x[0] + x[2] = 1 + 5 = 6$ $g_2 = x[1] + x[3] = 3 + 7 = 10$ $h_1 = x[0] - x[2] = 1 - 5 = -4$ $h_2 = x[1] - x[3] = 3 - 7 = -4$	$X[0] = g_1 + g_2 = 6 + 10 = 16$ $X[1] = h_1 - jh_2 = -4 + 4j$ $X[2] = g_1 - g_2 = 6 - 10 = -4$ $X[3] = h_1 + jh_2 = -4 - 4j$

Επομένως ο DFT είναι $X[k] = \{16, -4 + 4j, -4, -4 - 4j\}$

Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στη Συχνότητα (Radix-2)

- Άλλη προσέγγιση: Χωριστός υπολογισμός άρτιων και περιττών δειγμάτων του DFT.
- Για ακολουθία $x[n]$ μήκους $N = 2^{\nu}$ και DFT N-σημείων, τα άρτια δείγματα DFT είναι:

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]\, W_{N/2}^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]\, W_{N/2}^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]\, W_{N/2}^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n + \frac{N}{2}\right] W_{N/2}^{(n+N/2)k}$$

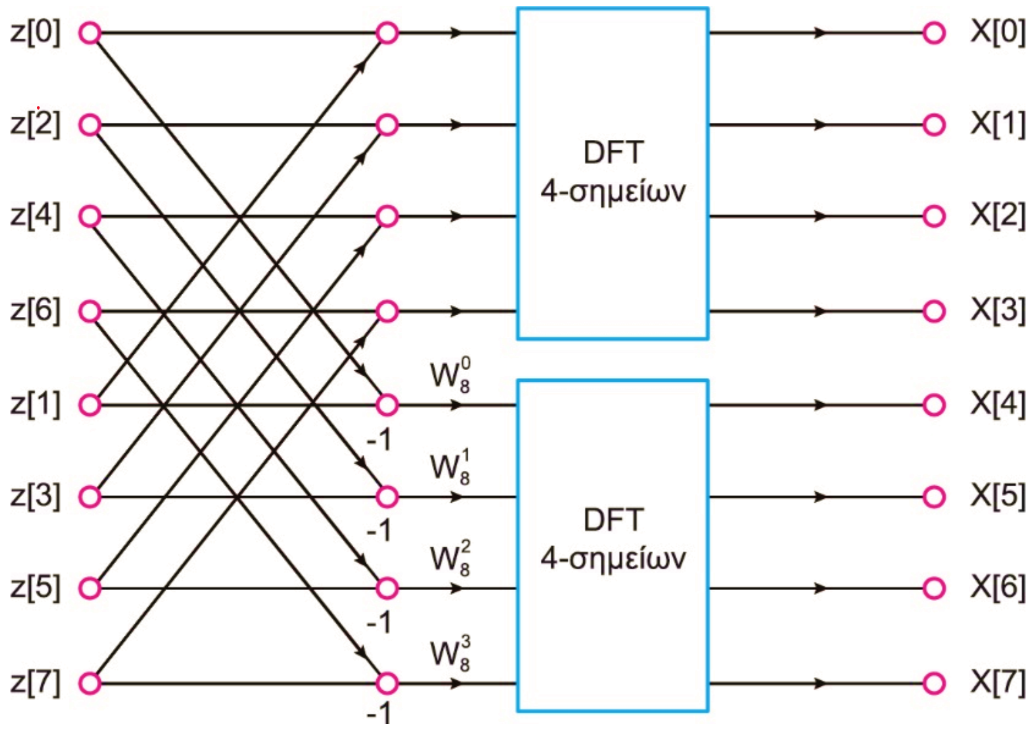
- Επειδή $W_{N/2}^{(n+N/2)k} = W_{N/2}^{nk}$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right]\right] W_{N/2}^{nk}$$

- Άρα τα άρτια δείγματα του DFT N σημείων υπολογίζονται από DFT $N/2$ σημείων σε μία ακολουθία που σχηματίζεται από τα $N/2$ πρώτα σημεία της $x[n]$ και τα $N/2$ τελευταία.
- Ανάλογα, τα περιττά δείγματα του DFT N σημείων δίνονται από :

$$X[2k+1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^{n} \left[x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right]\right] W_{N/2}^{nk}$$

Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στη Συχνότητα (Radix-2)



Δομή FFT αποδεκατισμού στη συχνότητα (DIF-FFT) για $N = 8$

Άσκηση 9

Έστω ότι για έναν μιγαδικό πολ/σμό απαιτείται χρόνος 1 μs και ότι ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του DFT προσδιορίζεται από το χρόνο υπολογισμού μόνο των πολλαπλασιασμών.

(α) Πόσος χρόνος θα απαιτηθεί για τον απευθείας υπολογισμό ενός DFT 1024 σημείων;

(β) Πόσος χρόνος θα απαιτηθεί αν χρησιμοποιήσουμε αλγόριθμο FFT;

(γ) Να σχεδιαστεί διάγραμμα στο Matlab με το πλήθος των μιγαδικών πολλαπλασιασμών για DFT και FFT για τιμές του N από 1 έως 2048.

Απάντηση: (α) Πλήθος μιγαδικών πολλαπλασιασμών DFT: N^2

Χρόνος DFT-1024 σημείων:
$t_{DFT} = 1024^2\ 10^{-6}\,\text{sec} \approx 1{,}05\ sec$

(β) Πλήθος μιγαδικών πολλαπλασιασμών για radix-2 FFT: $(N/2)\,log\,N$

Χρόνος FFT-1024 σημείων:
$t_{FFT} = 5120\,.\,10^{-6}\,\text{sec} = 5{,}12\ msec$

(γ)