Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 2: Σήματα Διακριτού Χρόνου

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Εισαγωγή στα Σήματα Διακριτού Χρόνου (ΣΔΧ)
- Διαφορές Αναλογικής – Ψηφιακής Επεξεργασίας
- Παραγωγή Σημάτων Διακριτού Χρόνου
- Ταξινόμηση Σημάτων ΔΧ
    - Περιοδικά και Μη-Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου
    - Άρτια και Περιττά Σήματα Διακριτού Χρόνου
    - Σήματα Ενέργειας και Σήματα Ισχύος
    - Αιτιατά και Αντιαιτιατά Σήματα
- Πράξεις σε Σήματα ΔΧ
    - Πρόσθεση
    - Πολλαπλασιασμός
    - Κλιμάκωση πλάτους

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Μετασχηματισμοί της Ανεξάρτητης Μεταβλητής
  - Χρονική Μετατόπιση
  - Αντιστροφή
  - Κλιμάκωση στο Χρόνο
- Θεμελιώδη Σήματα ΔΧ
  - Ακολουθία Μοναδιαίου Βήματος
  - Ακολουθία Μοναδιαίας Κρουστικής (Ώση)
  - Ακολουθία Μοναδιαίας Κλίσης
  - Ανάλυση Σημάτων Διακριτού Χρόνου σε Μοναδιαίες Ώσεις
  - Πραγματική Εκθετική Ακολουθία Διακριτού Χρόνου
  - Μιγαδική Εκθετική Ακολουθία Διακριτού Χρόνου
  - Ημιτονοειδής Ακολουθία

Σήματα και Συστήματα

Σήμα:

Οποιαδήποτε φυσική ποσότητα που μεταβάλλεται με το χρόνο, το χώρο και οποιαδήποτε άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή, π.χ.

$$x_1(t) = 5t, \qquad\qquad x_2(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i(t) \sin[2\pi F_i(t) + \theta_i(t)]$$

Σύστημα:

Μία οντότητα που πραγματοποιεί μία λειτουργία (μετατροπή) σε ένα σήμα εισόδου και παράγει ένα (ή περισσότερα) σήματα εξόδου.

Διαφορές Αναλογικής – Ψηφιακής Επεξεργασίας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος:

- Ευελιξία στη σχεδίαση
- Προβλεπόμενη ακρίβεια
- Ομοιογένεια στην απόδοση προϊόντων ίδιου τύπου
- Μειωμένο κόστος υλοποίησης, αξιοπιστία
- Υλοποίηση πολύπλοκων αλγορίθμων
- Δυνατότητα αποθήκευσης σε μαγνητικά μέσα

Αναλογική επεξεργασία σήματος:

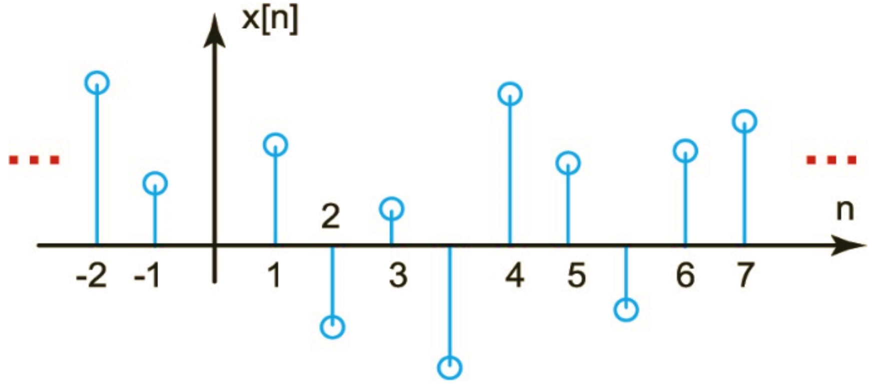
- Επικοινωνία των ψηφιακών συστημάτων με το αναλογικό περιβάλλον
- Εφαρμογές υψηλών συχνοτήτων

Σήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα **σήμα διακριτού χρόνου** (ΣΔΧ) $x[n]$ διατυπώνεται μαθηματικά από τη σχέση:

$$x[.]:\ I \rightarrow R(C)$$
$$n \quad\quad x[n]$$

Το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ είναι μία ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Η ανεξάρτητη μεταβλητή n αναπαριστά (συνήθως) τον χρόνο και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές. Για μη ακέραιες τιμές του n το σήμα δεν ορίζεται.



Γραφική παράσταση σήματος διακριτού χρόνου

Συμβολισμός ΣΔΧ σε μορφή **διανύσματος** $\boldsymbol{x} = [x(0), x(1), \ldots, x(N-1)]^T$

Παραγωγή Ψηφιακού Σήματος

(α) Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό

Το ΣΔΧ $x[n]$ συνήθως παράγεται με τη βοήθεια ενός Μετατροπέα Αναλογικού σε Ψηφιακό (Digital-to-Analog-Converter). Στη διαδικασία αυτή, ένα σήμα συνεχούς χρόνου (ΣΣΧ) $x(t)$ υπόκειται σε **δειγματοληψία** με ρυθμό $f_s = 1/T_s$ δείγματα/sec και παράγεται το ΣΔΧ $x[n]$. Η διαδικασία περιγράφεται από τη σχέση:

$$x[n] \triangleq x(nT_s) = x(t)\Big|_{t=nT_s}$$

(β) Παραγωγή σήματος σε πρωτογενή ψηφιακή μορφή:

Σε κάποιες περιπτώσεις τα ΣΔΧ δημιουργούνται πρωτογενώς σε διακριτή μορφή, π.χ. τα αλφαριθμητικά σύμβολα που παράγονται κατά την πληκτρολόγηση, η τιμή μίας μετοχής σε διαδοχικές ημέρες, στατιστικά στοιχεία πληθυσμού μίας πόλης, κλπ.

Ταξινόμηση Σημάτων Διακριτού Χρόνου

- Περιοδικά και Μη-Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Άρτια και Περιττά Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Αιτιατά και Αντιαιτιατά Σήματα
- Σήματα Ενέργειας και Σήματα Ισχύος

Περιοδικά και Μη-Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

Το ΣΔΧ $x[n]$ καλείται **περιοδικό** όταν

- Είναι ορισμένο για όλες τις τιμές του n, όπου $-\infty < n < \infty$, δηλαδή έχει **άπειρη διάρκεια**,
- Υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός Ν, ώστε για κάθε ακέραιο αριθμό k να ικανοποιείται η σχέση:

$$x[n + kN] = x[n]$$

Σε αντίθετη περίπτωση, το ΣΔΧ καλείται **μη-περιοδικό** ή **απεριοδικό**.

Ο μικρότερος θετικός ακέραιος N ονομάζεται **θεμελιώδης περίοδος**.

Η περιοδική ακολουθία $x[n]$ με περίοδο N επαναλαμβάνει τον εαυτό της κάθε φορά που θα εμφανιστούν N δείγματα.

Ένα περιοδικό ΣΔΧ με περίοδο N, είναι περιοδικό και με περίοδο $2N$, $3N$ και γενικά με κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του N.

Από μία οποιαδήποτε ακολουθία $x[n]$ μπορούμε πάντα να δημιουργήσουμε ένα **περιοδικό σήμα** $y[n]$ με περίοδο Ν, επαναλαμβάνοντας το $x[n]$ ως εξής:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN]$$

Περιοδικά και Μη-Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

Περιοδικά ημίτονα διακριτού χρόνου με θεμελιώδη περίοδο N, ορίζονται από τη σχέση:

$$x[n] = A\,cos\left(\frac{2\pi m}{N}n + \theta\right) = Acos(2\pi f_0 n + \theta), \qquad -\infty < n < \infty$$

όπου:

- $\omega_0 = 2\pi m/N$ (rad) είναι η διακριτή κυκλική συχνότητα,
- θ είναι η φάση και οι θετικοί ακέραιοι m και N δεν διαιρούνται μεταξύ τους.

Το πηλίκο m/N μπορεί να τεθεί ως μεταβλητή $f_0 = m/N$, η οποία ονομάζεται **διακριτή συχνότητα**.

Παρατηρήσεις για τα Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Ο ορισμός των περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου είναι ίδιος με τον ορισμό των περιοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου εκτός από τη θεμελιώδη περίοδο, η οποία στα ΣΔΧ είναι <u>ακέραιος αριθμός</u>.
- Η μετατόπιση μιας ημιτονοειδούς ακολουθίας κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους περιόδου δεν αλλάζει την ακολουθία, καθώς ισχύει:

$$x[n+kN] = A\cos\left(\frac{2\pi m}{N}(n+kN)+\theta\right) = A\cos\left(\frac{2\pi m}{N}n + 2\pi\, mk + \theta\right) = x[n]$$

- Αν η διακριτή συχνότητα δεν είναι στη μορφή $2\pi m/N$ τότε το ημίτονο δεν είναι περιοδικό. Τα ημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου, τα οποία είναι <u>πάντα περιοδικά</u>.
- Επομένως, ακόμα και αν ένα ημίτονο διακριτού χρόνου έχει προκύψει από δειγματοληψία ενός ημίτονου συνεχούς χρόνου <u>δεν είναι βέβαιο ότι θα είναι περιοδικό</u>.

Παρατηρήσεις για τα Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Οι διακριτές συχνότητες επαναλαμβάνονται κάθε 2π, δηλαδή ισχύει $\omega = \omega + 2k\pi$ για κάθε ακέραιο αριθμό k. Άρα χρειάζεται να ορίσουμε τις ψηφιακές συχνότητες μόνο στην περιοχή $-\pi < \omega < \pi$, σε αντίθεση με τις αναλογικές που τις ορίζουμε για $-\infty < \Omega < \infty$.
- Μονάδα μέτρησης της διακριτής συχνότητας ω είναι τα radians (rad), ενώ μονάδα μέτρησης της αναλογικής συχνότητας Ω είναι τα rad/sec.
- Όταν δειγματοληπτούμε ένα ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = A\,cos(\Omega_0 t + \theta),\ -\infty < n < \infty$ λαμβάνουμε ένα **περιοδικό ημιτονοειδές σήμα** διακριτού χρόνου:

$$x[n] = A\,cos(\Omega_0 n T_s + \theta) = Acos\left(\frac{2\pi T_s}{T_0}n + \theta\right)$$

μόνο εφόσον ισχύει:

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N}$$

όπου m και N είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί που δεν διαιρούνται μεταξύ τους.

- Για να μην εμφανίζεται το φαινόμενο της αναδίπλωσης συχνοτήτων πρέπει η περίοδος δειγματοληψίας να ικανοποιεί και το κριτήριο Nyquist:

$$T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_0} = \frac{T_0}{2}$$

Άθροισμα και Γινόμενο Περιοδικών Σημάτων ΔΧ

Αν $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι περιοδικά ΣΔΧ με περιόδους N_1 και N_2, αντίστοιχα, τότε το ΣΔΧ $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$ είναι περιοδικό αν για το λόγο των περιόδων ισχύει:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{p}{q}$$

όπου p και q είναι ακέραιοι που δεν έχουν κοινό διαιρέτη.

Αν αυτό ισχύει, τότε η θεμελιώδης περίοδος του $y[n]$ δίνεται από τη σχέση:

$$N = \frac{N_1 N_2}{\mathrm{ΜΚΔ}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)}$$

Επίσης, το γινόμενο $z[n] = x_1[n]\, x_2[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο N.

Άσκηση 1

Διερευνήστε αν οι παρακάτω ακολουθίες είναι περιοδικές. Σε θετική περίπτωση να υπολογίσετε τη θεμελιώδη περίοδό τους και να σχεδιάσετε τις ακολουθίες.

(α) $x_1[n] = cos(0.25\pi n)$ (β) $x_2[n] = sin(\pi + 0.5n)$

(γ) $x_3[n] = e^{j\pi n/8}\, cos(\pi n/11)$

Απάντηση: (α) Επειδή $0.25\,\pi = \pi/4$ και ισχύει $cos(\pi n/4) = cos(\pi(n+8)/4)$, προκύπτει ότι το $x_1[n]$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $N_1 = 8$.

(β) Για να είναι περιοδικό το $x_2[n]$ πρέπει να βρεθεί μία τιμή N, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η σχέση $sin(\pi + 0.5n) = sin(\pi + 0.5(n + N))$. Η συνάρτηση sin( ) είναι περιοδική με περίοδο 2π. Η ποσότητα $0.5N$ πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Επειδή το π είναι άρρητος αριθμός, δεν υπάρχει καμία ακέραια τιμή του N ώστε να επαληθεύεται η ισότητα. Άρα, το $x_2[n]$ είναι μη-περιοδικό.

(γ) Το σήμα $x_3[n]$ είναι γινόμενο των ακολουθιών $e^{j\pi n/8}$ και $cos(\pi n/11)$. Και οι δύο ακολουθίες είναι περιοδικές, με περιόδους $N_1 = 16$ και $N_2 = 22$, αντίστοιχα. Άρα και το γινόμενο $x_3[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο N_3:

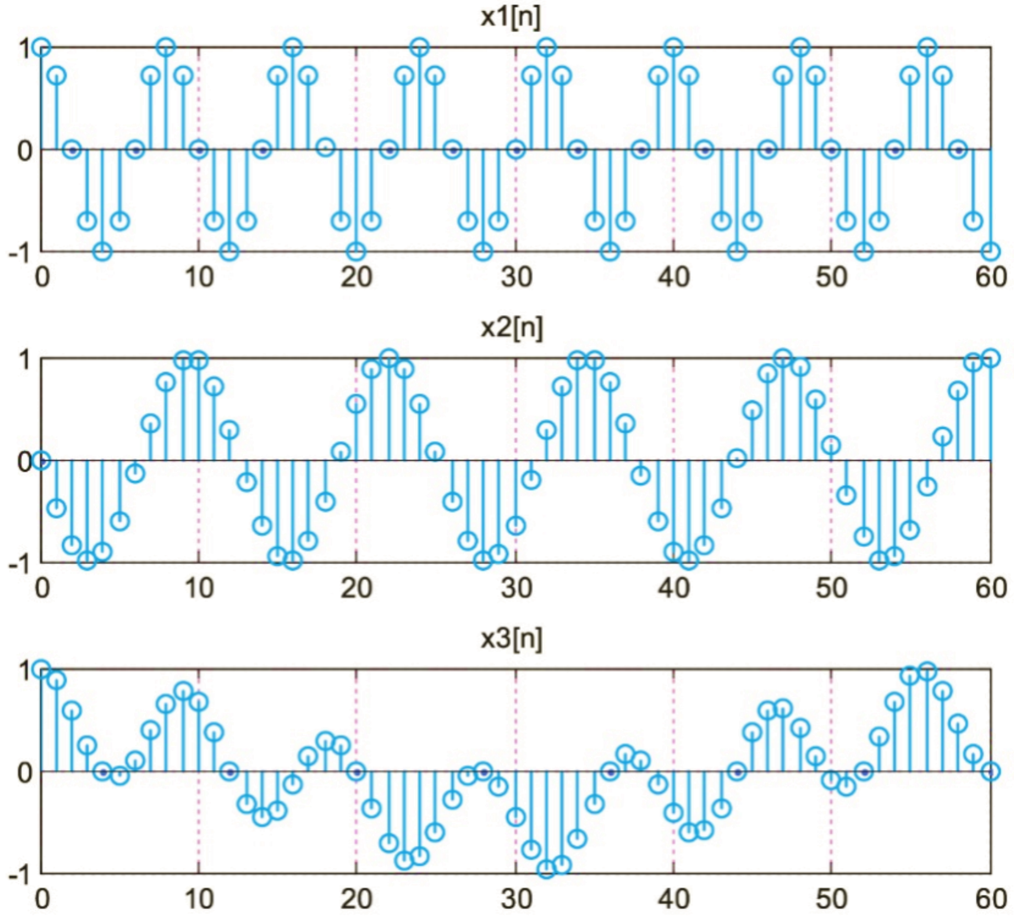
$$N_3 = \frac{16\,.22}{\text{ΜΚΔ}(16, 22)} = \frac{352}{2} = 176$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

(α)

(β)

(γ)



Σήματα: (α) $x_1[n] = cos(0.25\pi n)$,
(β) $x_2[n] = sin(\pi + 0.5n)$, (γ)$x_3[n] = e^{j\pi n/8}\, cos(\pi n/11)$

Άσκηση 2

Να διερευνήσετε αν η παρακάτω ακολουθία είναι περιοδική και σε θετική περίπτωση να προσδιορίσετε τη θεμελιώδη περίοδό της.

$$x[n] \ = Re\left\{e^{\frac{jn\pi}{12}}\right\} + Im\left\{e^{\frac{jn\pi}{18}}\right\}$$

Απάντηση: Το $x[n]$ είναι το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων:

$$x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{18}\right)$$

Οι περίοδοι είναι $N_1 = 24$ και $N_2 = 36,$ αντίστοιχα.

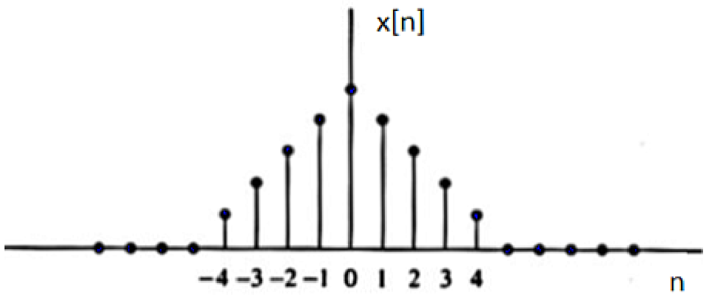
Συνεπώς, η περίοδος του αθροίσματος, δηλ. του xn είναι:

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)} = \frac{24\,.\,36}{\text{ΜΚΔ}(24{,}36)} = \frac{864}{12} = 72$$

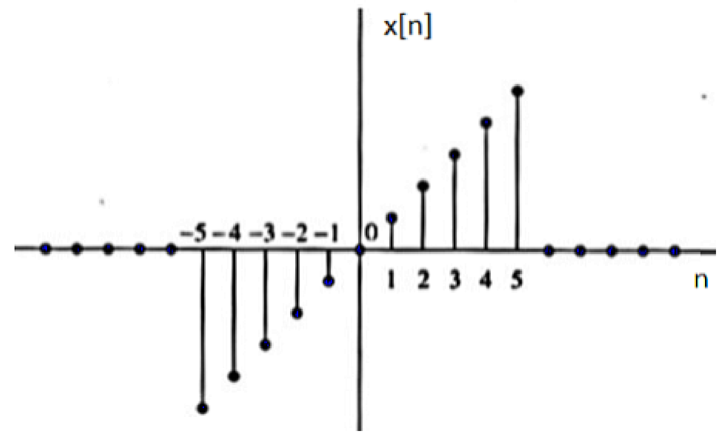
Άρτια και Περιττά Σήματα Διακριτού Χρόνου

Άρτια συμμετρία: $x[n] = x[-n], \ \forall n$

Περιττή συμμετρία: $x[n] = -x[-n], \ \forall n$



(a)



- Τα άρτια σήματα έχουν διάγραμμα συμμετρικό ως προς τον κατακόρυφο άξονα.
- Τα περιττά σήματα έχουν διάγραμμα συμμετρικό ως προς το σημείο τομής (κέντρο) των αξόνων.

Άρτια και Περιττά Σήματα Διακριτού Χρόνου

Κάθε σήμα $x[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα μίας άρτιας $x_e[n]$ και μίας περιττής συνιστώσας $x_o[n]$, σύμφωνα με τη σχέση:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

Η άρτια $x_e[n]$ και η περιττή $x_o[n]$ συνιστώσες του σήματος $x[n]$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\big[x[n] + x[-n]\big] \quad \text{και} \quad x_o[n] = \frac{1}{2}\big[x[n] - x[-n]\big]$$

Αν το σήμα $x[n]$ είναι **μιγαδικό** οι συμμετρίες ορίζονται παρόμοια. Συγκεκριμένα, μια μιγαδική ακολουθία εμφανίζει **άρτια συμμετρία** αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$x[n] = x^*[-n], \qquad \forall n$$

Μια μιγαδική ακολουθία εμφανίζει **περιττή συμμετρία** αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$x[n] = -x^*[-n], \qquad \forall n$$

Άσκηση 3

Βρείτε το άρτιο και το περιττό μέρος του ΣΔΧ : $x[n] = u[n]$

Απάντηση: Το άρτιο μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\big[x[n] + x[-n]\big] = \frac{1}{2}[u[n] + u[-n]] =$$

$$= \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1/2, & n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \delta[n]$$

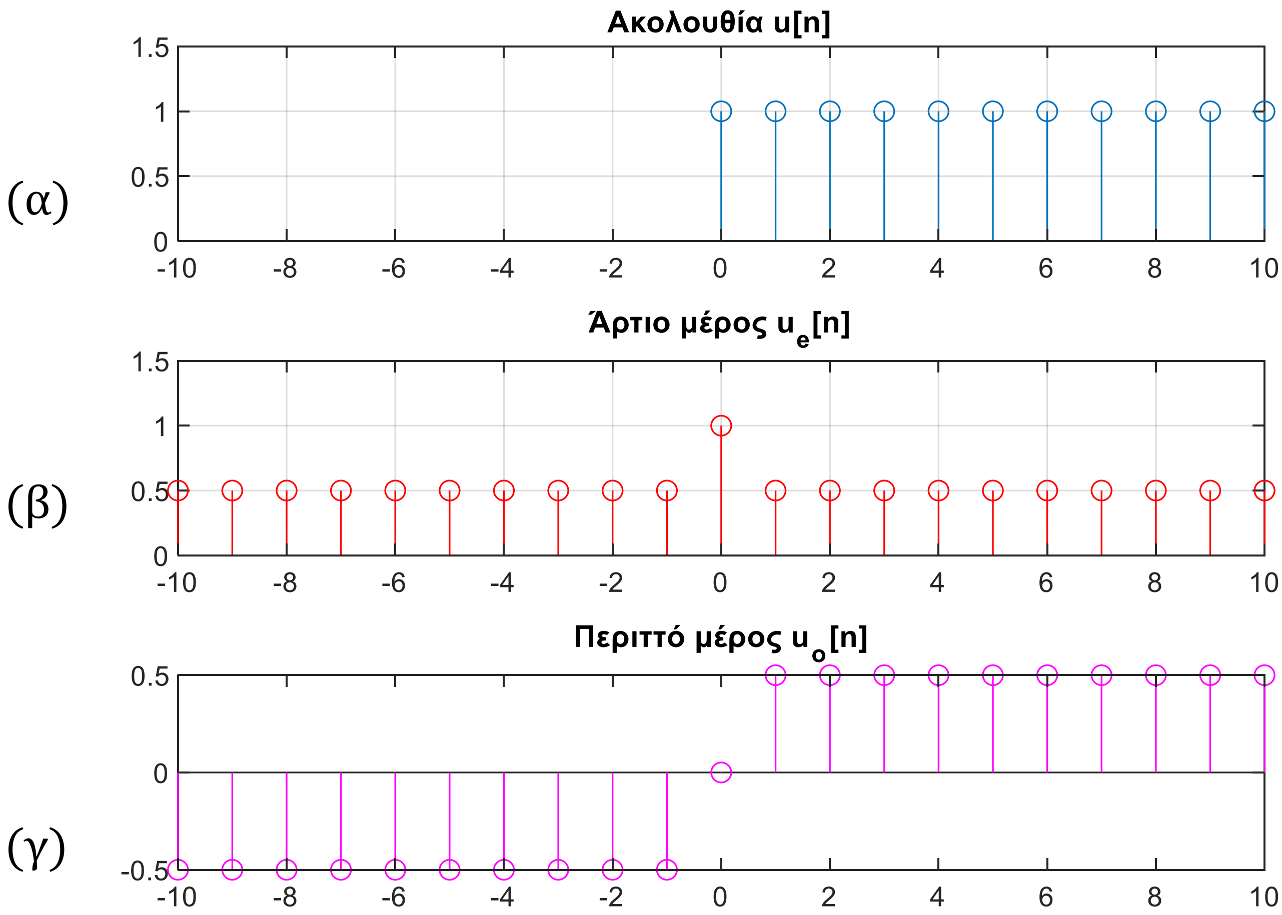
Το περιττό μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\big[x[n] - x[-n]\big] = \frac{1}{2}\big[u[n] - u[-n]\big] =$$

$$= \begin{cases} 1/2, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1/2, & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} sgn(n)$$

όπου $\mathrm{sgn}(n)$ είναι η συνάρτηση προσήμου, η οποία επιστρέφει: $+1$ όταν $n > 0$, 0 όταν $n = 0$ και -1 όταν $n < 0$.

Άσκηση 3 (συνέχεια)



(α) Μοναδιαία βηματική ακολουθία $u[n]$,
(β) Άρτιο μέρος $u_e[n]$, (γ) Περιττό μέρος $u_o[n]$

Άσκηση 4

Βρείτε το άρτιο και το περιττό μέρος του ΣΔΧ : $x[n] = \alpha^n u[n]$

Απάντηση: Το άρτιο μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] + x[-n]\right] = \frac{1}{2}\left[a^n u[n] + a^{-n} u[-n]\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}a^n, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}a^{-n}, & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}a^{|n|} + \delta(n)$$

Το περιττό μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] - x[-n]\right] = \frac{1}{2}\left[a^n u[n] - a^{-n} u[-n]\right] =$$

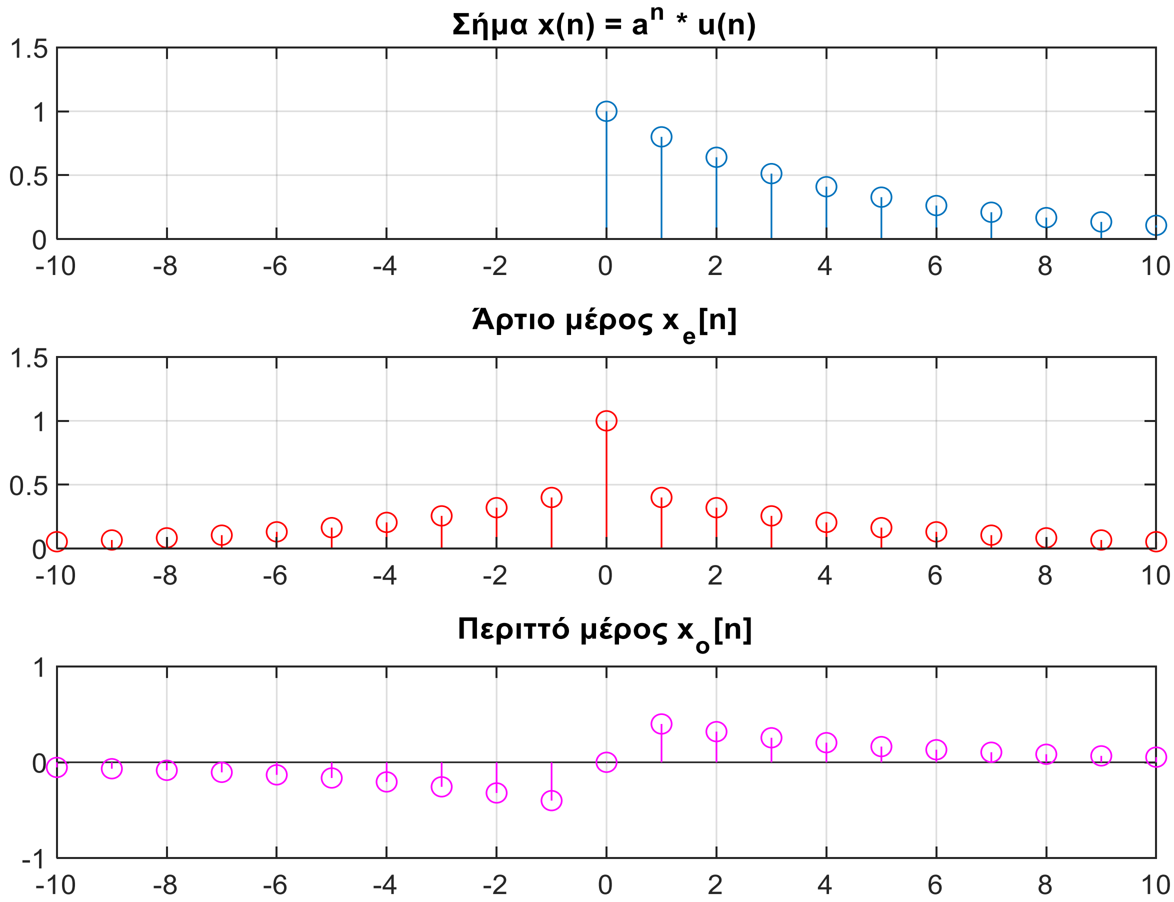
$$= \frac{1}{2}a^{|n|} sgn(n)$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

(α)

(β)

(γ)



(α) Μοναδιαία βηματική ακολουθία $u[n]$,
(β) Άρτιο μέρος $u_e[n]$, (γ) Περιττό μέρος $u_o[n]$

Άσκηση 5

Αν $x_1[n]$ άρτιο σήμα και $x_2[n]$ περιττό, τι προκύπτει για το $y[n] = x_1[n]\, x_2[n]$;

Απάντηση:

Επειδή το $x_1[n]$ είναι άρτιο σήμα ισχύει : $x_1[n] = x_1[-n]$

Επειδή το $x_2[n]$ είναι περιττό σήμα ισχύει: $x_2[n] = -x_2[-n]$

Επομένως:

$$y[n] = x_1[n]\, x_2[n] = -x_1[-n]\, x_2[-n] = -y[-n]$$

Άρα το σήμα $y[n]$ είναι περιττό.

Χαρακτηριστικά Μεγέθη ΣΔΧ

- Μέση Τιμή
- Ενεργός Τιμή
- Ενέργεια
- Στιγμιαία Ισχύς
- Μέση Ισχύς

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σημάτων

Μέση Τιμή ενός ΣΔΧ $x[n]$ στο διάστημα τιμών $[0, N]$:

$$\bar{x}[n] = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} x[n]$$

- $N + 1$ είναι το πλήθος των σημείων (δειγμάτων) του σήματος.
- Για ένα ημιτονοειδές σήμα η μέση τιμή είναι μηδέν ($\bar{x}[n] = 0$), όταν ως χρονικό διάστημα υπολογισμού θεωρηθεί η μία περίοδος.
- Για ένα σταθερό σήμα $x[n] = A$, η μέση τιμή του είναι $\bar{x}[n] = A$.

Ενεργός Τιμή ενός ΣΔΧ $x[n]$ στο διάστημα τιμών $[0, N]$**:**

$$\bar{\bar{x}}[n] = \frac{1}{N+1} \left[\sum_{n=0}^{N} x^2[n] \right]^{1/2}$$

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σημάτων

Ενέργεια ενός ΣΔΧ $x[n]$ στο διάστημα τιμών $[0, N]$:

$$E_x = \sum_{n=0}^{N} x^2[n]$$

Για ΣΔΧ άπειρης διάρκειας που έχει προκύψει από δειγματοληψία με περίοδο T_s, ισχύει:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty}\left[T_s \sum_{n=-N}^{N} |x(n\,T_s)|^2\right]$$

- T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας
- Η ενέργεια μπορεί να είναι άπειρη ή πεπερασμένη.
- Το σήμα $x[n]$ καλείται **σήμα ενέργειας** αν περιέχει πεπερασμένη ενέργεια, δηλ. όταν ισχύει $0 < E_x < \infty$.

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σημάτων

Στιγμιαία Ισχύς : $P[n] = x^2[n]$

Μέση Ισχύς ενός ΣΔΧ $x[n]$ στο διάστημα τιμών $[0, N]$:

$$P_x = \overline{P[n]} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} x^2[n]$$

Αν το σήμα εκτείνεται στο χρονικό διάστημα $(-\infty, +\infty)$, ισχύει:

$$P_x = \overline{P[n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_x$$

- Το $x[n]$ καλείται **σήμα ισχύος** αν ισχύει $0 < P < \infty$.
- Η μέση ισχύς **περιοδικού σήματος** είναι πεπερασμένη και ίση με τη μέση ισχύ σε μία περίοδο Ν:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Σήματα Ενέργειας και Σήματα Ισχύος

Το σήμα $x[n]$ καλείται **σήμα ισχύος** αν ισχύει $0 < P_x < \infty$.
Το σήμα $x[n]$ καλείται **σήμα ενέργειας** αν ισχύει $0 < E_x < \infty$.

Παρατηρήσεις:

- Ένα σήμα μπορεί να είναι σήμα ενέργειας ή σήμα ισχύος ή τίποτε από τα δύο. Δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα σήμα ενέργειας και σήμα ισχύος.
- Ένα σήμα με πλάτος και διάρκεια πεπερασμένα είναι σήμα ενέργειας. Αν το πλάτος είναι πεπερασμένο αλλά η διάρκεια είναι άπειρη τότε αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη είναι το πλάτος του σήματος να φθίνει προς το μηδέν για $n \rightarrow \pm \infty$.
- Ένα σήμα ενέργειας έχει μηδενική ισχύ, επειδή η πεπερασμένη ενέργεια διαιρείται με άπειρο χρόνο.
- Ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια, επειδή η πεπερασμένη ισχύς του πολλαπλασιάζεται με άπειρο χρόνο.
- Ένα σήμα που δεν εμφανίζει περιοδικότητα αλλά έχει άπειρη διάρκεια και το πλάτος του είναι απολύτως φραγμένο είναι σήμα ισχύος.
- Σήματα με άπειρη ενέργεια μπορούν να έχουν πεπερασμένη μέση ισχύ.

Σήματα Ενέργειας και Σήματα Ισχύος

Παρατηρήσεις για περιοδικά σήματα:

- Τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος.
- Αν ένα περιοδικό σήμα παίρνει πεπερασμένες τιμές, τότε η ενέργειά του σε μία περίοδο είναι πεπερασμένη.
- Η ενέργεια του σήματος σε όλο το χρόνο είναι άπειρη, επειδή είναι το άθροισμα της ενέργειας άπειρων περιόδων. Γι’ αυτό το λόγο ένα περιοδικό σήμα δεν είναι ενέργειας.

Άσκηση 6

Να προσδιορίσετε την ενέργεια και τη μέση ισχύ του μοναδιαίου βήματος $u[n]$.

Απάντηση: Η ενέργεια του σήματος $u[n]$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|u[n]^2\right| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Επειδή η ενέργεια είναι άπειρη, το σήμα δεν είναι σήμα ενέργειας.

Η μέση ισχύς του σήματος $u[n]$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left|u[n]^2\right| = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1+\frac{1}{N}}{2+\frac{1}{N}} = \frac{1}{2}$$

Επειδή η μέση ισχύς είναι πεπερασμένη, το μοναδιαίο βήμα $u[n]$ είναι σήμα ισχύος.

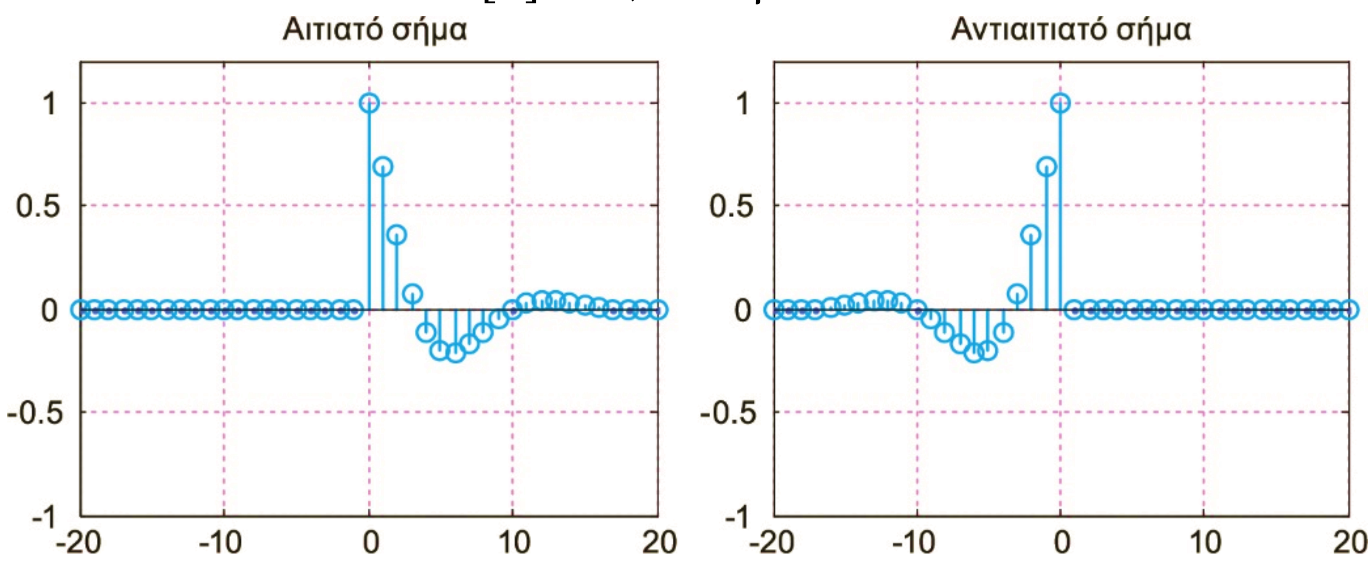
Αιτιατά και Αντι-αιτιατά Σήματα

Ένα σήμα διακριτού χρόνου ονομάζεται **αιτιατό** ή **δεξιάς πλευράς** αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$x[n] = 0, \qquad \text{για } n < 0$$

και **αντι-αιτιατό** ή **αριστερής πλευράς** αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$x[n] = 0, \qquad \text{για } n > 0$$



Αιτιατό και αντιαιτιατό σήμα διακριτού χρόνου

Πράξεις σε Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Πρόσθεση
- Πολλαπλασιασμός
- Κλιμάκωση Πλάτους

Πράξεις σε Σήματα Διακριτού Χρόνου

1. **Πρόσθεση:** $y[n] = x_1[n] + x_2[n] \qquad -\infty < n < \infty$

2. **Πολλαπλασιασμός**: $y[n] = x_1[n]\, x_2[n] \qquad -\infty < n < \infty$

3. **Κλιμάκωση Πλάτους**: $y[n] = a\, x[n] \qquad -\infty < n < \infty, \quad a \in \mathrm{R}$

Όλες οι παραπάνω πράξεις επιδρούν στο πλάτος των δειγμάτων.

Μετασχηματισμοί της Ανεξάρτητης Μεταβλητής

- Χρονική Μετατόπιση
- Αντιστροφή (ανάκλαση)
- Κλιμάκωση στο Χρόνο

Χρονική Μετατόπιση – Χρονική Αντιστροφή

1. Χρονική μετατόπιση ή ολίσθηση ενός ΣΔΧ $x[n]$ συμβαίνει όταν αντικαταστήσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή n με την ποσότητα $n - n_0$, δηλαδή:

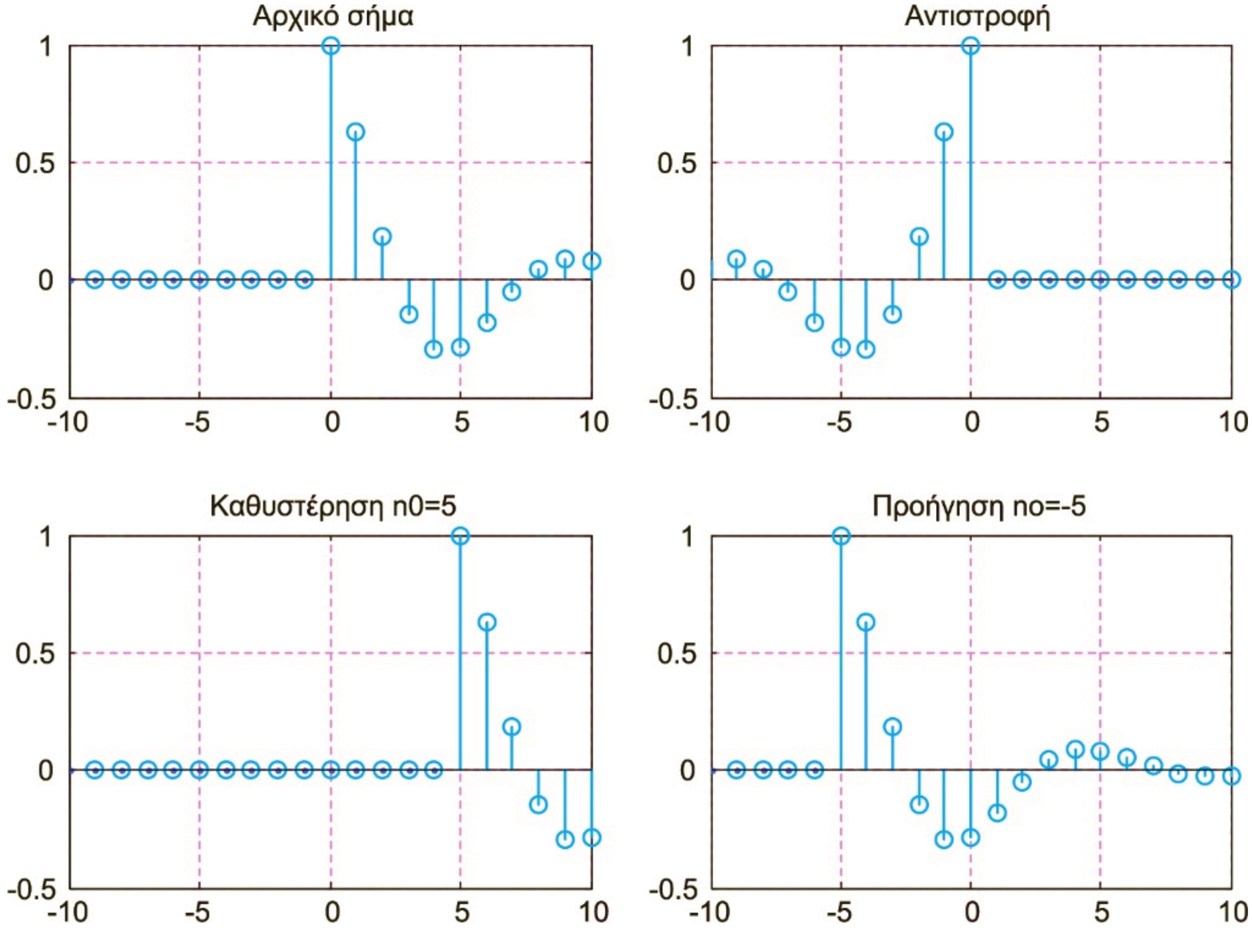
$$y[n] = x[n - n_0]$$

- Αν $n_o > 0$ τότε το $x[n]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά και η ακολουθία $y[n]$ παρουσιάζει **καθυστέρηση** σε σχέση με την ακολουθία $x[n]$.
- Αν $n_o < 0$ τότε το $x[n]$ μετατοπίζεται προς τα αριστερά και η $y[n]$ παρουσιάζει **προπορεία** (προήγηση) σε σχέση με την ακολουθία $x[n]$.

2. Αντιστροφή ή ανάκλαση ενός ΣΔΧ $x[n]$ συμβαίνει όταν αντικαταστήσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή n με την ποσότητα $-n$, δηλαδή:

$$y[n] = x[-n]$$

Παράδειγμα Χρονικής Μετατόπισης και Αντιστροφής



(α) Αρχικό σήμα $x[n]$, (β) Αντιστροφή $y[n] = x[-n]$
(γ) Καθυστέρηση $(n_0 = 5), y[n] = x[n-5]$, (δ) Προπορεία $(n_0 = -5), y[n] = x[n+5]$,

Χρονική Κλιμάκωση

3. Κλιμάκωση στο χρόνο: Η αλλαγή της κλίμακας χρόνου στα ΣΔΧ είναι περισσότερο περίπλοκη σε σχέση με τα σήματα συνεχούς χρόνου, επειδή στα ΣΔΧ η συστολή και διαστολή του χρόνου σχετίζεται με τη μεταβολή της περιόδου δειγματοληψίας T_s.

- Αν αλλάξουμε την περίοδο δειγματοληψίας από T_s σε MT_s, όπου M ακέραιος αριθμός με $M > 1$, τότε το πλήθος των δειγμάτων θα μειωθεί. Η διαδικασία ονομάζεται **διαίρεση συχνότητας** ή **υποδειγματοληψία** (down sampling) και ορίζεται από τη σχέση:

$$y[n] = x[Mn], \qquad \text{όπου } M \in N, \qquad M > 1$$

  Το $y[n]$ σχηματίζεται λαμβάνοντας κάθε φορά το δείγμα M-τάξης του $x[n]$.

- Αν αλλάξουμε την περίοδο δειγματοληψίας από T_s σε T_s/N, όπου N ακέραιος αριθμός με $N > 1$, τότε το πλήθος των δειγμάτων θα αυξηθεί. Η διαδικασία ονομάζεται **πολλαπλασιασμός συχνότητας** ή **υπερδειγματοληψία** (up sampling) και ορίζεται από τη σχέση:

$$y[n] = x[n/N], \qquad \text{όπου } N \in N, \qquad N > 1$$

  Το $y[n]$ σχηματίζεται παρεμβάλλοντας N-1 μηδενικά ανάμεσα σε κάθε δείγμα του $x[n]$.

Χρονική Κλιμάκωση

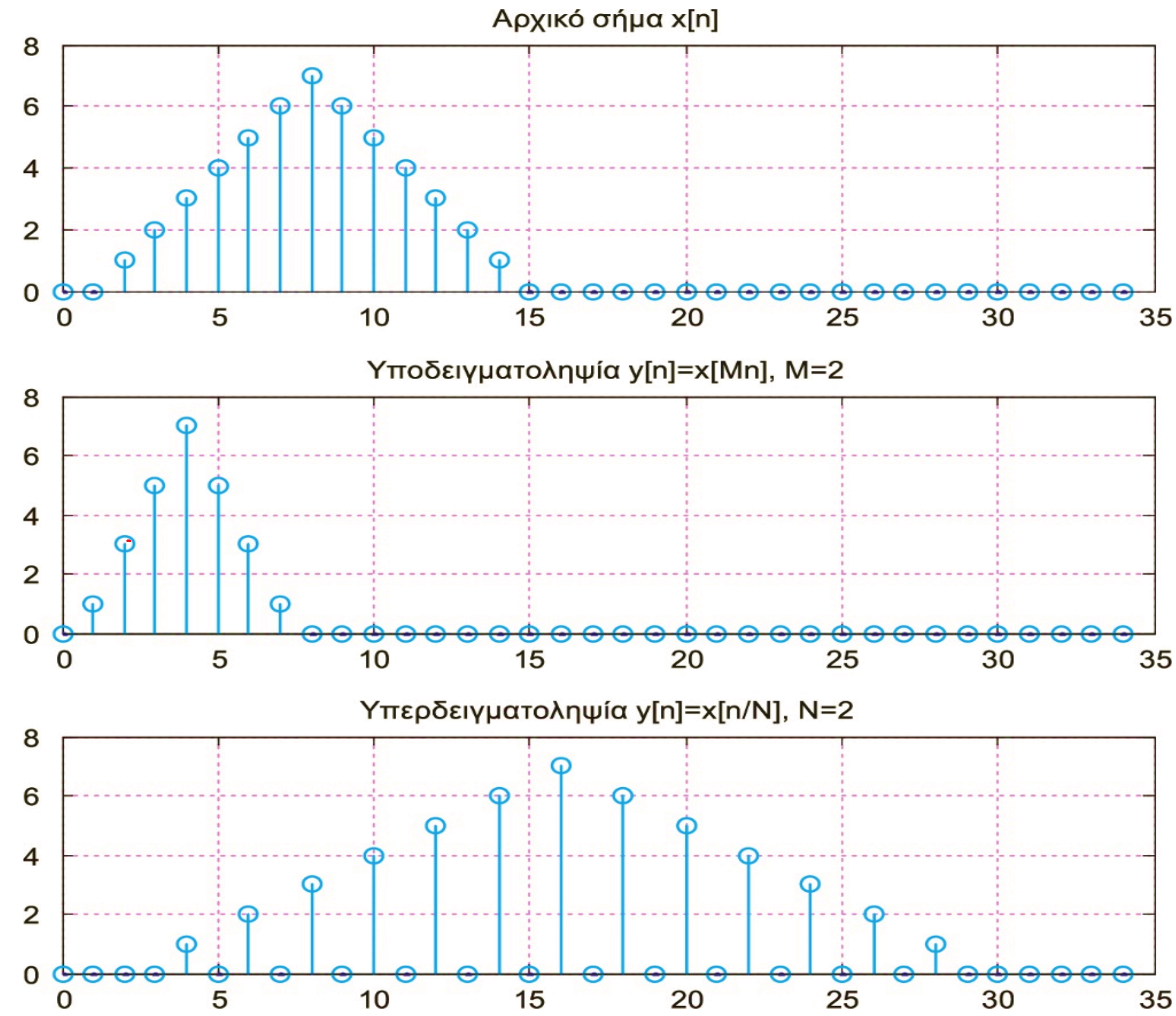
Αν το πηλίκο n/N είναι μη ακέραιο, τότε το ΣΔΧ δεν ορίζεται. Όταν το n/N είναι ακέραιος αριθμός, δηλαδή το n είναι πολλαπλάσιο του N ($n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$), θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις τιμές του $y[n]$ για τις ενδιάμεσες τιμές του n. Στην περίπτωση αυτή το $y[n]$ σχηματίζεται παρεμβάλλοντας πλήθος $N-1$ μηδενικών τιμών ανάμεσα σε δύο διαδοχικά δείγματα του $x[n]$:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm L, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Η χρονική μετατόπιση και η κλιμάκωση στο χρόνο δεν είναι αντιμεταθετικές, άρα εξαρτώνται από τη **σειρά** με την οποία θα εκτελεστούν.
- Αν από το σήμα $x[n]$ ζητείται να δημιουργηθεί το $y[n] = x(an - b)$, πρέπει πρώτα να γίνει η χρονική μετατόπιση, να παραχθεί το σήμα $z[n] = x(n - b)$, και κατόπιν η κλιμάκωση στο χρόνο για $n = an$ ώστε να παραχθεί το ζητούμενο σήμα $y[n] = x(an - b)$.
- Μεταξύ της κλιμάκωσης στο χρόνο και της αντιστροφής (ανάκλαση) ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, άρα δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία θα εκτελεστούν.

Παράδειγμα Διαίρεσης και Πολλαπλασιασμού Συχνότητας



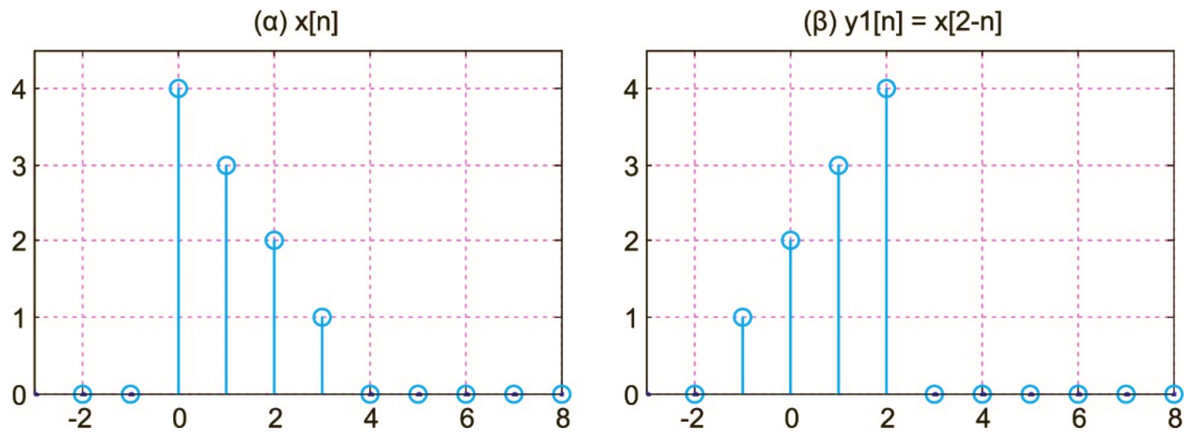
Παράδειγμα (α) Διαίρεσης και (β) Πολλαπλασιασμού συχνότητας, σήματος διακριτού χρόνου

Άσκηση 7

Δίνεται το σήμα $x[n] = [4 - n]\big[u[n] - u[n-4]\big]$. Να σχεδιάσετε τα σήματα:

(α) $y_1[n] = x[2-n]$ (β) $y_2[n] = x[2n-1]$ (γ) $y_3[n] = x[6-2n]$

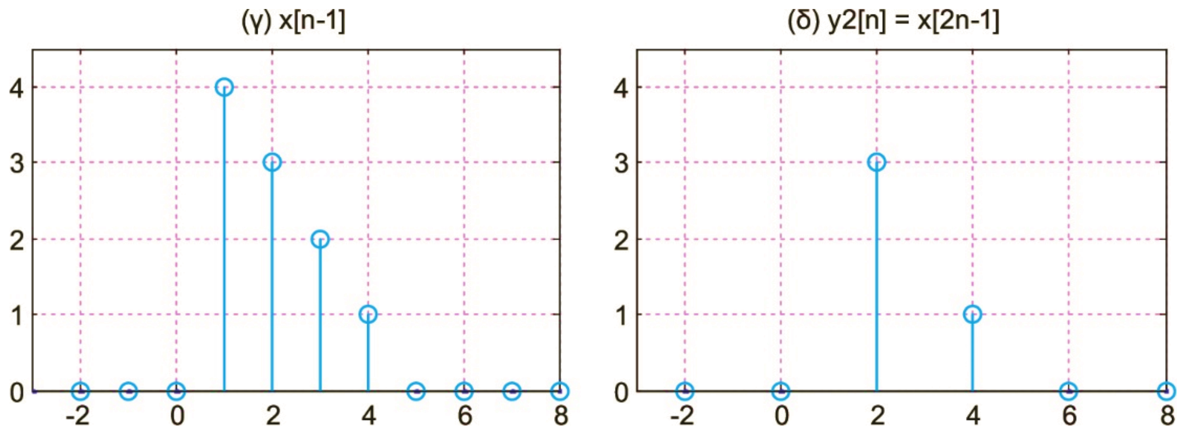
Απάντηση: (α) Το σήμα $x[n]$ [σχήμα (α)], είναι μια γραμμικά μειούμενη ακολουθία, που ξεκινά στην τιμή $n = 0$ και τελειώνει στην τιμή $n = 4$. Το σήμα $y_1[n] = x[2-n]$ [σχήμα (β)] προκύπτει με τη μετατόπιση του $x[n]$ κατά δύο σημεία και με αντι-στροφή ως προς το χρόνο. Για $n = 2$ η $y_1[n]$ είναι ίση με $x[0]$. Επομένως, το $y_1[n]$ παίρνει την τιμή 4 για $n = 2$ και μειώνεται γραμμικά προς τα αριστερά μέχρι το σημείο $n = -1$, πέρα από το οποίο η $y_1[n]$ ισούται με το μηδέν.



Σήματα: (α) $x[n]$, (β) $x[2-n]$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

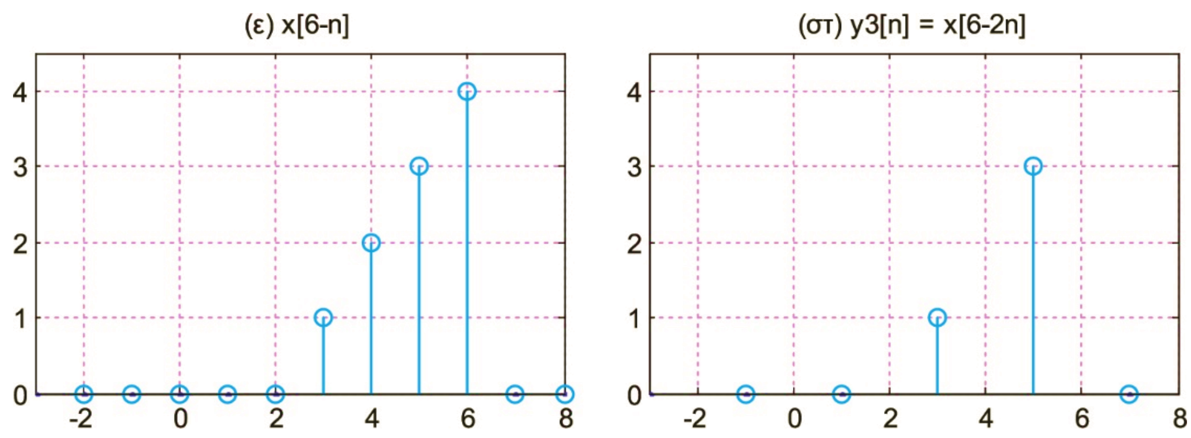
(β) Το σήμα $y_2[n] = [2n - 1]$ [σχήμα (γ)] προκύπτει από τον συνδυασμό της μετατόπισης ως προς τον χρόνο και της διαίρεσης συχνότητας. Επομένως, το $y_2[n]$ σχεδιάζεται μετατοπίζοντας πρώτα το $x[n]$ προς τα δεξιά κατά ένα σημείο (καθυστέρηση). Κατόπιν, εφαρμόζεται στο σήμα $y_2[n]$ διαίρεση συχνότητας με συντελεστή 2. Κρατώντας μόνο τους άρτιους όρους στο σχήμα (γ) προκύπτει το γράφημα του $y_2[n]$ [σχήμα (δ)].



Σήματα: (γ) $x[n-1]$, (δ) $x[2n-1]$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

(γ) Το σήμα $y_3(n) = x[6-2n]$ [σχήμα (ε)] προκύπτει από έναν συνδυασμό μετατόπισης στο χρόνο, διαίρεσης συχνότητας και αντιστροφής στο χρόνο. Για να παρασταθεί γραφικά το $y_3[n]$ ξεκινάμε σχεδιάζοντας το $x[6-2n]$, το οποίο σχηματίζεται μετατοπίζοντας το $x[n]$ προς τα αριστερά κατά έξη σημεία (προπορεία) και με αναστροφή στο χρόνο. Τελικά το $y_3[n]$ [σχήμα (στ)] βρίσκεται υπολογίζοντας κάθε δεύτερο δείγμα του $x[6-2n]$.



Σήματα: (ε) $x[6-n]$, (στ) $x[6-2n]$

Θεμελιώδη Σήματα Διακριτού Χρόνου

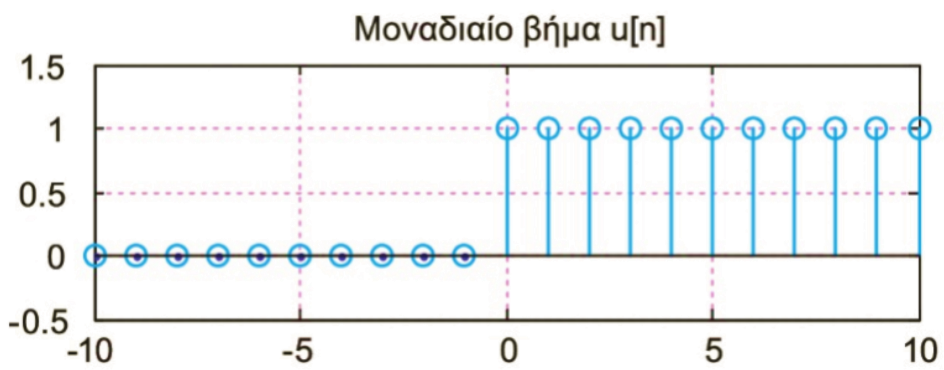
- Ακολουθία μοναδιαίου βήματος
- Ακολουθία μοναδιαίας κρουστικής (ώσης)
- Ακολουθία μοναδιαίας κλίσης
- Πραγματική εκθετική ακολουθία
- Μιγαδική εκθετική ακολουθία
- Ημιτονοειδής ακολουθία

Ακολουθία Μοναδιαίου Βήματος

Ακολουθία μοναδιαίου βήματος (unit step)**:**

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Σε σχέση με την αντίστοιχη βηματική συνάρτηση συνεχούς χρόνου $u(t)$, η μοναδιαία βηματική διακριτού χρόνου $u[n]$ δεν εμφανίζει κάποια μαθηματική ασυνέχεια.



Ακολουθία μοναδιαίου βήματος $u[n]$

Ακολουθία Μοναδιαίας Κρουστικής (Ώση)

Ακολουθία μοναδιαίας κρουστικής (unit impulse):

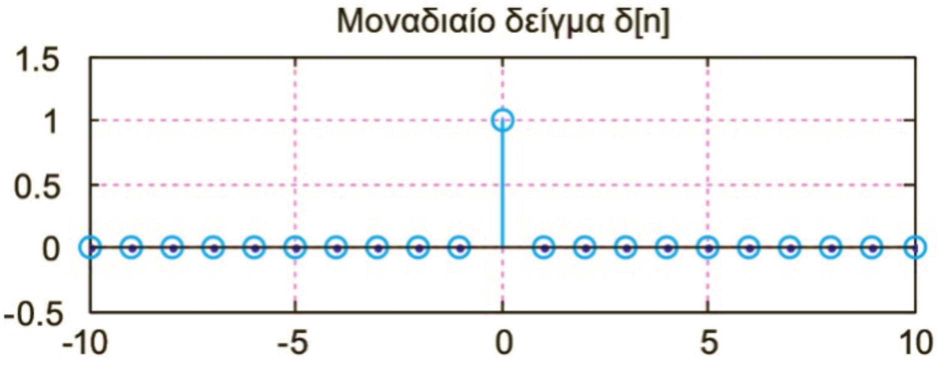
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Σε σχέση με την $\delta(t)$ η $\delta[n]$ ορίζεται με ένα πολύ απλό τρόπο και δεν εμφανίζει ασυνέχεια στο $t = 0$, ούτε λαμβάνει άπειρη τιμή πλάτους.

Τα σήματα $\delta[n]$ και $u[n]$ συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m], \qquad \text{όπου } m = n - k$$



Ακολουθία μοναδιαίας κρουστικής $\delta[n]$

Σύγκριση με αντίστοιχα Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Τα σήματα $\delta[n]$ και $u[n]$ συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m], \qquad \text{όπου } m = n-k$$

Οι αντίστοιχες σχέσεις για τα σήματα συνεχούς χρόνου $\delta(t)$ και $u(t)$, είναι:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

Οι παραπάνω σχέσεις μοιάζουν μεταξύ τους αλλά οι πρώτες είναι απλούστερες μαθηματικά καθώς στη θέση της παραγώγου και του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε διαφορές και αθροίσματα.

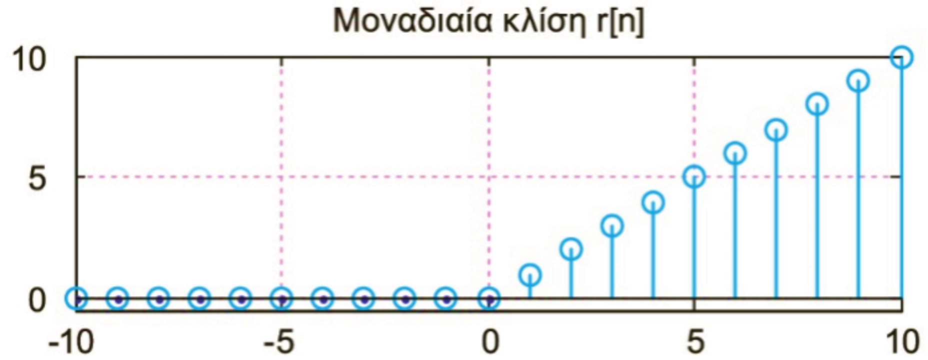
Επιπλέον, δεν υπάρχουν ασυνέχειες στους ορισμούς των $\delta[n]$ και $u[n]$.

Τα $\delta[n]$ και $u[n]$ δεν αποτελούν δειγματοληπτημένες εκδοχές των $\delta(t)$και $u(t)$ αλλά ορίζονται αυτοτελώς.

Ακολουθία Μοναδιαίας Κλίσης

Ακολουθία μοναδιαίας κλίσης (ράμπα) (unit ramp):

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Ακολουθία μοναδιαίας κλίσης $r[n]$

Ανάλυση ΣΔΧ σε Μοναδιαίες Ώσεις

Κάθε ΣΔΧ $x[n]$ μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα κατάλληλα μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων $\delta[n]$ πολλαπλασιασμένες με έναν συντελεστή βάρους που αντιστοιχεί στην εκάστοτε τιμή του σήματος $x[n]$.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

- Κάθε όρος $x[k]\,\delta[n-k]$ θεωρείται ότι είναι ένα σήμα με πλάτος $x[k]$ τη χρονική στιγμή $n = k$, ενώ μηδενίζεται για οποιαδήποτε άλλη τιμή του n.

- Η παραπάνω αναγραφή σήματος διακριτού χρόνου προκύπτει από την **ιδιότητα ολίσθησης** της συνάρτησης $\delta[n]$, δηλαδή:

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

  και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της εξόδου ενός γραμμικού και αμετάβλητου κατά τη μετατόπιση (ΓΑΚΜ) συστήματος διακριτού χρόνου.

Άσκηση 8

Να εκφραστεί το σήμα $x[n] = \{.., 0, \hat{1}, 2,3,0, \dots\}$: (α) σε άθροισμα μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων και (β) σε άθροισμα μοναδιαίων βηματικών ακολουθιών.

Απάντηση: (α) Ως άθροισμα μοναδιαίων κρουστικών (ώσεων) είναι:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

(β) Στην παραπάνω επίλυση θέτουμε $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ και λαμβάνουμε:

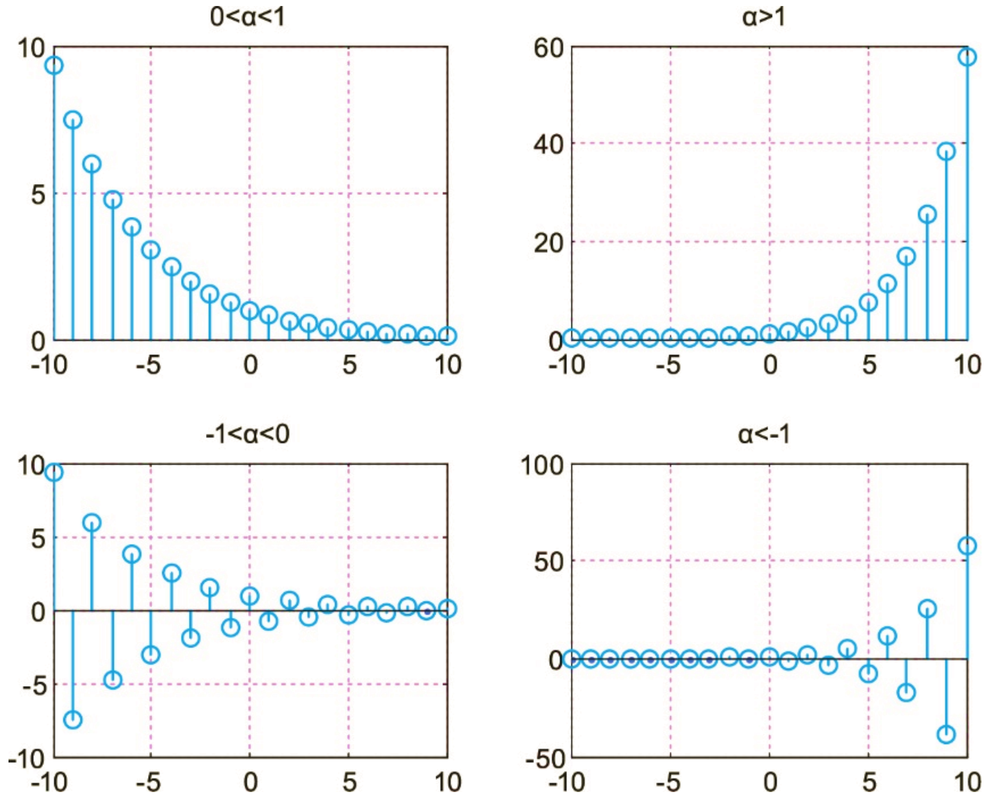
$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] = \\ &= u[n] - u[n-1] + 2u[n-1] - 2u[n-2] + 3u[n-2] - 3u[n-3] \\ &= u[n] + u[n-1] + u[n-2] - 3u[n-3] \end{aligned}$$

Πραγματική Εκθετική Ακολουθία

Πραγματική εκθετική ακολουθία: $x[n] = A\,\alpha^n$, όπου $\mathrm{A}, \alpha \in \mathrm{R}$

A: εκφράζει το πλάτος της ακολουθίας

α: εκφράζει το ρυθμό κλίσης της γραφικής παράστασης της ακολουθίας



Μορφές της ακολουθίας $x[n] = \alpha^n$ για διάφορες τιμές του α.

Συνοπτικά Στοιχεία Μιγαδικής Ανάλυσης

Μια μιγαδική ακολουθία $x[n]$ μπορεί να εκφραστεί είτε σε **καρτεσιανή μορφή**, δηλαδή σε πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$a[n] + jb[n] = Re\{x[n]\} + j\, Im\{x[n]\}$$

είτε σε **πολική μορφή**, δηλαδή σε πλάτος (μέτρο) και φάση:

$$x[n] = |x[n]|\, e^{j\, \varphi_x[n]}$$

όπου το πλάτος $|x[n]|$ και η φάση $\arg\{x[n]\}$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$|x[n]| = \sqrt{Re^2\{x[n]\} + Im^2\{x[n]\}} \text{ abs()}$$

$$\varphi_x[n] = \tan^{-1} \frac{Im\{x[n]\}}{Re\{x[n]\}} \text{ angle()}$$

Η πολική μορφή είναι προτιμητέα, επειδή απλοποιούνται οι υπολογισμοί και επειδή παράγει τις φασματικές αναπαραστάσεις πλάτους και φάσης.

Η συζυγής μιγαδική ακολουθία $x^*[n]$ δίνεται από τη σχέση:

$$x^*[n] = Re\{x[n]\} - j\, Im\{x[n]\} = |x[n]|\, e^{-j\varphi_x[n]}$$

Το μέτρο παραμένει ίδιο αλλά σημειώνεται αντιστροφή της φάσης.

Μιγαδική Εκθετική Ακολουθία

Μιγαδική εκθετική ακολουθία: $x[n] = a^n$, όπου $\alpha \in \mathrm{C}$.

Θέτοντας $\alpha = |\alpha| e^{j\omega_0}$ έχουμε:

$$x[n] = \alpha^n = |\alpha|^n e^{j(n\omega_0)} = |\alpha|^n \{\cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)\}$$

<u>Καρτεσιανή Μορφή</u>:

- Πραγματικό μέρος: $x_R[n] = |\alpha|^n \, cos(n\omega_0)$
- Φανταστικό μέρος: $x_I[n] = |\alpha|^n \, sin(n\omega_0)$

<u>Πολική Μορφή</u>:

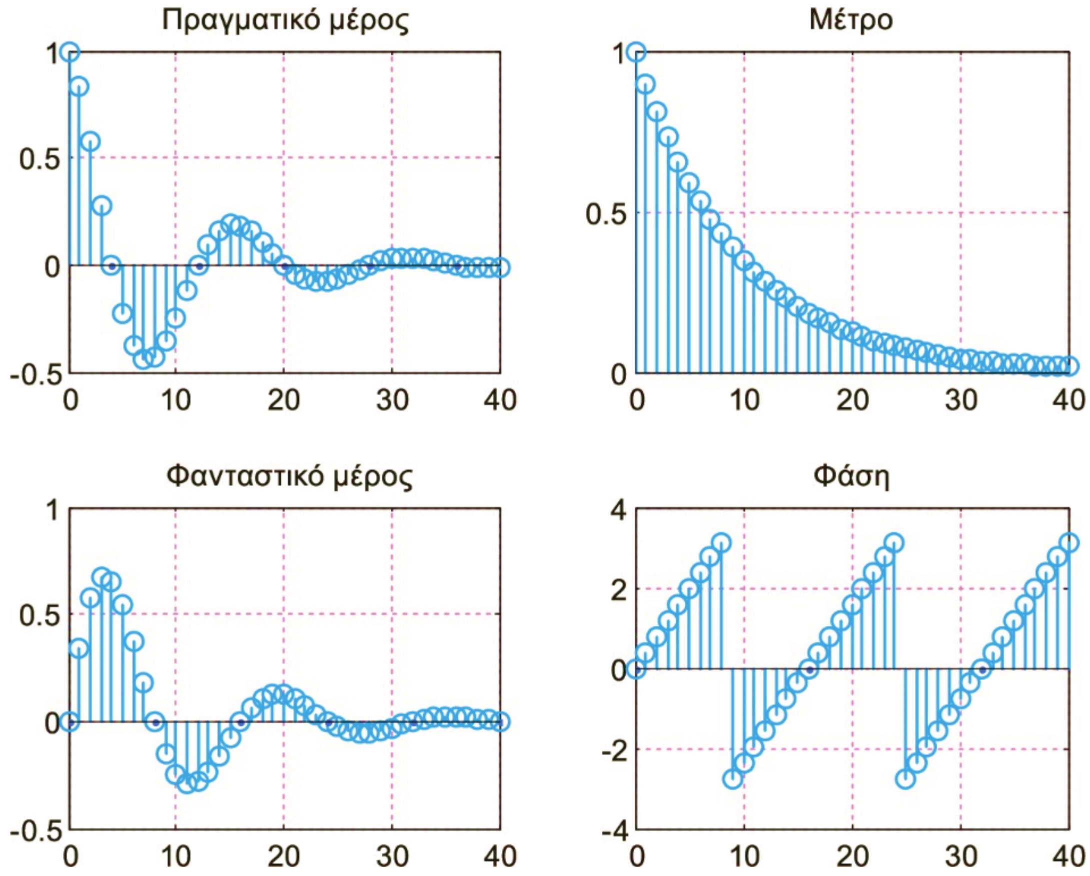
- Μέτρο : $|x[n]| = \alpha^n$
- Φάση: $\varphi(n) = n\omega_0$

Σχόλια για τη Μιγαδική Εκθετική Ακολουθία

- Η μιγαδική εκθετική ακολουθία διακριτού χρόνου είναι **διαφορετική** από τη μιγαδική συνάρτηση συνεχούς χρόνου:
$$x(t) = e^{-st} = e^{(-\sigma + j\Omega_0)t}$$
όπου Ω_0 είναι η συνεχής συχνότητα.
- Με δειγματοληψία στη μιγαδική συνάρτηση $x(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T_s, προκύπτει η δειγματοληπτημένη μιγαδική ακολουθία:
$$x[n] = x(nT_s) = e^{(-\sigma n T_s + j\Omega_0 n T_s)} = \left(e^{-\sigma T_s}\right)^n e^{j(\Omega_0 T_s)n} = \alpha^n e^{j\omega_0 n}$$
όπου $\alpha = e^{-\sigma T_s}$ και $\omega_0 = \Omega_0\, T_s$.
- Η μιγαδική εκθετική ακολουθία διακριτού χρόνου, σε αντίθεση με τη μιγαδική συνάρτηση συνεχούς χρόνου, είναι **πάντα περιοδική** με περίοδο 2π, καθώς επειδή $e^{j2\pi n} = 1, \forall n \in Z$, ικανοποιεί τη σχέση:
$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n}$$
- Η αρνητική συχνότητα υποδηλώνει τη δεξιόστροφη φορά περιστροφής του διανύσματος $e^{-jn\omega_0}$ με ταχύτητα $n\omega_0$.
- Ο όρος $e^{jn\omega_0}$ περιγράφει ένα διάνυσμα που περιστρέφεται αριστερόστροφα με ταχύτητα $n\omega_0$ και εκφράζει τις θετικές συχνότητες.

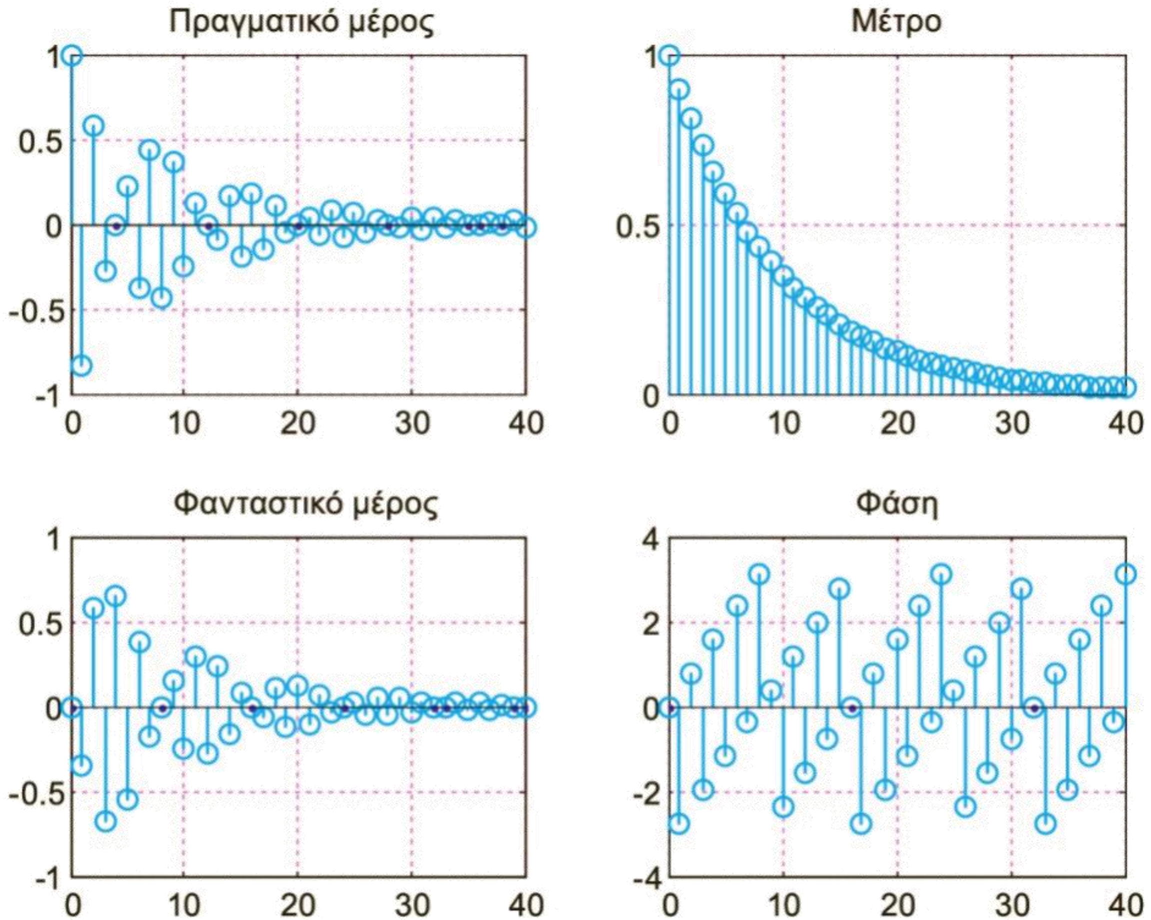
Άσκηση 9

Να υπολογιστεί το μιγαδικό σήμα $x[n] = a^n e^{j\omega_0 n}$, με $\omega_0 = \pi/8$ στο χρονικό διάστημα $0 \leq n \leq 40$ και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα πραγματικού – φανταστικού μέρους και μέτρου - φάσης για τιμές του $\alpha = 0.9, -0.9, 1.2, -1.2$.



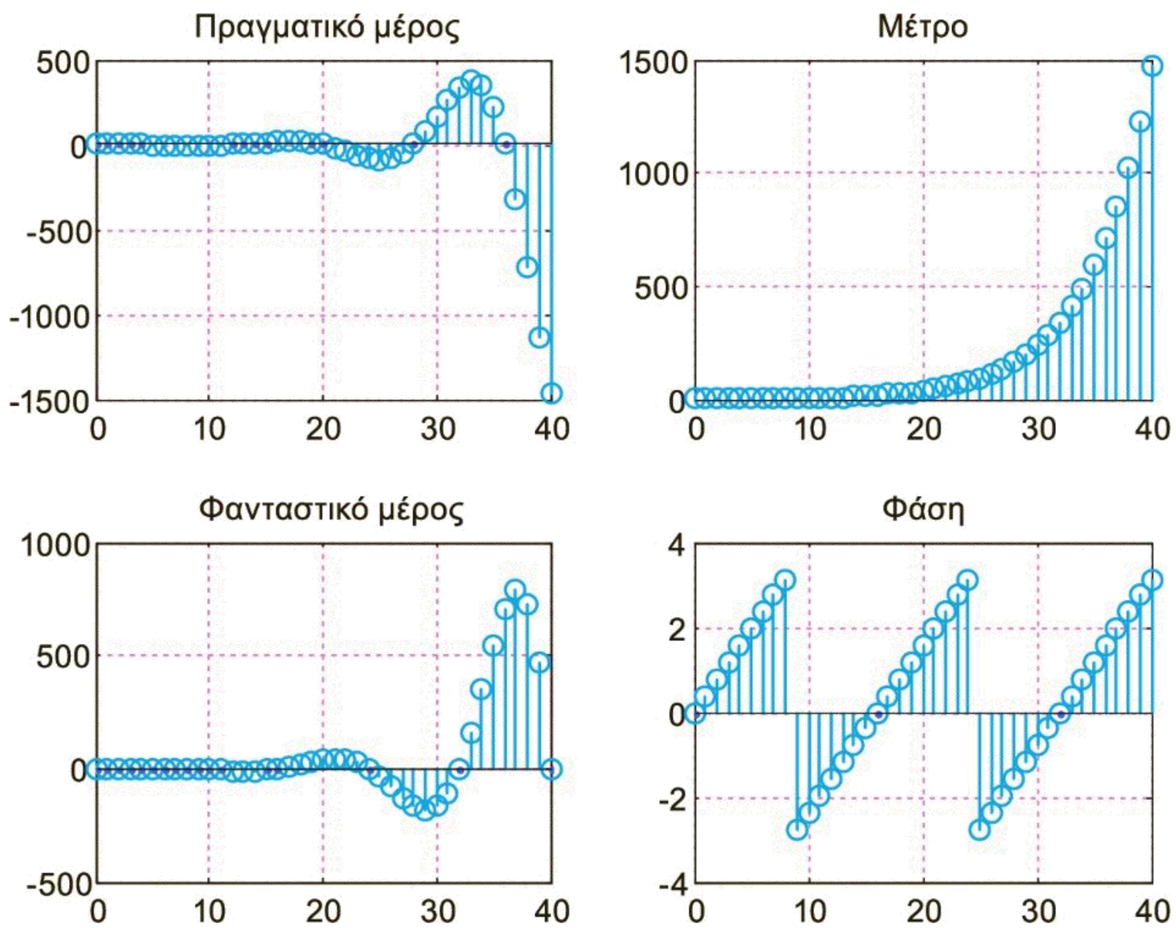
Γραφική παράσταση μιγαδικής εκθετικής ακολουθίας για $\alpha = 0.9$

Άσκηση 9 (συνέχεια)



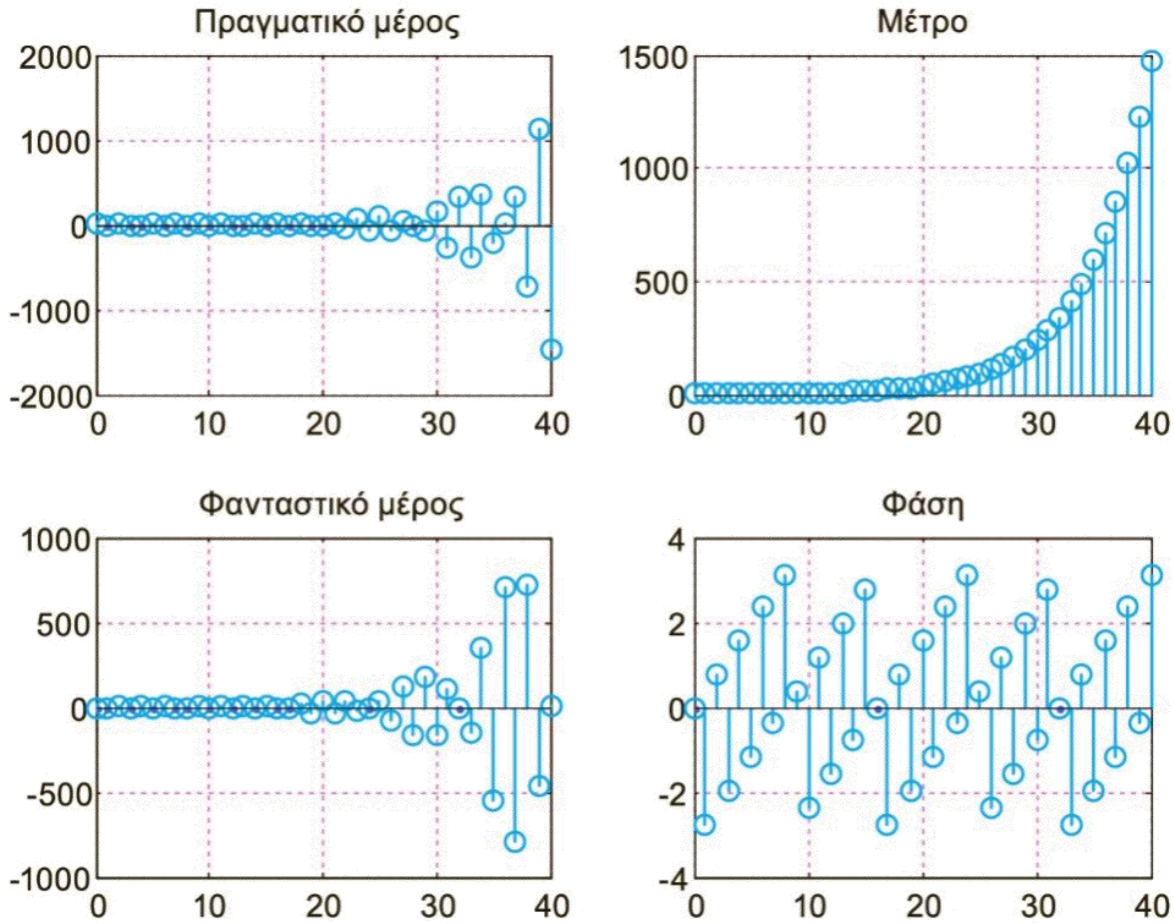
Γραφική παράσταση μιγαδικής εκθετικής ακολουθίας για $\alpha = -0.9$

Άσκηση 9 (συνέχεια)



Γραφική παράσταση μιγαδικής εκθετικής ακολουθίας για $\alpha = 1.2$

Άσκηση 9 (συνέχεια)



Γραφική παράσταση μιγαδικής εκθετικής ακολουθίας για $\alpha = -1.2$

Ημιτονοειδής Ακολουθία

Η ημιτονοειδής και η συνημιτονοειδής ακολουθία (εν’ συντομία ημιτονοειδής ακολουθία) μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις των μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών.

Η συνημιτονοειδής ακολουθία είναι το πραγματικό μέρος της μιγαδικής εκθετικής ακολουθίας, ενώ η ημιτονοειδής είναι το φανταστικό μέρος της.

$$x[n] = A\alpha^n = |A|e^{j(n\omega_0+\theta)} = |A|\{\cos(n\omega_0+\theta) + j\sin(n\omega_0+\theta)\}$$

Μεταξύ των δύο ακολουθιών υφίσταται διαφορά φάσης π/2, σύμφωνα με:

$$\mathrm{A}\cos(n\omega_0+\theta) = A\sin(n\omega_0+\theta+\pi/2)\,, \qquad -\infty < n < \infty$$

όπου $\omega_0 = 2\pi(m/N)$ (rad) είναι η διακριτή συχνότητα.

Η μεταβλητή $f_0 = m/N$ ονομάζεται **συχνότητα** (Hz) και ισχύει $\omega_0 = 2\pi f_0$.

<u>Σημαντικό</u>: Αν οι αριθμοί m και N δεν έχουν κοινό διαιρέτη, τότε το ημιτονοειδές σήμα δεν είναι περιοδικό. Επομένως, οι **ημιτονοειδείς ακολουθίες διακριτού χρόνου δεν είναι πάντα περιοδικές συναρτήσεις**, όπως συμβαίνει με τις ημιτονοειδείς συναρτήσεις συνεχούς χρόνου.

Ημιτονοειδής Ακολουθία

Επειδή η μεταβλητή ω εκφράζεται σε rad, προκύπτει ότι η διακριτή συχνότητα επαναλαμβάνεται με περίοδο 2π, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $\omega_0 + 2\pi k = \omega_0$, όπου k θετικός ή αρνητικός ακέραιος αριθμός.

Για να αποφύγουμε την ασάφεια αναφοράς σε συγκεκριμένη περίοδο θεωρούμε ότι η διακριτή συχνότητα ω ικανοποιεί τη σχέση $-\pi < \omega \leq \pi$ και μετατρέπουμε κάθε άλλη συχνότητα ω_1 εκτός αυτής της περιοχής, με τη σχέση:

$$\omega_1 = \omega + 2\pi k \quad \text{ή} \quad \omega_1 \equiv \omega \ (mod\ 2\pi)$$

Η συχνότητα ω ονομάζεται **ισοδύναμη ή φαινόμενη συχνότητα**. Για παράδειγμα:

- Αν η συχνότητα λαμβάνει τιμή $\omega_0 = 2\pi$, τότε μπορεί να γραφεί ως $\omega_0 = 0 + 2\pi$, οπότε η ισοδύναμη συχνότητα είναι 0 (rad).

- Αν η συχνότητα είναι $\omega_0 = 7\pi/2$, τότε μπορεί να γραφεί ως $\omega_0 = (8-1)\pi/2 = 2x2\pi - \pi/2$, οπότε η ισοδύναμη συχνότητα είναι $-\pi/2$.

Άσκηση 10

Θεωρήστε τις ημιτονοειδείς ακολουθίες: $x_1[n] = sin(0.1\pi n)$, $x_2[n] = sin(0.2\pi n)$, $x_3[n] = sin(0.6\pi n)$ και $x_4[n] = sin(0.7\pi n)$ για $-\infty < n < \infty$.

(α) Να ευρεθεί αν είναι περιοδικές ή όχι.

(β) Να σχεδιάσετε τις ακολουθίες στην περιοχή χρόνου $n = 0, \dots 40$.

(γ) Μπορούν αυτές οι ακολουθίες να είναι δειγματοληπτημένες εκδοχές των αντί-στοιχων συναρτήσεων συνεχούς χρόνου;

Απάντηση: (α) Οι δοθείσες ακολουθίες γράφονται:

$$x_1[n] = sin(0.1\pi n) = \sin\left(\frac{2\pi}{20} n\right)$$

$$x_2[n] = sin(0.2\pi n) = \sin\left(\frac{2\pi}{20} 2n\right)$$

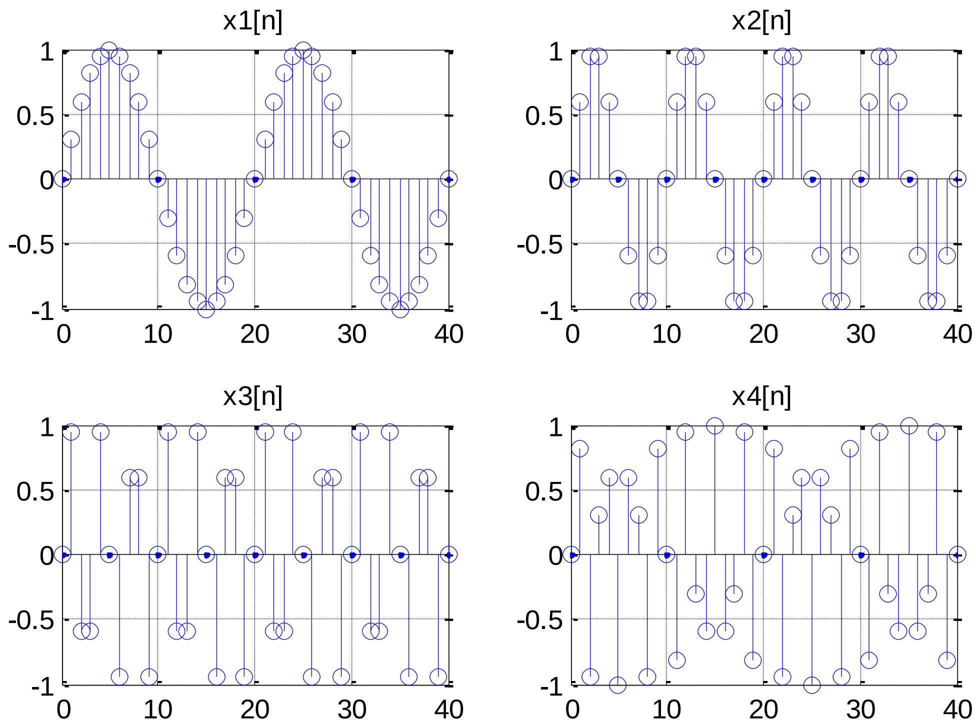
$$x_3[n] = sin(0.6\pi n) = \sin\left(\frac{2\pi}{20} 6n\right)$$

$$x_4[n] = sin(0.7\pi n) = \sin\left(\frac{2\pi}{20} 7n\right)$$

Επομένως, οι ακολουθίες είναι περιοδικές και αρμονικά συνδεδεμένες μεταξύ τους.

Άσκηση 10 (συνέχεια)

Ημιτονοειδής ακολουθία για διαφορετικές τιμές συχνότητας f_0:



Από το σχήμα προκύπτει ότι οι ακολουθίες οι $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι οι δειγματοληπτημένες εκδοχές των αντίστοιχων συναρτήσεων συνεχούς χρόνου.

Δεν ισχύει το ίδιο όμως για τις ακολουθίες $x_3[n]$ και $x_4[n]$.

Άσκηση 10 (συνέχεια)

Θα ήταν λάθος να υποθέσουμε ότι αυτό συμβαίνει εξαιτίας παραβίασης του κανόνα Nyquist, δηλαδή λόγω λανθασμένης συχνότητας δειγματοληψίας.

Ας εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό: Για να λάβουμε τη διακριτή ακολουθία $sin(\omega_0 n)$ πρέπει από τη συνάρτηση συνεχούς χρόνου $sin(\Omega_0 t)$ να πάρουμε δείγματα με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1$ σύμφωνα με τη συνθήκη Nyquist:

$$T_s = 1 \leq \frac{\pi}{\Omega_0}$$

όπου π/Ω_0 είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της περιόδου δειγματοληψίας για την οποία δεν εμφανίζεται το φαινόμενο της αλλοίωσης.

Για την ακολουθία $x_3[n] = sin(0.6\pi n) = sin(0.6\pi t)|_{t=nT_s=n}$ όταν $T_s = 1$, ισχύει:

$$T_s = 1 \leq \frac{\pi}{0.6\,\pi} \approx 1{,}66$$

Αντίθετα, στην περίπτωση της ακολουθίας $x_2[n]$ έχουμε: $x_2[n] = sin(0.2\pi n) = sin(0.2\pi t)|_{t=nT_s=n}$ όταν $T_s = 1$, οπότε έχουμε:

$$T_s = 1 \leq \frac{\pi}{0.2\,\pi} = 5$$

Άσκηση 10 (συνέχεια)

Επομένως, η δημιουργία της ακολουθίας $x_2[n]$ γίνεται λαμβάνοντας μεγαλύτερο πλήθος δειγμάτων από τη συνάρτηση $sin(0.2\pi t)$, σε σχέση με τη δημιουργία της ακολουθίας $x_3[n]$ από τη συνάρτηση $sin(0.6\pi t)$, χρησιμοποιώντας και στις δύο περιπτώσεις την ίδια περίοδο δειγματοληψίας.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η ακολουθία $x_2[n]$ να μοιάζει περισσότερο με αναλογικό ημίτονο από ότι η $x_3[n]$, ωστόσο και στις δύο περιπτώσεις δεν προκύπτει φαινόμενο αλλοίωσης.

<u>Σημαντική παρατήρηση</u>: Η αναλογική συχνότητα Ω των αναλογικών ημιτόνων μεταβάλλεται στην περιοχή $[0, \infty)$, ενώ οι διακριτές (ψηφιακές) συχνότητες ω είναι ακτινικές και μεταβάλλονται στην περιοχή $[0, \pi]$.

Αρνητικές συχνότητες χρειάζονται στην ανάλυση πραγματικών (real-valued) σημάτων και έτσι καταλήγουμε σε περιοχές συχνοτήτων:

(α) για τα σήματα συνεχούς χρόνου: $-\infty < \Omega < \infty$, και

(β) για τα σήματα διακριτού χρόνου: $-\pi < \omega \leq \pi$.