Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 7: Μελέτη Συστημάτων Διακριτού Χρόνου στο Πεδίο της Συχνότητας

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Περιγραφή Συστήματος Διακριτού Χρόνου στο πεδίο-Ζ
    - Συνάρτηση Μεταφοράς
    - Σχέση μεταξύ Συνάρτησης Μεταφοράς και Εξίσωσης Διαφορών
    - Απόκριση Συχνότητας
    - Πόλοι και Μηδενικά της Συνάρτησης Μεταφοράς
    - Συστήματα Μόνο Πόλων και Μόνο Μηδενικών
    - Θεωρήματα Αιτιότητας και Ευστάθειας Συστημάτων

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών
- Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
- Απόκριση Συχνότητας - Ιδιότητες
- Εφαρμογές DTFT:
  - Υπολογισμός Απόκρισης Συχνότητας
  - Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών
  - Σχεδίαση Αντίστροφων Συστημάτων
  - Συνδεσμολογίες Συστημάτων
- Μελέτη Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης
  - Επίλυση δυναμικών εξισώσεων

Περιγραφή συστήματος Δ.Χ. στο πεδίο μιγαδικών συχνοτήτων Z

- Συνάρτηση Μεταφοράς
- Παραγωγή Συνάρτησης Μεταφοράς από Εξίσωση Διαφορών
- Απόκριση Συχνότητας
- Πόλοι και Μηδενικά της Συνάρτησης Μεταφοράς
- Συστήματα Μόνο Πόλων και Μόνο Μηδενικών
- Θεωρήματα Αιτιότητας και Ευστάθειας Συστημάτων

Συνάρτηση Μεταφοράς ΓΑΚΜ Συστήματος

Για ΓΑΚΜ σύστημα ΔΧ σύμφωνα με το θεώρημα της συνέλιξης ισχύει:

$$y[n] = h[n] * x[n] \xleftrightarrow{z} Y(z) = H(z)\,X(z)$$

όπου $h[n]$ η κρουστική απόκριση του συστήματος, $x[n]$ το σήμα που εφαρμόζεται στην είσοδό του και $H(z)$ και $X(z)$ οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Ζ. Λύνοντας ως προς $H(z)$ έχουμε:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Η συνάρτηση $H(z)$ ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς** (transfer function) του συστήματος και είναι μοναδική για κάθε σύστημα.

Συνάρτηση Μεταφοράς ΓΑΚΜ Συστήματος

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΑΚΜ συστήματος είναι ο μετασχηματισμός Ζ της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ του συστήματος, δηλαδή:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, z^{-n}$$

Για να είναι πλήρης ο ορισμός της $H(z)$ από την $h[n]$ θα πρέπει να προσδιοριστεί και η περιοχή σύγκλισης. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, τότε θα πρέπει να είναι γνωστά άλλα χαρακτηριστικά του συστήματος, όπως η αιτιότητα και η ευστάθεια.

Άσκηση 1

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα διακριτού χρόνου δέχεται είσοδο $x[n] = (0.5)^n\, u[n]$ και παράγει έξοδο $y[n] = [(-1)^n + 1]\, u[n]$.

(α) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος.

(β) Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = (-0.2)^n\, u[n]$.

Απάντηση: (α) Για τα σήματα $x[n]$ και $y[n]$ υπολογίζουμε τις συναρτήσεις $X(z)$ και $Y(z)$:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.5^n z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.5}, \qquad R_x\colon\ |z| > 0.5$$

$$Y(z) = \frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1} = \frac{2z^2}{(z-1)(z+1)}, \qquad R_y\colon\ |z| > 1$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\dfrac{2z^2}{(z-1)(z+1)}}{\dfrac{z}{z-0.25}} = \frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}, \qquad R_h\colon\ |z| > 1$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Z υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση $h[n]$:

$$h[n] = [0.5 + 1.5(-1)^n]\, u[n]$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

(β) Αρχικά υπολογίζουμε τη συνάρτηση $X(z)$, κατόπιν το γινόμενο $H(z)\,X(z) = Y(z)$ και τέλος με αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ την ακολουθία $y[n]$.

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.2^n z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.2}, \qquad R_x\!: \ |z| > 0.2$$

$$Y(z) = H(z)\,X(z) = \frac{2z^2(z - 0.5)}{(z-1)(z+1)(z-0.2)}, \qquad R_y = R_h \cap R_x\!: \ |z| > 1$$

Επειδή η $Y(z)$ είναι εκφρασμένη σε παράγοντες του όρου z, υπολογίζουμε το ανάπτυγμα της παράστασης $\tilde{Y}(z) = Y(z)/z$. Είναι:

$$\frac{Y(z)}{z} = \tilde{Y}(z) = \frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)(z-0.2)} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z+1} + \frac{R_3}{z-0.2}$$

όπου τα υπόλοιπα R_1, R_2 και R_3 δίνονται από τις σχέσεις:

$$R_1 = \left[(z-1)\tilde{Y}(z)\right]_{z=1} = \left[\frac{2z(z-0.5)}{(z+1)(z-0.2)}\right]_{z=1} = \frac{5}{8}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

$$R_2 = \left[(z+1)\tilde{Y}(z)\right]_{z=-1} = \left[\frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z-0.2)}\right]_{z=-1} = \frac{5}{4}$$

$$R_3 = \left[(z-0.2)\tilde{Y}(z)\right]_{z=0.2} = \left[\frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}\right]_{z=0.2} = \frac{1}{8}$$

Επομένως, το ανάπτυγμα της συνάρτησης $Y(z)$ είναι:

$$Y(z) = \frac{5}{8}\frac{z}{z-1} + \frac{5}{4}\frac{z}{z+1} + \frac{1}{8}\frac{z}{z-0.2}$$

Επειδή η περιοχή σύγκλισης είναι R_y: $|z| > 1$ προκύπτει ότι οι επιμέρους ακολουθίες είναι δεξιάς πλευράς, άρα η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y[n] = \left[\frac{5}{8} + \frac{5}{4}(-1)^n + \frac{1}{8}(0.2)^n\right]u[n]$$

Σχέση μεταξύ Συνάρτησης Μεταφοράς και Εξίσωσης Διαφορών

- Η Γραμμική Εξίσωση Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (ΓΕΔΣΣ) που περιγράφει ένα ΓΑΚΜ σύστημα, το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας (zero state), είναι:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m \, x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k \, y[n-k]$$

- Υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Ζ και των δύο μελών και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο λαμβάνουμε:

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m \, z^{-m} \, X(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k \, z^{-k} \, Y(z)$$

- Λύνοντας ως προς $Y(z)/X(z)$, προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \, z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \, z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Άσκηση 2

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα περιγράφεται από την ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n-1]$$

Να υπολογιστεί: (α) η συνάρτηση μεταφοράς και (β) η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Απάντηση: (α) Γράφουμε τη ΓΕΔΣΣ, μεταφέροντας τους όρους $y[\ ]$ στο δεξί μέλος:

$$y[n] - 0.5\,y[n-1] = x[n-1]$$

Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Ζ και των δύο μελών της ΓΕΔΣΣ. Με χρήση της ιδιότητας της μετατόπισης στο χρόνο λαμβάνουμε:

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = z^{-1}X(z) \Rightarrow Y(z)\left[1 - 0.5\,z^{-1}\right] = z^{-1}X(z) \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - 0.5\,z^{-1}} = \frac{1}{z - 0.5}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(β) Επειδή η κρουστική απόκριση υπολογίζεται με αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ στη συνάρτηση μεταφοράς ($h[n] = Z^{-1}[H(z)]$) αναπτύσσουμε σε άθροισμα μερικών κλασμάτων την παράσταση:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{z(z-0.5)} = \frac{R_1}{z} + \frac{R_2}{z-\frac{1}{2}}$$

Βρίσκουμε τα υπόλοιπα: $R_1 = -2$ και $R_2 = 2$.

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = -2 + \frac{2z}{z-0.5}$$

Επομένως η κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = -2\delta[n] + 2(0.5)^n u[n]$$

Άσκηση 3

Να γραφεί η εξίσωση διαφορών που υλοποιεί το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} + z^{-3}}{1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2}}$$

Απάντηση: Επειδή:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

με χιαστί πολλαπλασιασμό του δεξιού και του αριστερού μέλους έχουμε:

$$\left[1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2}\right] Y(z) = \left[1 - 0.5z^{-1} + z^{-3}\right] X(z)$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ κάθε όρου, βρίσκουμε την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] + 0.5y[n-1] + 0.75y[n-2] = x[n] - 0.5x[n-1] + x[n-3] \Rightarrow$$

$$y[n] = -0.5y[n-1] - 0.75y[n-2] + x[n] - 0.5x[n-1] + x[n-3]$$

Άσκηση 4

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα που βρίσκεται σε ηρεμία έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{z-1}{z^2 - z + 0.25}$$

Να υπολογιστεί:

(α) Η εξίσωση διαφορών (ΓΕΔΣΣ) που περιγράφει το σύστημα.

(β) Η κρουστική απόκριση του συστήματος.

(γ) Η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = u[n]$

<u>Απάντηση</u>: (α) Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από: $H(z) = Y(z)/X(z)$, οπότε έχουμε:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z^2 - z + 0.25} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

Πολλαπλασιάζουμε χιαστί τα κλάσματα και λαμβάνουμε:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.25z^{-2}Y(z) = z^{-1}X(z) - z^{-2}X(z)$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ και λαμβάνουμε τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] - y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n-1] - x[n-2] \Rightarrow$$

$$y[n] = y[n-1] - 0.25y[n-2] + x[n-1] - x[n-2]$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

(β) Επειδή στην έκφραση της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ με όρους z^{-n} ο βαθμός του αριθμητή είναι ίδιος με βαθμό του παρονομαστή θα αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα τη συνάρτηση $\widetilde{H}(z)$:

$$\widetilde{H}(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{z-1}{z(z^2 - z + 0.25)} = \frac{(z-1)}{z(z-0.5)^2}$$

Το ανάπτυγμα είναι:

$$\widetilde{H}(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{R_1}{z} + \frac{R_2}{(z-0.5)^2} + \frac{R_3}{(z-0.5)}$$

Βρίσκουμε τα υπόλοιπα R_1και R_2:

$$R_1 = \left[z\,\widetilde{H}(z)\right]_{z=0} = \left[\frac{(z-1)}{(z-0.5)^2}\right]_{z=0} = -4$$

$$R_2 = \left[(z-0.5)^2\,\widetilde{H}(z)\right]_{z=0.5} = \left[\frac{(z-1)}{z}\right]_{z=0.5} = -1$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Για την εύρεση του υπολοίπου R_3 αντικαθιστούμε τυχαίες τιμές του z, οι οποίες δεν πρέπει να είναι πόλοι. Θέτουμε $z = 1$ στη σχέση (1) και έχουμε:

$$\widetilde{H}(1) = \frac{H(1)}{1} = \frac{(1-1)}{1(1-0.5)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-4}{1} + \frac{-1}{(1-0.5)^2} + \frac{R_3}{(1-0.5)} = 0 \Rightarrow$$

$$= -4 - 4 + \frac{R_3}{0.5} \Rightarrow R_3 = 4$$

Άρα:

$$H(z) = \frac{R_1\, z}{z} + \frac{R_2\, z}{(z-0.5)^2} + \frac{R_3\, z}{(z-0.5)} = -4 - 2\,\frac{0.5\, z}{(z-0.5)^2} + 4\,\frac{z}{(z-0.5)}$$

Με βάση τον Πίνακα 9.1 (σελ. 421 του βιβλίου), η κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = -4\delta[n] - 2n(0.5)^n\, u[n] + 4(0.5)^n\, u[n]$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

(γ) Μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο είτε με συνέλιξη $y[n] = x[n] * h[n]$ είτε με αντίστροφο μετασχηματισμό $y[n] = Z^{-1}\{X(z)H(z)\}$. Θα ακολουθήσουμε τον δεύτερο τρόπο. Ο μετασχηματισμός Ζ της εισόδου είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z-1}, \qquad |z| > 1$$

Επομένως:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{z-1} . \frac{z-1}{z^2 - z + 0.25} = \frac{1}{z^2 - z + 0.25} = \frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2})}$$
$$= \frac{z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

Επειδή η παράσταση στον παρονομαστή είναι δευτέρου βαθμού (διπλή ρίζα) χρησιμοποιούμε τη σχέση (9.39) και λαμβάνουμε το ανάπτυγμα:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{R_2 z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})^2} \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε το R_2 από τη σχέση (9.38):

$$R_2 = \left[\left(1 - 0.5z^{-1}\right)^2 Y(z)\right]_{z=2} = \left[z^{-2}\right]_{z=2} = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Για να υπολογίσουμε το R_1 επιλέγουμε μία τιμή του z που δεν είναι πόλος της συνάρτησης $Y(z)$. Έστω ότι $z = 1$. Υπολογίζουμε το $Y(1)$ από τον ορισμό:

$$Y(1) = \frac{1^{-2}}{(1 - 0.5\ 1^{-1})^2} = \frac{1}{0.5^2} = 4$$

Υπολογίζουμε το $Y(1)$ από το ανάπτυγμα (σχέση 1). Είναι:

$$Y(1) = \frac{R_1}{1 - 0.5\ 1^{-1}} + \frac{R_2\ 1^{-1}}{(1 - 0.5\ 1^{-1})^2} = \frac{R_1}{0.5} + \frac{0.25}{0.25} = \frac{R_1}{0.5} + 1$$

Ισχύει:

$$\frac{R_1}{0.5} + 1 = 4 \Rightarrow R_1 = \frac{3}{2}$$

Άρα το ανάπτυγμα είναι:

$$Y(z) = \left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{0.5\ z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

Από τον Πίνακα 9.1 έχουμε:

$$y[n] = \frac{3}{2}(0.5)^n\ u[n] + \frac{1}{2}(0.5)^n\ nu[n] = \frac{1}{2}[3 + n]\ (0.5)^n\ u[n]$$

Άσκηση 5

Να επιλυθεί η ΓΕΔΣΣ με μηδενικές αρχικές συνθήκες και είσοδο $x[n] = u[n]$:

$$y[n] = 1.6\, y[n-1] - 0.64\, y[n-2] + x[n]$$

<u>Απάντηση</u>: Γράφουμε τη ΓΕΔΣΣ, μεταφέροντας τους όρους $y[\ ]$ στο αριστερό μέλος:

$$y[n] - 1.6\, y[n-1] - 0.64\, y[n-2] = x[n]$$

Ο μετασχηματισμός Ζ της εισόδου είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1}, \qquad |z| > 1$$

Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Ζ και των δύο μελών της ΓΕΔΣΣ. Με χρήση της ιδιότητας της μετατόπισης στο χρόνο του μετασχηματισμού Ζ λαμβάνουμε:

$$Y(z) - 1.6\, z^{-1}Y(z) - 0.64\, z^{-2}Y(z) = X(z) \Rightarrow Y(z)\left[1 - 1.6z^{-1} - 0.64z^{-2}\right] = \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-1.6z^{-1}-0.64z^{-2})} = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.8z^{-1})^2}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Λόγω ύπαρξης πολλαπλού πόλου χρησιμοποιούμε τη σχέση (9.39) και λαμβάνουμε το ανάπτυγμα:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 - z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - 0.8z^{-1}} + \frac{R_3 z^{-1}}{(1 - 0.8z^{-1})^2}, \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τα R_1 και R_3 από τη σχέση (9.38):

$$R_1 = \left[\left(1 - z^{-1}\right)^2 Y(z)\right]_{z^{-1}=1} = \left[\frac{1}{(1 - 0.8z^{-1})^2}\right]_{z^{-1}=1} = \cdots = 25$$

$$R_3 = \left[\left(1 - 0.8z^{-1}\right)^2 Y(z)\right]_{z^{-1}=1/0.8=1.25} = \left[\frac{1}{(1 - z^{-1})}\right]_{z^{-1}=1.25} = \cdots = -4$$

Για να υπολογίσουμε το R_2 επιλέγουμε μία τιμή του z που δεν είναι πόλος της συνάρτησης $Y(z)$. Έστω ότι $z = 2$. Υπολογίζουμε το $Y(2)$ από τον ορισμό. Είναι:

$$Y(2) = \frac{1}{(1 - 2^{-1})(1 - 0.8\ 2^{-1})} = \cdots = \frac{1}{0.18}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Υπολογίζουμε το $Y(2)$ από το ανάπτυγμα (σχέση 1). Είναι:

$$Y(2) = \frac{25}{1-2^{-1}} + \frac{R_2}{(1-0.8\,2^{-1})} - \frac{4\,2^{-1}}{(1-0.8\,2^{-1})^2} = \frac{25}{0.5} + \frac{R_2}{0.6} - \frac{2}{0.36}$$

Κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε:

$$R_2 = -\frac{5}{6}$$

Άρα το ανάπτυγμα είναι:

$$Y(z) = 25\frac{1}{1-z^{-1}} + \left(-\frac{5}{6}\right)\frac{1}{1-0.8z^{-1}} + (-5)\frac{0.8\,z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})^2}$$

και από τον Πίνακα 9.2 (σελ. 421) βρίσκουμε:

$$y[n] = 25(1)^n u[n] - \frac{5}{6}(0.8)^n u[n] - 5(0.8)^n n\,u[n] = \left[25 - 5\left[n + \frac{1}{6}\right](0.8)^n\right] u[n]$$

Απόκριση Συχνότητας

- Αν ο μοναδιαίος κύκλος ($z = e^{j\omega}$) περιλαμβάνεται στην περιοχή σύγκλισης, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς$H(z)$ επάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Το αποτέλεσμα είναι η **απόκριση συχνότητας** (frequency response) του συστήματος:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = b_0\, e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{m=1}^{M}(e^{j\omega} - z_m)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)}$$

- Η απόκριση συχνότητας είναι μία μιγαδική συνάρτηση, επομένως σε πολικές συντεταγμένες μπορεί να εκφραστεί σε **απόκριση μέτρου** (magnitude response) και σε **απόκριση φάσης** (phase response).

- Η **απόκριση μέτρου** είναι:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = |b_0| \frac{\prod_{m=1}^{M}\left|e^{j\omega} - z_m\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{j\omega} - p_k\right|}$$

- Η **απόκριση φάσης** είναι:

$$\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right) = [0\ \eta\ \pi] + [(N-M)\omega] + \sum_{m=1}^{M} \measuredangle(e^{j\omega} - z_m) - \sum_{k=1}^{N} (\measuredangle e^{j\omega} - p_k)$$

Απόκριση Συχνότητας

- Επειδή κάθε όρος $\left|e^{j\omega} - z_m\right|$ αντιπροσωπεύει την απόσταση του μηδενικού z_m από τον μοναδιαίο κύκλο για τη συχνότητα ω, και ομοίως κάθε όρος $\left|e^{j\omega} - p_k\right|$ αντιπροσωπεύει την απόσταση του πόλου p_k από τον μοναδιαίο κύκλο για τη συχνότητα ω, προκύπτει ότι η απόκριση μέτρου μεταφράζεται ως το πηλίκο του αθροίσματος των αποστάσεων των μηδενικών από τον μοναδιαίο κύκλο, προς το άθροισμα των αποστάσεων των πόλων από τον μοναδιαίο κύκλο, για κάθε τιμή της ψηφιακής συχνότητας ω.
- Η απόκριση φάσης είναι το άθροισμα ενός σταθερού όρου [0 ή π], ενός γραμμικού συντελεστή $(N - M)$ ως προς τη συχνότητα ω και ενός μη γραμμικού παράγοντα. Ο μη γραμμικός παράγοντας είναι η διαφορά του αθροίσματος των διανυσμάτων των πόλων από το άθροισμα των διανυσμάτων των μηδενικών.

Πόλοι και Μηδενικά της Συνάρτησης Μεταφοράς

- Παραγοντοποιώντας τα πολυώνυμα αριθμητή και παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς, έχουμε:

$$H(z) = b_0\, z^{N-M} \frac{\prod_{m=1}^{M}(z - z_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}$$

- Οι πόλοι p_k δεν περιλαμβάνονται στην περιοχή σύγκλισης R_H επειδή η συνάρτηση μεταφοράς τείνει στο άπειρο: $\lim_{z \to p_k} H(z) = \infty$.
- Η γραφική αναπαράσταση πόλων και μηδενικών σχηματίζει το **διάγραμμα πόλων – μηδενικών** (pole-zero map).
- Αν στην ίδια θέση του διαγράμματος υπάρχει πόλος και μηδενικό, τότε αλληλοαναιρούνται.
- Λόγω του όρου z^{N-M} θα έχουμε $|N-M|$ μηδενικά στη θέση $z=0$ αν $N > M$ ή $|N-M|$ πόλους αν $N < M$.
- Το διάγραμμα πόλων – μηδενικών είναι χρήσιμο στη μελέτη κρίσιμων ιδιοτήτων ενός συστήματος, όπως η ευστάθεια και η αιτιότητα, καθώς και στη σχεδίαση ψηφιακών συστημάτων και φίλτρων.

Συστήματα Μόνο Μηδενικών

- Αν $\alpha_k = 0$ για $1 \le k \le N$, τότε η συνάρτηση μεταφοράς, γράφεται:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m \, z^{-m} = \frac{1}{z^M} \sum_{m=0}^{M} b_m \, z^{M-m}$$

- **Σύστημα μόνο-μηδενικών** (all-zero system) επειδή έχει μόνο μηδενικά και κανένα πόλο. Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλοι οι πόλοι του είναι συγκεντρωμένοι στο σημείο $z = 0$ (με πολλαπλότητα M).

- Με αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ βρίσκουμε ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος μόνο-μηδενικών δίνεται από την παρακάτω σχέση, η οποία περιγράφει ένα **μη-αναδρομικό σύστημα**:

$$h[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m \, \delta[n-m]$$

- Τα μη-αναδρομικά συστήματα έχουν **πεπερασμένη κρουστική απόκριση** (Finite Impulse Response, FIR).

- Τα FIR συστήματα είναι πάντα ευσταθή, γεγονός που συνιστά ένα σημαντικό πλεονέκτημά τους.

Συστήματα Μόνο Πόλων

- Στην περίπτωση που $b_k = 0$ για $1 < k \leq M$, τότε η συνάρτηση μεταφοράς, γράφεται:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a[k]\, z^{-k}}$$

- **Σύστημα μόνο-πόλων** (all-pole system) επειδή έχει μόνο πόλους και καθόλου μηδενικά. Η κρουστική απόκριση του συστήματος μόνο-πόλων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$$

- Τα συστήματα μόνο πόλων αποτελούν υποπερίπτωση των αναδρομικών συστημάτων.
- Τα αναδρομικά συστήματα ονομάζονται επίσης και **άπειρης κρουστικής απόκρισης** (Infinite Impulse Response, IIR).
- Αν όλοι οι πόλοι της $H(z)$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε το σύστημα είναι ευσταθές.

Θεωρήματα Αιτιότητας και Ευστάθειας Συστημάτων

Θεώρημα Ευστάθειας Συστημάτων: Ένα ΓΑΚΜ σύστημα είναι ευσταθές όταν και μόνον όταν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$.

Θεώρημα Αιτιότητας και Ευστάθειας Συστημάτων: Ένα αιτιατό ΓΑΚΜ σύστημα είναι ευσταθές όταν και μόνο όταν όλοι οι πόλοι του βρίσκονται <u>μέσα</u> στον μοναδιαίο κύκλο.

- Ένα **ευσταθές** σύστημα περιλαμβάνει στην περιοχή σύγκλισης τον μοναδιαίο κύκλο. Ισχύει και το αντίστροφο.
- Αν το σύστημα είναι **αιτιατό** και έχει περιοχή σύγκλισης R_h: $|z| > a$, όπου $\alpha < 1$ τότε η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.
- Εφόσον η περιοχή σύγκλισης δεν είναι δυνατό να περιέχει πόλους, προκύπτει ότι ένα αιτιατό ΓΑΚΜ σύστημα είναι ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι του βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. Ισχύει και το αντίστροφο.

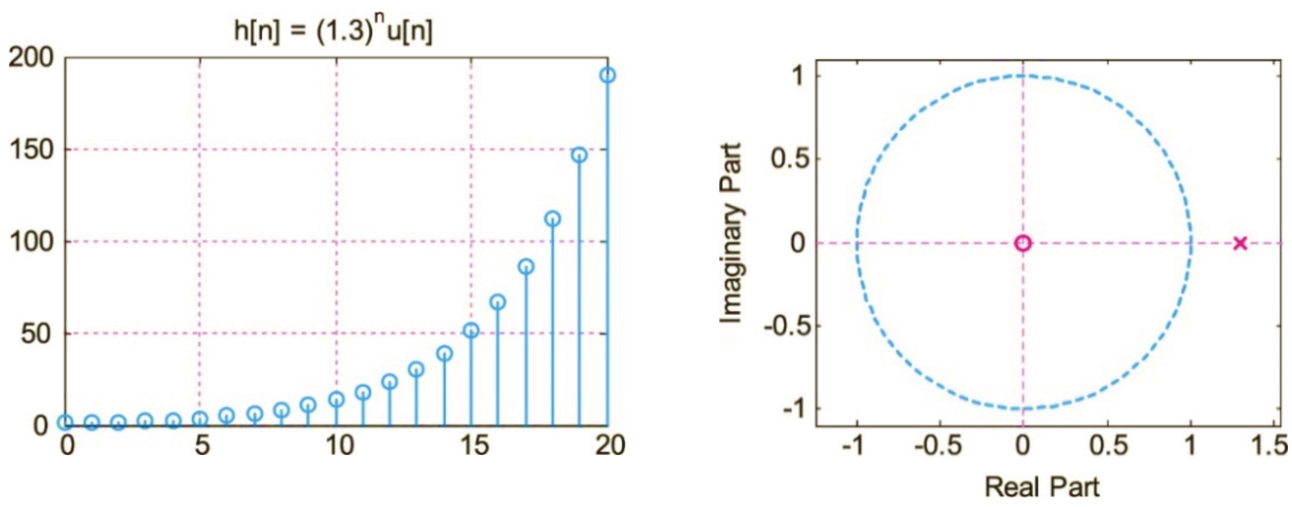
Αναλόγως της τιμής α, ο πόλος μπορεί να βρίσκεται είτε εντός του μοναδιαίου κύκλου ($|\alpha| < 1$) είτε εκτός ($|\alpha| > 1$) είτε επάνω στον κύκλο ($|\alpha| = 1$). Αναλυτικότερα, μπορεί να λάβει έξι διαφορετικές θέσεις: α < -1, $\alpha = -1$, $1 < a \leq 0$, $0 \leq a < 1$, $\alpha = 1$ και $\alpha > 1$, όπως δείχνεται στα επόμενα σχήματα.

Μελέτη Ευστάθειας Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Z

Έστω σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$ και συνάρτηση μεταφοράς:

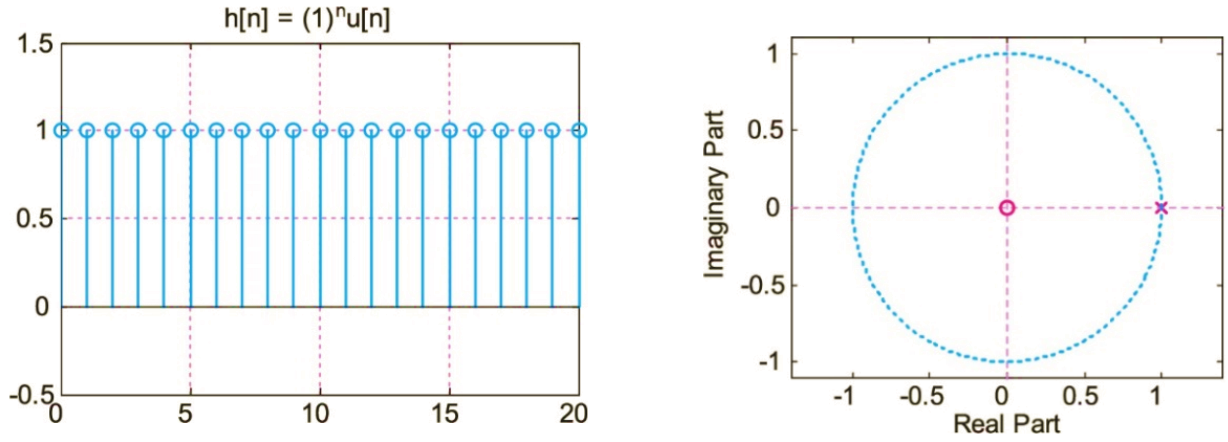
$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \qquad R_x\colon\ |z| > a$$

Το σύστημα έχει έναν πόλο στο $z = a$ και ένα μηδενικό στο $z = 0$.

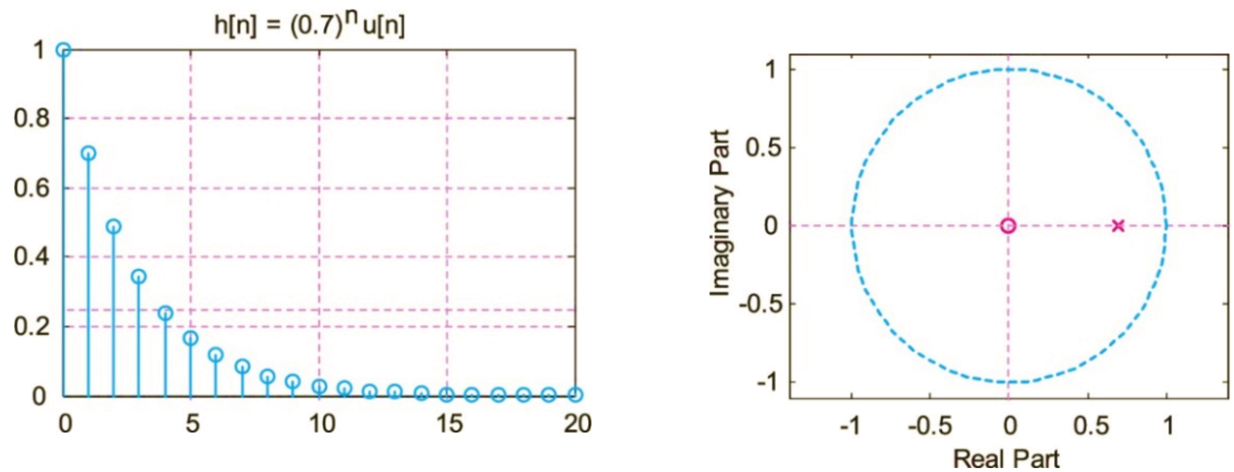


(α) $a > 1$: Πόλος εκτός του μοναδιαίου κύκλου (δεξί ημιεπίπεδο)

Μελέτη Ευστάθειας Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Ζ

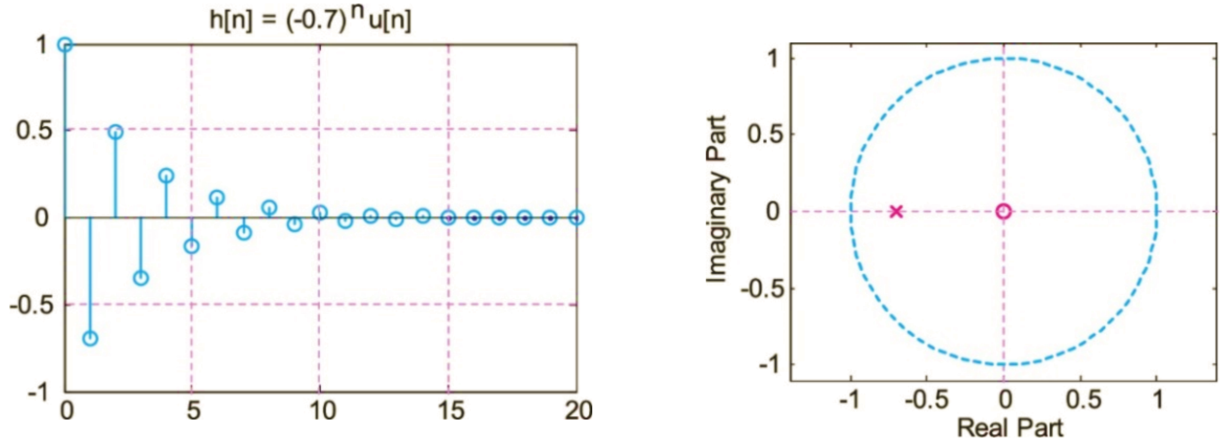


(β) $a = 1$: Πόλος επάνω στον μοναδιαίο κύκλο (δεξί ημιεπίπεδο)

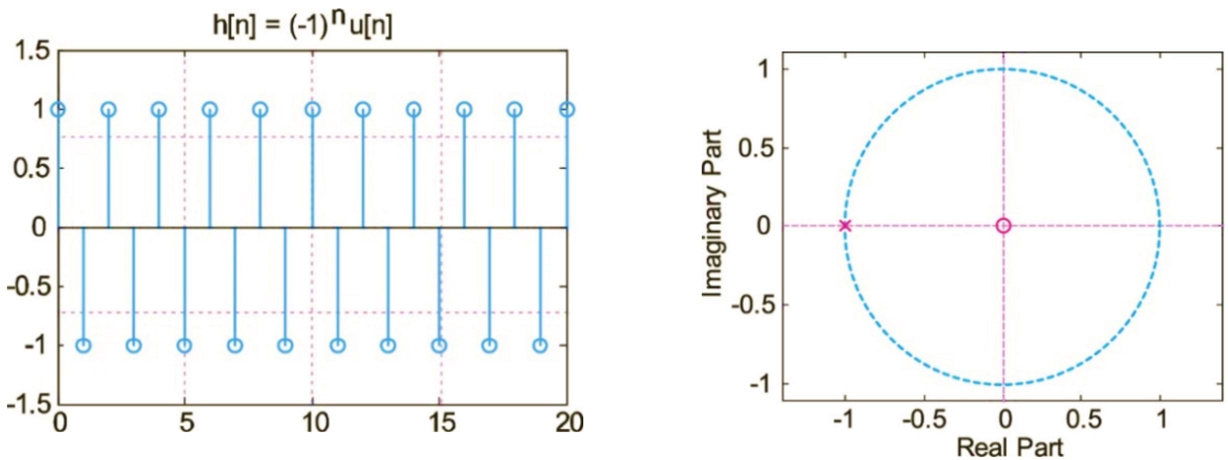


(γ) $0 \leq a < 1$: Πόλος εντός του μοναδιαίου κύκλου (δεξί ημιεπίπεδο)

Μελέτη Ευστάθειας Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Z

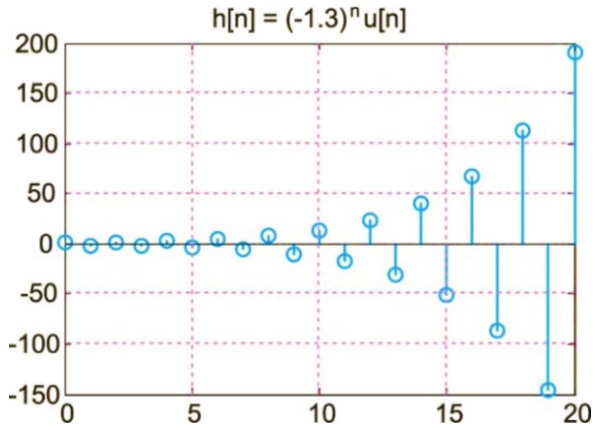


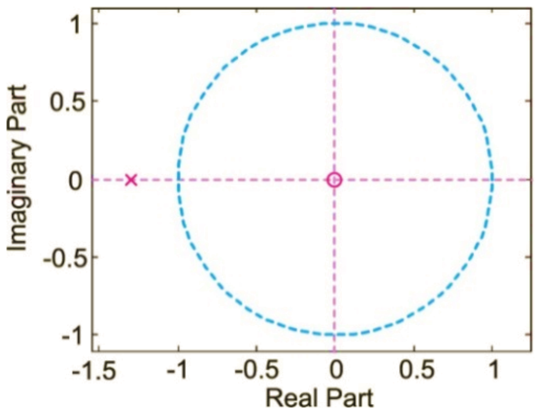
(δ) $1 < a \leq 0$: Πόλος εντός του μοναδιαίου κύκλου (αριστερό ημιεπίπεδο)



(ε) $a = -1$: Πόλος επάνω στον μοναδιαίο κύκλο (αριστερό ημιεπίπεδο)

Μελέτη Ευστάθειας Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Z





(στ) $a < -1$: Πόλος εκτός του μοναδιαίου κύκλου (αριστερό ημιεπίπεδο)

- Όταν ο πόλος βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο η ακολουθία είναι μονότονη.
- Όταν ο πόλος βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου $|\alpha| < 1$, τότε η $h[n]$ τείνει στο μηδέν για $n \to \infty$, επομένως το σύστημα είναι **ευσταθές**.
- Όταν ο πόλος βρίσκεται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο $|\alpha| = 1$, τότε η $h[n]$ έχει μία σταθερή τιμή και άπειρη διάρκεια, επομένως το σύστημα είναι **οριακά ευσταθές**.
- Όταν ο πόλος βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου $|\alpha| > 1$, τότε η $h[n]$ τείνει στο άπειρο για $n \to \infty$, επομένως το σύστημα είναι **ασταθές**.

Ανάλογα ισχύουν και για την περίπτωση μιγαδικών πόλων.

Άσκηση 6

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{3}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{4}{1 - 2z^{-1}}$$

Να προσδιοριστεί η περιοχή σύγκλισης R_h και να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h[n]$ έτσι ώστε το σύστημα να είναι: (α) Ευσταθές, (β) Αιτιατό.

__Απάντηση__: Οι πόλοι του συστήματος είναι $p_1 = 0.5$ και $p_2 = 2$.

(α) Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει σύμφωνα με το θεώρημα της ευστάθειας, η περιοχή σύγκλισης R_h να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.
Άρα, η περιοχή σύγκλισης πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$R_h\!:\ 0.5 < |z| < 2 \ \text{ ή } \ |z| > 0.5 \text{ και } |z| < 2$$

Εφόσον $|z| > 0.5$, το πρώτο μέρος της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$, δηλαδή η συνάρτηση $H_1(z) = 3/(1 - 0.5z^{-1})$ έχει αντίστροφο μετασχηματισμό Z την ακολουθία δεξιάς πλευράς $h_1[n] = 3(0.5)^n u[n]$, που είναι αιτιατή και ευσταθής.

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Εφόσον $|z| < 2$, η συνάρτηση $H_2(z) = 4/(1 - 2z^{-1})$ έχει αντίστροφο μετασχηματισμό Z την ακολουθία αριστερής πλευράς $h_2[n] = -4(2)^n u[-n-1]$, που είναι ευσταθής αλλά όχι αιτιατή. Επομένως, η συνολική κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] = 3(0.5)^n u[n] - 4(2)^n u[-n-1]$$

Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση για $n \to \infty$ τείνει στο μηδέν, άρα το σύστημα είναι ευσταθές. Δεν είναι όμως αιτιατό, εξαιτίας της ακολουθίας αριστερής πλευράς $h_2[n]$.

Άσκηση 6 (συνέχεια)

(β) Για να είναι το σύστημα αιτιατό πρέπει η περιοχή σύγκλισης να περιοχή εκτός κύκλου που έχει ακτίνα μεγαλύτερη του πλέον απομακρυσμένου πόλου. Άρα, η περιοχή σύγκλισης πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση R_h: $|z| > 2$.

Εφόσον $|z| > 2$ ισχύει και $|z| > 0.5$. Άρα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $H_1(z) = 3/(1 - 0.5z^{-1})$ είναι η ακολουθία δεξιάς πλευράς $h_1[n] = 3(0.5)^n u[n]$, που είναι αιτιατή και ευσταθής.

Εφόσον $|z| > 2$, η συνάρτηση $H_2(z) = 4/(1 - 2z^{-1})$ έχει αντίστροφο μετασχηματισμό Z την ακολουθία δεξιάς πλευράς $h_2[n] = 4(2)^n u[n]$, που είναι αιτιατή αλλά ασταθής επειδή τείνει στο άπειρο για $n \to \infty$. Επομένως, η συνολική κρουστική απόκριση είναι:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] = 3(0.5)^n u[n] + 4(2)^n u[n]$$

Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση είναι αιτιατή, όχι όμως και ευσταθής εξαιτίας της ακολουθίας $h_2[n]$.

Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών

Επίλυση ΓΕΔΣΣ με τον Z⁺ (1/4)

- Στα πρακτικά συστήματα διακριτού χρόνου τα σήματα εισόδου είναι αιτιατά, ενώ είναι σύνηθες το σύστημα να μην βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας.

- Θα παρουσιάσουμε μία μεθοδολογία επίλυσης μίας ΓΕΔΣΣ με αρχικές συνθήκες που περιγράφει ένα ΓΑΚΜ σύστημα το οποίο δεν βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, κάνοντας χρήση του μονόπλευρου μετασχηματισμού Z^{+}.

- Για την επίλυση θα αξιοποιήσουμε την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο του Z^{+}, η οποία περιγράφεται από:

$$x[n-n_0]\,u[n] \xleftrightarrow{Z^{+}} z^{-n_0}X^{+}(z) + \sum_{n=1}^{n_0} x[-n]\,z^{n-n_0}$$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ με τον Z$^+$ (2/4)

- Θεωρούμε ένα ΓΑΚΜ σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \qquad (1)$$

με αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$. Το σήμα $x[n]$ είναι αιτιατό.

- Υπολογίζοντας τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Z^+ και των δύο μελών της ΓΕΔΣΣ και από την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο του Z^+, έχουμε:

$$Y^+(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m\, z^{-m}\, X^+(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}\, Y^+(z) + \sum_{k=1}^{N} z^{-k} \sum_{n=0}^{N-1} y[-n] z^n$$

- Μεταφέρουμε στο αριστερό μέλος τους όρους $Y^+(z)$, και έχουμε:

$$Y^+(z) \sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k} = X^+(z) \sum_{m=0}^{M} b_m\, z^{-m} + \sum_{k=1}^{N} z^{-k} \sum_{n=0}^{N-1} y[-n]\, z^n$$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ με τον Z$^+$ (3/4)

- Ονομάζοντας τα πολυώνυμα $A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k},\; B(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}$ και $I(z) = \sum_{k=1}^{N} z^{-k} \sum_{n=0}^{N-1} y[-n] z^{n}$, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$Y^{+}(z)A(z) = X^{+}(z)B(z) + I(z)$$

- Λύνοντας ως προς $Y^{+}(z)$ και επειδή $H(z) = B(z)/A(z)$ λαμβάνουμε:

$$Y^{+}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} X^{+}(z) + \frac{I(z)}{A(z)} = H(z)\, X^{+}(z) + \frac{I(z)}{A(z)} \qquad (2)$$

- Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση συστήματος που δεν βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, στην απόκριση υπάρχει και ο όρος $I(z)/A(z)$, όπου το πολυώνυμο $I(z)$ οφείλεται στις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

- Θυμίζουμε ότι η απόκριση συστήματος που βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας είναι:

$$Y^{+}(z) = H(z)\, X^{+}(z)$$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ με τον Z$^+$ (4/4)

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ του πρώτου κλάσματος της (2) δίνει την **απόκριση μηδενικής αρχικής κατάστασης**, ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ του δεύτερου κλάσματος δίνει την **απόκριση μηδενικής εισόδου**, δηλ.
    - Απόκριση μηδενικής κατάστασης:

$$y_{zs}[n] = Z^{-1}\{H(z)\, X^{+}(z)\}$$

    - Απόκριση μηδενικής εισόδου:

$$y_{zi}[n] = Z^{-1}\left\{\frac{I(z)}{A(z)}\right\}$$

- Επειδή το πολυώνυμο $I(z)$ περιγράφει τις αρχικές συνθήκες του συστήματος, συμπεραίνουμε ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι η έξοδος που οφείλεται αποκλειστικά στη (μη-μηδενική) αρχική κατάσταση του συστήματος.

- Επομένως, η συνολική έξοδος ενός ΓΑΚΜ συστήματος που δεν βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας και δέχεται ένα αιτιατό σήμα στην είσοδό του είναι:

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

Άσκηση 7

Να βρεθεί η απόκριση του ΓΑΚΜ συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ $y[n] = 0.2y[n-1] + 0.8y[n-2] + x[n]$, για είσοδο $x[n] = (0.5)^n\, u[n]$ και αρχικές συνθήκες $y[-1] = 5$ και $y[-2] = 10$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον Z^+ κάθε ενός από τους όρους της ΓΕΔΣΣ:

$$Y^+(z) = 0.2\left[z^{-1}Y^+(z) + y[-1]\right] + 0.8\left[z^{-2}\, Y^+(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\right] + X^+(z)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αρχικών συνθηκών, έχουμε:

$$Y^+(z) = 0.2\ [z^{-1}\, Y^+(z) + 5] + 0.8\ [z^{-2}\, Y^+(z) + 5z^{-1} + 10] + X^+(z) \Rightarrow$$

$$Y^+(z) = 0.2\, z^{-1}\, Y^+(z) + 1 + 0.8\, z^{-2}\, Y^+(z) + 4z^{-1} + 8 + X^+(z)$$

Μεταφέροντας τους όρους που περιέχουν την $Y^+(z)$ στο αριστερό μέλος, έχουμε:

$$Y^+(z)\left[1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}\right] = 9 + 4z^{-1} + X^+(z)$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Επειδή ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $X^+(z)$ της $x[n] = (0.5)^n u[n]$ είναι: $X^+(z) = 1/(1 - 0.5z^{-1})$, λαμβάνουμε:

$$Y^+(z)\left[1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}\right] = (9 + 4z^{-1}) + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Επιλύοντας ως προς $Y^+(z)$ έχουμε:

$$Y^+(z) = \frac{(9 + 4z^{-1})}{1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}} + \frac{\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}} \qquad (1)$$

Εκτελώντας την πρόσθεση των κλασμάτων και κατόπιν παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή, έχουμε:

$$Y^+(z) = \frac{10 - 0.5z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2})(1 - 0.5z^{-1})} =$$

$$= \frac{10 - 0.5\, z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > 1$ και οι πόλοι του συστήματος είναι $z_1 = 1$, $z_2 = -0.8$, $z_3 = 0.5$. Επειδή ένας πόλος βρίσκεται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο (και οι υπόλοιποι εντός του μοναδιαίου κύκλου) το σύστημα είναι οριακά ευσταθές.

Για το ανάπτυγμα του $Y^+(z)$ σε μερικά κλάσματα θα υπολογίσουμε τα υπόλοιπα R_1, R_2 και R_3:

$$Y^+(z) = \frac{R_1}{1 - z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + 0.8z^{-1}} + \frac{R_3}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Επειδή οι πόλοι είναι απλοί και διακριτοί ($z_1 = 1$, $z_2 = -0.8$, $z_3 = 0.5$), υπολογίζουμε υπόλοιπα R_1, R_2 και R_3 από τη σχέση:

$$R_k = \left. \frac{\tilde{b}[0] + \tilde{b}[1]z^{-1} + \cdots + \tilde{b}[N-1]z^{-(N-1)}}{1 + a[1]z^{-1} + \cdots + a[N]z^{-N}} \left(1 - p_k z^{-1}\right) \right|_{z=p_k}$$

και έχουμε:

Άσκηση 7 (συνέχεια)

- $R_1 = \left[Y^+(z)\left(1 - z^{-1}\right)\right]_{z=1} = \left[\frac{10-0.5\,z^{-1}-2z^{-2}}{(1+0.8z^{-1})(1-0.5z^{-1})}\right]_{z=1} = \frac{25}{3}$

- $R_2 = \left[Y^+(z)\left(1 + 0.8z^{-1}\right)\right]_{z=-0.8} = \left[\frac{10-0.5\,z^{-1}-2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}\right]_{z=-0.8} = \frac{80}{39}$

- $R_3 = \left[Y^+(z)\left(1 - 0.5z^{-1}\right)\right]_{z=0.5} = \left[\frac{10-0.5\,z^{-1}-2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+0.8z^{-1})}\right]_{z=0.5} = -\frac{10}{26}$

Επομένως, το ανάπτυγμα της $Y^+(z)$ σε μερικά κλάσματα είναι:

$$Y^+(z) = \left(\frac{25}{3}\right)\frac{1}{1 - z^{-1}} + \left(\frac{80}{39}\right)\frac{1}{1 + 0.8z^{-1}} + \left(-\frac{10}{26}\right)\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Εκτελώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Z προκύπτει η ζητούμενη λύση:

$$y[n] = \left(\frac{25}{3}\right)(1)^n u[n] + \left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n u[n] + \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n u[n]$$

$$= \left[\left(\frac{25}{3}\right) + \left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n\right] u[n]$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Η συνολική λύση μπορεί να εκφραστεί με τους ακόλουθους τρόπους:

- Ως άθροισμα της **ομογενούς λύσης** και της **μερικής λύσης**:

$$y[n] = \left[\left(\frac{25}{3}\right) + \left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n\right]u[n] + \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n u[n]$$

Η ομογενής λύση οφείλεται στους πόλους και η μερική λύση στα μηδενικά του σήματος εισόδου.

- Ως άθροισμα της **μεταβατικής κατάστασης** και της **μόνιμης κατάστασης**:

$$y[n] = \left[\left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n + \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n\right]u[n] + \left(\frac{25}{3}\right)u[n]$$

Η μεταβατική κατάσταση οφείλεται στους πόλους που βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου και η μόνιμη κατάσταση οφείλεται στους πόλους που βρίσκονται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Αν υπάρχουν πόλοι εκτός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η απόκριση τείνει στο άπειρο και το σύστημα γίνεται ασταθές.

Άσκηση 7 (συνέχεια)

- Ως άθροισμα της **απόκρισης μηδενικής εισόδου** (ή αρχικής κατάστασης) και της **απόκρισης μηδενικής αρχικής κατάστασης**. Συγκεκριμένα, η παραπάνω σχέση (1) είναι άθροισμα δύο όρων. Ο πρώτος όρος μπορεί να γραφεί ως:

$$Y_{zi}(z) = H(z)\, X_{ic}(z)$$

αναπαριστά την απόκριση για τη δοθείσα είσοδο, θεωρώντας μηδενική αρχική κατάσταση και ονομάζεται **απόκριση μηδενικής αρχικής κατάστασης**.

Η συνάρτηση $X_{ic}(z)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία ισοδύναμη είσοδος αρχικής κατάστασης η οποία παράγει την ίδια έξοδο $Y_{zi}(z)$ που δημιουργείται από τις αρχικές συνθήκες. Στο παράδειγμά μας και με βάση τη σχέση (1) προκύπτει: $x_{ic}[n] = \{\widehat{9}, 4\}$.

Ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφεί ως:

$$Y_{zs}(z) = H(z)\, X(z)$$

αναπαριστά την απόκριση για μηδενική είσοδο, με εφαρμογή μόνο της αρχικής κατάστασης και ονομάζεται **απόκριση μηδενικής εισόδου**.

Άσκηση 7 (συνέχεια)

- Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ της σχέσης (1), έχουμε:

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

όπου $y_{zs}[n]$ είναι η απόκριση μηδενικής εισόδου η οποία δίνεται από:

$$y_{zi}[n] = \left(\frac{65}{9}\right)(1)^n u[n] + \left(\frac{116}{45}\right)(-0.8)^n u[n]$$

$$= \left[\left(\frac{65}{9}\right) + \left(\frac{116}{45}\right)\ (-0.8)^n\right] u[n]$$

και $y_{zs}[n]$ είναι η απόκριση μηδενικής κατάστασης, η οποία δίνεται από:

$$y_{zs}[n] = \left(\frac{10}{9}\right)(1)^n u[n] + \left(\frac{32}{117}\right)(-0.8)^n u[n] + \left(\frac{5}{13}\right)(0.5)^n u[n]$$

$$= \left[\left(\frac{32}{117}\right)(-0.8)^n + \left(\frac{5}{13}\right)(0.5)^n + \left(\frac{10}{9}\right)\right] u[n]$$

Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

Η επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές (ΓΔΕΣΣ) που μελετήσαμε με τον μετασχηματισμό Laplace μπορεί να πραγματοποιηθεί και με τον μετασχηματισμό Z εφόσον μετατρέψουμε κατάλληλα τις παραγώγους σε διαφορές λαμβάνοντας υπόψη τη συχνότητα δειγματοληψίας. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις προσεγγιστικές σχέσεις:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) \approx \frac{d}{dt}\left(\frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s}\right) = \frac{y(t) - 2y(t - T_s) + y(t - 2T_s)}{T_s^2}$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης.

Άσκηση 8

Ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου που είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, περιγράφεται από τη ΓΔΕΣΣ:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος για είσοδο $x(t) = u[t]$.

<u>Απάντηση</u>: Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε:

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 5s + 6)} = \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{s+2} + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{s+3}$$

Επομένως η απόκριση για βηματική είσοδο είναι:

$$y(t) = \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\right]u(t)$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

Εφαρμόζουμε στη διαφορική εξίσωση τις προσεγγίσεις της πρώτης και δεύτερης παραγώγου που δίνονται στις σχέσεις (11.29) και (11.30), κατόπιν θέτουμε $t = nTs$ και λαμβάνουμε:

$$\frac{y(t) - 2y(t - T_s) + y(t - 2T_s)}{T_s^2} + 5\,\frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s} + 6y(t) = x(t)$$

$$\Rightarrow \left(6 + \frac{5}{T_s} + \frac{1}{T_s^2}\right) y(t) + \left(-\frac{5}{T_s} - \frac{2}{T_s^2}\right) y(t - T_s) + \left(\frac{1}{T_s^2}\right) y(t - 2T_s) = x(t)$$

$$\Rightarrow \left(6 + \frac{5}{T_s} + \frac{1}{T_s^2}\right) y(nT_s) + \left(-\frac{5}{T_s} - \frac{2}{T_s^2}\right) y((n-1)T_s) + \left(\frac{1}{T_s^2}\right) y((n-2)T_s) = x(nT_s)$$

$$\Rightarrow a_1 y(nT_s) + a_2 y((n-1)T_s) + a_3 y((n-2)T_s) = b_1 x(nT_s)$$

όπου:

$$a_1 = \left(6 + \frac{5}{T_s} + \frac{1}{T_s^2}\right), \qquad a_2 = -\left(\frac{5}{T_s} + \frac{2}{T_s^2}\right), \qquad a_3 = \left(\frac{1}{T_s^2}\right), \qquad b_1 = 1$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

Η περίοδος δειγματοληψίας πρέπει να έχει μία επαρκώς μικρή τιμή που υπολογίζεται με το κριτήριο Nyquist. Για λόγους απλότητας θέτουμε $T_s = 1$ και λαμβάνουμε:

$$a_1 = 12, \qquad a_2 = -7, \qquad a_3 = 1, \qquad b_1 = 1$$

Επομένως, το δοθέν σύστημα συνεχούς χρόνου όταν διακριτοποιηθεί περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$12y[n] - 7y[n-1] + y[n-2] = x[n],\ \ n > 0$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες έχουμε $y[0] = 1/12$. Από το θεώρημα τελικής τιμής βρίσκουμε $y[n] = 1/6$ για $n \to \infty$. Ο μετασχηματισμός Z της εξόδου είναι:

$$Y(z)\left(12 - 7z^{-1} + z^{-2}\right) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(3 - z^{-1})(4 - z^{-1})} = \cdots$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{3 - z^{-1}} + \frac{1}{3}\frac{1}{4 - z^{-1}}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετ. Z με χρήση του Πίνακα 9.2, βρίσκουμε:

$$y[n] = \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(3)^n + \frac{1}{3}(4)^n\right]u[n]$$

Η επίλυση αυτή είναι προσεγγιστική και όχι ακριβής, επειδή επιλέξαμε μεγάλη τιμή για την περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1$. Με μικρότερη τιμή, η επίλυση γίνεται πιο ακριβής.

Απόκριση Συχνότητας

- Ορισμός
- Ιδιότητες

Απόκριση Συχνότητας

- Ο DTFT της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ ενός ΓΑΚΜ ευσταθούς συστήματος ονομάζεται **απόκριση συχνότητας** (frequency response) και υπολογίζεται από:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}$$

- **Πλάτος** (magnitude):

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

- **Φάση** (phase):

$$\varphi_H(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{H_I\left(e^{j\omega}\right)}{H_R(e^{j\omega})}\right]$$

- **Διάγραμμα απολαβής (κέρδους):** $A(\omega) = 20log\left|H(e^{j\omega})\right|$ (dB)
- Ισχύει: $\left|H(e^{j\omega})\right| = 1 \rightarrow 0\ dB,\ \ \left|H(e^{j\omega})\right| = 10 \rightarrow 20\ dB,\ \ \left|H(e^{j\omega})\right| = 0.1 \rightarrow -20\ dB$
- **Καθυστέρηση ομάδας** (group delay):

$$\tau_H(\omega) = -\frac{d\varphi_H(\omega)}{d\omega}$$

Ιδιότητες Απόκρισης Συχνότητας

- Διαθέτει όλες τις ιδιότητες του DTFT. Ειδικότερα:
- **Περιοδικότητα**: Η απόκριση συχνότητας είναι περιοδική συνάρτηση με **περίοδο $\boldsymbol{2\pi}$**, δηλαδή ισχύει $H\left(e^{j\omega_0}\right) = H\left(e^{j(\omega_0+2\pi)}\right)$.
- **Φασματική Συμμετρία**: Αν $h[n]$ είναι πραγματική ακολουθία, τότε η $H\left(e^{j\omega}\right)$ είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση της συχνότητας, δηλαδή:

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

- <u>Άρτια συμμετρία</u> **-** Πραγματικό μέρος και πλάτος:

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right) \text{ και } \left|H_R\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H_R\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

- <u>Περιττή συμμετρία</u> **-** Φανταστικό μέρος, φάση και καθυστέρηση ομάδας:

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I\left(e^{-j\omega}\right),\ \varphi_H(\omega) = -\varphi_H(-\omega) \text{ και } \tau_H(\omega) = -\tau_H(-\omega)$$

- Με βάση τις ιδιότητες αυτές προκύπτει ότι για τη σχεδίαση της απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\omega})$ αρκεί **μισή μόνο περίοδος**, συνήθως επιλέγουμε $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$.

Ιδιότητες Απόκρισης Συχνότητας

- **Αντιστροφή της Απόκρισης Συχνότητας:** Αν η απόκριση συχνότητας ενός ΓΑΚΜ συστήματος είναι:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-jn\omega}$$

- Η κρουστική απόκριση μπορεί να ανακτηθεί με ολοκλήρωση σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π:

$$h[n] \ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H\left(e^{j\omega}\right) e^{jn\omega} d\omega$$

Άσκηση 9

Να βρεθεί το πλάτος, η φάση και η καθυστέρηση ομάδας ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-1]$, όπου $\alpha \in \mathrm{R}$.

Απάντηση: Η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 1 - ae^{-j\omega} = 1 - a\cos\omega + ja\sin\omega$$

Το πλάτος είναι:

$$\begin{gathered}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = (1 - \alpha\cos\omega)^2 + (\alpha\sin\omega)^2 \\ = 1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2\cos^2\omega + \alpha^2\sin^2\omega \\ = 1 - 2\alpha\cos\omega + a^2\end{gathered}$$

Η φάση είναι:

$$\varphi_H(\omega) = tan^{-1}\left[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right] = tan^{-1}\left[\frac{a\ sin\omega}{1 - \alpha\ cos\omega}\right]$$

Η καθυστέρηση ομάδας είναι:

$$\tau_H(\omega) = \frac{d\varphi_H\omega}{d\omega} = \cdots = \frac{\alpha^2 - \alpha\ cos\omega}{1 - 2\alpha\ cos\omega + a^2}$$

Εφαρμογές DTFT

- Υπολογισμός Απόκρισης Συχνότητας
- Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών
- Σχεδίαση Αντίστροφων Συστημάτων
- Συνδεσμολογίες Συστημάτων

Υπολογισμός Απόκρισης Συχνότητας μέσω Εξίσωσης Διαφορών

- Γνωρίζουμε ότι η παρακάτω ΓΕΔΣΣ περιγράφει τη σχέση εισόδου – εξόδου ενός ΓΑΚΜ συστήματος:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

- Εφαρμόζοντας DTFT και στα δύο μέλη της ΓΕΔΣΣ και από τις ιδιότητες γραμμικότητας και μετατόπισης στο χρόνο του DTFT, προκύπτει η απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-jm\omega}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk\omega}} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-jm\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

- Επειδή η ΓΕΔΣΣ είναι μοναδική για κάθε σύστημα και το περιγράφει με μονοσήμαντο τρόπο, το ίδιο ισχύει και για την απόκριση συχνότητας.

Άσκηση 10

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας ενός ΓΑΚΜ συστήματος διακριτού χρόνου με ΓΕΔΣΣ: $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$ και με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον DTFT κάθε μέλους της εξίσωσης διαφορών:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) - 0.5\, Y\left(e^{j\omega}\right) e^{-j\omega} = X\left(e^{j\omega}\right) + 2e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right) + e^{-j2\omega}X\left(e^{j\omega}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - 0.5e^{-j\omega}\right) Y\left(e^{j\omega}\right) = \left(1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$$

Λύνοντας ως προς $Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$, βρίσκουμε την απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών (ΓΕΔΣΣ)

- Επιλύοντας τη ΓΕΔΣΣ ως προς $Y\left(e^{j\omega}\right)$, βρίσκουμε:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_m \, e^{-jm\omega}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \, e^{-jk\omega}} X\left(e^{j\omega}\right)$$

- Για <u>μηδενικές αρχικές συνθήκες</u>, μία ΓΕΔΣΣ λύνεται με τα ακόλουθα βήματα:
    - Μεταφορά του προβλήματος στο πεδίο της συχνότητας, υπολογίζοντας τον DTFT κάθε όρου της ΓΕΔΣΣ.
    - Επίλυση ως προς $Y(e^{j\omega})$.
    - Επιστροφή στο πεδίο του χρόνου και εύρεση της $y[n]$, υπολογίζοντας τον αντίστροφο DTFT της $Y(e^{j\omega})$.
- Είναι υπολογιστικά απλούστερος τρόπος από τη μέθοδο εύρεσης ομογενούς και μερικής λύσης στο πεδίο του χρόνου.
- Εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση συστήματος που περιγράφεται από ΓΕΔΣΣ με μηδενικές αρχικές συνθήκες.
- Αν το σύστημα δεν είναι σε αρχική ηρεμία, τότε η πλήρης επίλυση στο πεδίο της συχνότητας δίνεται από τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Ζ.

Άσκηση 11

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση ενός ΓΑΚΜ συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΕΔΔΣ: $y[n] - 0.25y[n-1] = x[n] - x[n-2]$ (μηδενικές αρχικές συνθήκες).

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον DFTF κάθε μέλους της ΓΕΔΣΣ:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) - 0.25\, Y\left(e^{j\omega}\right) e^{-j\omega} = X\left(e^{j\omega}\right) - e^{-2j\omega} X\left(e^{j\omega}\right)$$

Επειδή $X\left(e^{j\omega}\right) = \Delta\left(e^{j\omega}\right) = 1$, έχουμε:

$$\left(1 - 0.25e^{-j\omega}\right) Y\left(e^{j\omega}\right) = \left(1 - e^{-2j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - e^{-2j\omega}}{1 - 0.25\, e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - 0.25\, e^{-j\omega}} - \frac{e^{-2j\omega}}{1 - 0.25\, e^{-j\omega}}$$

Επειδή:

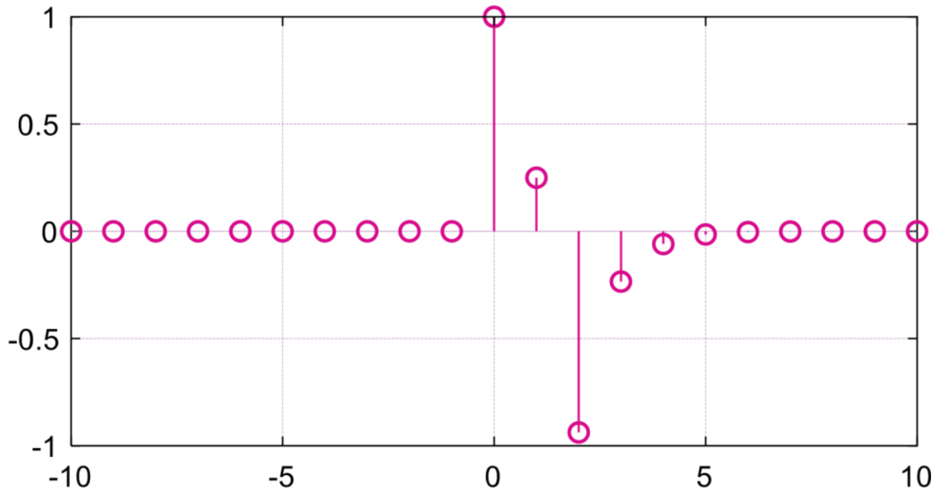
$$(0.25)^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} 1/(1 - 0.25\, e^{-j\omega})$$

και με τις ιδιότητες γραμμικότητας και μετατόπισης στο χρόνο του DTFT βρίσκουμε τον αντίστροφο DTFT, δηλαδή την κρουστική απόκριση:

Άσκηση 11 (συνέχεια)

Κρουστική απόκριση:

$$h[n] = (0.25)^n\, u[n] - (0.25)^{n-2} u[n-2]$$



Κρουστική απόκριση $h[n]$

Άσκηση 12

Να βρεθεί μια ΓΕΔΣΣ του ΓΑΚΜ συστήματος με απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{j\omega} \frac{1}{1.1 + \cos\omega}$$

<u>**Απάντηση**</u>: Εκφράζουμε την $H\left(e^{j\omega}\right)$ συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών όρων:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{j\omega}}{1.1 + 0.5e^{-j\omega} + 0.5e^{j\omega}}$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τη ποσότητα $2e^{j\omega}$ έχουμε:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{2}{1 + 2.2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}$$

Πολλαπλασιάζοντας χιαστί τους όρους του δεξιού και αριστερού σκέλους, έχουμε

$$\left[1 + 2.2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}\right]Y\left(e^{j\omega}\right) = 2X\left(e^{j\omega}\right)$$

Με αντίστροφο DTFT κάθε όρου λαμβάνουμε την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] + 2.2y[n-1] + y[n-2] = 2x[n]$$

Αντίστροφα Συστήματα

- Δοθέντος ενός ΓΑΚΜ συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h[n]$, το **αντίστροφο σύστημα** έχει κρουστική απόκριση $g[n]$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$h[n] * g[n] = \delta[n]$$

- Η απόκριση συχνότητας του αντίστροφου συστήματος είναι:

$$H\left(e^{j\omega}\right) G\left(e^{j\omega}\right) = 1 \Rightarrow G\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

- Μετά την αντιστροφή ενός πρακτικού συστήματος θα πρέπει να ελέγχουμε αν το αντίστροφο σύστημα που προκύπτει είναι αιτιατό, δηλαδή πρακτικά υλοποιήσιμο, καθώς επίσης και ευσταθές. Για να ισχύει το δεύτερο, πρέπει οι πόλοι και τα μηδενικά του αρχικού συστήματος να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Άσκηση 13

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του αντίστροφου συστήματος ενός ΓΑΚΜ συστήματος με απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - 0.4\, e^{-j\omega}}{1 + 0.7\, e^{-j\omega}}$$

Απάντηση: Η απόκριση συχνότητας του αντίστροφου συστήματος είναι:

$$G\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} = \frac{1 + 0.7\, e^{-j\omega}}{1 - 0.4\, e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - 0.4\, e^{-j\omega}} + \frac{0.7\, e^{-j\omega}}{1 - 0.4\, e^{-j\omega}}$$

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος DTFT :

$$\frac{1}{1 - \alpha\, e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{DTFT} \alpha^n u[n], \qquad |\alpha| < 1$$

και την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-jn_0\omega} X\left(e^{j\omega}\right)$$

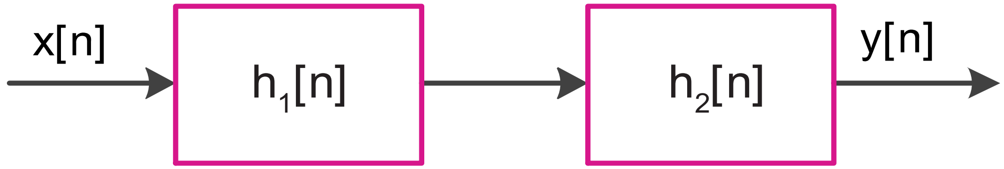
βρίσκουμε την κρουστική απόκριση:

$$g[n] = (0.4)^n\, u[n] + 0.7\, (0.4)^{n-1} u[n-1]$$

Συνδεσμολογίες Συστημάτων

- Σύνδεση σε Σειρά
- Παράλληλη Σύνδεση
- Σύνδεση με Ανάδραση

Σύνδεση σε Σειρά



Σειριακή συνδεσμολογία συστημάτων

- Κρουστική απόκριση συνολικού συστήματος:

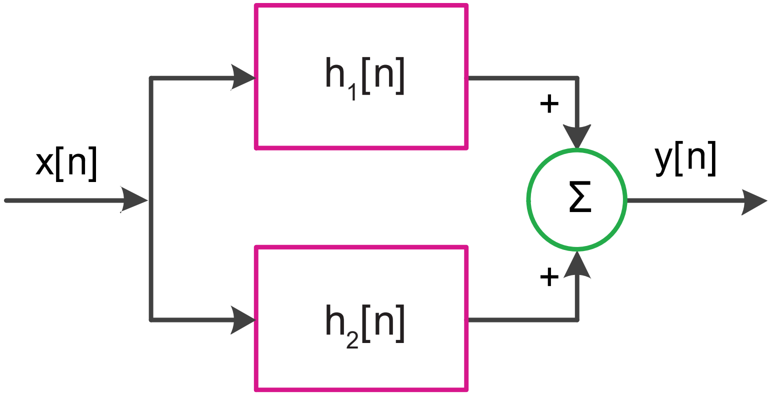
$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

- Απόκριση συχνότητας συνολικού συστήματος:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_1\left(e^{j\omega}\right) H_2\left(e^{j\omega}\right)$$

- Ισχύουν οι σχέσεις:
  - $20log\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 20log\left|H_1\left(e^{j\omega}\right)\right| + 20log\left|H_2\left(e^{j\omega}\right)\right|$
  - $\varphi_H(\omega) = \varphi_{H1}(\omega) + \varphi_{H2}(\omega)$
  - $\tau_H(\omega) = \tau_{H1}(\omega) + \tau_{H2}(\omega)$

Παράλληλη Σύνδεση



Παράλληλη συνδεσμολογία συστημάτων

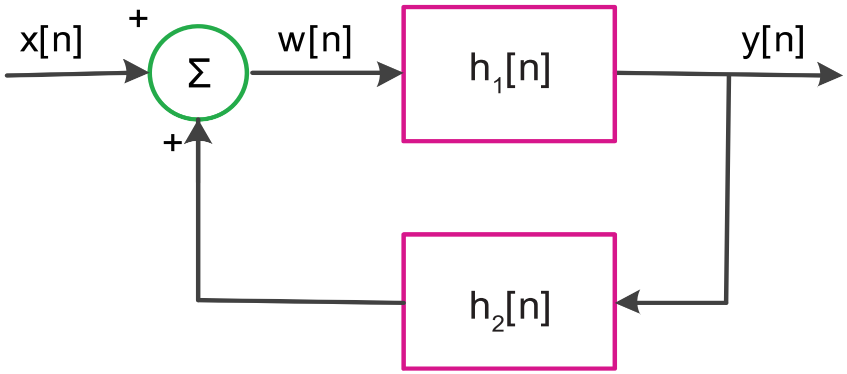
- Κρουστική απόκριση συνολικού συστήματος:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

- Απόκριση συχνότητας συνολικού συστήματος:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_1\left(e^{j\omega}\right) + H_2\left(e^{j\omega}\right)$$

Σύνδεση με Ανάδραση



Συνδεσμολογία συστημάτων με (θετική) ανάδραση

- Κρουστική απόκριση συνολικού συστήματος:

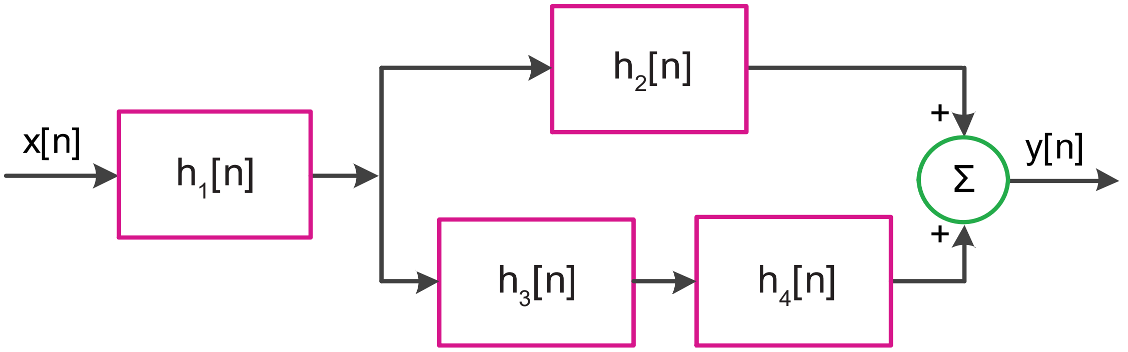
$$h[n] = \frac{h_1[n]}{1 - h_1[n] * h_2[n]}$$

- Απόκριση συχνότητας συνολικού συστήματος:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{H_1\left(e^{j\omega}\right)}{1 - H_1(e^{j\omega})\, H_2(e^{j\omega})}$$

Άσκηση 14

(α) Για την παρακάτω συνδεσμολογία συστημάτων να υπολογιστεί η συνολική απόκριση συχνότητας, συναρτήσει των αποκρίσεων $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$, $H_3(e^{j\omega})$ και $H_4(e^{j\omega})$.



(β) Να υπολογιστεί η συνολική απόκριση συχνότητας αν δίνεται ότι:

- $h_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-4]$
- $h_2[n] = h_3[n] = (0.2)^n u[n]$
- $h_4[n] = \delta[n-2]$

Άσκηση 14 (συνέχεια)

Απάντηση: (α) $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})[H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})H_4(e^{j\omega})]$

(β) Οι επιμέρους αποκρίσεις κάθε συστήματος ξεχωριστά, είναι:

$$H_1(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega} = (1 + e^{-j2\omega})^2$$

$$H_2(e^{j\omega}) = H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.2\, e^{-j\omega}}$$

$$H_4(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}$$

Επομένως, η συνολική απόκριση είναι:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega})[H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})H_4(e^{j\omega})] \\ &= H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})\,[1 + H_4(e^{j\omega})] \end{aligned}$$

$$= \frac{(1 + e^{-j2\omega})^3}{1 - 0.2\, e^{-j\omega}}$$

Άσκηση 15

Αν ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση $h(n)$ υλοποιηθεί με μια ΓΕΔΣΣ της μορφής

$$y[n] = \sum_{m=1}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

με ποιο τρόπο πρέπει να τροποποιηθεί η ΓΕΔΣΣ, ώστε να υλοποιηθεί το σύστημα με κρουστική απόκριση $g[n] = (-1)^n h[n]$;

Απάντηση: Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου με κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-jm\omega}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

Πολλαπλασιάζοντας την $h[n]$ με τον όρο $(-1)^n$ προκύπτει ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας:

$$G\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-jm(\omega-\pi)}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k\, e^{-jk(\omega-\pi)}}$$

Άσκηση 15 (συνέχεια)

Επειδή $e^{jk\pi} = (-1)^k$ προκύπτει:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{m=0}^{M} (-1)^m b_m \, e^{-jm\omega}}{1 - \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k \, e^{-jk\omega}}$$

και η εξίσωση διαφορών γίνεται:

$$y[n] = \sum_{m=1}^{M} (-1)^m \, b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k y[n-k]$$

Έτσι, οι συντελεστές a_k και b_m για περιττές τιμές των m και k λαμβάνουν αρνητικό πρόσημο.

Μελέτη Συστημάτων Διακριτού Χρόνου στο Χώρο Κατάστασης

Επίλυση Δυναμικών Εξισώσεων

Μεθοδολογία

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M], \qquad n \geq 0$$

με αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$. Το σήμα $x[n]$ είναι αιτιατό και $M \leq N$. Περιγράφουμε τις καθυστερήσεις της εξόδου της παραπάνω σχέσης με τις μεταβλητές:

$$\begin{gathered} v_1[n] = y[n-1] \\ v_2[n] = y[n-2] \\ \vdots \\ v_N[n] = y[n-N] \end{gathered}$$

και λαμβάνουμε τις **εξισώσεις χώρου κατάστασης**:

$$\begin{aligned} &v_1[n+1] = y[n] = -a_1 v_1[n] - \cdots - a_N v_N[n] + b_0 x[n] + \cdots + b_M x[n-M] \\ &v_2[n+1] = v_1[n] \\ &\quad \vdots \\ &v_N[n+1] = v_{N-1}[n] \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

καθώς και την **εξίσωση εξόδου**:

$$y[n] = -a_1 v_1[n] - \cdots - a_N v_N[n] + b_0 x[n] + \cdots + b_M\, x[n-M]$$

Οι αρχικές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης συνδέονται με τις αρχικές συνθήκες του συστήματος, μέσω της σχέσης:

$$v_1[0] = y[-1], \qquad v_2[0] = y[-2], \qquad \ldots\, , \qquad v_N[0] = y[-N]$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (κατάστασης και εξόδου) είναι γνωστές και ως **δυναμικές εξισώσεις** και μπορούν να γραφούν σε μορφή πινάκων:

$$\boldsymbol{v}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[n]$$

$$y[n] = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{v}[n] + \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x}[n], \qquad\qquad n \geq 0$$

ορίζοντας κατάλληλα τους πίνακες $\boldsymbol{A}$ (συστήματος) και $\boldsymbol{B}$ (εισόδου), τα διανύσματα $\boldsymbol{c}$ (μέτρησης) και $\boldsymbol{d}$ (εξόδου), όπως επίσης και το διάνυσμα κατάστασης $\boldsymbol{v}[n]$ και το διάνυσμα εισόδου $\boldsymbol{x}[n]$.

Επίλυση Δυναμικών Εξισώσεων

Η επίλυση της εξίσωσης κατάστασης:

$$\boldsymbol{v}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[n], \qquad n \geq 0$$

μπορεί να γίνει με επαναληπτική διαδικασία:

$$\boldsymbol{v}[1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}[0] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[0]$$

$$\boldsymbol{v}[2] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}[1] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[1] = \boldsymbol{A}^{2}\boldsymbol{v}[0] + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[0] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[1]$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{v}[n] = \boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{v}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1-k}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k]$$

όπου $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Η πλήρης λύση δίνεται από τη σχέση:

$$y[n] = \boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{v}[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{A}^{n-1-k}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}[n]$$

Ο πρώτος όρος στην παραπάνω σχέση είναι η απόκριση μηδενικής εισόδου:

$$y_{zi}[n] = \boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{v}[0]$$

Επίλυση Δυναμικών Εξισώσεων

και ο δεύτερος είναι η απόκριση μηδενικής κατάστασης :

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{A}^{n-1-k} \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}[k] \ + \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}[n]$$

Αντί της επαναληπτικής επίλυσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Z^+ για να λάβουμε μία κλειστή έκφραση της λύσης. Συγκεκριμένα, υπολογίζοντας τον Z^+ των μεταβλητών κατάστασης $V_i(z) = Z^+\{v_i[n]\},\ i = 1, \dots, N$, της εισόδου $X_m(z) = Z\{x[n-m]\},\ m = 0, \dots, M$ και της εξόδου $Y(z) = Z\{y[n]\}$, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση μετασχηματισμού Z^+:

$$z\boldsymbol{V}(z) - z\boldsymbol{v}[0] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}(z) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z) \Rightarrow (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{V}(z) = z\boldsymbol{v}[0] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z)$$

Θεωρώντας ότι ο αντίστροφος πίνακας του όρου $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ μπορεί να υπολογιστεί, (δηλαδή ισχύει $det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \neq 0$), λύνουμε ως προς $\boldsymbol{V}(z)$ και βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{V}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} z\boldsymbol{v}[0] + (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z)$$

Ομοίως, ο μετασχηματισμός Z^+ της εξόδου είναι:

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{c}^T (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} z\boldsymbol{v}[0] + [\boldsymbol{c}^T (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{d}]\boldsymbol{X}(z)$$

Αν οι αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{v}[0]$ είναι μηδενικές, τότε η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \boldsymbol{c}^T (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{d}$$

Επίλυση Δυναμικών Εξισώσεων

Θυμίζουμε ότι ο αντίστροφος Πίνακας $\boldsymbol{R}^{-1}$ ενός πίνακα $\boldsymbol{R}_{nxn}$ δίνεται από τη σχέση (κανόνας Cramer):

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \frac{adj(\boldsymbol{R})}{det(\boldsymbol{R})}$$

όπου:

- $det(\boldsymbol{R})$ είναι η ορίζουσα του πίνακα, και
- $adj(\boldsymbol{R})$ είναι ο συμπληρωματικός πίνακας διαστάσεων $n\ x\ n$, ο οποίος έχει στοιχεία τα $(-1)^{i+j} detR_{ij}$, όπου R_{ij} είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα $\boldsymbol{R}$ αν διαγράψουμε την i −γραμμή και την j −στήλη.

Άσκηση 16

Να βρεθεί η περιγραφή χώρου κατάστασης του συστήματος διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = y[n-1] - 0.5y[n-2] + 0.25x[n]$$

Απάντηση: Στη δοθείσα εξίσωση διαφορών αντικαθιστούμε τις καθυστερήσεις της εξόδου με τις ακόλουθες μεταβλητές κατάστασης:

$$v_1[n] = y[n-2]$$

$$v_2[n] = y[n-1]$$

Προκύπτει η περιγραφή του συστήματος στο χώρο κατάστασης:

$$v_1[n+1] = v_2[n]$$

$$v_2[n+1] = -0.5v_1[n] + v_2[n] + 0.25x[n]$$

η οποία σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} x[n]$$

Άσκηση 16 (συνέχεια)

Επομένως οι πίνακες $\boldsymbol{A}$ (συστήματος) και $\boldsymbol{B}$ (εισόδου), είναι:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση διαφορών γράφεται:

$$y[n] = -0.5v_1[n] + v_2[n] + 0.25x[n]$$

και σε μορφή πινάκων είναι:

$$y[n] = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + [0.25]x[n]$$

Επομένως, τα διανύσματα $\boldsymbol{c}$ (μέτρησης) και $\boldsymbol{d}$ (εξόδου), είναι:

$$\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{d} = [0.25]$$