



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

Θεματική Ενότητα
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΚΟΝΑΣ

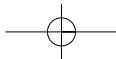
Τόμος Β'

Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων και Σημάτων

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ
Καθηγητής
Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΑΝΑΣΤΑΣΟΠΟΥΛΟΣ
Αναπλ. Καθηγητής
Πανεπιστημίου Πατρών

ΠΑΤΡΑ 2003



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

Θεματική Ενότητα
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΚΟΝΑΣ

Τόμος Β'
Ψηφιακή επεξεργασία εικόνων και σημάτων

Συγγραφή

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΣΚΟΔΡΑΣ
Καθηγητής
Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΑΝΑΣΤΑΣΟΠΟΥΛΟΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής
Πανεπιστημίου Πατρών

Κριτική Ανάγνωση

ΣΕΡΓΙΟΣ ΘΕΟΔΩΡΙΔΗΣ
Καθηγητής Τμήματος Πληροφορικής Πανεπιστημίου Αθηνών

Ακαδημαϊκός Υπεύθυνος για την επιστημονική επιμέλεια του τόμου

ΣΕΡΓΙΟΣ ΘΕΟΔΩΡΙΔΗΣ
Καθηγητής Τμήματος Πληροφορικής Πανεπιστημίου Αθηνών

Επιμέλεια στη μέθοδο της εκπαίδευσης από απόσταση

ΠΕΤΡΟΣ ΓΑΝΟΣ

Γλωσσική Επιμέλεια

ΕΛΕΝΗ ΚΟΥΤΣΟΣΠΥΡΟΥ

Τεχνική Επιμέλεια – Καλλιτεχνική Επιμέλεια – Σελιδοποίηση

ΤΥΡΟΡΑΜΑ

Συντονισμός ανάπτυξης εκπαιδευτικού υλικού και γενική επιμέλεια των εκδόσεων

ΟΜΑΔΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΕΡΓΟΥ ΕΑΠ / 1997–2003

ISBN: 960–538–224–5

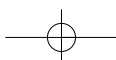
Κωδικός Έκδοσης: ΠΛΗ 44/2

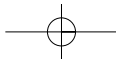
Copyright 2003 για την Ελλάδα και όλο τον κόσμο

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Οδός Παπαφλέσσα & Υψηλάντη, 26222 Πάτρα – Τηλ: 2610 314094, 314206 Φαξ: 2610 317244

Σύμφωνα με το Ν. 2121/1993, απαγορεύεται η συνολική ή αποσπασματική αναδημοσίευση του βιβλίου αυτού ή η αναπαραγωγή του με οποιοδήποτε μέσο χωρίς την άδεια του εκδότη.





Περιεχόμενα

Κ ΕΦΑΛΛΙΟ 1

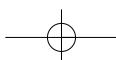
Εισαγωγή στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος και εικόνας

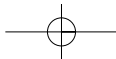
<i>Σκοπός, Προσδοκώμενα αποτελέσματα, Έννοιες κλειδιά, Εισαγωγικές παρατηρήσεις</i>	11
1.1 Ψηφιακή επεξεργασία σήματος	14
1.2 Τύποι σημάτων	15
1.2.1 Η έννοια της συχνότητας στα σήματα	16
1.2.2 Μετατροπή σήματος από αναλογικό-σε-ψηφιακό και από ψηφιακό-σε-αναλογικό	20
Σύνοψη ενότητας	30
1.3 Σήματα διακριτού χρόνου	31
1.3.1 Βασικά σήματα διακριτού χρόνου	31
1.3.2 Στοιχειώδεις πράξεις	33
Σύνοψη ενότητας	36
1.4 Συστήματα διακριτού χρόνου	36
1.4.1 Κρουστική απόκριση συστήματος	39
1.4.2 Συνέλιξη	40
Σύνοψη ενότητας	48
<i>Σύνοψη κεφαλαίου</i>	48
<i>Βιβλιογραφία κεφαλαίου</i>	49
<i>Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική</i>	49

Κ ΕΦΑΛΛΙΟ 2

Ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας

<i>Σκοπός, Προσδοκώμενα αποτελέσματα, Έννοιες κλειδιά, Εισαγωγικές παρατηρήσεις</i>	51
2.1 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου	53
2.1.1 Ορισμοί	53



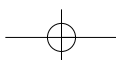


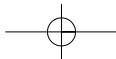
2.1.2 Θεωρήματα και ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου	57
2.1.3 Δειγματοληψία: μια ακόμη ματιά	62
Σύνοψη Ενότητας	65
2.2 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier	65
2.2.1 Ορισμοί	65
2.2.2 Ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier	73
2.2.3 Γραμμική συνέλιξη μέσω του DFT	77
2.2.4 Ο DFT σε μορφή πινάκων	79
Σύνοψη ενότητας	82
2.3 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT)	82
Σύνοψη ενότητας	89
<i>Σύνοψη κεφαλαίου</i>	90
<i>Βιβλιογραφία κεφαλαίου</i>	91
<i>Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική</i>	92

Κ ΕΦΑΛΛΙΟ 3

Μετασχηματισμός-z

<i>Σκοπός, Προσδοκώμενα αποτελέσματα, Έννοιες κλειδιά, Εισαγωγικές παρατηρήσεις</i>	93
3.1 Ο Μετασχηματισμός-z	95
3.1.1 Ορισμός	95
3.1.2 Ύπαρξη του μετασχηματισμού-z	96
3.1.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού-z	103
Σύνοψη Ενότητας	106
3.2 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός-z	106
3.2.1 Υπολογισμός του αντίστροφου M.Z. με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά	107
3.2.2 Υπολογισμός του αντίστροφου M.Z. με ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα	108



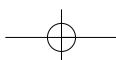


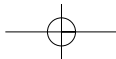
Σύνοψη ενότητας	112
3.3 Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-z	113
Σύνοψη ενότητας	115
3.4 Ο μετασχηματισμός-z στην ανάλυση συστημάτων	115
3.4.1 Αιτιαιότητα LTI συστήματος	115
3.4.2 Ευστάθεια LTI συστήματος	116
3.4.3 Εξισώσεις διαφορών	117
3.4.4 Δομές συστημάτων διακριτού χρόνου	119
3.4.5 Απόκριση συχνότητας συστημάτων διακριτού χρόνου	123
Σύνοψη ενότητας	133
Σύνοψη κεφαλαίου	133
Βιβλιογραφία κεφαλαίου	135
Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική	137

Κ ΕΦΑΛΛΙΟ 4

Ψηφιακά φίλτρα πεπερασμένης κρουσικής απόκρισης (FIR)

Σκοπός, Προσδοκώμενα αποτελέσματα, Έννοιες κλειδιά, Εισαγωγικές παρατηρήσεις	139
4.1 Χαρακτηριστικά των FIR φίλτρων	141
4.1.1 Γραμμική απόκριση φάσης	143
4.1.2 Ευστάθεια των φίλτρων – Πόλοι και μηδενικά	146
Σύνοψη ενότητας	147
4.2 Τύποι και προδιαγραφές των FIR φίλτρων	147
Σύνοψη ενότητας	149
4.3 Μέθοδοι σχεδίασης FIR φίλτρων	149
4.3.1 Μέθοδος των παραθύρων	149
4.3.2 Ιδιότητες και τύποι των παραθύρων	153
4.3.3 Μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων	156
Σύνοψη ενότητας	156



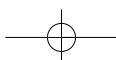
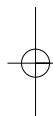
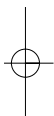


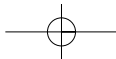
4.4	Θέματα υλοποίησης FIR φίλτρων	157
4.4.1	Δομές πραγματοποίησης των FIR φίλτρων	157
4.4.2	Σφάλμα από την κβάντιση των συντελεστών	159
	<i>Σύνοψη κεφαλαίου</i>	161
	<i>Βιβλιογραφία κεφαλαίου</i>	162
	<i>Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική</i>	163

Κ ΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)

	<i>Σκοπός, Προσδοκώμενα αποτελέσματα, Έννοιες κλειδιά,</i> <i>Εισαγωγικές παρατηρήσεις</i>	165
5.1	Αναλογικά φίλτρα	168
5.1.1	Γνωστά βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα	169
5.1.2	Μετασχηματισμοί συχνότητας αναλογικών φίλτρων	175
	<i>Σύνοψη ενότητας</i>	178
5.2	Σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων	178
5.2.1	Γραφική μέθοδος	178
5.2.2	Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής	179
5.2.3	Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού	184
	<i>Σύνοψη ενότητας</i>	191
5.3	Υλοποίηση IIR ψηφιακών φίλτρων	191
5.3.1	Πεπερασμένη ακρίβεια και υλοποίηση IIR ψηφιακών φίλτρων	193
	<i>Σύνοψη ενότητας</i>	195
	<i>Σύνοψη κεφαλαίου</i>	195
	<i>Βιβλιογραφία κεφαλαίου</i>	196
	<i>Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική</i>	197

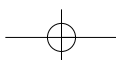
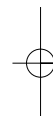
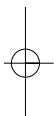


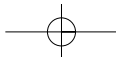


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εισαγωγή στην ψηφιακή εικόνα

<i>Σκοπός, Προσδοκώμενα αποτελέσματα, Έννοιες κλειδιά, Εισαγωγικές παρατηρήσεις</i>	199
6.1 Η ψηφιακή εικόνα	201
6.1.1 Η εικόνα ως δισδιάστατο σήμα	201
6.1.2 Στοιχειώδη δισδιάστατα ψηφιακά σήματα	204
6.1.3 Η γεωμετρία της εικόνας	205
6.1.4 Τρόποι απόκτησης της ψηφιακής εικόνας	208
6.1.5 Η επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας	211
Σύνοψη ενότητας	212
6.2 Η φυσιολογία της όρασης	213
6.2.1 Ο ανθρώπινος οφθαλμός	213
6.2.2 Φωτεινότητα, λαμπρότητα και αντίθεση	214
6.2.3 Χρώμα και ψυχοφυσικά φαινόμενα	217
6.2.4 Κριτήρια ποιότητας της εικόνας	217
Σύνοψη ενότητας	218
6.3 Είδη πράξεων στην επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας	218
6.3.1 Τοπικές πράξεις	219
6.3.2 Καθολικές πράξεις	222
6.3.3 Γεωμετρικές πράξεις	224
Σύνοψη ενότητας	226
6.4 Το φάσμα της εικόνας	226
Σύνοψη ενότητας	230
<i>Σύνοψη κεφαλαίου</i>	231
<i>Βιβλιογραφία κεφαλαίου</i>	231
<i>Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική</i>	232

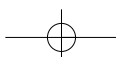
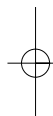


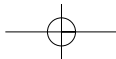


Κ ΕΦΑΛΛΙΟ 7

Δισδιάστατα ψηφιακά γραμμικά συστήματα

<i>Σκοπός, Προσδοκώμενα αποτελέσματα, Έννοιες κλειδιά, Εισαγωγικές παρατηρήσεις</i>	233
7.1 Δισδιάστατη συνέλιξη	236
7.1.1 Γραμμικότητα	237
7.1.2 Αμεταβλητότητα στην ολίσθηση	237
Σύνοψη ενότητας	242
7.2 Χαρακτηριστικά των δισδιάστατων ψηφιακών συστημάτων	242
7.2.1 Τρόποι σύνδεσης των δισδιάστατων ψηφιακών φίλτρων	242
7.2.2 Διαχωρίσιμα δισδιάστατα ψηφιακά συστήματα	245
7.2.3 Ευσταθή δισδιάστατα συστήματα	246
7.3 Απόκριση στη συχνότητα των δισδιάστατων ψηφιακών συστημάτων	247
Σύνοψη ενότητας	251
7.4 Σχεδίαση των δισδιάστατων ψηφιακών φίλτρων	251
7.4.1 Υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης από την απόκριση συχνότητας	251
7.4.2 Σχεδίαση δισδιάστατων FIR φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων	253
7.4.3 Άλλες μέθοδοι σχεδίασης των δισδιάστατων FIR φίλτρων	256
7.4.4 Εφαρμογές των δισδιάστατων FIR φίλτρων	257
Σύνοψη ενότητας	259
<i>Σύνοψη κεφαλαίου</i>	259
<i>Βιβλιογραφία κεφαλαίου</i>	260
<i>Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική</i>	260
Απαντήσεις Ασκήσεων Αυτοαξιολόγησης	261





Κ Ε ΦΑΛΛΑΙΟ



Εισαγωγή στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος και εικόνας

Σκοπός

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η μελέτη των σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου, η εξοικείωση με τη διαδικασία της δειγματοληψίας αναλογικών σημάτων και η κατανόηση της έννοιας της γραμμικής συνέλιξης για τον υπολογισμό της απόκρισης των ψηφιακών συστημάτων.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Όταν ολοκληρώσετε τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού θα είστε σε θέση να:

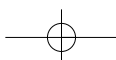
- Λαμβάνετε δείγματα αναλογικών σημάτων
- Αναλύετε τα σήματα διακριτού χρόνου σε άθροισμα μοναδιαίων κρουστικών
- Υπολογίζετε την απόκριση συστημάτων διακριτού χρόνου με τη βοήθεια της γραμμικής συνέλιξης

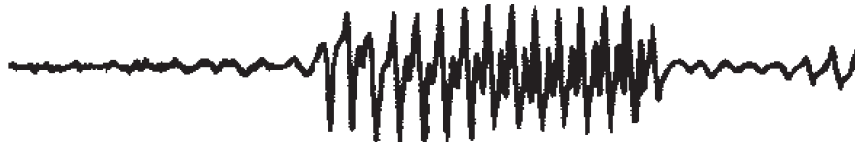
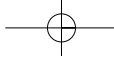
Έννοιες κλειδιά

- Γραμμική συνέλιξη
- Θεώρημα δειγματοληψίας
- Μοναδιαία κρουστική ακολουθία
- Ψηφιακό σήμα
- Ψηφιακό σύστημα
- Σήμα / Σύστημα διακριτού χρόνου

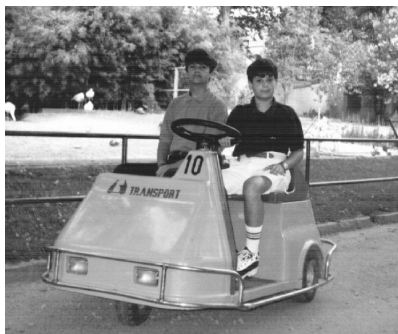
Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Η εντυπωσιακή ανάπτυξη της μικροηλεκτρονικής και των υπολογιστών είχε καθοριστική επίδραση στην ψηφιακή επεξεργασία σημάτων και εικόνων. Οι τεχνικές ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων χρησιμοποιούνται σήμερα σε πολλές περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας, όπως για παράδειγμα τις επικοινωνίες, την αεροναυτική, τη σεισμολογία, τη βιοϊατρική τεχνολογία.





(α)



(β)



(γ)

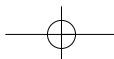
Σχήμα 1.1

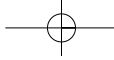
Παραδείγματα σημάτων (α) ομιλίας (μιας διάστασης), (β) εικόνας (δύο διαστάσεων), και (γ) ακολουθίας εικόνων (τριών διαστάσεων)

Ως σήμα ορίζουμε το σύνολο των τιμών που λαμβάνει μια φυσική ποσότητα. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως συνάρτηση ή ακολουθία μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών. Τα σήματα περιέχουν πληροφορία σχετικά με τη συμπεριφορά ή τη φύση ενός φαινομένου.

Τα σήματα χωρίζονται σε κατηγορίες ανάλογα με τον τύπο και το πλήθος των μεταβλητών. Έτσι, ανάλογα με το αν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συνεχής ή διακριτή, έχουμε σήματα συνεχούς ή διακριτού χρόνου. (Θα αναφερθούμε αναλυτικά σ' αυτά στις ενότητες 1.2 και 1.3). Ανάλογα με το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών έχουμε σήματα μίας μεταβλητής ή διάστασης (μονοδιάστατα, $1-D$), δύο μεταβλητών ή διαστάσεων (διδιάστατα, $2-D$) και πολλών μεταβλητών ή διαστάσεων (πολυδιάστατα, $N-D$). Παράδειγμα μονοδιάστατου σήματος είναι η ομιλία (speech), όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος και η εξαρτημένη μεταβλητή η ακουστική πίεση (Σχήμα 1.1α). Μια εικόνα (φωτογραφία) αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα σήματος δύο διαστάσεων. Εδώ η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η φωτεινότητα της εικόνας και οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι δύο χωρικές συντεταγμένες (Σχήμα 1.1β). Τέλος, παράδειγμα σήματος τριών διαστάσεων είναι η ακολουθία εικόνων (video), όπου οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι χωρικές και η τρίτη είναι ο χρόνος (Σχήμα 1.1γ). Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι και εδώ η φωτεινότητα της κάθε εικόνας.

Το καθένα από τα παραπάνω σήματα είναι απαραίτητο να το επεξεργαστούμε με στόχο να βελτιώσουμε την ποιότητά του, να εξαγάγουμε τη χρήσιμη πληροφορία και

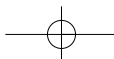


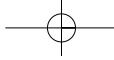


να εξαλείψουμε κατά το δυνατόν το θόρυβο, να το αποθηκεύσουμε ή να το μεταδώσουμε. Στο βιβλίο αυτό θα μελετήσουμε ορισμένες από τις πιο συνηθισμένες διαδικασίες επεξεργασίας που χρησιμοποιούνται για τους σκοπούς αυτούς.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις βασικές έννοιες των σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Στην ενότητα 1.1 θα αναφερθούμε στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων. Στην ενότητα 1.2 θα γνωρίσουμε τα αναλογικά και ψηφιακά σήματα, και τα σχετικά με τη μετατροπή των αναλογικών σε ψηφιακά. Στην ενότητα 1.3 θα δούμε τα βασικά σήματα διακριτού χρόνου, καθώς και τις στοιχειώδεις πράξεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε σ' αυτά.

Τέλος, στην ενότητα 1.4 θα ασχοληθούμε με τα συστήματα διακριτού χρόνου και την πράξη της γραμμικής συνέλιξης.





1.1 Ψηφιακή επεξεργασία σήματος

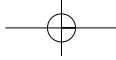
Η ψηφιακή επεξεργασία σήματος ασχολείται με την ψηφιακή αναπαράσταση των σημάτων και την ανάλυση, τροποποίηση και εξαγωγή πληροφοριών από αυτά, με τη βοήθεια ψηφιακών επεξεργαστών. Περιπτώσεις κατά τις οποίες θέλουμε να αφαιρέσουμε τον θόρυβο από ένα σήμα ή να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier κάποιων δεδομένων ή να δώσουμε σ' ένα σήμα μορφή πιο κατάλληλη για επεξεργασία και ανάλυση της πληροφορίας που εμπεριέχει, αποτελούν παραδείγματα της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Αυτή χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο σε πολλές περιοχές εφαρμογών όπου παραδοσιακά χρησιμοποιούνταν αναλογικές μορφές επεξεργασίας, αλλά και σε νέες εφαρμογές στις οποίες οι αναλογικές μέθοδοι είναι δύσκολο ή και αδύνατον να χρησιμοποιηθούν. Το γεγονός αυτό οφείλεται στα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η ψηφιακή επεξεργασία σήματος.

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους θα προτιμούσαμε την ψηφιακή επεξεργασία ενός σήματος έναντι της αναλογικής. Κατά πρώτιστο λόγο, ένα ψηφιακό προγραμματιζόμενο σύστημα παρουσιάζει μεγάλη ευελιξία στην τροποποίηση των πράξεων ψηφιακής επεξεργασίας με μια απλή μετατροπή του προγράμματος. Μια τέτοια τροποποίηση ενός αναλογικού συστήματος συνεπάγεται την επανασχεδίαση του κυκλώματος και συνεπακόλουθο έλεγχο και επιβεβαίωση (testing and verification) της ορθής λειτουργίας του.

Η ακρίβεια (accuracy) παίζει επίσης πολύ σπουδαίο ρόλο. Η ανοχή των στοιχείων των αναλογικών κυκλωμάτων καθιστά δύσκολο τον προσδιορισμό της ακρίβειας ενός αναλογικού συστήματος επεξεργασίας. Στην περίπτωση ενός ψηφιακού συστήματος, ο έλεγχος της πιστότητας των προδιαγραφών είναι πολύ πιο εύκολος.

Τα ψηφιακά σήματα αποθηκεύονται σε μαγνητικά ή οπτικά μέσα (λ.χ. μαγνητικούς ή οπτικούς δίσκους, ταινίες, κ.ά.) χωρίς υποβάθμιση της πιστότητάς τους, πέραν αυτής που υπεισήλθε στη διαδικασία μετατροπής τους από αναλογικά σε ψηφιακά. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα μεταφοράς και επεξεργασίας τέτοιων σημάτων σε μη πραγματικό χρόνο. Επιπλέον, δίνεται η δυνατότητα εφαρμογής πιο περίπλοκων αλγορίθμων επεξεργασίας σήματος. Συνήθως η υλοποίηση μαθηματικών πράξεων μεγάλης ακρίβειας είναι δύσκολο να γίνει σε σήματα τα οποία βρίσκονται σε αναλογική μορφή, πράγμα όμως που είναι συνηθισμένο και εύκολο να γίνει σε ένα ψηφιακό σήμα το οποίο επεξεργαζόμαστε με έναν υπολογιστή και με κατάλληλο λογισμικό.

Σε πολλές περιπτώσεις, η ψηφιακή επεξεργασία ενός σήματος έχει χαμηλότερο κόστος από την αντίστοιχη αναλογική. Αυτό μπορεί να οφείλεται είτε στο ότι το



υλικό (hardware) σήμερα είναι φθηνότερο είτε στην ευελιξία που παρέχεται λόγω της ψηφιακής υλοποίησης.

Αποτέλεσμα των πλεονεκτημάτων της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι η διαρκώς αυξανόμενη χρήση της σε όλο και περισσότερους τομείς εφαρμογών, όπως στην επεξεργασία ομιλίας, στη μετάδοση σήματος σε τηλεφωνικά κανάλια, στη σεισμολογία, στη γεωφυσική, στην ιατρική, στην εξερεύνηση του διαστήματος, στη μετεωρολογία, κ.ά.

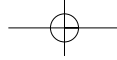
Φυσικά, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος έχει και τα όριά της, τα οποία οφείλονται στους περιορισμούς που τίθενται στην ταχύτητα λειτουργίας των μετατροπέων αναλογικού σήματος σε ψηφιακό, καθώς και στους ίδιους τους ψηφιακούς επεξεργαστές σήματος. Έτσι, σήματα με εξαιρετικά μεγάλο εύρος συχνοτήτων, για παράδειγμα, σήματα με εύρος συχνοτήτων της τάξεως των 100 MHz, υφίστανται επεξεργασία ακόμα και σήμερα με αναλογικές μεθόδους.

1.2 Τύποι σημάτων

Τα σήματα ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: στα *σήματα συνεχούς χρόνου* και στα *σήματα διακριτού χρόνου*. Συνήθως, ως ανεξάρτητη μεταβλητή χρησιμοποιείται ο χρόνος, χωρίς όμως να αποκλείεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι κάποιο άλλο φυσικό μέγεθος, όπως για παράδειγμα η απόσταση, η θερμοκρασία ή η πίεση. Παρ' όλα αυτά έχει επικρατήσει να μιλάμε για σήματα διακριτού χρόνου.

Στα σήματα *συνεχούς χρόνου* (continuous time) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συνεχής, δηλαδή τα σήματα αυτά ορίζονται για οποιαδήποτε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή το πλάτος (amplitude) του σήματος, είναι και αυτή συνεχής. Γι' αυτό και τα σήματα αυτά αναφέρονται και ως *σήματα συνεχούς χρόνου συνεχούς πλάτους* ή *αναλογικά* σήματα (Σχήμα 1.2α). Παραδείγματα τέτοιων σημάτων είναι η ομιλία ως συνάρτηση του χρόνου ή η ατμοσφαιρική πίεση ως συνάρτηση του ύψους. Ένα αναλογικό σήμα περιγράφεται από μια συνάρτηση $x(t)$, όπου t πραγματικός αριθμός.

Στα σήματα *διακριτού χρόνου* (discrete time) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι διακριτή, δηλαδή τα σήματα αυτά ορίζονται μόνο για συγκεκριμένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Με άλλα λόγια, η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει τιμές από ένα διακριτό σύνολο τιμών. Η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή το πλάτος του σήματος, είναι συνεχής. Γι' αυτό και τα σήματα αυτά αναφέρονται και ως *σήματα διακριτού χρόνου συνεχούς πλάτους* (Σχήμα 1.2β). Παραδείγματα τέτοιων σημάτων είναι ο δείκτης Dow-Jones ως συνάρτηση του χρόνου (λ.χ. ανά ημέρα) ή το κατά κεφαλήν εισόδη-

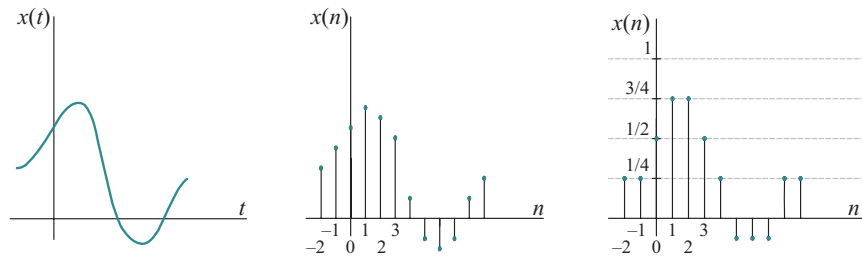


μα ως συνάρτηση του τόπου διαμοιής. Στη περίπτωση που και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές, τότε μιλάμε για *σήματα διακριτού χρόνου διακριτού πλάτους* ή *ψηφιακά* σήματα (Σχήμα 1.2γ). Ένα σήμα διακριτού χρόνου συμβολίζεται συνήθως ως $x(n)$, όπου n ακέραιος. Πρόκειται για μία ακολουθία (sequence) αριθμών, γι' αυτό συχνά αναφερόμαστε στο σήμα αυτό και ως *ακολουθία*.

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των βασικών σημάτων διακριτού χρόνου, θα ήταν καλό να γνωρίσουμε την έννοια της συχνότητας τόσο για τα σήματα συνεχούς χρόνου όσο και για τα σήματα διακριτού χρόνου.

Σχήμα 1.2

Τύποι σημάτων:
(α) αναλογικό,
(β) διακριτού
χρόνου,
(γ) ψηφιακό



1.2.1 Η έννοια της συχνότητας στα σήματα

Η έννοια της συχνότητας είναι βασική και γνωστή σε όλους μας. Την έχουμε συναντήσει στο ραδιοφωνικό δέκτη που χρησιμοποιούμε ή στο στερεοφωνικό σύστημα που έχουμε ή στο φίλτρο που πρέπει να βάλουμε στη φωτογραφική μας μηχανή. Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι η συχνότητα σχετίζεται με έναν τύπο περιοδικής κίνησης, η οποία ονομάζεται *αρμονική ταλάντωση*, και η οποία περιγράφεται από ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Η έννοια της συχνότητας σχετίζεται άμεσα με την έννοια του χρόνου, αφού η διάσταση αυτής είναι το αντίστροφο του χρόνου. Κατά συνέπεια, η φύση του χρόνου (συνεχής ή διακριτή) αναμένουμε να επηρεάζει τη φύση της συχνότητας.

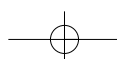
ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

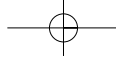
Μία απλή αρμονική ταλάντωση ορίζεται μαθηματικά από το ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x_a(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty \quad (1.1)$$

όπου A το *πλάτος* (amplitude) του ημιτονοειδούς, Ω η *συχνότητα* σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο (rad/s) και θ η φάση σε ακτίνια (Σχήμα 1.3) Η σχέση (1.1) μπορεί να γραφεί και ως:

$$x_a(t) = A \cdot \cos(2\pi F t + \theta), \quad -\infty < t < \infty \quad (1.2)$$



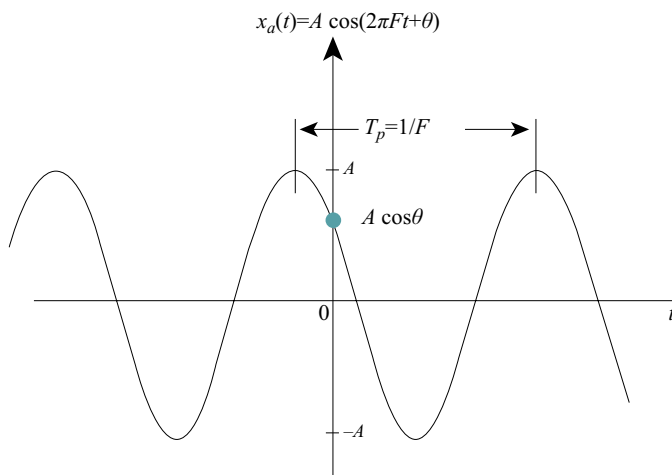


όταν θέσουμε

$$\Omega = 2\pi F \quad (1.3)$$

όπου F η συχνότητα σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο ή hertz (Hz). Το αναλογικό αυτό σήμα παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι περιοδικό: Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή της συχνότητας F , η συνάρτηση $x_a(t)$ είναι περιοδική, δηλαδή $x_a(t + T_p) = x_a(t)$, όπου $T_p = 1/F$ είναι η βασική περίοδος του ημιτονοειδούς σήματος.
- Για διαφορετικές συχνότητες έχουμε διαφορετικά σήματα.
- Αύξηση της συχνότητας F συνεπάγεται αντίστοιχη αύξηση του ρυθμού ταλάντωσης του σήματος, δηλαδή περισσότερες περίοδοι εμπεριέχονται σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.



Σχήμα 1.3

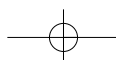
Παράδειγμα αναλογικού ημιτονοειδούς σήματος

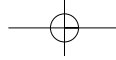
Σημαντική Παρατήρηση

Η συχνότητα είναι από τη φύση της θετική ποσότητα. Αυτό είναι προφανές, αφού η συχνότητα σε ένα περιοδικό σήμα εκφράζει τον αριθμό των κύκλων στη μονάδα του χρόνου. Σε ορισμένες περιπτώσεις όμως, για λόγους ευκολίας από μαθηματικής απόψεως, απαιτείται η εισαγωγή αρνητικών συχνοτήτων. Αυτό γίνεται κατανοητό αν θυμηθούμε ότι το ημιτονοειδές σήμα (σχέση 1.1) μπορεί να γραφεί και ως:

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\Omega t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\Omega t + \theta)} \quad (1.4)$$

βασιζόμενοι στην ταυτότητα του Euler $e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi$. Παρατηρούμε, λοιπόν,





ότι το ημιτονοειδές σήμα μπορεί να προέλθει από την πρόσθεση δύο συζυγών μιγαδικών εκθετικών σημάτων ίσου πλάτους. Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα συνηθίζουμε να τα παριστάνουμε ως διανύσματα πάνω στο μιγαδικό επίπεδο, τα οποία ονομάζουμε *φάσορες* (phasors). Οι φάσορες της σχέσης (1.4) περιστρέφονται με γωνιακές συχνότητες $\pm \Omega$ rad/sec. Η θετική συχνότητα αντιστοιχεί σε ομοιόμορφη περιστροφή του φάσορα με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφη περιστροφή). Κατά συνέπεια, η αρνητική συχνότητα αντιστοιχεί σε ομοιόμορφη περιστροφή του φάσορα κατά τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφη περιστροφή).

Όπως λοιπόν αναφέραμε, για λόγους ευκολίας από (μαθηματικής απόψεως) θα χρησιμοποιούμε θετικές και αρνητικές συχνότητες σε όλη την έκταση αυτού του βιβλίου. Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή συχνοτήτων των αναλογικών σημάτων θα είναι $-\infty < F < \infty$.

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ένα ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty \quad (1.5)$$

όπου n ακέραιη μεταβλητή, η οποία αντιπροσωπεύει τον αριθμό (τη θέση) του δείγματος, A το πλάτος του σήματος, ω η συχνότητα του σήματος σε ακτίνια ανά δείγμα και θ η φάση σε ακτίνια (Σχήμα 1.4). Η σχέση (1.5) μπορεί να γραφεί και ως:

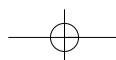
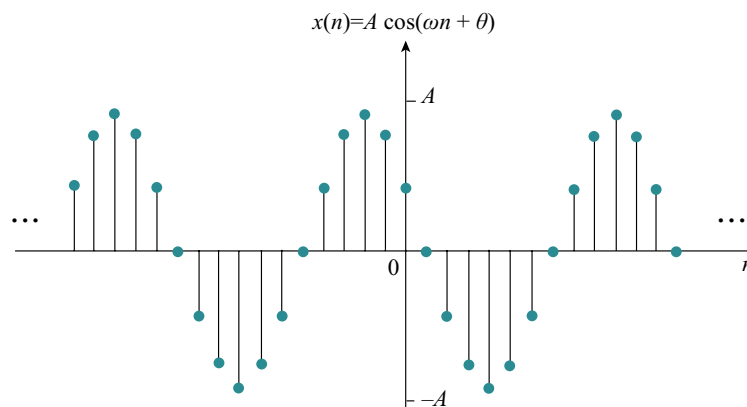
$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta), \quad -\infty < n < \infty \quad (1.6)$$

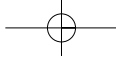
όταν θέσουμε

$$\omega = 2\pi f \quad (1.7)$$

όπου f η συχνότητα σε κύκλους ανά δείγμα.

Σχήμα 1.4
Παράδειγμα ενός ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου με $\omega = \pi/6$ και $\theta = \pi/3$





Σε αντίθεση με ένα ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου, ένα ημιτονοειδές διακριτού χρόνου παρουσιάζει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Είναι περιοδικό μόνο όταν η συχνότητα του f είναι ρητός αριθμός.
- Τα ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π είναι ίδια (ταυτίζονται).
- Ο μέγιστος ρυθμός ταλάντωσης ενός ημιτονοειδούς διακριτού χρόνου επιτυγχάνεται για $\omega = \pi$ (ή $\omega = -\pi$) ή ισοδύναμα για $f = \frac{1}{2}$ (ή $f = -\frac{1}{2}$).

Παράδειγμα 1.1

Να αποδειχτεί ότι ένα ημιτονοειδές διακριτού χρόνου είναι περιοδικό μόνο όταν η συχνότητά του f είναι ρητός αριθμός.

Λύση:

Ένα σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N ($N > 0$) εάν και μόνον εάν

$$x(n + N) = x(n) \text{ για όλα τα } n \quad (1.8)$$

Η μικρότερη τιμή του N για την οποία επαληθεύεται η σχέση αυτή, ονομάζεται *βασική περίοδος* (fundamental period).

Για να είναι περιοδικό ένα ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου με συχνότητα f , θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\cos(2\pi f(N + n) + \theta) = \cos(2\pi f n + \theta)$. Η σχέση αυτή αληθεύει εάν και μόνο εάν υπάρχει ακέραιος m τέτοιος ώστε $2\pi f N = 2m\pi$ ή ισοδύναμα

$f = \frac{m}{N}$, δηλαδή εάν και μόνο εάν η συχνότητα f μπορεί να γραφεί ως πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών.

Παράδειγμα 1.2

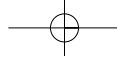
Να αποδείξετε ότι ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου, των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , ταυτίζονται.

Λύση:

Έστω το σήμα $x(n) = A\cos(\omega n + \theta)$ με συχνότητα ω , και το σήμα $x_1(n) = A\cos[(\omega + 2\pi)n + \theta]$ με συχνότητα $\omega + 2\pi$. Αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι:

$$x_1(n) = A\cos[(\omega + 2\pi)n + \theta] = A\cos(\omega n + \theta + 2\pi n) = A\cos(\omega n + \theta) = x(n)$$

Γενικά, όλα τα ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου $x_k(n) = A\cos(\omega_k n + \theta)$,



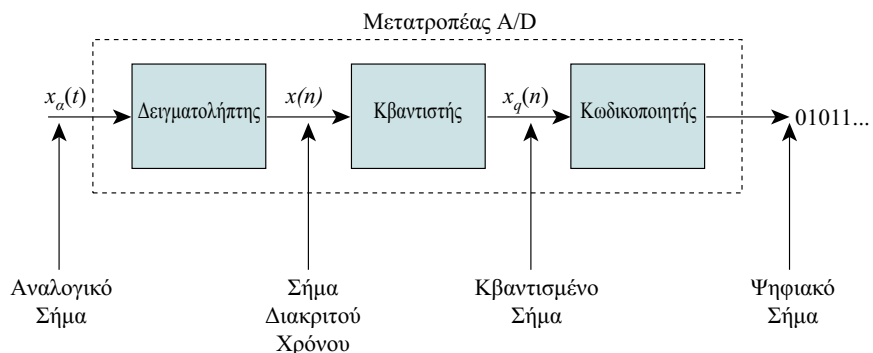
$k = 0, 1, 2, \dots$ με $\omega_k = \omega + 2k\pi$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ταυτίζονται. Μόνο τα ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου των οποίων οι συχνότητες βρίσκονται στην περιοχή $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ή $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$ είναι διαφορετικά, δηλαδή μοναδικά.

Μπορούμε, επομένως, να παρατηρήσουμε την ουσιαστική διαφορά μεταξύ των ημιτονοειδών διακριτού χρόνου και των ημιτονοειδών συνεχούς χρόνου. Στα ημιτονοειδή συνεχούς χρόνου έχουμε διαφορετικά σήματα για οποιαδήποτε συχνότητα Ω (ή F) στην περιοχή $-\infty < \Omega < \infty$ (ή $-\infty < F < \infty$), ενώ στα ημιτονοειδή διακριτού χρόνου έχουμε διαφορετικά σήματα για οποιαδήποτε συχνότητα ω (ή f) στην περιοχή $-\pi \leq \omega \leq \pi$ (ή $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$).

1.2.2 Μετατροπή σήματος από αναλογικό-σε-ψηφιακό και από ψηφιακό-σε-αναλογικό

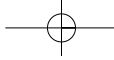
Τα περισσότερα σήματα που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον, όπως για παράδειγμα η ομιλία, τα βιολογικά σήματα, τα σεισμικά σήματα, κ.ά., είναι αναλογικά. Για να επεξεργαστούμε αναλογικά σήματα με ψηφιακά μέσα, απαιτείται η μετατροπή αυτών σε ψηφιακή μορφή, δηλαδή η μετατροπή τους σε μία ακολουθία αριθμών πεπερασμένης ακρίβειας. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *μετατροπή αναλογικού-σε-ψηφιακό* (analog-to-digital conversion, A/D) και τα αντίστοιχα κυκλώματα ονομάζονται «μετατροπείς αναλογικού-σε-ψηφιακό» (analog-to-digital converters, ADCs). Η αντίστροφη διαδικασία της μετατροπής ενός ψηφιακού σήματος σε αναλογικό είναι γνωστή ως *μετατροπή ψηφιακού-σε-αναλογικό* (digital-to-analog conversion, D/A) και γίνεται με τη βοήθεια κυκλωμάτων τα οποία ονομάζονται μετατροπείς «ψηφιακού-σε-αναλογικό» (digital-to-analog converters, DACs).

Η διαδικασία της μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό γίνεται σε τρία στάδια, όπως δείχνουμε στο Σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5

Βασικά τμήματα ενός μετατροπέα αναλογικού-σε-ψηφιακό



1. *Δειγματοληψία* (sampling): Αυτή είναι η διαδικασία μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε σήμα διακριτού χρόνου, παίρνοντας δείγματα του σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτές στιγμές του χρόνου. Έτσι, αν $x_a(t)$ είναι η είσοδος στο δειγματολήπτη, τότε η έξοδος αυτού είναι $x_a(nT) \equiv x(n)$, όπου T η περίοδος δειγματοληψίας.
2. *Κβάντιση* (quantisation): Πρόκειται για τη διαδικασία μετατροπής ενός σήματος διακριτού χρόνου συνεχών τιμών σε σήμα διακριτού χρόνου διακριτών τιμών (ψηφιακό). Το κάθε δείγμα του σήματος αντιπροσωπεύεται από μία τιμή η οποία επιλέγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο πιθανών τιμών. Η διαφορά μεταξύ του αρχικού μη κβαντισμένου δείγματος $x(n)$ και της κβαντισμένης εξόδου $x_q(n)$ αποτελεί το λεγόμενο σφάλμα κβάντισης.
3. *Κωδικοποίηση* (coding): Κατά τη διαδικασία της κωδικοποίησης, κάθε διακριτή τιμή $x_q(n)$ αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό αποτελούμενο από b -bits.

Ας εξετάσουμε ξεχωριστά καθένα από αυτά τα τρία στάδια:

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Η δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος $x_a(t)$ επιτυγχάνεται παίρνοντας δείγματα αυτού ανά T δευτερόλεπτα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται από τη σχέση:

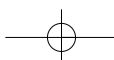
$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty \quad (1.9)$$

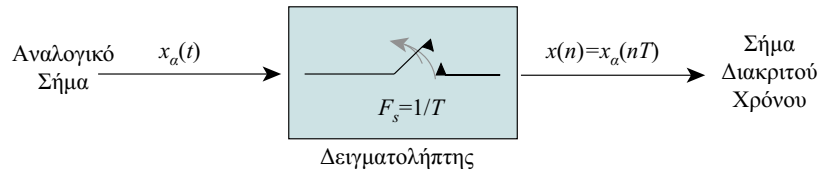
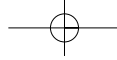
όπου $x(n)$ είναι το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει. Το χρονικό διάστημα T μεταξύ των διαδοχικών δειγμάτων ονομάζεται *περίοδος δειγματοληψίας* και το αντίστροφο του $\frac{1}{T} = F_s$ αποτελεί το *ρυθμό δειγματοληψίας* (sampling rate) σε δείγματα ανά δευτερόλεπτο ή αλλιώς τη *συχνότητα δειγματοληψίας* (sampling frequency) σε Hz.

Οι μεταβλητές χρόνου t και n για τα σήματα συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου αντίστοιχα, συνδέονται γραμμικά μέσω της περιόδου δειγματοληψίας T ή ισοδύναμα μέσω του ρυθμού δειγματοληψίας $F_s = \frac{1}{T}$ ως εξής:

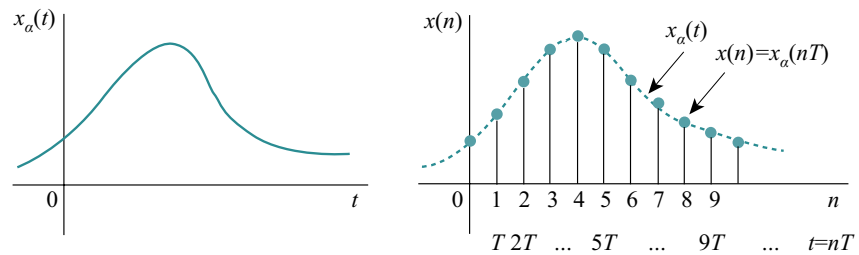
$$t = nT = \frac{n}{F_s} \quad (1.10)$$

Επομένως, αναμένουμε να υπάρχει κάποια σχέση που να συνδέει τη συχνότητα F (ή Ω) των αναλογικών σημάτων με τη συχνότητα f (ή ω) των σημάτων διακριτού χρόνου. Για να βρούμε αυτή τη σχέση, ξεκινούμε από την (1.9) και αντικαθιστούμε το





Σχήμα 1.6
Ομοιόμορφη δειγματοληψία αναλογικού σήματος.



$x_a(t)$ με τη συνάρτηση του ημιτονοειδούς σήματος της εξίσωσης (1.2). Έτσι έχουμε:

$$x(n) = x_a(nT) = A \cos(2\pi F n T + \theta) = A \cos(2\pi n \frac{F}{F_s} + \theta) \quad (1.11)$$

Συγκρίνοντας την (1.11) με την αντίστοιχη σχέση (1.6) για το ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου, διαπιστώνουμε ότι:

$$f = \frac{F}{F_s} \quad (1.12)$$

ή ισοδύναμα:

$$\omega = \Omega T \quad (1.13)$$

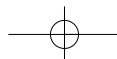
Από τη σχέση (1.12) παρατηρούμε ότι η συχνότητα f είναι μία κανονικοποιημένη ή σχετική συχνότητα (normalized or relative frequency). Κατά συνέπεια, για να προσδιορίσουμε την F Hz, όταν μας δίνεται η f , πρέπει απαραίτητα να γνωρίζουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας F_s .

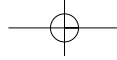
Είδαμε στο προηγούμενο Παράδειγμα 1.2, ότι η περιοχή συχνοτήτων F ή Ω των ημιτονοειδών συνεχούς χρόνου είναι:

$$-\infty < F < \infty \quad \text{ή} \quad -\infty < \Omega < \infty \quad (1.14)$$

Για τα ημιτονοειδή διακριτού χρόνου είδαμε ότι μόνο οι συχνότητες f ή ω που βρίσκονται στο διάστημα:

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (1.15)$$





είναι διαφορετικές. Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τις μεταβλητές f και ω με τις ισοδύναμες τους από τις σχέσεις (1.12) και (1.13), βρίσκουμε ότι η συχνότητα του ημιτονοειδούς συνεχούς χρόνου, όταν παίρνουμε δείγματά του με ρυθμό $F_s = 1/T$, θα πρέπει να βρίσκεται στην περιοχή:

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \quad (1.16)$$

ή

$$-\frac{\pi}{T} = -\pi F_s \leq \Omega \leq \pi F_s = \frac{\pi}{T} \quad (1.17)$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι η βασική διαφορά μεταξύ των σημάτων συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου βρίσκεται στην περιοχή τιμών των μεταβλητών συχνότητας F και f ή Ω και ω . Η περιοδική δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου οδηγεί στην απεικόνιση της απείρου εύρους περιοχής συχνοτήτων F (ή Ω), στην πεπερασμένου εύρους περιοχή συχνοτήτων f (ή ω). Και αφού η μέγιστη συχνότητα σ' ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι $f = \frac{1}{2}$ ή $\omega = \pi$, συνεπάγεται ότι για ένα ρυθμό δειγματοληψίας F_s , η αντίστοιχη μέγιστη τιμή της F ή Ω θα ισούται με:

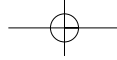
$$F_{\max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \quad \text{ή} \quad \Omega_{\max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T} \quad (1.18)$$

Με άλλα λόγια, η δειγματοληψία εισάγει ασάφεια, αφού η μέγιστη συχνότητα ενός σήματος συνεχούς χρόνου, η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί σωστά, είναι $F_{\max} = F_s/2$, όταν λαμβάνονται δείγματα του σήματος αυτού με ρυθμό $F_s = 1/T$. Πριν όμως προχωρήσουμε σε κάποια παραδείγματα που θα μας δείξουν τι συμβαίνει όταν οι συχνότητες του αναλογικού σήματος είναι μεγαλύτερες από $F_s/2$, ας δούμε το θεώρημα της δειγματοληψίας, το οποίο απαντά στο εξής ερώτημα: Ποιος ο ρυθμός δειγματοληψίας F_s για τη σωστή αναπαράσταση ενός αναλογικού σήματος, το οποίο μας δίνεται; Δηλαδή, πόσο συχνά πρέπει να παίρνουμε δείγματα ώστε να έχουμε ένα πιστό αντίγραφο του αναλογικού σήματος; Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα δόθηκε αρχικά από τον Nyquist (1928) και στη συνέχεια από τον Shannon (1949) και αποτελεί το λεγόμενο **θεώρημα δειγματοληψίας** ή **θεώρημα του Shannon**— διατυπώνεται δε ως εξής:

Η συχνότητα F_s , με την οποία λαμβάνονται τα δείγματα ενός σήματος, πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από την υψηλότερη συχνότητα F_{\max} που περιέχεται στο σήμα, δηλαδή

$$F_s \geq 2F_{\max} \quad (1.19)$$

Με άλλα λόγια, το θεώρημα δειγματοληψίας μας λέει πως για να μη χαθεί πληροφορία θα πρέπει να παίρνουμε τουλάχιστον δύο δείγματα ανά περίοδο (της υψηλό-



τερης συχνότητας του σήματος). Για παράδειγμα, αν θελήσουμε να ψηφιοποιήσουμε ένα σήμα ομιλίας και χρησιμοποιούμε μικρόφωνο το οποίο λειτουργεί για συχνότητες μεταξύ 300 Hz και 3 kHz, τότε η μικρότερη συχνότητα δειγματοληψίας που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι 6 kHz. Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί αν το θεώρημα δειγματοληψίας δε γίνει σεβαστό.

Παράδειγμα 1.3

Δίνονται τα αναλογικά σήματα $x_1(t) = \sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right)t$ και $x_2(t) = \sin 2\pi\left(-\frac{7}{8}\right)t$.

Ποια τα σήματα διακριτού χρόνου που θα προκύψουν μετά τη δειγματοληψία αυτών με ρυθμό $F_s = 1$ Hz;

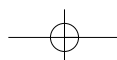
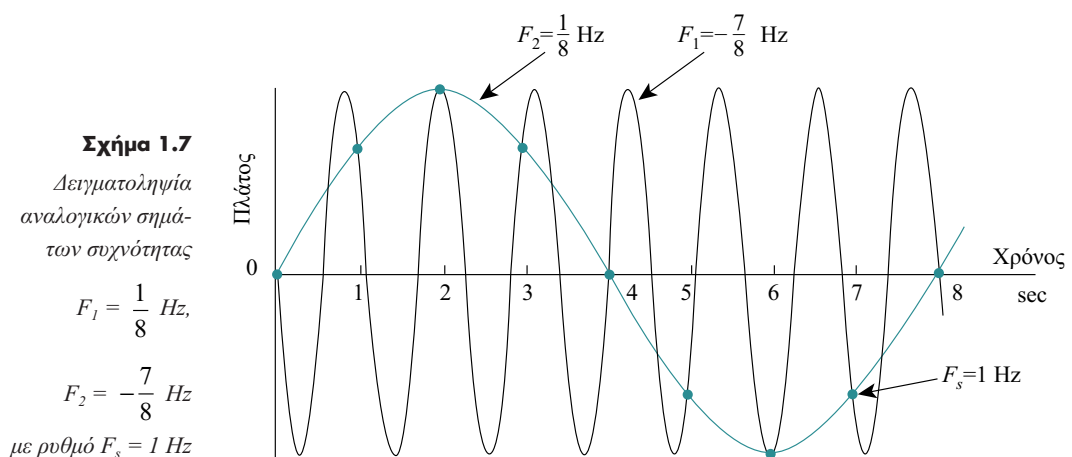
Λύση:

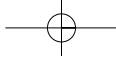
Τα αντίστοιχα σήματα διακριτού χρόνου (ακολουθίες) είναι:

$$x_1(n) = \sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right)nT = \sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right)n = \sin \frac{\pi}{4}n$$

$$\begin{aligned} x_2(n) &= \sin 2\pi\left(-\frac{7}{8}\right)nT = \sin 2\pi\left(-\frac{7}{8}\right)n = \sin \frac{-7\pi}{4}n = \sin\left(-\frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)n = \\ &= \sin\left(-2\pi n + \frac{\pi}{4}n\right) = \sin \frac{\pi}{4}n = x_1(n) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι τα δύο ημιτονοειδή σήματα δεν ξεχωρίζουν μετά τη δειγματοληψία τους με ρυθμό 1 Hz (Σχήμα 1.7).





Αν μας δώσουν μόνο τα δείγματα (κουκίδες του Σχήματος 1.7) τα οποία αντιστοιχούν στις τιμές του $\sin \frac{\pi}{4} n$, υπάρχει ασάφεια στο να πούμε αν αυτά τα δείγματα αντιστοιχούν σε τιμές του αναλογικού σήματος $x_1(t)$ ή $x_2(t)$. Επειδή το $x_2(t)$ δίνει ακριβώς τα ίδια δείγματα με το $x_1(t)$, για δειγματοληψία με ρυθμό $F_s = 1$ δείγματος ανά δευτερόλεπτο ($F_s = 1$ Hz), λέμε ότι η συχνότητα $F_2 = -\frac{7}{8}$ Hz είναι ένα *ψευδές αντίγραφο* (alias) της συχνότητας $F_1 = \frac{1}{8}$ Hz για το ρυθμό δειγματοληψίας του 1 Hz. Μάλιστα, είναι σημαντικό να δούμε ότι η F_2 δεν αποτελεί το μοναδικό ψευδές αντίγραφο της F_1 . Πράγματι, για το ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 1$ Hz, η συχνότητα $F_3 = \frac{9}{8}$ Hz είναι επίσης ψευδές αντίγραφο της F_1 , όπως και η συχνότητα $F_4 = \frac{17}{8}$ Hz, και γενικά όλες οι συχνότητες $F_1 + k1$ ή γενικότερα $F_1 + kF_s$, όπου $k = 1, 2, \dots$. Συνεπώς, όλες αυτές οι συχνότητες είναι ψευδή αντίγραφα (aliases) της συχνότητας $F_1 = \frac{1}{8}$ Hz.

Γενικά, η δειγματοληψία του ημιτονοειδούς σήματος συνεχούς χρόνου

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F_0 t + \theta) \quad (1.20)$$

με ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 1/T$, μας δίνει το διακριτού χρόνου σήμα:

$$x(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \theta) \quad (1.21)$$

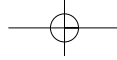
όπου $f_0 = F_0/F_s$ είναι η σχετική συχνότητα του ημιτονοειδούς. Αν θεωρήσουμε ότι $-\frac{F_s}{2} \leq F_0 \leq \frac{F_s}{2}$, η συχνότητα f_0 του $x(n)$ βρίσκεται στην περιοχή $-\frac{1}{2} \leq f_0 \leq \frac{1}{2}$, η οποία αντιπροσωπεύει τη βασική περιοχή συχνοτήτων των σημάτων διακριτού χρόνου. Στην περίπτωση αυτή, η απεικόνιση της F_0 στην f_0 είναι ένα-προς-ένα, κι έτσι είναι δυνατή η εύρεση (ανακατασκευή) του αναλογικού σήματος $x_a(t)$ από τα δείγματα $x(n)$.

Από την άλλη πλευρά, εάν τα αναλογικά ημιτονοειδή:

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F_k t + \theta) \quad (1.22)$$

όπου

$$F_k = F_0 + kF_s, k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.23)$$



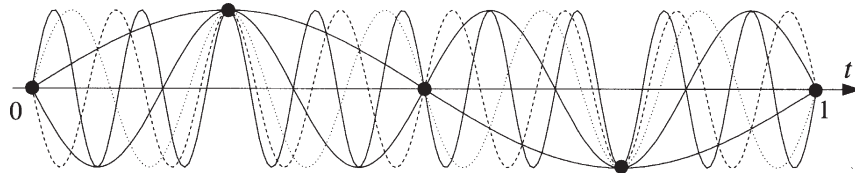
υποστούν δειγματοληψία με ρυθμό F_s , είναι φανερό ότι η συχνότητα F_k βρίσκεται εκτός της βασικής περιοχής συχνοτήτων $-\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2}$ [1]. Συνεπώς το σήμα που προήλθε από δειγματοληψία ισούται με:

$$\begin{aligned} x(n) \equiv x_a(nT) &= A \cos\left(2\pi \frac{F_0 + kF_s}{F_s} n + \theta\right) = \\ &= A \cos\left(2\pi n \frac{F_0}{F_s} + \theta + 2\pi kn\right) = \\ &= A \cos(2\pi f_0 n + \theta) \end{aligned} \quad (1.24)$$

το οποίο συμπίπτει με το διακριτού χρόνου σήμα της σχέσης (1.21) που προήλθε από την δειγματοληψία του αναλογικού σήματος (1.20). Επομένως, ένας άπειρος αριθμός ημιτονοειδών συνεχούς χρόνου αντιπροσωπεύεται από το ίδιο σύνολο δειγμάτων (Σχήμα 1.8). Για παράδειγμα οι συχνότητες (F_k) 2,5 kHz, 5,5 kHz, 8,5 kHz, ..., 30,5 kHz, ... δεν ξεχωρίζουν από τη συχνότητα (F_0) 500Hz για συχνότητα δειγματοληψίας (F_s) ίση με 3 kHz.

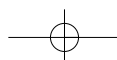
Σχήμα 1.8

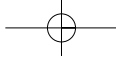
Διαφορετικά ημιτονικά σήματα αντιπροσωπεύονται από τα ίδια δείγματα



Άρα, αν δίνεται το σύνολο των δειγμάτων $x(n)$, υπάρχει ασάφεια ως προς το ποιο αναλογικό σήμα $x_a(t)$ αντιπροσωπεύουν αυτά τα δείγματα. Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι οι συχνότητες $F_k = F_0 + kF_s$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ δεν μπορούν να διακριθούν από την συχνότητα F_0 μετά τη δειγματοληψία και συνεπώς όλες αυτές είναι ψευδή αντίγραφα (aliases) της F_0 . Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *φαινόμενο χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας* (aliasing), ή *φαινόμενο φασματικής επικάλυψης* (spectral overlap). Το φαινόμενο αυτό μας είναι γνωστό από τις κινηματογραφικές ταινίες, στις οποίες πολλές φορές παρατηρούμε τους τροχούς μίας άμαξας να περιστρέφονται αντίθετα προς την κατεύθυνση κίνησης της άμαξας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο ρυθμός λήψης των «καρέ» (ρυθμός δειγματοληψίας) είναι μικρότερος απ' όσο πρέπει για να «προλάβουμε» την περιστροφή των τροχών.

[1] Η συχνότητα $F_s/2$ (ή αντίστοιχα $\omega = \pi$) ονομάζεται *συχνότητα αναδίπλωσης* (folding frequency).





Παράδειγμα 1.4

Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_a(t) = 2\cos 100\pi t$. (α) Να προσδιορίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που απαιτείται, ώστε να αποφύγουμε το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing). (β) Θεωρήστε ότι λαμβάνονται δείγματα του σήματος με ρυθμό $F_s = 200$ Hz. Ποιο το σήμα διακριτού χρόνου το οποίο θα προκύψει μετά τη δειγματοληψία; (γ) Επαναλάβετε το ερώτημα (β) για ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 75$ Hz. (δ) Για $F_s = 75$ Hz, ποια η συχνότητα F_0 , όπου $-\frac{F_s}{2} \leq F_0 \leq \frac{F_s}{2}$, του ημιτονοειδούς το οποίο δίνει τα ίδια ακριβώς δείγματα με εκείνα που πήραμε στην περίπτωση (γ);

Λύση

(α) Η συχνότητα του αναλογικού σήματος είναι $F = 50$ Hz. Άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που απαιτείται, για να αποφύγουμε το φαινόμενο aliasing θα πρέπει να είναι $F_s = 2F = 100$ Hz.

(β) Όταν $F_s = 200$ Hz, τότε το σήμα διακριτού χρόνου που παίρνουμε είναι:

$$x(n) = 2 \cos \frac{100\pi}{200} n = 2 \cos \frac{\pi}{2} n$$

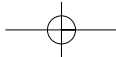
(γ) Ο ρυθμός δειγματοληψίας των 75 Hz είναι μικρότερος αυτού που απαιτείται για να αποφύγουμε το φαινόμενο aliasing. Το σήμα διακριτού χρόνου που παίρνουμε είναι στην περίπτωση αυτή:

$$x(n) = 2 \cos \frac{100\pi}{75} n = 2 \cos \frac{4\pi}{3} n = 2 \cos \left(2\pi - \frac{2\pi}{3} \right) n = 2 \cos \frac{2\pi}{3} n$$

Η συχνότητα του σήματος είναι $f = 1/3$, δηλαδή $F/F_s = 1/3$ ή $F = 25$ Hz αφού $F_s = 75$ Hz.

(δ) Από τη σχέση (1.23) γνωρίζουμε τη συχνότητα $F_k = F$ (που στην προκειμένη περίπτωση είναι 50 Hz), τη συχνότητα δειγματοληψίας F_s (που στην προκειμένη περίπτωση είναι 75 Hz) και ζητούμε να προσδιορίσουμε τη συχνότητα F_0 της βασικής περιοχής συχνοτήτων. Έτσι, έχουμε $F_0 = F_k - kF_s = 50 - 1 \cdot 75 = -25$ Hz.

(Διαλέξαμε $k = 1$ γιατί μόνο αυτή η τιμή δίνει $-\frac{F_s}{2} \leq F_0 \leq \frac{F_s}{2}$). Άρα, για το ρυθμό δειγματοληψίας των 75 Hz, η συχνότητα $F = 50$ Hz είναι ένα ψευδές αντίγραφο της συχνότητας των 25 Hz.



Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.1

Από αναλογικό σήμα συχνότητας 100 Hz λαμβάνουμε δείγματα με συχνότητες (α) 75 Hz και (β) 150 Hz. Σε ποιες συχνότητες θα αντιστοιχούν τα δείγματα που θα προκύψουν;

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.2

Θεωρήστε τα αναλογικά σήματα $x_1(t) = \cos(60\pi t)$, $x_2(t) = \cos(140\pi t)$, $x_3(t) = \cos(260\pi t)$, τα οποία υφίστανται ομοιόμορφα δειγματοληψία με συχνότητα 100 Hz. Ποια είναι τα εξαγόμενα σήματα διακριτού χρόνου;

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.3

Ο ρυθμός δειγματοληψίας του σήματος $x(t) = \sin(\pi t) + 4\sin(3\pi t)\cos(2\pi t)$ είναι 3 kHz. Σε ποιες συχνότητες θα αντιστοιχούν τα δείγματα που θα προκύψουν;

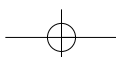
Δραστηριότητα 1.1

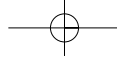
Προτείνετε δύο συχνότητες οι οποίες να δίνουν τα ίδια δείγματα με αυτά του σήματος $x(t)$ της άσκησης αυτοαξιολόγησης 1.3, όταν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 3 kHz.

ΚΒΑΝΤΙΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ-ΠΛΑΤΟΥΣ

Κβάντιση (quantisation) ονομάζεται η διαδικασία της μετατροπής ενός σήματος διακριτού χρόνου συνεχούς-πλάτους σε ψηφιακό σήμα, εκφράζοντας την τιμή κάθε δείγματος ως ένα αριθμό με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων (αντί για άπειρο πλήθος ψηφίων που απαιτείται για κάθε συνεχούς-πλάτους τιμή).

Το σφάλμα που υπεισέρχεται από την αναπαράσταση του σήματος συνεχών-τιμών με ένα πεπερασμένο πλήθος διακριτών-τιμών, ονομάζεται *σφάλμα κβάντισης* (quantisation error) ή *θόρυβος κβάντισης* (quantisation noise). Αν $x(n)$ είναι τα δείγματα εισόδου στον κβαντιστή και $x_q(n)$ η ακολουθία των κβαντισμένων δειγμάτων της εξόδου του κβαντιστή, τότε το σφάλμα κβάντισης είναι η ακολουθία $e_q(n)$, η οποία ορίζεται ως η διαφορά της πραγματικής τιμής από την κβαντισμένη τιμή, δηλα-



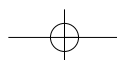


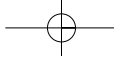
δή $e_q(n) = x(n) - x_q(n)$. Στο Σχήμα 1.9 φαίνεται παραστατικά το αποτέλεσμα της κβάντισης των δειγμάτων ενός αναλογικού σήματος, καθώς και το σφάλμα κβάντισης.

Για τον περιορισμό κάθε δείγματος στο επιθυμητό πλήθος ψηφίων, χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο της *στρογγυλοποίησης* (rounding) και όχι της *αποκοπής* (truncation). Οι τιμές τις οποίες επιτρέπεται να παίρνει ένα ψηφιακό σήμα, αποτελούν τα λεγόμενα *επίπεδα κβάντισης* (quantisation levels), ενώ η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων κβάντισης ονομάζεται *βήμα κβάντισης* (quantisation step) ή *διακριτική ικανότητα* ή *ανάλυση* (resolution). Κατά τη στρογγυλοποίηση, ο κβαντιστής αποδίδει στη συνεχή τιμή $x(n)$ την τιμή του πλησιέστερου επιπέδου κβάντισης. Έτσι, το σφάλμα κβάντισης $e_q(n)$ κυμαίνεται στην περιοχή μεταξύ $-\Delta/2$ και $\Delta/2$, δηλαδή $-\Delta/2 \leq e_q(n) \leq \Delta/2$. Το βήμα κβάντισης Δ ορίζεται ως $\Delta = (x_{\max} - x_{\min}) / (L - 1)$, όπου x_{\max} , x_{\min} είναι η μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή του $x(n)$ αντίστοιχα, και L το πλήθος των επιπέδων κβάντισης. Η διαφορά $x_{\max} - x_{\min}$ αποτελεί τη *δυναμική περιοχή* (dynamic range) του σήματος. Στην περίπτωση του Σχήματος 1.9 έχουμε $x_{\max} = 7$, $x_{\min} = 0$, $L = 8$ και άρα $\Delta = 1$. Παρατηρήστε ότι, αν η δυναμική περιοχή του σήματος είναι καθορισμένη, τότε αύξηση του πλήθους των επιπέδων κβάντισης L , συνεπάγεται μείωση του βήματος κβάντισης. Επομένως, το σφάλμα κβάντισης μειώνεται, δηλαδή, αυξάνει η ακρίβεια του κβαντιστή. Τα επίπεδα κβάντισης L είναι συνάρτηση του πλήθους b των δυαδικών ψηφίων (bits) της λέξης που χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση κάθε δείγματος, όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο εδάφιο του κωδικοποιητή. Αποδεικνύεται ότι για ημιτονοειδή σήματα, ο λόγος του σήματος προς το θόρυβο κβάντισης αυξάνεται κατά περίπου $6\text{dB}^{[2]}$ για κάθε επιπλέον bit που προστίθεται στο μήκος λέξης, δηλαδή για κάθε διπλασιασμό των επιπέδων κβάντισης.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η κβάντιση αναλογικών σημάτων οδηγεί πάντοτε σε απώλεια πληροφορίας, εξαιτίας της ασάφειας που αυτή εισάγει. Πράγματι, η κβάντιση είναι μία μη αντιστρεπτή διαδικασία, αφού όλα τα δείγματα σε απόσταση $\Delta/2$ γύρω από ένα επίπεδο κβάντισης, αντιπροσωπεύονται από την ίδια τιμή. Συνεπώς, δεν μπορούμε ποτέ να εξαλείψουμε το θόρυβο κβάντισης, παρά μόνο να τον μειώσουμε αυξάνοντας τα επίπεδα κβάντισης L .

[2] Υπενθυμίζεται ότι το dB (decibel) ορίζεται ως $10 \log_{10}(P_2/P_1) = 20 \log_{10}(V_2/V_1)$, όπου με P , V συμβολίζουμε την ισχύ και την τάση ενός σήματος αντίστοιχα. Το dB αντιστοιχεί στο 1/10 του Bell, μονάδα η οποία ορίστηκε και καθιερώθηκε από τον Alexander Graham Bell, ο οποίος ανακάλυψε ότι το ανθρώπινο αυτί αποκρίνεται λογαριθμικά στις διαφορές ισχύος. Έτσι, 3dB σημαίνει ότι έχουμε διπλασιασμό της ισχύος ($P_2 = 2P_1$), ενώ -3dB σημαίνει ότι έχουμε υποδιπλασιασμό αυτής ($P_2 = P_1/2$). Αναφερόμενοι στην τάση, 6dB σημαίνει διπλασιασμό της τάσης ($V_2 = 2V_1$), ενώ -6dB σημαίνει ότι έχουμε υποδιπλασιασμό αυτής ($V_2 = V_1/2$).

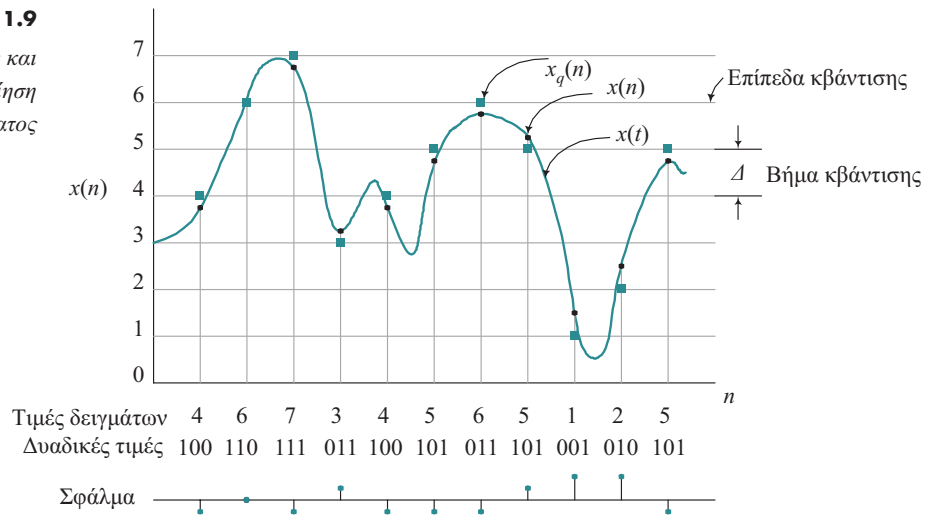




ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΙΣΜΕΝΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Κατά τη διαδικασία της κωδικοποίησης σ' ένα μετατροπέα αναλογικού-σε-ψηφιακό, ένας μοναδικός δυαδικός αριθμός εκχωρείται σε κάθε επίπεδο κβάντισης. Αν έχουμε L επίπεδα κβάντισης, χρειαζόμαστε τουλάχιστον L διαφορετικούς δυαδικούς αριθμούς. Με ένα μήκος λέξης b bits μπορούμε να έχουμε 2^b διαφορετικούς δυαδικούς αριθμούς. Άρα, πρέπει $2^b \geq L$ ή ισοδύναμα $b \geq \log_2 L$. Στο παράδειγμα του Σχήματος 1.9 χρησιμοποιήσαμε έναν κωδικοποιητή με $b = 3$ bits. Στο εμπόριο υπάρχουν διαθέσιμοι μετατροπείς A/D με ακρίβεια μέχρι και $b = 24$ bits. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση των μουσικών CDs, όπου χρησιμοποιούνται μετατροπείς A/D ακριβείας 16 bits.

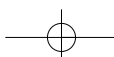
Σχήμα 1.9
Κβάντιση και κωδικοποίηση σήματος

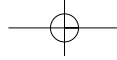


Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τους διάφορους τύπους σημάτων. Είδαμε τις διαφορές μεταξύ των αναλογικών σημάτων, των σημάτων διακριτού χρόνου και των ψηφιακών σημάτων, και ασχοληθήκαμε διεξοδικά με τη μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Έγινε φανερό ότι η μετατροπή αυτή απαρτίζεται από δύο κύριες, αλλά ανεξάρτητες μεταξύ τους, διαδικασίες: τη δειγματοληψία, η οποία έχει σχέση με το πόσο συχνά παίρνουμε τα δείγματα, και τη κβάντιση, η οποία έχει σχέση με την ακρίβεια αναπαράστασης του πλάτους κάθε δείγματος. Με άλλα λόγια, η δειγματοληψία έχει να κάνει με τη συχνότητα του σήματος, ενώ η κβάντιση με το πλάτος του σήματος.

- Το θεώρημα δειγματοληψίας μας λέει ότι η συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια της μέγιστης συχνότητας που περιέχεται στο σήμα από το οποίο θέλουμε να λάβουμε δείγματα. Αν αυτό δε συμβαίνει, τότε παρου-





σιάζεται το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing).

- Η ψηφιοποίηση του πλάτους ενός σήματος εισάγει ένα θόρυβο, το λεγόμενο θόρυβο κβάντισης, ο οποίος, όσο περισσότερα επίπεδα κβάντισης χρησιμοποιούμε, δηλαδή όσο περισσότερα bits χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση της κάθε τιμής του πλάτους, τόσο μικρότερος γίνεται.

1.3 Σήματα διακριτού χρόνου

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τα σήματα διακριτού χρόνου. Θα γνωρίσουμε τα πιο βασικά σήματα διακριτού χρόνου, καθώς και τις στοιχειώδεις πράξεις που εφαρμόζονται σε τέτοιου είδους σήματα. Όλα αυτά θα αποτελέσουν τα εργαλεία τα απαραίτητα για τη μελέτη των συστημάτων και την ανάλυση των σημάτων που θα μας απασχολήσουν σε όλη την έκταση αυτού του βιβλίου.

1.3.1 Βασικά σήματα διακριτού χρόνου

Τα σήματα που περιγράφονται στη συνέχεια θεωρούνται ως τα βασικά (στοιχειώδη) σήματα διακριτού χρόνου.

- α) *Μοναδιαίο δείγμα* (unit sample) ή *μοναδιαία κρουστική ακολουθία* (unit impulse sequence): Είναι το πλέον βασικό σήμα διακριτού χρόνου το οποίο ορίζεται ως:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

- β) *Μοναδιαία βηματική ακολουθία* (unit step sequence): Ορίζεται ως:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

- γ) *Σταθερή ακολουθία* (constant sequence):

$$x(n) = A, \quad -\infty < n < \infty \quad (1.27)$$

- δ) *Γραμμική ακολουθία* (linear sequence):

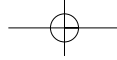
$$x(n) = An, \quad -\infty < n < \infty \quad (1.28)$$

Οι κυματομορφές όλων των παραπάνω σημάτων φαίνονται στα Σχήματα 1.10 έως και 1.13.

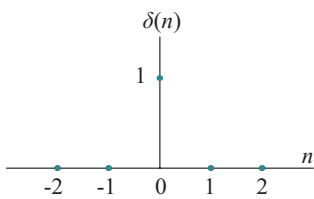
- ε) *Εκθετική ακολουθία* (exponential sequence):

$$x(n) = a^n, \quad -\infty < n < \infty \quad (1.29)$$

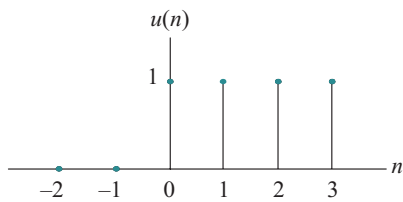
Η ακολουθία αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η μορφή της εξαρτάται από



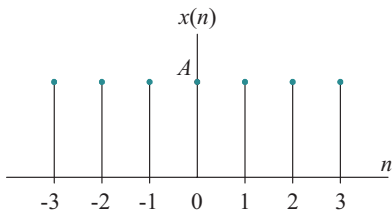
την τιμή του a . Έτσι, αν a πραγματικός αριθμός, τότε αυτή είναι φθίνουσα για $|a| < 1$ (Σχήμα 1.14α,β) και αύξουσα για $|a| > 1$ (Σχήμα 1.14γ,δ). Αν a μιγαδικός αριθμός, δηλαδή $a = re^{j\omega}$, τότε $x(n) = r^n e^{j\omega n}$ ή $x(n) = r^n [\cos(\omega n) + j \sin(\omega n)]$. Για $r = 1$ το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι αντίστοιχα μία συνημιτονική και μία ημιτονική ακολουθία σταθερού πλάτους της μορφής του Σχήματος 1.15α. Για $r < 1$ έχουμε φθίνουσες ημιτονικές ακολουθίες της μορφής του Σχήματος 1.15β και για $r > 1$ έχουμε αύξουσες ημιτονικές ακολουθίες της μορφής του Σχήματος 1.15γ.



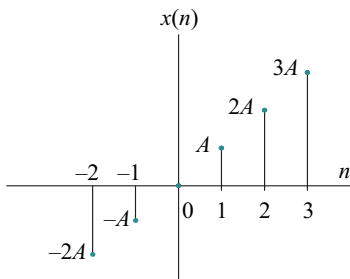
Σχήμα 1.10: Κρουστική ακολουθία



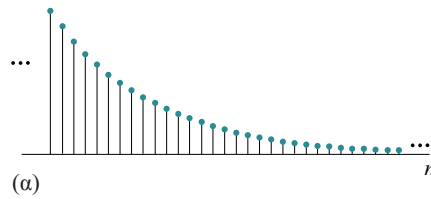
Σχήμα 1.11: Βηματική ακολουθία



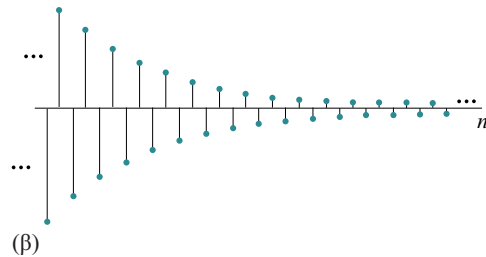
Σχήμα 1.12: Σταθερή ακολουθία



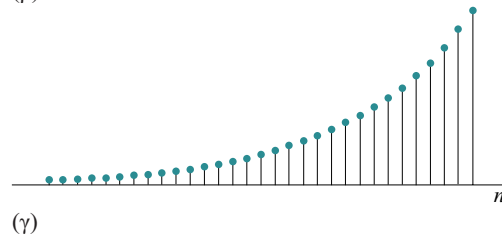
Σχήμα 1.13: Γραμμική ακολουθία



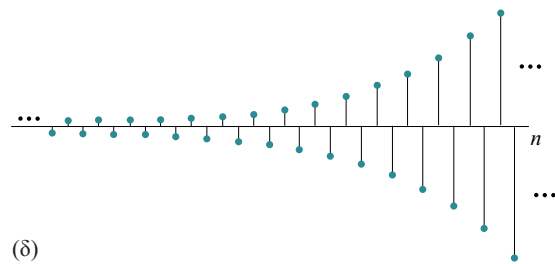
(α)



(β)



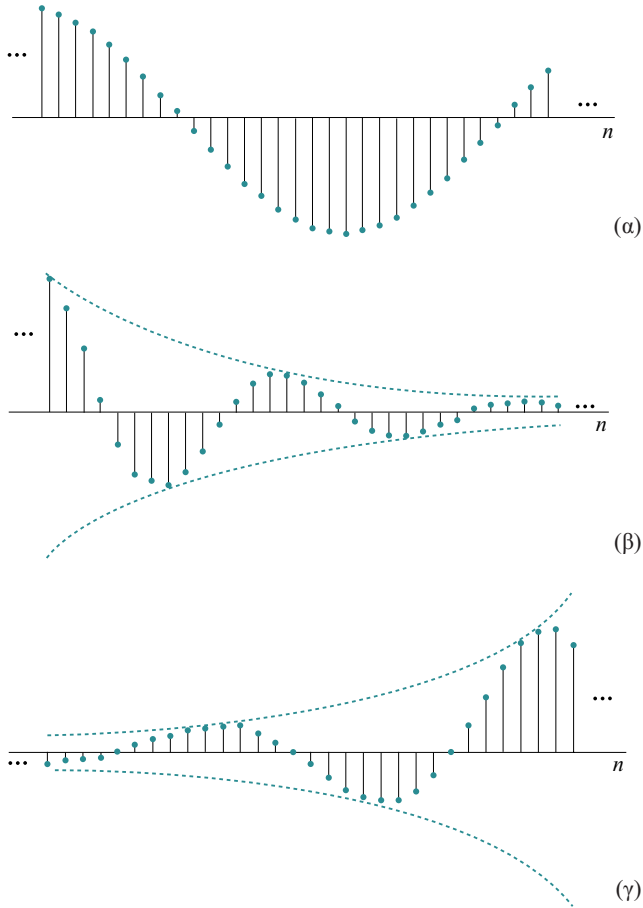
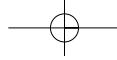
(γ)



(δ)

Σχήμα 1.14

Εκθετική ακολουθία $x(n) = a^n$ για a πραγματικό και (α) $0 < a < 1$, (β) $-1 < a < 0$, (γ) $a > 1$ και (δ) $a < -1$



Σχήμα 1.15

Γραφική αναπαράσταση του πραγματικού ή φανταστικού μέρους της εκθετικής ακολουθίας $x(n) = a^n$ για a μιγαδικό ($a = re^{j\omega}$), όπου (α) $r = 1$, (β) $r < 1$ και (γ) $r > 1$

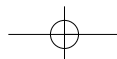
1.3.2 Στοιχειώδεις πράξεις

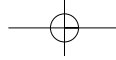
ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Η μαθηματική περιγραφή της ολίσθησης και η κατανόηση αυτής είναι καίριας σημασίας. Για παράδειγμα, η ολίσθηση της μοναδιαίας κρουστικής κατά n_0 μονάδες (δείγματα) ορίζεται ως:

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} \quad (1.30)$$

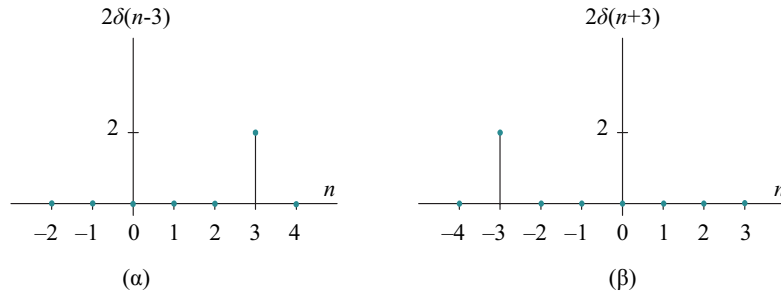
Στο Σχήμα 1.16 φαίνονται οι συναρτήσεις $2 \cdot \delta(n - 3)$ και $2 \cdot \delta(n + 3)$.





Σχήμα 1.16

Γραφικές παραστάσεις των μοναδιαίων ακολουθιών
(α) $2\delta(n-3)$ και
(β) $2\delta(n+3)$.



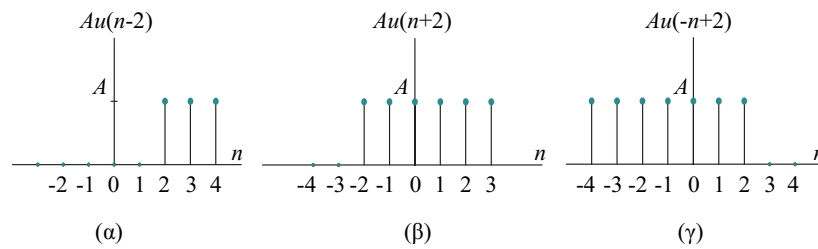
Με όμοιο τρόπο ορίζεται και η ολισθημένη κατά n_o μοναδιαία βηματική ακολουθία:

$$u(n-n_o) = \begin{cases} 1, & n \geq n_o \\ 0, & n < n_o \end{cases} \quad (1.31)$$

Στο Σχήμα 1.17 φαίνονται παραδείγματα ολίσθησης μίας βηματικής συνάρτησης κατά δύο δείγματα ($n_o = 2$).

Σχήμα 1.17

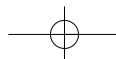
Γραφικές παραστάσεις των βηματικών ακολουθιών
(α) $Au(n-2)$,
(β) $Au(n+2)$ και
(γ) $Au(-n+2)$

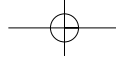


Παρατηρούμε ότι η μη μηδενική τιμή μιας κρουστικής βρίσκεται εκεί όπου το όρισμα της $\delta(\cdot)$ γίνεται μηδέν. Όμοια, μία βηματική ακολουθία είναι μη μηδενική για εκείνες τις τιμές για τις οποίες το όρισμα της $u(\cdot)$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Για παράδειγμα, μία κρουστική ακολουθία με πλάτος δείγματος 4 στη θέση $n = 3$, εκφράζεται ως $4\delta(n-3)$. Μία βηματική ακολουθία πλάτους -2 για όλες τις θετικές τιμές του n , καθώς και για $n = 0$, εκφράζεται ως $x(n) = -2u(n)$. Η κατοπτρική αυτής ως προς τον άξονα των συντεταγμένων είναι η $x(-n) = -2u(-n)$. Αυτή έχει πλάτος -2 για όλες τις αρνητικές τιμές του n , καθώς και για $n = 0$. Η ολίσθηση αυτής κατά 4 θέσεις προς τα αριστερά θα μας δώσει την ακολουθία $x(-n+4) = -2u(-n+4)$.

Είμαστε τώρα σε θέση να δούμε εύκολα ότι οι σχέσεις που συνδέουν την κρουστική και τη βηματική ακολουθία είναι οι εξής:

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m) \quad (1.32)$$





$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \tag{1.33}$$

Γενικά, η ακολουθία $x(n-n_0)$ είναι ένα αντίγραφο της $x(n)$ το οποίο έχει υποστεί ολίσθηση. Για $n_0 > 0$ έχουμε μια δεξιά ολίσθηση η οποία ισοδυναμεί με καθυστέρηση (delay) του σήματος, ενώ για $n_0 < 0$ έχουμε μια αριστερή ολίσθηση η οποία ισοδυναμεί με προήγηση (advance) του σήματος.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

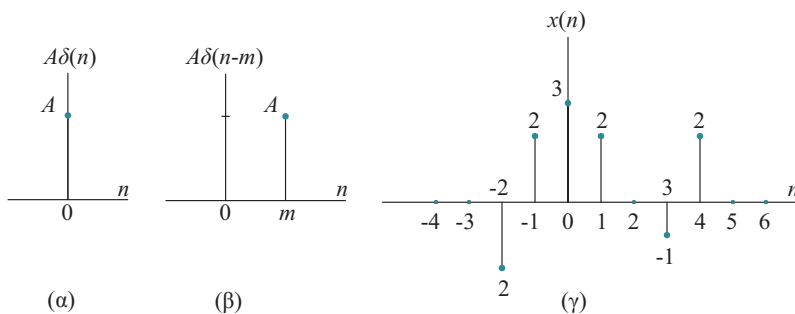
Οποιοδήποτε σήμα $x(n)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ολισθημένων κρουστικών δειγμάτων πολλαπλασιασμένων με συντελεστές βάρους:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m) \tag{1.34}$$

Για να γίνει αυτό κατανοητό, ας δούμε το Σχήμα 1.18. Η $A\delta(n)$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ η $A\delta(n-m)$ βρίσκεται στο σημείο $n = m$. Έτσι η ακολουθία $x(n)$, με $\{x(n)\} = \{\dots, 0, 0, -2, 2, 3, 2, 0, -1, 2, 0, 0, \dots\}$, όπου με έντονη γραφή και υπογράμμιση σημειώνεται η χρονική στιγμή $n = 0$ (στοιχείο 3), μπορεί να περιγραφεί ως:

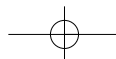
$$\begin{aligned} x(n) &= \dots -2\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 3\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3) + 2\delta(n-4) + \dots = \\ &= \dots + x(-2)\delta(n+2) + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(3)\delta(n-3) + x(4)\delta(n-4) + \dots \end{aligned}$$

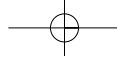
και γενικά προκύπτει η σχέση (1.34). Η σχέση αυτή είναι πολύ βασική και θα μας βοηθήσει στην κατανόηση της συνέλιξης (convolution), όπως θα δούμε αναλυτικά στην ενότητα 1.4.



Σχήμα 1.18

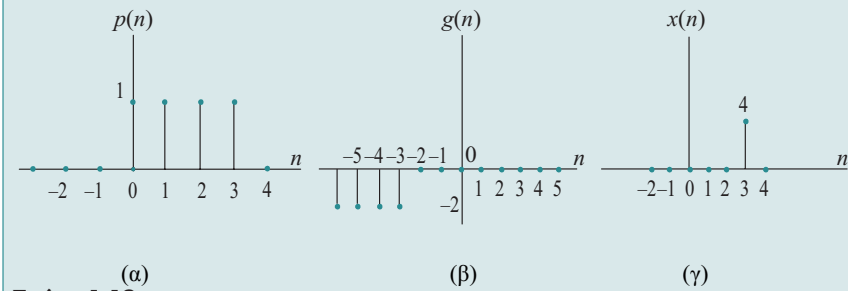
Η μοναδιαία κρουστική στην περιγραφή οποιουδήποτε σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$: (α) $A\delta(n)$, (β) $A\delta(n-m)$, (γ) $x(n)$





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.4

Να εκφράσετε τον παλμό διακριτού χρόνου $p(n)$ του Σχήματος 1.19α ως συνδυασμό βηματικών ακολουθιών.



Σχήμα 1.19

Σήματα διακριτού χρόνου.

Δραστηριότητα 1.2

Να βρείτε τις εκφράσεις για τα σήματα $g(n)$, $x(n)$ των Σχημάτων 1.19β και 1.19γ.

Σύνοψη ενότητας

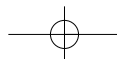
Στην ενότητα αυτή ορίσαμε όλες τις βασικές ακολουθίες (κρουστική, βηματική, εκθετική) και γνωρίσαμε τις στοιχειώδεις πράξεις που μπορούμε να έχουμε σ' αυτές. Στη συνέχεια, είδαμε ότι οποιοδήποτε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός μοναδιαίων κρουστικών.

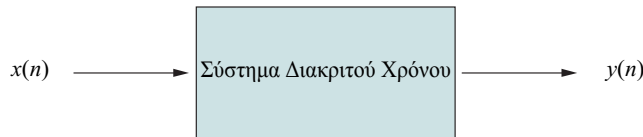
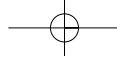
1.4 Συστήματα διακριτού χρόνου

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου είναι εκείνο που δέχεται μία είσοδο διακριτού χρόνου $x(n)$ και παράγει μία έξοδο επίσης διακριτού χρόνου $y(n)$ (Σχήμα 1.20). Τα συστήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό έχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά. Είναι *γραμμικά* (linear) και *χρονικά αμετάβλητα* (time-invariant). Θα αναφερόμαστε σ' αυτά με τον αγγλικό όρο LTI (Linear Time-Invariant) για λόγους συμβατότητας με τη διεθνή βιβλιογραφία και ευκολίας του σπουδαστή.

Γραμμικό ονομάζεται ένα σύστημα στο οποίο ισχύει *η αρχή της υπέρθεσης*. Συγκεκριμένα, εάν η είσοδος του συστήματος, το οποίο αρχικά βρισκόταν σε ηρεμία^[3],

[3] Αρχική ηρεμία σημαίνει ότι στο σύστημα δεν έχει εφαρμοστεί καμία διέγερση (είσοδος) πριν από τη χρονική στιγμή $n = n_0$, κατά την οποία εφαρμόστηκε η είσοδος $x(n)$.



**Σχήμα 1.20**

Γενικό διάγραμμα συστήματος διακριτού χρόνου

αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό σημάτων, τότε η έξοδος του συστήματος (απόκριση) θα ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων των επιμέρους σημάτων, σαν αυτά να είχαν εφαρμοσθεί το καθένα χωριστά. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως εξής: αν $y_1(n)$ είναι η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_1(n)$ και $y_2(n)$ είναι η απόκριση αυτού στην είσοδο $x_2(n)$, τότε η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $ax_1(n) + bx_2(n)$ θα είναι $ay_1(n) + by_2(n)$, όπου a, b σταθερές.

Ας εξετάσουμε τις περιπτώσεις ενός γραμμικού και ενός μη γραμμικού συστήματος. Ένα παράδειγμα γραμμικού συστήματος είναι αυτό του οποίου η έξοδος ισούται με $y(n) = x(n) - x(n-1)$. Για είσοδο $x_1(n)$, η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_1(n) = x_1(n) - x_1(n-1)$. Για είσοδο $x_2(n)$ η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_2(n) = x_2(n) - x_2(n-1)$. Αν τώρα εφαρμόσουμε ως είσοδο $x_3(n)$ το γραμμικό συνδυασμό των δύο προηγουμένων ακολουθιών εισόδου, δηλαδή $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, η έξοδος $y_3(n)$ του συστήματος θα ισούται με:

$$\begin{aligned} y_3(n) &= x_3(n) - x_3(n-1) = [ax_1(n) + bx_2(n)] - [ax_1(n-1) + bx_2(n-1)] \\ &= a[x_1(n) - x_1(n-1)] + b[x_2(n) - x_2(n-1)] = ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

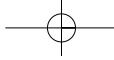
άρα, ισχύει η αρχή της υπέρθεσης.

Ένα παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος είναι εκείνο το οποίο παράγει στην έξοδό του το τετράγωνο της εισόδου, δηλαδή $y(n) = [x(n)]^2$. Για είσοδο $x_1(n)$ η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_1(n) = [x_1(n)]^2$. Για είσοδο $x_2(n)$ η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_2(n) = [x_2(n)]^2$. Αν τώρα εφαρμοστεί στην είσοδο το σήμα $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ η έξοδος θα είναι:

$$\begin{aligned} y_3(n) &= [x_3(n)]^2 = [ax_1(n) + bx_2(n)]^2 = [ax_1(n)]^2 + [bx_2(n)]^2 + 2abx_1(n)x_2(n) = \\ &= a^2 y_1(n) + b^2 y_2(n) + 2abx_1(n)x_2(n) \neq ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

Χρονικά αμετάβλητο ονομάζεται ένα σύστημα του οποίου η συμπεριφορά και οι ιδιότητες δεν αλλάζουν με το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι μια χρονική ολίσθηση της εισόδου θα αντιστοιχεί σε χρονική ολίσθηση της εξόδου. Με άλλα λόγια, εάν $y(n)$ είναι η έξοδος ενός χρονικά αμετάβλητου συστήματος για είσοδο $x(n)$, τότε $y(n-n_0)$ θα είναι η έξοδος αυτού για είσοδο $x(n-n_0)$.

Ευσταθές (stable) ονομάζεται ένα σύστημα εάν και μόνο εάν κάθε φραγμένη είσοδος



παράγει μια φραγμένη έξοδο (Bounded Input Bounded Output, BIBO). Με άλλα λόγια, ένα τέτοιο σύστημα μας εξασφαλίζει ότι όσο η είσοδος παραμένει φραγμένη ($|x(n)| \leq M_x < \infty$), η έξοδος δε θα απειρίζεται ($|y(n)| \leq M_y < \infty$) για όλα τα n , όπου M_x, M_y πεπερασμένοι αριθμοί. Σε διαφορετική περίπτωση το σύστημα ονομάζεται ασταθές (unstable).

Αιτιατό (causal) σύστημα είναι εκείνο του οποίου η έξοδος, σε κάθε χρονική στιγμή, εξαρτάται μόνο από τις τιμές του σήματος εισόδου στην τρέχουσα χρονική στιγμή και σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Με άλλα λόγια, οι μεταβολές στην έξοδο ενός τέτοιου συστήματος είναι αποτέλεσμα των μεταβολών της εισόδου.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη σημασία της κρουστικής απόκρισης μονοδιάστατου συστήματος διακριτού χρόνου και θα δούμε ότι με τη βοήθειά της μπορούμε, μέσω της πράξης της συνέλιξης, να υπολογίσουμε την έξοδο ενός γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου για οποιαδήποτε είσοδο.

Παράδειγμα 1.5

Να χαρακτηρίσετε τα συστήματα που περιγράφονται από τις επόμενες σχέσεις εισόδου-εξόδου, ως προς τις ιδιότητες της γραμμικότητας, της ευστάθειας, της χρονικής μεταβλητότητας και της αιτιατότητας.

$$\begin{array}{ll} \alpha. y(n) = 3x(n) - 2x(n-1) & \gamma. y(n) = nx(n-2) - x(n+3) \\ \beta. y(n) = x(n) + 2y(n-1) & \delta. y(n) = \cos[x(n)] \end{array}$$

Λύση:

Τα δύο πρώτα συστήματα είναι γραμμικά, αφού η έξοδος υπολογίζεται ως γραμμικός συνδυασμός δειγμάτων της εισόδου και προηγούμενων τιμών της εξόδου. Το τρίτο σύστημα είναι επίσης γραμμικό, αφού ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Το τέταρτο είναι μη γραμμικό σύστημα.

Ως προς την ευστάθεια, το δεύτερο σύστημα δεν είναι ευσταθές. Για να γίνει αυτό κατανοητό, ας θεωρήσουμε ότι στην είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται η φραγμένη ακολουθία $x(n) = C\delta(n)$, όπου C σταθερά. Θεωρούμε επίσης ότι το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, οπότε $y(-1) = 0$. Η ακολουθία εξόδου που παράγεται είναι:

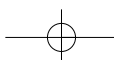
$$y(0) = C \cdot \delta(0) + 2 \cdot y(-1) = C \cdot 1 + 2 \cdot 0 = C$$

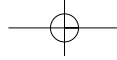
$$y(1) = C \cdot \delta(1) + 2 \cdot y(0) = C \cdot 0 + 2 \cdot C = 2C$$

$$y(2) = C \cdot \delta(2) + 2 \cdot y(1) = C \cdot 0 + 2 \cdot 2C = 2^2 C$$

...

$$y(n) = C \cdot \delta(n) + 2 \cdot y(n-1) = C \cdot 0 + 2 \cdot 2^{n-1} C = 2^n C$$





Επομένως, γίνεται φανερό, ότι η έξοδος είναι μη φραγμένη και το σύστημα είναι BIBO ασταθές, αφού μία φραγμένη είσοδος έχει ως αποτέλεσμα μια μη φραγμένη έξοδο.

Μεταβλητό με το χρόνο είναι το τρίτο σύστημα αφού ο συντελεστής n δεν είναι σταθερός αλλά μεταβάλλεται διαρκώς.

Τέλος, το τρίτο σύστημα δεν είναι αιτιατό αφού απαιτεί γνώση μελλοντικών τιμών της εισόδου.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.5

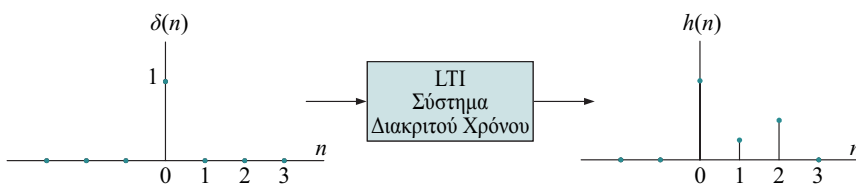
Εξετάστε αν το σύστημα $y(n) = 3x(n) + 3$ είναι γραμμικό.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.6

Εξετάστε αν τα συστήματα $y(n) = nx(n)$ και $y(n) = x(2n)$ είναι χρονικά αμετάβλητα.

1.4.1 Κρουστική απόκριση συστήματος

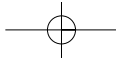
Ας θυμηθούμε τη μοναδιαία κρουστική ακολουθία $\delta(n)$. Αυτή έχει τιμή 1 για $n = 0$ και τιμή 0 οπουδήποτε αλλού (βλ. Σχήμα 1.10). Εφαρμόζουμε αυτό το σήμα στην είσοδο ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου, το οποίο αρχικά ηρεμεί, δηλαδή εφαρμόζουμε μία διέγερση τη στιγμή $n = 0$. Το σήμα εξόδου, το οποίο θα παρατηρηθεί μετά τη στιγμή $n = 0$, είναι χαρακτηριστικό του ίδιου του συστήματος. Αυτό το σήμα εξόδου αποτελεί την **κρουστική απόκριση**, $h(n)$, του συστήματος. Η κρουστική απόκριση ονομάζεται και **φυσική απόκριση** του συστήματος. Ένα παράδειγμα κρουστικής απόκρισης συστήματος διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 1.21.



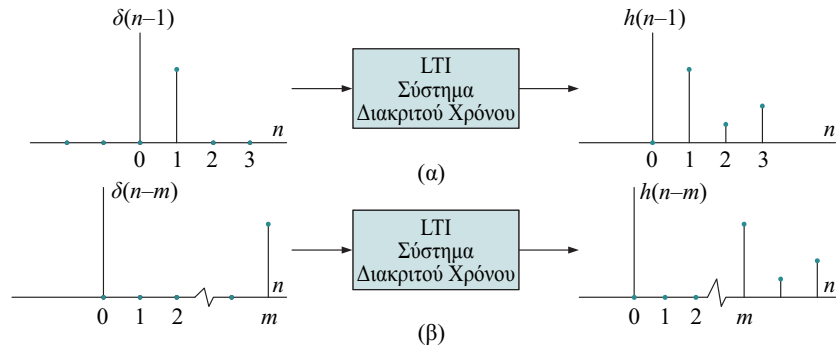
Σχήμα 1.21

Κρουστική απόκριση συστήματος διακριτού χρόνου

Αν εφαρμόζαμε τη διέγερση τη στιγμή $n = 1$, τότε η απόκριση του συστήματος θα ήταν ίδια με την προηγούμενη, αλλά θα άρχιζε από τη στιγμή $n = 1$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.22α. Και γενικά, αν εφαρμόζαμε την κρουστική είσοδο τη χρονική στιγμή $n = m$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν η ίδια απόκριση, αλλά με αρχή τη στιγμή m (Σχήμα 1.22β). Όπως καταλαβαίνουμε αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το σύστημά μας είναι χρονικά αμετάβλητο.



Σχήμα 1.22
Κρουστική απόκριση συστήματος διακριτού χρόνου για είσοδο
(α) $\delta(n-1)$ και
(β) $\delta(n-m)$



1.4.2 Συνέλιξη

Τίθεται συνεπώς το ερώτημα: Ποια θα είναι η απόκριση ενός συστήματος διακριτού χρόνου για είσοδο $x(n)$, αν γνωρίζουμε την κρουστική του απόκριση $h(n)$;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται μονολεκτικά από τη λέξη *συνέλιξη* (convolution). Η έξοδος $y(n)$ του συστήματος (Σχήμα 1.20) θα ισούται με τη συνέλιξη της εισόδου $x(n)$ και της κρουστικής $h(n)$ του συστήματος, ή:

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{1.35}$$

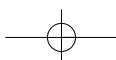
όπου $*$ το σύμβολο της συνέλιξης. Όμως τι είναι η συνέλιξη και πώς υπολογίζεται;

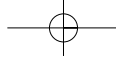
Έστω, λοιπόν, ότι $x(n)$ η είσοδος και $h(n)$ η κρουστική απόκριση συστήματος διακριτού χρόνου. Πριν προχωρήσουμε, ας θυμηθούμε τη σχέση (1.34), η οποία μας λέει ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός ολισθημένων κρουστικών. Επίσης, ας μην ξεχνάμε ότι το σύστημα που εξετάζουμε είναι γραμμικό (άρα ισχύει η αρχή της υπέρθεσης) και χρονικά αμετάβλητο. Έχοντας αυτά κατά νου, μπορούμε να εκφράσουμε την είσοδο $x(n)$ ως:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = \dots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \dots \tag{1.36}$$

Για κάθε μία από τις εισόδους $x(m)\delta(n-m)$, είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα 1.4.1, ότι η έξοδος θα ισούται με $x(m)h(n-m)$. Λόγω της γραμμικότητας του συστήματος, η τελική έξοδος $y(n)$ θα είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους αποκρίσεων, δηλαδή:

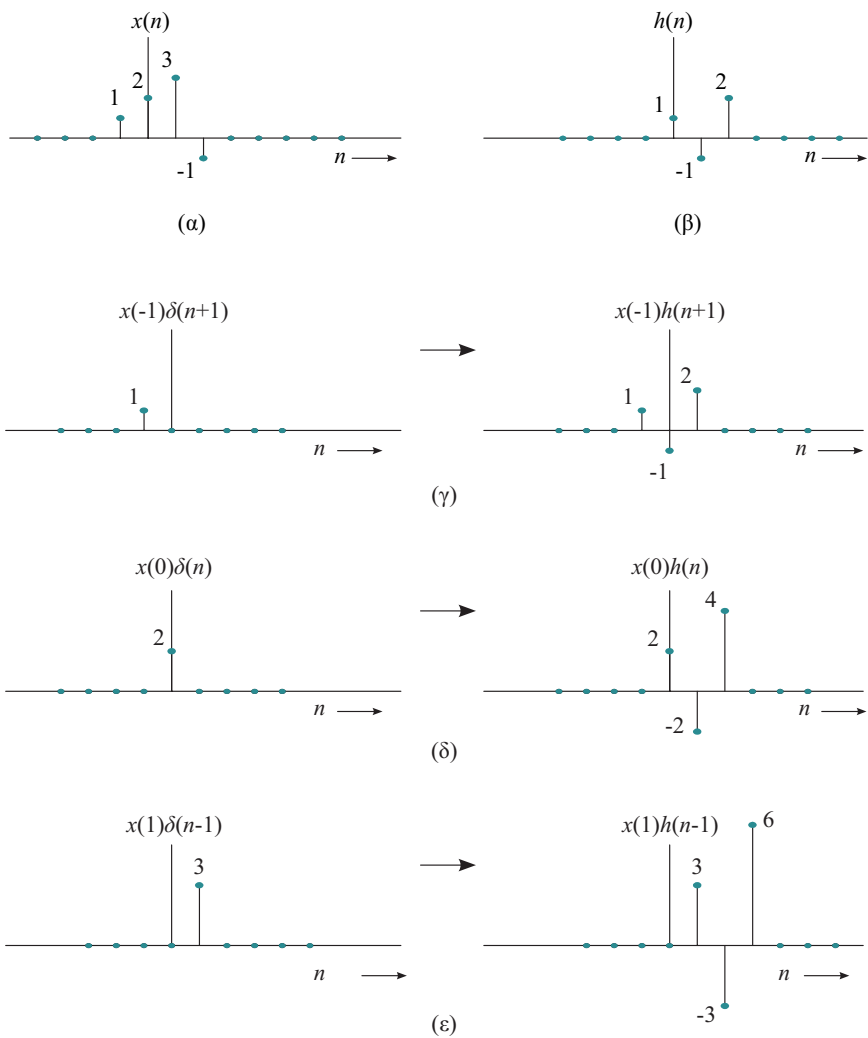
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \tag{1.37}$$



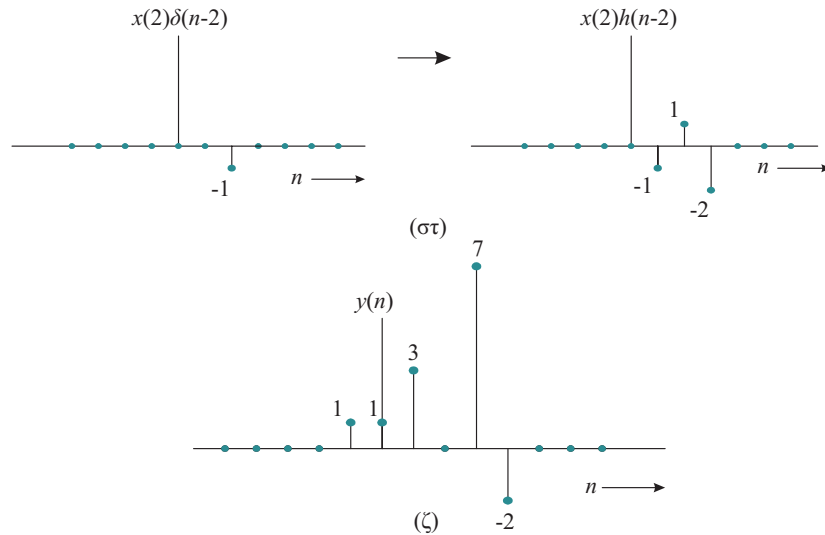
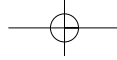


Αυτή είναι η σχέση της γραμμικής συνέλιξης.

Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε δίνεται παραστατικά με τη βοήθεια του παραδείγματος του Σχήματος 1.23, για την περίπτωση κατά την οποία $\{x(n)\} = \{1, 2, 3, -1\}$ και $\{h(n)\} = \{1, -1, 2\}$. Στα Σχήματα 1.23α,β φαίνονται οι ακολουθίες $x(n)$, $h(n)$. Στο αριστερό μέρος των Σχημάτων 1.23γ έως 1.23στ δίνονται οι κρουστικές $x(m)\delta(n-m)$, ενώ στο δεξί μέρος των ίδιων σχημάτων φαίνονται οι αντίστοιχες αποκρίσεις τους. Το άθροισμα των επιμέρους κρουστικών, το οποίο αποτελεί και την απόκριση του συστήματος, φαίνεται στο Σχήμα 1.23ζ.



Σχήμα 1.23
Γραμμική συνέλιξη



Παρατηρήστε ότι το μήκος της απόκρισης είναι 6 δείγματα. Γενικά, αν N_1 είναι το μήκος της μίας ακολουθίας και N_2 το μήκος της άλλης ακολουθίας, τότε η γραμμική συνέλιξη αυτών δίνει μια νέα ακολουθία με μήκος $N_1 + N_2 - 1$. Ο υπολογισμός της συνέλιξης δύο σημάτων διακριτού χρόνου με χαρτί και μολύβι γίνεται συνήθως με δύο τρόπους. Είτε γραφικά, όπως περιγράφεται στο παράδειγμα 1.6 είτε με τη μέθοδο της ολισθαίνουσας ράβδου του παραδείγματος 1.7

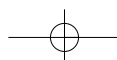
Παράδειγμα 1.6

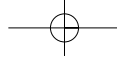
Γραφική μέθοδος υπολογισμού της συνέλιξης.

Ο υπολογισμός της συνέλιξης των $x(n)$ και $h(n)$, σύμφωνα με τη σχέση 1.37, μας υπαγορεύει την ακόλουθη σειρά βημάτων:

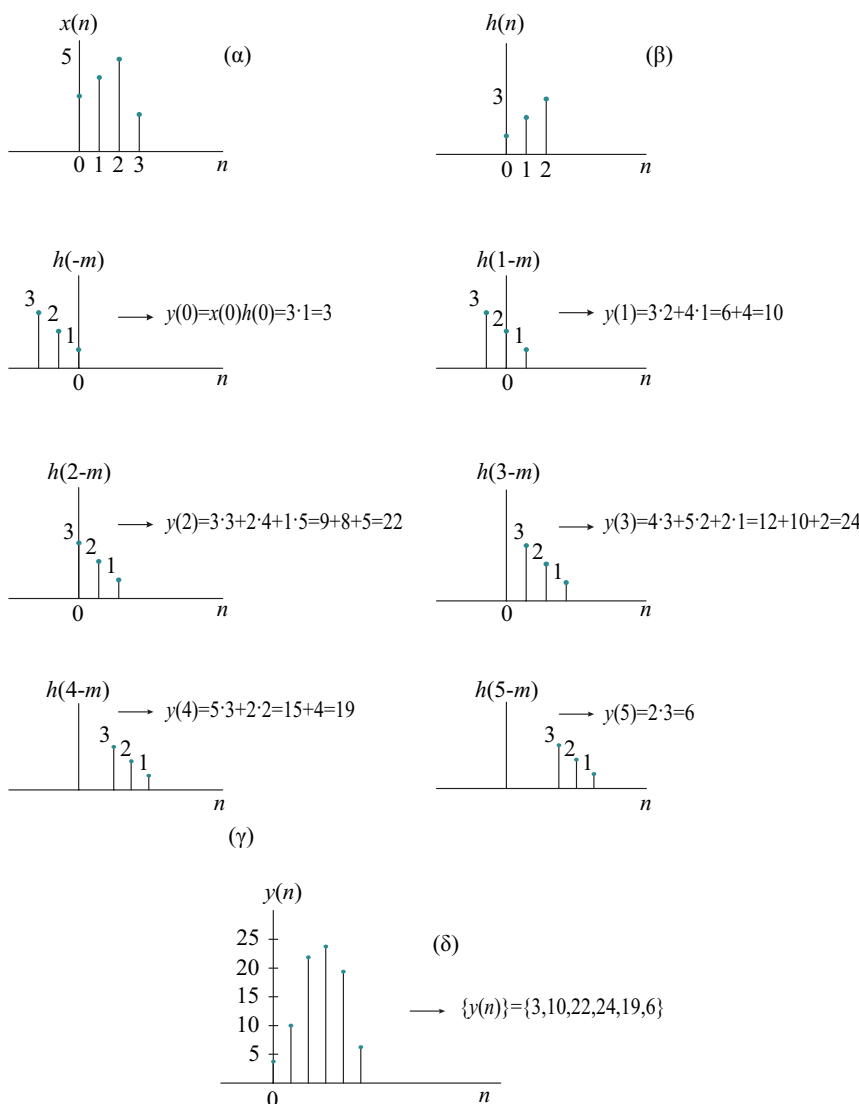
1. Αναδίπλωση (κατοπτρισμό) της $h(m)$ γύρω από το δείγμα $m = 0$, ώστε να μας δώσει την $h(-m)$.
2. Ολίσθηση της $h(-m)$ στην επιθυμητή θέση n , ώστε να πάρουμε την $h(n-m)$.
3. Υπολογισμό των γινομένων $x(m)h(n-m)$, δείγμα προς δείγμα, για να μας δώσουν την επιθυμητή τιμή n .
4. Πρόσθεση των γινομένων που υπολογίστηκαν.

Ας παρακολουθήσουμε τον υπολογισμό της εξόδου $y(n)$ ενός συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $\{h(n)\} = \{1, 2, 3\}$ και είσοδο $\{x(n)\} = \{3, 4, 5, 2\}$, όπως αυτό περιγράφεται στο Σχήμα 1.24. Οι ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$ δείχνονται στα



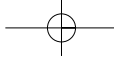


Σχήματα 1.24α και 1.24β αντίστοιχα. Στα Σχήματα 1.24γ δίνονται όλες οι διαφορετικές θέσεις της $h(n-m)$ για $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Για καθεμιά από τις θέσεις αυτές υπολογίζεται το αντίστοιχο άθροισμα γινομένων με την ακολουθία εισόδου. Αυτό αποτελεί ουσιαστικά και το αποτέλεσμα της συνέλιξης των $x(n)$ και $h(n)$, δηλαδή την ακολουθία εξόδου $y(n)$ η οποία φαίνεται στο Σχήμα 1.24δ. Στο παράδειγμά μας η $x(n)$ έχει μήκος 4 και η $h(n)$ έχει μήκος 3, οπότε η ακολουθία $y(n)$, που προκύπτει, έχει μήκος $4 + 3 - 1 = 6$ δειγμάτων.



Σχήμα 1.24

Υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης δύο ακολουθιών με τη γραφική μέθοδο.

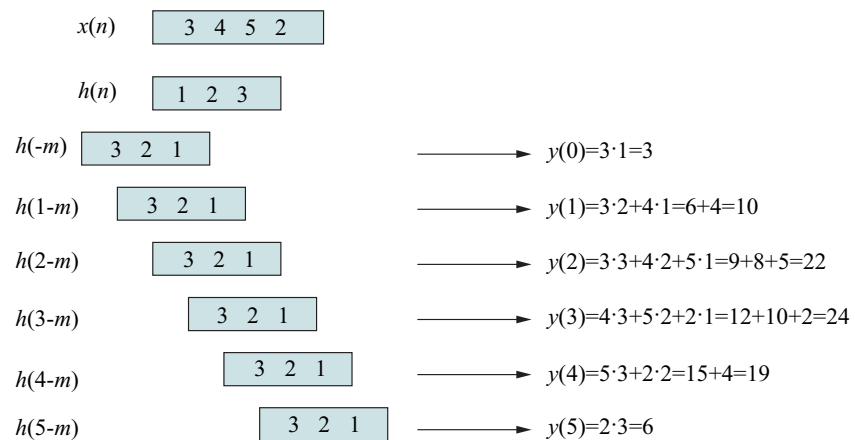


Παράδειγμα 1.7

Υπολογισμός της συνέλιξης με τη μέθοδο της ολισθαίνουσας ράβδου.

Η διαδικασία είναι η ίδια με εκείνη του παραδείγματος 1.6, με μόνη διαφορά ότι αντί για τις γραφικές παραστάσεις των ακολουθιών χρησιμοποιούμε τις τιμές τους. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι επίσης τα ίδια, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.25 όπου δίνεται ο υπολογισμός της συνέλιξης των ακολουθιών $x(n)$, $h(n)$ του παραδείγματος 1.6.

Σχήμα 1.25
Υπολογισμός της συνέλιξης με τη μέθοδο της ολισθαίνουσας ράβδου.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

Για την πράξη της συνέλιξης ισχύουν οι ιδιότητες: αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική. Τις παραθέτουμε στη συνέχεια μαζί με σχόλια σχετικά με τη φυσική τους σημασία, χωρίς να δώσουμε την απόδειξή τους.

Αντιμεταθετική ιδιότητα

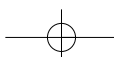
$$x(n)*h(n) = h(n)*x(n) \tag{1.38}$$

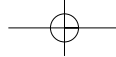
Είδαμε από τις σχέσεις (1.35) και (1.37) ότι

$$y(n) = x(n)*h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \tag{1.39}$$

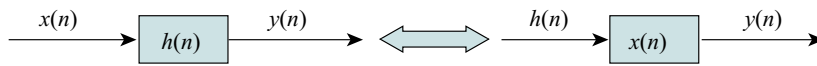
Με βάση την αντιμεταθετική ιδιότητα που μόλις αναφέραμε, η ακολουθία $y(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$y(n) = h(n)*x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \tag{1.40}$$





Επομένως, οι ρόλοι των ακολουθιών $x(n)$ και $h(n)$ μπορούν να αντιμετατεθούν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.26.



Σχήμα 1.26

Σχηματική αναπαράσταση της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης.

Προσεταιριστική ιδιότητα

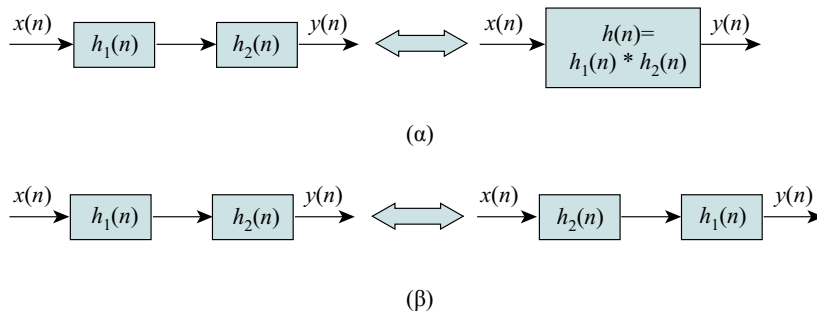
$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)] \tag{1.41}$$

Η σχηματική αναπαράσταση της προσεταιριστικής ιδιότητας φαίνεται στο Σχήμα 1.27α, όπου $h(n) = h_1(n)*h_2(n)$. Εύκολα μπορούμε να γενικεύσουμε την ιδιότητα της προσεταιριστικότητας σε περισσότερα από δύο συστήματα, τα οποία συνδέονται διαδοχικά (in cascade). Έτσι, η περίπτωση της διαδοχικής σύνδεσης L συστημάτων LTI με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n), h_2(n), \dots, h_L(n)$ ισοδυναμεί με ένα LTI σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h(n)$ και ισούται με

$$h(n) = h_1(n)*h_2(n)* \dots *h_L(n) \tag{1.42}$$

Η γενίκευση είναι πολύ χρήσιμη, ιδιαίτερα όταν τη δούμε ως αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή, ως διαδικασία ανάλυσης ενός LTI συστήματος σε μια διαδοχική σύνδεση υποσυστημάτων.

Τέλος, στο Σχήμα 1.27β φαίνεται ο συνδυασμός της προσεταιριστικής και της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Από αυτό γίνεται φανερό ότι, η σειρά με την οποία συνδέουμε τα υποσυστήματα, δηλαδή υπολογίζουμε τη συνέλιξη, δεν έχει σημασία.



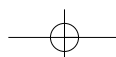
Σχήμα 1.27

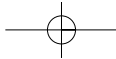
(α) Προσεταιριστική ιδιότητα της συνέλιξης, και (β) συνδυασμός προσεταιριστικής και αντιμεταθετικής ιδιότητας

Επιμεριστική Ιδιότητα

$$x(n)*[h_1(n) + h_2(n)] = x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n) \tag{1.43}$$

Η ιδιότητα αυτή μας λέει ότι, εάν έχουμε δύο LTI συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n)$ και $h_2(n)$, στα οποία εφαρμόζουμε το ίδιο σήμα εισόδου $x(n)$, τότε το άθροισμα των



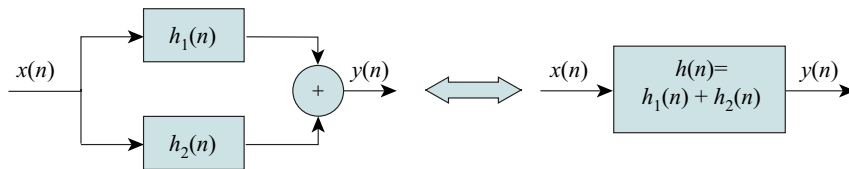


Σχήμα 1.28
 Επιμεριστική ιδιότητα: δύο LTI συστήματα συνδεδεμένα παράλληλα, μπορούν να αντικατασταθούν από ένα σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση ισούται με το άθροισμα των κρουστικών τους.

δύο αποκρίσεων είναι ίδιο με την απόκριση ενός άλλου συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$. Δηλαδή, το νέο αυτό σύστημα ισούται με τον παράλληλο συνδυασμό των δύο LTI συστημάτων (Σχήμα 1.28). Γενικά, η παράλληλη σύνδεση L συστημάτων με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n), h_2(n), \dots, h_L(n)$ στα οποία εφαρμόζεται η ίδια είσοδος $x(n)$, ισοδυναμεί με ένα σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση ισούται με

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \dots + h_L(n) \tag{1.44}$$

Και αντίστροφα, κάθε LTI σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε υποσυστήματα συνδεδεμένα παράλληλα.



Μέχρι εδώ έχουμε επικεντρώσει τη μελέτη μας στον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης με γραφικό ή αριθμητικό τρόπο. Θα εξετάσουμε τώρα τον υπολογισμό της συνέλιξης ακολουθιών με αναλυτικό τρόπο. Οι αναλυτικές εκφράσεις οδηγούν σε συμπεράσματα περισσότερο γενικά για τα συστήματα που εξετάζουμε, και έτσι μας είναι πιο χρήσιμες. Ας δούμε λοιπόν ένα σχετικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.8

Στην είσοδο ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = a^n u(n)$ εφαρμόζεται το σήμα $x(n) = b^n u(n)$, όπου a, b γνωστές σταθερές και $a \neq b$. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$ του συστήματος.

Λύση:

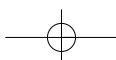
Η έξοδος $y(n)$ θα είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος. Με βάση τη σχέση (1.40) έχουμε:

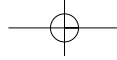
$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u(m)b^{n-m} u(n-m) = \sum_{m=0}^n a^m b^{n-m}$$

(Θυμηθείτε ότι η $u(m) = 0$ για $m < 0$ και η $u(n-m) = 0$ για $m > n$).

Επειδή το άθροισμα υπολογίζεται ως προς m , ο όρος b^n μπορεί να «βγεί» εκτός του αθροίσματος, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$y(n) = b^n \sum_{m=0}^n a^m b^{-m} = b^n \sum_{m=0}^n (ab^{-1})^m$$





Το παραπάνω είναι άθροισμα των $n + 1$ πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο ab^{-1} και δίνεται σε κλειστή μορφή ως

$$\begin{aligned} y(n) &= b^n \left(\frac{1 - (ab^{-1})^{n+1}}{1 - ab^{-1}} \right) = b^n \left(\frac{b - a^{n+1}b^{-n}}{b - a} \right) \\ &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} = \frac{b}{b - a} b^n - \frac{a}{b - a} a^n = C_b b^n - C_a a^n \end{aligned}$$

όπου $n \geq 0$. Παρατηρούμε ότι η έξοδος χαρακτηρίζεται τόσο από την είσοδο $x(n) = b^n$, $n \geq 0$, όσο και από την κρουστική του συστήματος $h(n) = a^n$, $n \geq 0$. Αυτή είναι μια γενικότερη διαπίστωση, δηλαδή η έξοδος θα περιέχει όρους της ίδιας αλγεβρικής μορφής με τους όρους της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.7

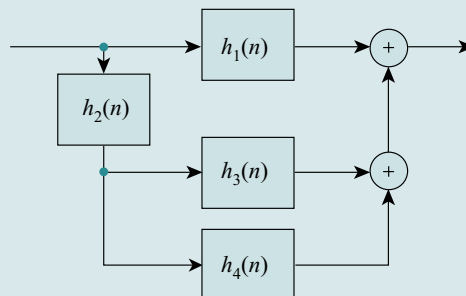
Να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος του Παραδείγματος 1.8 με είσοδο τη βηματική ακολουθία πλάτους Α.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.8

Για το σύστημα με μοναδιαία κρουστική ίση με $h(n) = (a^n + b^n)u(n)$, να υπολογιστεί η έξοδος, όταν σ' αυτό εφαρμόζεται ως είσοδος η βηματική ακολουθία πλάτους Α.

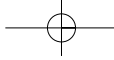
Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.9

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος διακριτού χρόνου του Σχήματος 1.29, όταν $h_1(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$, $h_2(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1)$, $h_3(n) = 2\delta(n)$, και $h_4(n) = -2(\frac{1}{2})^n u(n)$.



Σχήμα 1.29

Σύστημα διακριτού χρόνου.



Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή ασχοληθήκαμε με γραμμικά χρονικά-αμετάβλητα (LTI) συστήματα διακριτού χρόνου και μελετήσαμε την απόκρισή τους σε διεγέρσεις της εισόδου. Είδαμε, ότι η έξοδος κάθε LTI συστήματος ισούται με τη συνέλιξη της ακολουθίας εισόδου με την μοναδιαία κρουστική απόκριση του συστήματος. Γνωρίσαμε τις ιδιότητες της συνέλιξης (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική) και περιγράψαμε διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού της τόσο αριθμητικά, όσο και αναλυτικά.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στο Κεφάλαιο αυτό μάθαμε ότι:

Η ψηφιακή επεξεργασία σημάτων παρουσιάζει στις μέρες μας εντυπωσιακά πλεονεκτήματα έναντι της αντίστοιχης αναλογικής επεξεργασίας, όπως ευελιξία, αξιοπιστία και ακρίβεια.

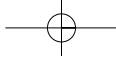
Κάθε αναλογικό σήμα, για να υποστεί επεξεργασία με ένα ψηφιακό σύστημα, πρέπει πρώτα να μετατραπεί σε ψηφιακό σήμα. Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος και κβάντιση (καθώς και κωδικοποίηση) των δειγμάτων.

Κατάλληλη δειγματοληψία σημαίνει τη λήψη τουλάχιστον δύο δειγμάτων ανά περίοδο του σήματος, δηλαδή $F_s \geq 2F_{\max}$ (θεώρημα δειγματοληψίας ή θεώρημα του Shannon).

Ελάττωση του σφάλματος κβάντισης, κατά την ψηφιοποίηση ενός δείγματος, συνεπάγεται περισσότερα bits για την αναπαράσταση αυτού.

Κάθε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ολισθημένων κρουστικών, πολλαπλασιασμένων με κατάλληλους συντελεστές βάρους.

Η απόκριση συστήματος διακριτού χρόνου ισούται με τη γραμμική συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.



Βιβλιογραφία κεφαλαίου

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων*, Τυπωθήτω Γ. Δαρδανός, Αθήνα, 1998.

Ν.Καλουπτσίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*, Εκδόσεις Διάυλος, Αθήνα, 1993.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

R.I.Damper, *Introduction to Discrete-Time Signals and Systems*, Chapman & Hall, 1995.

E.C.Ifeachor and B.W. Jervis, *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Second Edition, Pearson Education Limited, 2002.

P.A. Lynn and W. Fuerst, *Introductory Digital Signal Processing With Computer Applications*, J.Wiley and Sons Ltd, 1989.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-Based Approach*, Second Edition, McGraw Hill, 2001.

S.J.Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.

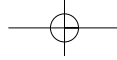
A.V.Oppenheim and A.S.Willsky, *Signals & Systems*, Second Edition, Prentice-Hall, 1997.

J.G.Proakis and D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, 1996.

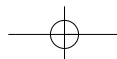
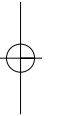
R.D.Strum and D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική

accuracy	ακρίβεια (πράξεων)
advance	προήγηση
aliasing	φαινόμενο χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας, φασματική επικάλυψη, αλλοίωση
amplitude	πλάτος
angular frequency	γωνιακή συχνότητα
bounded	φραγμένος



cascade	διαδοχική σύνδεση
convolution	συνέλιξη
delay	καθυστέρηση
digital signal processing	ψηφιακή επεξεργασία σήματος
dimension	διάσταση
discrete	διακριτός
dynamic range	δυναμική περιοχή
exponential sequence	εκθετική ακολουθία
folding frequency	συχνότητα αναδίπλωσης
fundamental period	βασική περίοδος
image processing	επεξεργασία εικόνας
impulse response	κρουστική απόκριση
linear	γραμμικός
normalised frequency	κανονικοποιημένη συχνότητα
periodic	περιοδικός
phasor	φάσορας
quantisation	κβάντιση
quantisation error	σφάλμα ή θόρυβος κβάντισης
relative frequency	σχετική συχνότητα
resolution	ανάλυση, διακριτική ικανότητα
rounding	στρογγυλοποίηση
sinusoidal	ημιτονοειδές
speech	ομιλία
superposition	υπέρθεση
time invariant	χρονικά αμετάβλητος
truncation	αποκοπή
unit sample	μοναδιαίο δείγμα, κρουστική ακολουθία
unit step	μοναδιαία βηματική ακολουθία
video	ακολουθία εικόνων





Ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας

Σκοπός

Το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η περιγραφή του σήματος στο πεδίο της συχνότητας. Η θεώρηση των σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου από το πεδίο της συχνότητας, μας δίνει μια εντελώς διαφορετική δυναμική κατανόησης και επεξεργασίας τους. Για τα σήματα διακριτού χρόνου, τα οποία μας ενδιαφέρουν, η μετάβαση στο πεδίο της συχνότητας επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Για ακολουθίες πεπερασμένου μήκους χρησιμοποιείται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Μετά τη μελέτη του κεφαλαίου θα είστε σε θέση να:

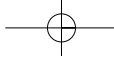
- Υπολογίζετε ποσοτικά και ποιοτικά το φάσμα ενός σήματος διακριτού χρόνου
- Υπολογίζετε το μετασχηματισμό Fourier για σήματα διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας
- Εκτελείτε την κυκλική ολίσθηση σημάτων διακριτού χρόνου
- Υπολογίζετε την απόκριση ενός συστήματος διακριτού χρόνου (γραμμική συνέλιξη) μέσω του πεδίου της συχνότητας, βασιζόμενοι στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier
- Υλοποιείτε έναν από τους ταχείς μετασχηματισμούς Fourier

Έννοιες κλειδιά

- Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)
- Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT)
- Κυκλική συνέλιξη
- Μετασχηματισμός Fourier
- Φάσμα σήματος

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

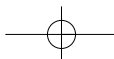
Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να εκφρα-

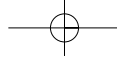


στεί ως γραμμικός συνδυασμός ολισθημένων μοναδιαίων κρουστικών $\{\delta(n-m)\}$. Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση οποιασδήποτε ακολουθίας ως συνδυασμού μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών της μορφής $\{e^{-j\omega n}\}$, (κατ' αναλογία με το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού αναλογικού σήματος). Πρόκειται για μία πολύ χρήσιμη αναπαράσταση των σημάτων και των συστημάτων διακριτού χρόνου σ' ένα μετασχηματισμένο πεδίο. Με άλλα λόγια, στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πώς μπορούμε να μεταβούμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα. Και όλα αυτά θα αφορούν πάντοτε την περίπτωση των σημάτων διακριτού χρόνου.

Στην ενότητα 2.1 πραγματευόμαστε το μετασχηματισμό Fourier^[1] διακριτού χρόνου (DTFT, Discrete Time Fourier Transform), ο οποίος εφαρμόζεται σε μη περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου και παρουσιάζουμε τις ιδιότητές του. Με βάση το διαφορετικό τρόπο θεώρησης των σημάτων από το πεδίο της συχνότητας, επανεξετάζουμε το θέμα της δειγματοληψίας. Στη συνέχεια, μελετάμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform) ο οποίος εφαρμόζεται σε σήματα διακριτού χρόνου πεπερασμένου μήκους (ενότητα 2.2). Τέλος, στην ενότητα 2.3 παρουσιάζουμε το βασικό αλγόριθμο για τον ταχύ υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (FFT, Fast Fourier Transform).

[1] Ιστορική αναδρομή: Ο Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) ήταν Γάλλος μαθηματικός και φυσικός. Ο Fourier ερευνούσε τη διάδοση της θερμότητας και το 1807 παρουσίασε στο Ινστιτούτο της Γαλλίας μια εργασία του για τη χρήση των ημιτονικών κυματομορφών στην αναπαράσταση των κατανομών θερμοκρασίας. Η εργασία του αυτή υποστήριζε την ανορθόδοξη, για την εποχή εκείνη, άποψη ότι οποιοδήποτε συνεχές περιοδικό σήμα θα μπορούσε να εκφραστεί ως άθροισμα κατάλληλων ημιτονικών κυματομορφών. Ανάμεσα στους κριτές της εργασίας υπήρχαν και δύο από τους πιο φημισμένους μαθηματικούς, ο Joseph Luis Lagrange (1736–1813) και ο Pierre Simon de Laplace (1749–1827). Και ενώ ο Laplace, όπως και άλλοι κριτές, ψήφισαν υπέρ της δημοσίευσης της εργασίας, ο Lagrange αρνήθηκε, γιατί μέχρι τη στιγμή εκείνη δεν υπήρχε το κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο, στο οποίο θα μπορούσε να στηριχτεί η σχετική απόδειξη. Για πενήντα χρόνια ο Lagrange επέμενε ότι μια τέτοια προσέγγιση δε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση σημάτων με «γωνίες», δηλαδή σημάτων με ασυνέχειες, όπως είναι οι τετραγωνικοί παλμοί. Το Ινστιτούτο της Γαλλίας, υποκύπτοντας στο γόητρο του Lagrange, απέρριψε την εργασία του Fourier. Τελικά, αυτή δημοσιεύτηκε μετά το θάνατο του Lagrange.





2.1 Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

2.1.1 Ορισμοί

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT, discrete-time Fourier transform) ενός σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$ είναι η αναπαράσταση του σήματος αυτού ως συνδυασμού μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών της μορφής $\{e^{-j\omega n}\}$, όπου ω μεταβλητή, γνωστή και ως (κυκλική) συχνότητα. Ο DTFT μίας ακολουθίας, *εάν υπάρχει*, είναι μοναδικός. Η αρχική ακολουθία μπορεί να υπολογιστεί, όταν μας δίνεται ο DTFT αυτής, με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Ο DTFT $X(e^{j\omega})$ της ακολουθίας $x(n)$ ορίζεται ως

$$X(e^{j\omega}) \equiv F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2.1)$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x(n) \equiv F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (2.2)$$

Οι σχέσεις (2.1) και (2.2) αποτελούν το λεγόμενο ζεύγος μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου. Η σχέση (2.1) ονομάζεται και *εξίσωση ανάλυσης*, ενώ η (2.2) *εξίσωση σύνθεσης*. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι *μία ακολουθία μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών*. Η συνάρτηση $X(e^{j\omega})$ είναι μιγαδική και μπορεί να γραφεί ως

$$X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega}) \quad (2.3)$$

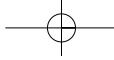
όπου $X_r(e^{j\omega})$ και $X_i(e^{j\omega})$ είναι πραγματικές συναρτήσεις ως προς ω , και αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $X(e^{j\omega})$ αντίστοιχα. Η $X(e^{j\omega})$ σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (2.4)$$

$$\text{όπου} \quad |X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_r^2(e^{j\omega}) + X_i^2(e^{j\omega})} \quad (2.5)$$

$$\theta(\omega) = \arg\{X(e^{j\omega})\} = \tan^{-1} \left[\frac{X_i(e^{j\omega})}{X_r(e^{j\omega})} \right] \quad (2.6)$$

Η ποσότητα $|X(e^{j\omega})|$ ονομάζεται *συνάρτηση μέτρου* και η ποσότητα $\theta(\omega)$ *συνάρτη-*



ση φάσης. Και οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι πραγματικές συναρτήσεις του ω . Σε πολλές εφαρμογές, ο μετασχηματισμός Fourier ονομάζεται *φάσμα Fourier*, και κατ' επέκταση οι συναρτήσεις $|X(e^{j\omega})|$ και $\theta(\omega)$ αναφέρονται ως *φάσμα μέτρου* (magnitude spectrum) και *φάσμα φάσης* (phase spectrum) αντίστοιχα.

Ο DTFT $X(e^{j\omega})$ της ακολουθίας $x(n)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του ω . Επιπλέον, είναι *περιοδική ως προς ω με περίοδο ίση με 2π* , δηλαδή

$$X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega}). \quad (2.7)$$

Η τελευταία αυτή σχέση μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2k\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2k\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} e^{-j2kn\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Η περιοδικότητα είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι τα διακριτού χρόνου μιγαδικά εκθετικά σήματα, τα οποία διαφέρουν στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του 2π , είναι μεταξύ τους ταυτόσημα.

Ο DTFT, όπως ορίζεται από τη σχέση (2.1), είναι ένα άθροισμα άπειρων όρων, το οποίο πιθανόν να μην υπάρχει (να μη συγκλίνει) για κάποια σήματα. Αποδεικνύεται ότι η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη αυτού ικανοποιείται όταν η ακολουθία $x(n)$ είναι αθροίσμη κατ' απόλυτη τιμή, δηλαδή:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (2.8)$$

Πριν προχωρήσουμε στις ιδιότητες του DTFT, ας δούμε ορισμένα παραδείγματα υπολογισμού του.

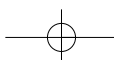
Παράδειγμα 2.1

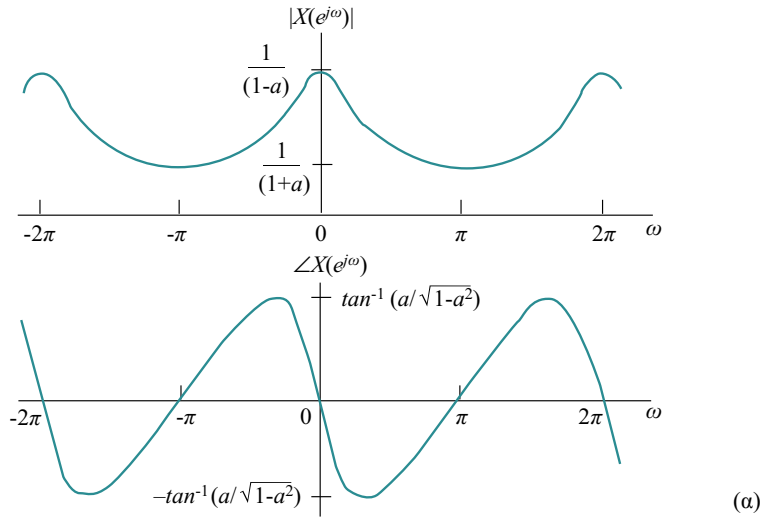
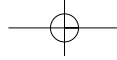
Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $x(n) = a^n u(n)$, όπου $|a| < 1$.

Λύση:

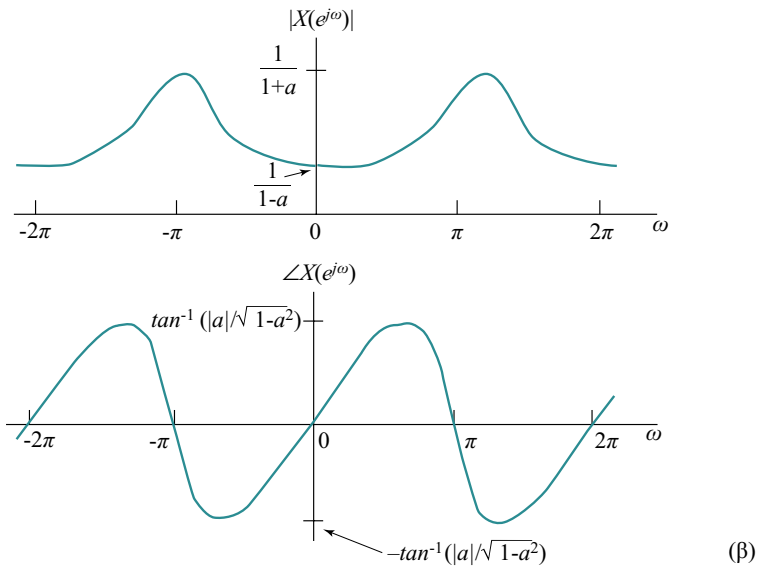
Από τον ορισμό (2.1) έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$





(α)



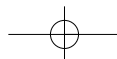
(β)

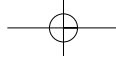
Σχήμα 2.1

Μέτρο και φάση του DTFT της ακολουθίας $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$ για (α) $a > 0$ και (β) $a < 0$.

Το μέτρο και η φάση της $X(e^{j\omega})$ φαίνονται στο Σχήμα 2.1. Παρατηρούμε, ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς και περιοδικές ως προς ω με περίοδο 2π . Επίσης, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο DTFT της $x(n)$ υπάρχει,

$$\text{αφού } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n| u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \frac{1}{1-|a|} < \infty \text{ (για } |a| < 1).$$





Παράδειγμα 2.2

Να υπολογιστεί ο DTFT της μοναδιαίας κρουστικής ακολουθίας $x(n) = \delta(n)$.

Λύση:

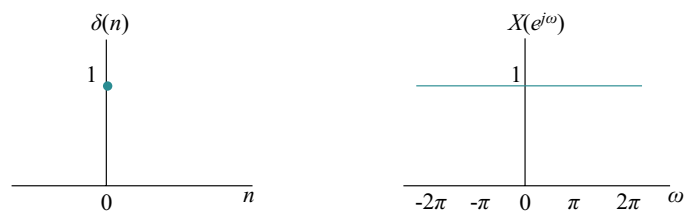
Από τον ορισμό (2.1) έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)e^{-j\omega n} = 1 \cdot e^{-j\omega 0} = 1$$

Οι γραφικές παραστάσεις της $\delta(n)$ και του μετασχηματισμού Fourier αυτής φαίνονται στο Σχήμα 2.2. Παρατηρούμε, ότι η μοναδιαία κρουστική έχει μετασχηματισμό Fourier ο οποίος συνίσταται στην ισόποση συνεισφορά όλων των συχνοτήτων.

Σχήμα 2.2

(α) Η μοναδιαία κρουστική ακολουθία και
(β) ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου αυτής.



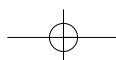
Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.1

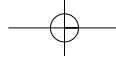
Υπολογίστε τον DTFT της μετατοπισμένης μοναδιαίας κρουστικής ακολουθίας $x(n) = \delta(n-M)$ και σχεδιάστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.2

Υπολογίστε τον DTFT του τετραγωνικού παλμού $x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$, και σχεδιάστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Ο μετασχηματισμός Fourier (DTFT) των πιο γνωστών σημάτων διακριτού χρόνου δίνεται από τον Πίνακα 2.1.



**Πίνακας 2.1**

Μετασχηματισμός Fourier γνωστών ακολουθιών

Σήμα	Μετασχηματισμός
$\delta(n)$	$1, -\infty < \omega < \infty$
$\delta(n - M)$	$e^{-j\omega M}$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
$\alpha^n u(n), \alpha < 1$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$u(n) - u(n - M)$	$\frac{\sin(\omega M / 2)}{\sin(\omega / 2)} e^{-j(M-1)\omega/2}$

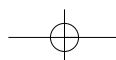
2.1.2 Θεωρήματα και ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

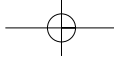
Ο DTFT παρουσιάζει ορισμένες πολύ σημαντικές ιδιότητες, οι οποίες είναι χρήσιμες για την ανάλυση σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Η απόδειξή τους, στην πλειονότητα των περιπτώσεων, γίνεται εύκολα, όταν πάρουμε ως αφετηρία τους ορισμούς (2.1) και (2.2). Θα αναφέρουμε στη συνέχεια τις πιο γνωστές από αυτές. Με $x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ θα συμβολίζουμε το ζεύγος των μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου, όπως αυτό δίνεται από τις σχέσεις (2.1) και (2.2).

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Εάν $x_1(n) \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$ και $x_2(n) \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$

$$\text{τότε } a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xrightarrow{F} a_1 X_1(e^{j\omega}) + a_2 X_2(e^{j\omega}) \quad (2.9)$$





Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, κατάλληλος για τη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Έτσι, ο DTFT του γραμμικού συνδυασμού δύο ή περισσότερων σημάτων ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των DTFT του κάθε σήματος.

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

Εάν $x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

τότε $x(n-n_0) \xrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$ (2.10)

Απόδειξη

Έστω $g(n) = x(n-n_0)$. Από τον ορισμό (2.1) του DTFT έχουμε:

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-j\omega n}$$

Θέτοντας $q = n-n_0$, οπότε $n = q + n_0$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q)e^{-j\omega(q+n_0)} = e^{-j\omega n_0} \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(q)e^{-j\omega q} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

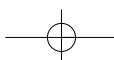
Η ιδιότητα αυτή σημαίνει ότι, εάν ένα σήμα μετατοπιστεί στο πεδίο του χρόνου κατά n_0 δείγματα, τότε το φάσμα του μέτρου του παραμένει αναλλοίωτο. Αυτό που αλλάζει κατά $-\omega n_0$ είναι το φάσμα της φάσης. Γίνεται φανερό, επομένως, ότι το περιεχόμενο των συχνοτήτων ενός σήματος εξαρτάται μόνον από τη μορφή του και όχι από τη θέση του. Από μαθηματική άποψη, αυτό εκφράζεται ως εξής: η ολίσθηση (μετατόπιση) στο πεδίο του χρόνου κατά n_0 , ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό του φάσματος επί $e^{-j\omega n_0}$ στο πεδίο της συχνότητας.

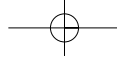
Παράδειγμα 2.3

Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $g(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

Λύση:

Σχεδιάζοντας την ακολουθία $g(n)$, παρατηρούμε ότι αυτή έχει την ίδια μορφή με την $x(n)$ της Άσκησης Αυτοαξιολόγησης 2.2, μόνο που είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά δύο δείγματα, δηλαδή $g(n) = x(n-2)$. Έτσι, μπορούμε να αποφύγουμε τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier $G(e^{j\omega})$ με βάση τον ορισμό (2.1), χρησι-





μποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο κατά $n_0 = 2$. Άρα,

$$G(e^{j\omega}) = F\{g(n)\} = F\{x(n-2)\} = e^{-j\omega 2} X(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(\frac{5\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με την τελευταία σχέση του Πίνακα 2.1 για $M=5$, αφού πράγματι η ακολουθία $g(n)$ γράφεται και ως $g(n) = u(n) - u(n-5)$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.3

Υπολογίστε τον DTFT της $x(n) - x(n-1)$, αν γνωρίζετε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $x(n)$ είναι $X(e^{j\omega})$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.4

Υπολογίστε τον DTFT της αιτιατής ακολουθίας $x(n) = Aa^n \cos(\omega_0 n + \varphi)u(n)$, όπου A, a, ω_0, φ πραγματικοί.

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

$$\text{Εάν } x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

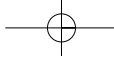
$$\text{τότε } e^{j\omega_0 n} x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (2.11)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, ο πολλαπλασιασμός μιας ακολουθίας $x(n)$ επί $e^{j\omega_0 n}$ ισοδυναμεί με την ολίσθηση (μετατόπιση) του φάσματος $X(e^{j\omega})$ κατά ω_0 . Η ιδιότητα αυτή θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στη διαδικασία της σχεδίασης ψηφιακών φίλτρων που θα γνωρίσουμε στο Κεφάλαιο 4.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

$$\text{Εάν } x_1(n) \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}) \text{ και } x_2(n) \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$\text{τότε } x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) \quad (2.12)$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) * x_2(n)]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \right] e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

< αλλάζοντας τη σειρά των αθροισμάτων και θέτοντας επιπλέον $q = n-m$ έχουμε >

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-m)e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_2(q)e^{-j\omega(q+m)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)e^{-j\omega m} \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_2(q)e^{-j\omega q} = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Το θεώρημα της συνέλιξης είναι από τα πλέον σημαντικά εργαλεία στην ανάλυση γραμμικών συστημάτων. Ουσιαστικά, μας λέει ότι η συνέλιξη δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου, ισοδυναμεί με το γινόμενο των φασμάτων τους στο πεδίο της συχνότητας. Το γεγονός αυτό είναι μεγάλης σημασίας στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων και στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ένα LTI σύστημα αποκρίνεται σε κάποια είσοδο που εφαρμόζεται σ' αυτό. Θυμηθείτε τη γραμμική συνέλιξη, όπως τη γνωρίσαμε στην ενότητα 1.4. Είδαμε ότι, αν σ' ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)$ εφαρμοστεί το σήμα $x(n)$, τότε η έξοδος του συστήματος $y(n)$ θα ισούται με τη γραμμική συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής αυτού, δηλαδή $y(n) = x(n) * h(n)$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της συνέλιξης, θα ισχύει $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, όπου $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ είναι οι μετασχηματισμοί Fourier των ακολουθιών $x(n)$, $y(n)$, $h(n)$ αντίστοιχα.

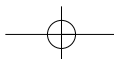
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ PARSEVAL

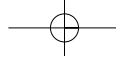
Εάν $x(n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.13)$$

Απόδειξη:

Στην προκειμένη περίπτωση μας συμφέρει να αρχίσουμε την απόδειξη από το δεύτερο μέλος της σχέσης. Έχουμε λοιπόν:





$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \right) X^*(e^{j\omega})d\omega = \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-jn\omega} d\omega &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \end{aligned}$$

Το θεώρημα του Parseval αναφέρεται στη διατήρηση της ενέργειας κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Η ποσότητα $|X(e^{j\omega})|^2$ αναφέρεται και ως *φάσμα ενεργειακής πυκνότητας* (energy–density spectrum) του σήματος $x(n)$.

Εκτός από τις ιδιότητες που αναφέραμε, υπάρχουν και πολλές άλλες τις οποίες απλώς παραθέτουμε στον Πίνακα 2.2.

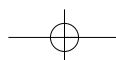
Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.5

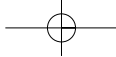
Να αποδειχτεί η ιδιότητα του πολλαπλασιασμού δύο σημάτων διακριτού χρόνου.

Πίνακας 2.2

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT)

Ιδιότητα	Μη Περιοδικό Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$\left. \begin{matrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} X_1(e^{j\omega}) \\ X_2(e^{j\omega}) \end{matrix} \right\}$ περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π
Γραμμικότητα	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(e^{j\omega}) + a_2X_2(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(n - n_0)$	$e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{jn_0n}x(n)$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Συζυγής ακολουθία	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Επέκταση χρόνου	$x(n/k)$ για n πολλαπλάσιο του k	$X(e^{jk\omega})$
Συνέλιξη	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$



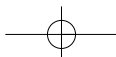


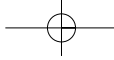
Πολλαπλασιασμός	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Διαφόριση στη συχνότητα	$nx(n)$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Συζυγής συμμετρία για πραγματικά σήματα	$x(n)$ πραγματική	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \operatorname{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\operatorname{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Συμμετρία για πραγματικά και άρτια σήματα	$x(n)$ πραγματική και άρτια	$X(e^{j\omega})$ πραγματική και άρτια
Συμμετρία για πραγματικά και περιττά σήματα	$x(n)$ πραγματική και περιττή	$X(e^{j\omega})$ φανταστική και περιττή
Θεώρημα του Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	

2.1.3 Δειγματοληψία: μια ακόμη ματιά

Γνωρίσαμε τη δειγματοληψία στην ενότητα 1.2 του Κεφαλαίου 1 και είδαμε ότι αυτή έχει να κάνει με τη μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Θα ασχοληθούμε και πάλι με τη δειγματοληψία, προσεγγίζοντας, όμως τη φορά αυτή, το όλο θέμα από μία διαφορετική οπτική γωνία. Γνωρίζοντας, πλέον, το μετασχηματισμό Fourier και το πεδίο της συχνότητας, θα εξετάσουμε τα σήματα από το πεδίο της συχνότητας και θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την επίδραση που έχει η δειγματοληψία σ' αυτά. Ο στόχος μας θα είναι και πάλι ο ίδιος, δηλαδή ο προσδιορισμός της κατάλληλης περιόδου δειγματοληψίας T , έτσι ώστε, να μη χάνεται πληροφορία, και να είμαστε πάντοτε σε θέση να ανακατασκευάσουμε το αρχικό αναλογικό σήμα από τα δείγματά του.

Έστω λοιπόν, ότι το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ τροφοδοτείται στην είσοδο ενός ιδανικού δειγματολήπτη. Η έξοδος αυτού θα είναι η ακολουθία $x(n)$, τα στοιχεία της οποίας αντιστοιχούν στις μετρήσεις του πλάτους της $x_a(t)$ ανά χρονικά διαστήματα T δευτερολέπτων





$$x(n) = x_a(nT) \quad (2.14)$$

Η παράμετρος T αποτελεί την *περίοδο δειγματοληψίας* και το αντίστροφο αυτής τη *συχνότητα ή το ρυθμό δειγματοληψίας* ($F_s = 1/T$), δηλαδή, το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνονται στη μονάδα του χρόνου.

Για να είμαστε σε θέση να ανακατασκευάσουμε το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ από την ακολουθία $x(n)$ θα πρέπει τα φασματικά χαρακτηριστικά του αναλογικού σήματος να διατηρούνται μετά τη δειγματοληψία. Έστω $X_a(j\Omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x_a(t)$ και $X(e^{j\omega})$ ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x(n)$. Αποδεικνύεται ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j \frac{\omega - 2\pi k}{T}) \quad (2.15)$$

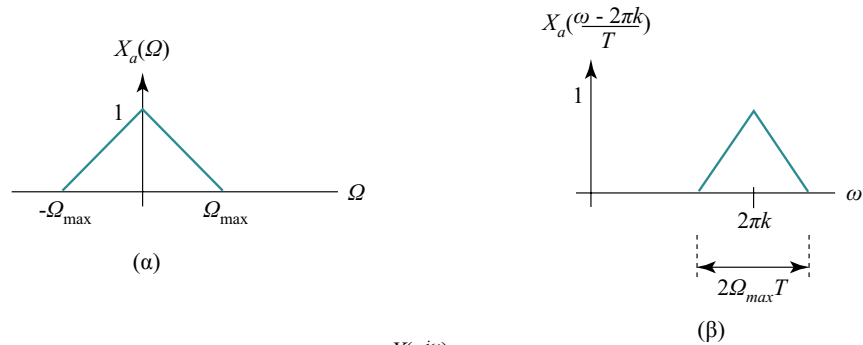
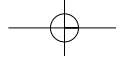
Η σχέση αυτή δηλώνει ότι το φάσμα του σήματος που προέκυψε από τη δειγματοληψία, αποτελείται από περιοδικές επαναλήψεις του φάσματος του αναλογικού σήματος. Γραφικά αυτό παριστάνεται στο Σχήμα 2.3. Στο Σχήμα 2.3α φαίνεται το φάσμα του αναλογικού σήματος $x_a(t)$. Η ακριβής μορφή του (τριγωνική στην προκειμένη περίπτωση) δεν έχει σημασία. Αυτό που έχει σημασία, είναι το ότι πρόκειται για σήμα περιορισμένου εύρους (band-limited), δηλαδή, όλες οι συχνότητες κυμαίνονται μεταξύ $-\Omega_{\max}$ και Ω_{\max} ($-\Omega_{\max} \leq \Omega \leq \Omega_{\max}$). Στο Σχήμα 2.3β φαίνεται ένας από τους όρους της εξίσωσης (2.15), ενώ στο Σχήμα 2.3γ δίνονται όλοι οι όροι της εξίσωσης αυτής, δηλαδή το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος. Για να είμαστε σε θέση να ανακατασκευάσουμε το αρχικό σήμα από τα δείγματά του, θα πρέπει να φροντίσουμε ώστε αυτές οι *περιοδικές επαναλήψεις να μην καλύπουν η μία την άλλη*. Θα πρέπει δηλαδή να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\Omega_{\max} T \leq \pi \quad (2.16)$$

Επειδή $\Omega_{\max} = 2\pi F_{\max}$, η συνθήκη αυτή γράφεται ως

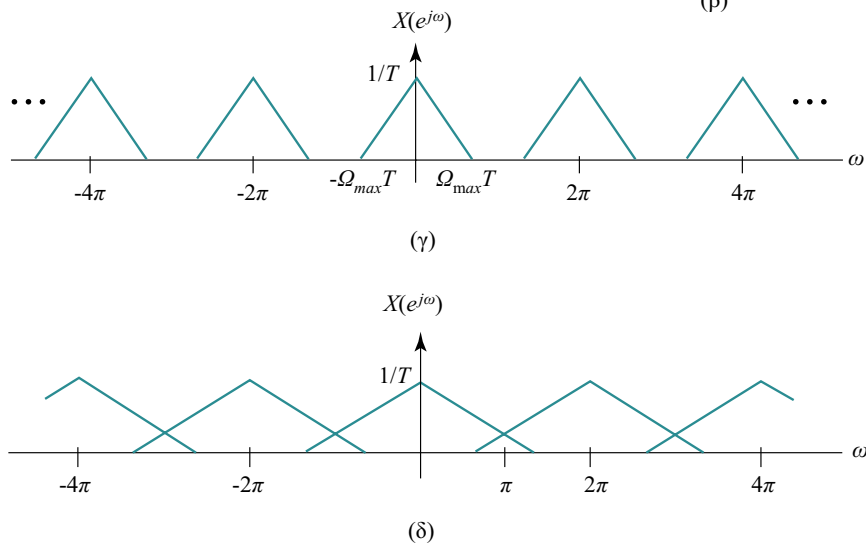
$$F_s \geq 2F_{\max} \quad (2.17)$$

που είναι το γνωστό μας θεώρημα δειγματοληψίας. Στην περίπτωση που η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3δ, τότε λέμε ότι έχουμε το φαινόμενο της *φασματικής επικάλυψης* (spectral overlap) ή της *χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας* (aliasing / undersampling). Σε μια τέτοια περίπτωση η μορφή του φάσματος του αρχικού σήματος δε διατηρείται στο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος, με συνέπεια να μην είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος.

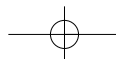


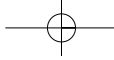
Σχήμα 2.3

Η δειγματοληψία από το πεδίο της συχνότητας: (α) φάσμα αναλογικού σήματος, (β) ένας από τους όρους του φάσματος του δειγματοληπτημένου σήματος, (γ) φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος για $F_s > 2F_{max}$, και (δ) φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος για $F_s < 2F_{max}$



Θεωρήσαμε στα προηγούμενα ότι το αναλογικό σήμα είναι περιορισμένου εύρους συχνοτήτων, όπως άλλωστε παριστάνεται στο Σχήμα 2.3α. Στην πράξη αυτό δε συμβαίνει πάντοτε. Επιπλέον, ας μην ξεχνάμε, ότι ο θόρυβος που παρεισδύει σε κάθε σύστημα εκτείνεται συνήθως σε όλο το εύρος των συχνοτήτων. Έτσι, για να διασφαλίσουμε το γεγονός ότι το σήμα εισόδου είναι περιορισμένου εύρους, τοποθετούμε πάντοτε ένα αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο (analog lowpass filter) πριν από το σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων, για να αποκόπτει τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από $F_s/2$. Ένα παρόμοιο αναλογικό φίλτρο τοποθετείται και στην έξοδο του ψηφιακού συστήματος για τη σωστή ανακατασκευή του σήματος εξόδου, δηλαδή για την επιλογή μόνο του βασικού φασματικού περιεχομένου μεταξύ $-F_s/2$ και $F_s/2$. Έτσι, ένα πλήρες σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων είναι όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 2.4.





Σχήμα 2.4

Διάγραμμα βαθμίδων ενός συστήματος ψηφιακής επεξεργασίας αναλογικών σημάτων

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή ασχοληθήκαμε με το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT). Είδαμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός εφαρμόζεται γενικά σε μη περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου άπειρου μήκους. Ο DTFT τέτοιων σημάτων είναι συνεχής και περιοδικός. Η γνώση του μετασχηματισμού Fourier μας βοήθησε να προσεγγίσουμε και πάλι το θέμα της δειγματοληψίας, αλλά από το πεδίο της συχνότητας τη φορά αυτή, αποφαινίζοντας το φαινόμενο της φασματικής επικάλυψης, το οποίο παρουσιάζεται όταν ο ρυθμός λήψης δειγμάτων είναι χαμηλότερος του απαιτούμενου.

2.2 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

2.2.1 Ορισμοί

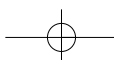
Είδαμε στην ενότητα 2.1 ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$ είναι η συνεχής συνάρτηση $X(e^{j\omega})$. Η συνάρτηση αυτή δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί με τη χρήση ενός ψηφιακού επεξεργαστή σήματος, ο οποίος είναι συνήθως ένας γενικού σκοπού υπολογιστής ή ένα ειδικά σχεδιασμένο ψηφιακό κύκλωμα. Εκείνο που είναι εύκολο να υπολογιστεί, είναι δείγματα του φάσματος $X(e^{j\omega})$. Αυτό είναι το αντικείμενο με το οποίο ασχολούμαστε στην παρούσα ενότητα, δηλαδή ο υπολογισμός του φάσματος σε διακριτές συχνότητες (διακριτός μετασχηματισμός Fourier), καθώς και οι ιδιότητες που ισχύουν σ' αυτή την περίπτωση.

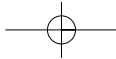
ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (DFT)

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της πεπερασμένου μήκους N ακολουθίας $x(n)$, δηλαδή $x(n) = 0$ για $n < 0$ και $n \geq N$, ισούται με

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (2.18)$$

όπου τα όρια του αθροίσματος αντικατοπτρίζουν το γεγονός ότι $x(n) = 0$ εκτός του





διαστήματος $0 \leq n \leq N-1$. Εάν λάβουμε δείγματα της συνεχούς συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ σε ισαπέχοντα διαστήματα στη συχνότητα $\omega_k = k\Delta\omega = k(2\pi/N)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, (Βλ. Σχήμα 2.5), τότε θα πάρουμε τα δείγματα

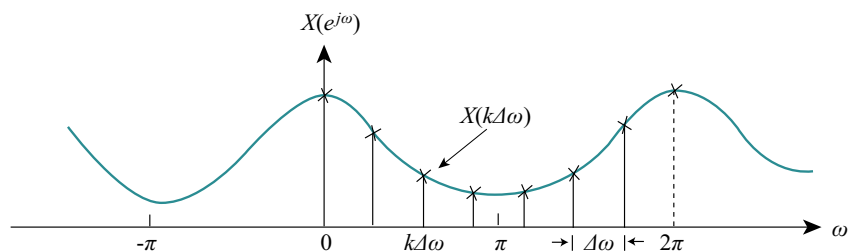
$$X(k) \equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.19)$$

Ας σημειωθεί ότι, αφού η $X(e^{j\omega})$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , μόνο τα δείγματα της βασικής περιοχής συχνοτήτων είναι απαραίτητα. Επειδή τα δείγματα αυτά προκύπτουν από τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier $X(e^{j\omega})$ σε N ισαπέχουσες διακριτές συχνότητες, η σχέση (2.19) ονομάζεται *διακριτός μετασχηματισμός Fourier* (Discrete Fourier Transform, DFT) της $x(n)$. Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την ακολουθία $x(n)$ από τα δείγματα $X(k)$ στη συχνότητα, με βάση τη σχέση

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.20)$$

η οποία αποτελεί τον *αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier* (inverse DFT, IDFT).

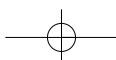
Σχήμα 2.5
Δειγματοληψία στη συχνότητα του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (DTFT).

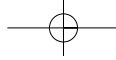


Οι σχέσεις (2.19) και (2.20) αποτελούν το λεγόμενο «ζεύγος του DFT». Παρατηρήστε ότι, τόσο η ακολουθία $x(n)$, όσο και η ακολουθία $X(k)$ είναι του ίδιου μήκους N . Θα συμβολίζουμε το ζεύγος του DFT N -σημείων ως $x(n) \xrightarrow{DFT_N} X(k)$. Οι σχέσεις αυτές μπορούν να εκφραστούν και ως

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.21)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.22)$$



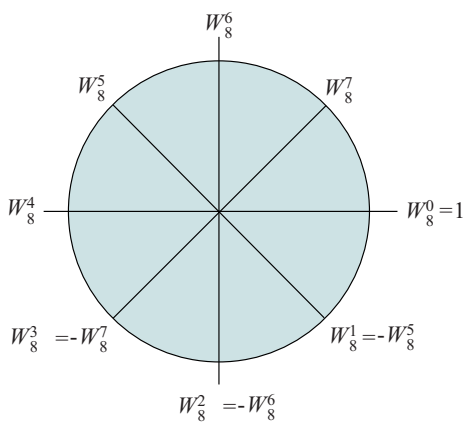


όπου εξ ορισμού

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \tag{2.23}$$

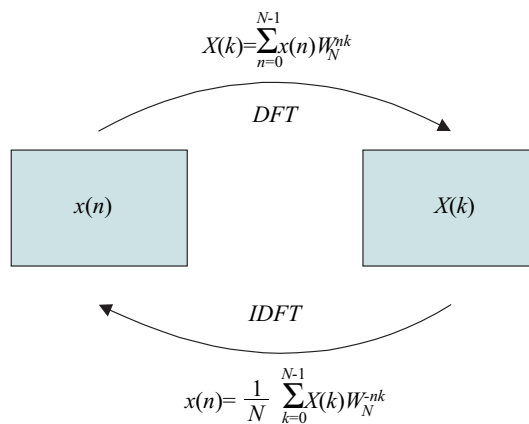
είναι η $N_{\text{στή}}$ ρίζα της μονάδας. Οι παράγοντες W_N^{nk} αποτελούν τις μιγαδικές ακολουθίες βάσης στις οποίες στηρίζεται ο DFT και ονομάζονται *παράγοντες στροφής* (twiddle factors). Στο Σχήμα 2.6 φαίνεται η μιγαδική αναπαράσταση των W_N και αναδεικνύεται η κυκλική ιδιότητα των παραγόντων στροφής για ένα DFT 8-σημείων ($N = 8$).

Η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντιστρόφως, με τη βοήθεια του ζεύγους των μετασχηματισμών Fourier (εξισώσεις 2.21 και 2.22), απεικονίζεται στο Σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.6

Παράγοντες στροφής για ένα DFT 8-σημείων ($N = 8$).



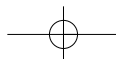
Σχήμα 2.7

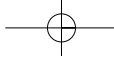
Σχηματική αναπαράσταση της μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντιστρόφως με χρήση του ζεύγους DFT.

Αποδεικνύεται πολύ εύκολα από τους ορισμούς του ζεύγους DFT, ότι οι ακολουθίες $x(n)$ και $X(k)$ είναι περιοδικές με περίοδο N , δηλαδή

$$x(n + N) = x(n) \quad \text{για όλα τα } n \tag{2.24}$$

$$X(k + N) = X(k) \quad \text{για όλα τα } k \tag{2.25}$$





Παράδειγμα 2.4

Να υπολογισθεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $\{1, 1, 0, 0\}$.

Λύση:

Η ακολουθία $x(n)$ αποτελείται από τέσσερα δείγματα ($N=4$), τα εξής: $x(0) = 1$, $x(1) = 1$, $x(2) = 0$, $x(3) = 0$. Με βάση τη σχέση (2.21) υπολογίζουμε τις τέσσερις συνιστώσες της συχνότητας:

$$\begin{aligned} X(0) &= \sum_{n=0}^3 x(n)W_4^{n0} = x(0)W_4^{00} + x(1)W_4^{10} + x(2)W_4^{20} + x(3)W_4^{30} = \\ &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 1 + 1 + 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(1) &= \sum_{n=0}^3 x(n)W_4^{n1} = x(0)W_4^{01} + x(1)W_4^{11} + x(2)W_4^{21} + x(3)W_4^{31} = \\ &= x(0) + x(1) \cdot (-j) + x(2) \cdot (-1) + x(3) \cdot j = 1 + 1 \cdot (-j) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot j = 1 - j \end{aligned}$$

$$\text{όπου } W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} = 0 - j = -j$$

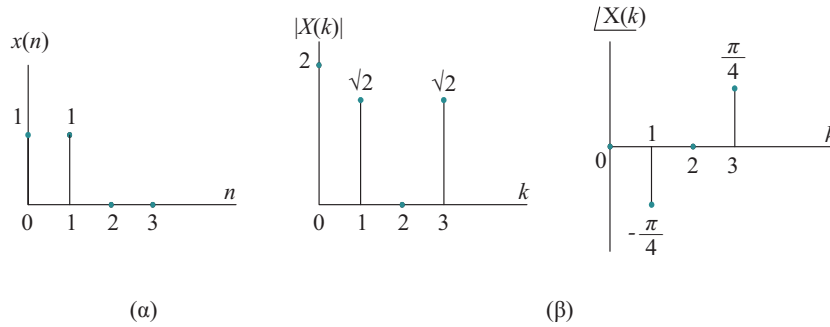
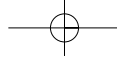
$$W_4^2 = e^{-j\frac{2\pi \cdot 2}{4}} = e^{-j\pi} = \cos \pi - j \sin \pi = -1$$

$$W_4^3 = e^{-j\frac{2\pi \cdot 3}{4}} = e^{-j\frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} - j \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - j(-1) = j$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $X(2) = 0$ και $X(3) = 1 + j$. Παρατηρήστε ότι η συνιστώσα μηδενικής συχνότητας $X(0)$ ισούται πάντοτε με το άθροισμα όλων των στοιχείων της ακολουθίας $x(n)$. Άρα ο DFT της ακολουθίας $\{1, 1, 0, 0\}$ ισούται με τη μιγαδική ακολουθία $\{2, 1-j, 0, 1+j\}$. Για να είναι πιο κατανοητή η αναπαράσταση του αποτελέσματος, συνηθίζεται να εκφράζουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με το μέτρο και τη φάση τους. Έτσι, ο DFT που μόλις υπολογίσαμε, εκφράζεται ως

$$\left\{ 2, \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, 0, \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \right\}.$$

Οι γραφικές παραστάσεις της ακολουθίας $x(n)$ και του αντίστοιχου DFT $X(k)$, φαίνονται στο Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8
 (α) Η ακολουθία $x(n)$ και
 (β) το μέτρο και η φάση του DFT αυτής.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.6

Να υπολογιστεί ο DFT της μοναδιαίας κρουστικής.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.7

Να υπολογιστεί ο DFT της σταθερής ακολουθίας $x(n) = \begin{cases} A, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

ΚΥΚΛΙΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Η περιοδική επέκταση της πεπερασμένου μήκους ακολουθίας $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, ανά N δείγματα, οδηγεί στην περιοδική ακολουθία

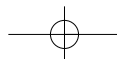
$$x_p(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n - qN) \tag{2.26}$$

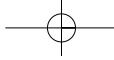
με βασική περίοδο N , όπως φαίνεται στα Σχήματα 2.9α,β για $N = 6$. Η ολίσθηση (μετατόπιση) της περιοδικής ακολουθίας $x_p(n)$ κατά n_0 δείγματα προς τα δεξιά, θα μας δώσει μία άλλη περιοδική ακολουθία

$$x'_p(n) = x_p(n - n_0) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n - n_0 - qN) \tag{2.27}$$

Η πεπερασμένου μήκους ακολουθία

$$x'(n) = \begin{cases} x'_p(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2.28}$$





συνδέεται με την αρχική ακολουθία $x(n)$ μέσω της *κυκλικής ολίσθησης*. Στο Σχήμα 2.9γ φαίνεται η ακολουθία $x'_p(n) = x_p(n-n_0)$ για $n_0 = 2$ και στο Σχήμα 2.9δ η πεπερασμένου μήκους ακολουθία $x'(n)$ ($N = 6$).

Γενικά, η κυκλική ολίσθηση μιας ακολουθίας μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των υπολοίπων (modulo) ως

$$x'(n) = x(\langle n - n_0 \rangle_N) \quad (2.29)$$

όπου ο συμβολισμός $\langle m \rangle_N$ διαβάζεται ως m modulo N και σημαίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του m δια του N . Για $n_0 > 0$ (κυκλική ολίσθηση προς τα δεξιά), η σχέση αυτή σημαίνει ότι

$$\langle n - n_0 \rangle_N = \begin{cases} x(n - n_0 + N) & \text{για } n = 0, 1, \dots, n_0 - 1 \\ x(n - n_0) & \text{για } n = n_0, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Η κυκλική ολίσθηση κατά n_0 , όπου $n_0 > N$, ισοδυναμεί με την κυκλική ολίσθηση κατά $\langle n_0 \rangle_N$. Για το παράδειγμα της ακολουθίας $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του Σχήματος 2.9, η κυκλική ολίσθηση κατά δύο θα μας δώσει την ακολουθία $x'(n) = x(\langle n - 2 \rangle_6) = \{5, 6, 1, 2, 3, 4\}$. Ο υπολογισμός της κυκλικά ολισθημένης ακολουθίας $x'(n)$ σύμφωνα με τον ορισμό (2.30) έχει ως εξής:

$$x'(0) = x(\langle 0 - 2 \rangle_6) = x(0 - 2 + 6) = x(4) = 5$$

$$x'(1) = x(\langle 1 - 2 \rangle_6) = x(1 - 2 + 6) = x(5) = 6$$

$$x'(2) = x(\langle 2 - 2 \rangle_6) = x(0) = 1$$

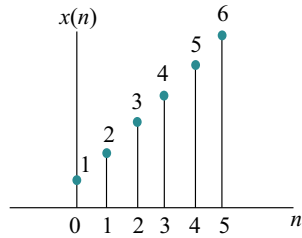
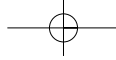
$$x'(3) = x(\langle 3 - 2 \rangle_6) = x(1) = 2$$

$$x'(4) = x(\langle 4 - 2 \rangle_6) = x(2) = 3$$

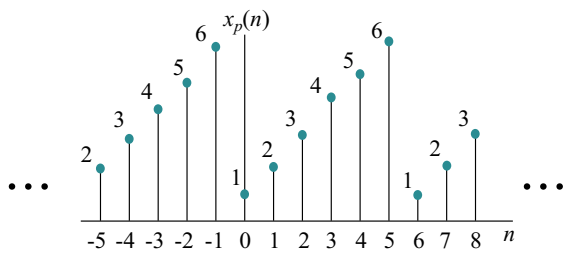
$$x'(5) = x(\langle 5 - 2 \rangle_6) = x(3) = 4$$

Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι η *κυκλική ολίσθηση μιας ακολουθίας N -σημείων ισοδυναμεί με τη γραμμική ολίσθηση της περιοδικής της επέκτασης*.

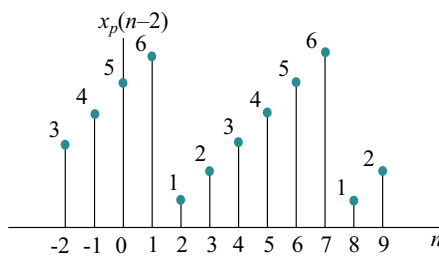
Ένας παραστατικός τρόπος, για την κατανόηση της κυκλικής ολίσθησης μιας πεπερασμένου μήκους ακολουθίας, είναι αυτός της τοποθέτησης των στοιχείων της στην περιφέρεια ενός κύκλου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9ε για την ακολουθία $x(n)$ έξι στοιχείων. Τα στοιχεία τοποθετούνται σε ισαπέχοντα σημεία στην περιφέρεια ενός κύκλου και με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ωρολογίου (αριστερόστροφα). Κυκλική ολίσθηση κατά n_0 σημαίνει την ολίσθηση όλων των στοιχείων κατά n_0 θέσεις αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα, ανάλογα με το αν n_0 είναι θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα. Στο Σχήμα 2.9στ φαίνεται η $x(\langle n - 2 \rangle_6)$, η οποία προέκυψε από την $x(n)$ του Σχήματος 2.9ε με κυκλική ολίσθηση αριστερόστροφα κατά $n_0 = 2$.



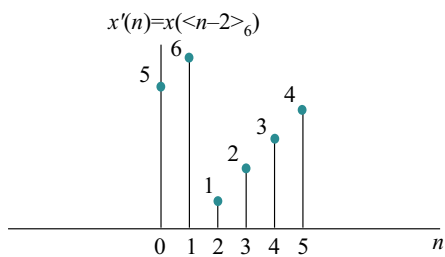
(α)



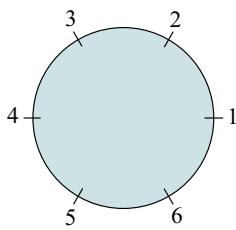
(β)



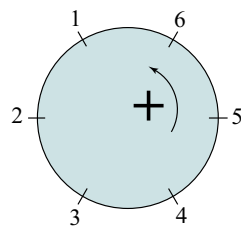
(γ)



(δ)



(ε)

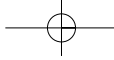


(στ)

Σχήμα 2.9

Κυκλική ολίσθηση ακολουθίας:

- (α) αρχική ακολουθία,
- (β) περιοδική επέκταση της αρχικής,
- (γ) γραμμική ολίσθηση της περιοδικής ακολουθίας,
- (δ) κυκλικά ολισθημένη ακολουθία κατά δύο,
- (ε) η αρχική ακολουθία σε κύκλο, (στ) κυκλική ολίσθηση κατά δύο αριστερόστροφα.



ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $x_1(n)$ και $x_2(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, ορίζεται ως

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(\langle n-m \rangle_N), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.31)$$

Παρατηρήστε ότι πρόκειται για μία νέα ακολουθία επίσης μήκους N , όσο δηλαδή και το μήκος καθεμιάς από τις αρχικές ακολουθίες, και όχι μήκους $2N-1$, όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση της γραμμικής συνέλιξης αυτών. Τα βήματα για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης είναι ίδια με τα τέσσερα βήματα που γνωρίσαμε κατά τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης (βλ. ενότητα 1.4): *αντιστροφή χρόνου* (κατοπτρισμός) της μιας ακολουθίας, *ολίσθηση* της κατοπτρικής ακολουθίας, *πολλαπλασιασμός* των δύο ακολουθιών σημείο προς σημείο και *άθροιση* των γινομένων. Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο αυτών τύπων συνέλιξης, είναι ότι κατά την κυκλική συνέλιξη ο κατοπτρισμός και η ολίσθηση γίνονται με κυκλικό τρόπο, υπολογίζοντας τους δείκτες της μιας ακολουθίας με βάση την πράξη του υπολοίπου (modulo N). Στη περίπτωση της γραμμικής συνέλιξης, δεν υπάρχει η πράξη του υπολοίπου.

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας ισχύει και για την περίπτωση της κυκλικής συνέλιξης, δηλαδή

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = x_2(n) \otimes x_1(n) \quad (2.32)$$

Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε από τις δύο ακολουθίες υποστεί κατοπτρισμό και ολίσθηση, το αποτέλεσμα της κυκλικής συνέλιξης δεν αλλάζει.

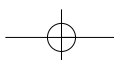
Ας δούμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα υπολογισμού της κυκλικής συνέλιξης δύο ακολουθιών.

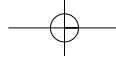
Παράδειγμα 2.5

Να υπολογισθεί η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $x_1(n) = \{1, 2, 3\}$, $x_2(n) = \{4, 5, 6\}$.

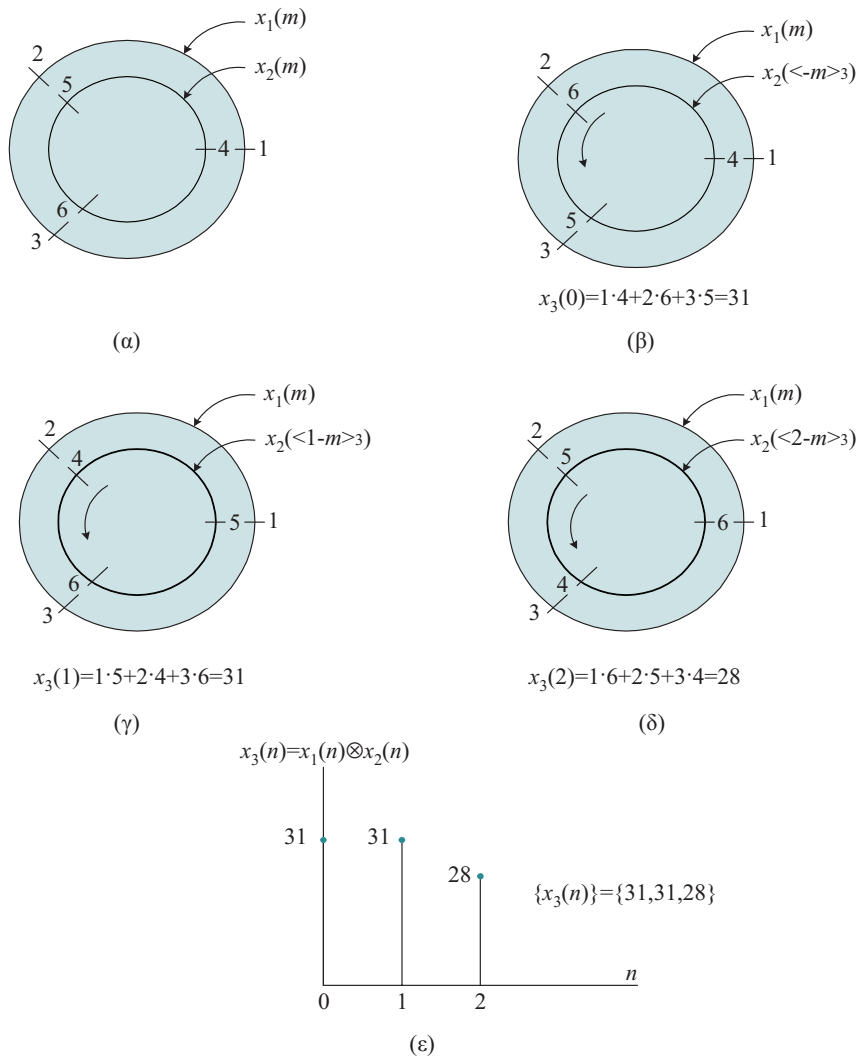
Λύση:

Ο υπολογισμός της κυκλικής συνέλιξης $x_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ με βάση τη σχέση (2.31), μας υπαγορεύει την κυκλική ολίσθηση της κατοπτρικής της ακολουθίας $x_2(m)$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με την τοποθέτηση των ακολουθιών πάνω στις περιφέρειες δύο ομόκεντρων κύκλων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10. Αρχικά οι δύο ακολουθίες τοποθετούνται πάνω στις περιφέρειες αριστερόστροφα (Σχήμα 2.10α). Στη συνέχεια, βρίσκουμε την κατοπτρική της ακολουθίας $x_2(m)$, τοποθετώντας αυτή δεξιόστροφα, όπως φαίνεται στον εσωτερικό κύκλο του Σχήματος 2.10β. Ο εξωτερικός κύκλος παραμένει σταθερός, ενώ ο εσωτερικός περιστρέφεται κάθε φορά αριστερόστροφα κατά $2\pi/3$ ή κατά





$2\pi/N$ γενικά. Με κάθε περιστροφή κατά $2\pi/3$, υπολογίζουμε τα αθροίσματα των γινομένων σύμφωνα με τη σχέση (2.31). Το αποτέλεσμα της κυκλικής συνέλιξης φαίνεται στο Σχήμα 2.10ε.

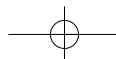


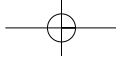
Σχήμα 2.10

Κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $\{1, 2, 3\}$ και $\{4, 5, 6\}$

2.2.2 Ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Ο DFT παρουσιάζει ορισμένες σημαντικές ιδιότητες τις οποίες μπορούμε να αξιοποιήσουμε στις διάφορες εφαρμογές μας. Μερικές από τις ιδιότητες του DFT είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες του DTFT. Άλλες είναι διαφορετικές, γεγονός που οφείλεται στο πεπερασμένο μήκος των ακολουθιών και του DFT αυτών.





ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Εάν $x_1(n) \xrightarrow{DFT_N} X_1(k)$ και $x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} X_2(k)$

$$\text{τότε } a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k) \quad (2.33)$$

όπου a_1, a_2 πραγματικές ή μιγαδικές σταθερές. Η ιδιότητα της γραμμικότητας αποδεικνύεται πολύ εύκολα από τον ορισμό του DFT (σχέση 2.21).

ΚΥΚΛΙΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

Εάν $x(n) \xrightarrow{DFT_N} X(k)$

$$\text{τότε } x(\langle n - n_0 \rangle_N) \xrightarrow{DFT_N} W_N^{kn_0} X(k) \quad (2.34)$$

Η σχέση αυτή μας δείχνει ότι ο DFT της κυκλικά ολισθημένης ακολουθίας έχει το ίδιο μέτρο με την αρχική, αλλά διαφορετική φάση.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.8

Να υπολογισθεί ο DFT των ακολουθιών $x_1(n) = \{1, 0, 0, 1\}$ και $x_2(n) = \{0, 0, 1, 1\}$.

ΚΥΚΛΙΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Εάν $x(n) \xrightarrow{DFT_N} X(k)$

$$\text{τότε } W_N^{-k_0 n} x(n) \xrightarrow{DFT_N} X(\langle k - k_0 \rangle_N) \quad (2.35)$$

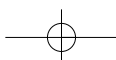
Με άλλα λόγια, ο πολλαπλασιασμός της ακολουθίας $x(n)$ με την εκθετική ακολουθία $e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$, ισοδυναμεί με την κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα, κατά k_0 μονάδες, του DFT αυτής.

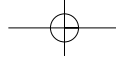
ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Εάν $x_1(n) \xrightarrow{DFT_N} X_1(k)$ και $x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} X_2(k)$

$$\text{τότε } x_1(n) \otimes x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} X_1(k) \cdot X_2(k) \quad (2.36)$$

Η κυκλική συνέλιξη δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου, ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων DFT αυτών.





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.9

Να επαληθευτεί η ιδιότητα της κυκλικής συνέλιξης για την περίπτωση των ακολουθιών του Παραδείγματος 2.5.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΥΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Εάν $x_1(n) \xrightarrow{DFT_N} X_1(k)$ και $x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} X_2(k)$

$$\text{τότε } x_1(n) \cdot x_2(n) \xrightarrow{DFT_N} \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k) \quad (2.37)$$

Πρόκειται ουσιαστικά για τη διττή έκφραση της προηγούμενης ιδιότητας, και επαληθεύεται έτσι το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί στην κυκλική συνέλιξη των DFT αυτών.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ PARSEVAL

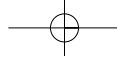
Εάν $x(n) \xrightarrow{DFT_N} X(k)$

$$\text{τότε } \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (2.38)$$

Το θεώρημα του Parseval εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Με άλλα λόγια, το άθροισμα των τετραγώνων των τιμών των δειγμάτων ισούται με τη μέση τιμή των τετραγώνων των φασματικών γραμμών. Η αναπαράσταση των $|X(k)|^2$ ονομάζεται *φάσμα ισχύος* της $x(n)$. Παρατηρούμε ότι το φάσμα ισχύος εξαρτάται μόνο από το μέτρο του φάσματος και όχι από τη φάση του.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.10

Να επαληθευτεί το θεώρημα του Parseval για το σήμα $x(n) = \{1, 2, 3\}$.



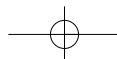
Ο πλήρης κατάλογος των ιδιοτήτων του DFT παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.3.

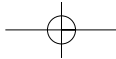
Πίνακας 2.3

Ιδιότητες του DFT

Ιδιότητα	Ακολουθία μήκους N	DFT N σημείων
	$x_1(n)$	$X_1(k)$
	$x_2(n)$	$X_2(k)$
Γραμμικότητα	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Κυκλική μετατόπιση στο χρόνο	$x(\langle n - n_0 \rangle_N)$	$W^{kn_0} X(k)$
Κυκλική μετατόπιση στη συχνότητα	$W^{-k_0n} x(n)$	$X(\langle k - k_0 \rangle_N)$
Συζυγής ακολουθία	$x^*(n)$	$X^*(\langle -k \rangle_N)$
Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(\langle -n \rangle_N)$	$X^*(k)$
Κυκλική συνέλιξη	$x_1(n) \otimes x_2(n)$ ^[1]	$X_1(k)X_2(k)$
Πολλαπλασιασμός	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m)X_2(\langle k - m \rangle_N)$
Συζυγής συμμετρία για πραγματικά σήματα	$x(n)$ πραγματική	$\begin{cases} X(k) = X^*(\langle -k \rangle_N) \\ \operatorname{Re}\{X(k)\} = \operatorname{Re}\{X(\langle -k \rangle_N)\} \\ \operatorname{Im}\{X(k)\} = -\operatorname{Im}\{X(\langle -k \rangle_N)\} \\ X(k) = X(\langle -k \rangle_N) \\ \angle X(k) = -\angle X(\langle -k \rangle_N) \end{cases}$
Θεώρημα του Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$	

$$[1] x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(\langle n - m \rangle_N)$$





2.2.3 Γραμμική συνέλιξη μέσω του DFT

Είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα ότι το γινόμενο δύο DFT είναι ισοδύναμο με την κυκλική συνέλιξη των αντιστοίχων ακολουθιών στο χρόνο. Η κυκλική συνέλιξη όμως δε φαίνεται να μας είναι χρήσιμη στην πράξη, αφού για τον υπολογισμό της απόκρισης $y(n)$ ενός γραμμικού συστήματος, πρέπει να βρούμε τη γραμμική συνέλιξη της εισόδου $x(n)$ με την κρουστική απόκριση $h(n)$ αυτού, δηλαδή $y(n) = x(n)*h(n)$ (ενότητα 1.4). Μάλιστα, εάν L είναι το μήκος της ακολουθίας $x(n)$ και M το μήκος τα ακολουθίας $h(n)$, τότε το μήκος της ακολουθίας $y(n)$ θα ισούται με $L + M - 1$. Από τις ιδιότητες του DTFT (ενότητα 2.1), γνωρίζουμε ότι

$$y(n) = x(n) * h(n) \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \quad (2.39)$$

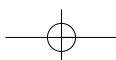
Άρα, εάν θέλουμε να ανακατασκευάσουμε την $y(n)$ από τα δείγματα του φάσματος της $Y(e^{j\omega})$ σε διακριτές συχνότητες, θα πρέπει να πάρουμε τουλάχιστο $L + M - 1$ δείγματα στη συχνότητα. Συνεπώς, απαιτείται ένας DFT μήκους $N \geq L + M - 1$, για την αναπαράσταση της ακολουθίας $y(n)$ στο πεδίο του χρόνου. Έτσι,

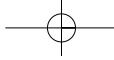
$$\text{εάν } Y(k) \equiv Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{τότε } Y(k) = X(k)H(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.40)$$

όπου $X(k)$, $H(k)$ οι DFT N -σημείων των ακολουθιών $x(n)$, $h(n)$ αντίστοιχα. Επειδή οι ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$ έχουν μήκος μικρότερο από N , προσθέτουμε στοιχεία μηδενικής τιμής σε καθεμιά από αυτές, έτσι ώστε το μήκος τους να γίνει ίσο με N (zero padding). Αυτή η αύξηση του μήκους των ακολουθιών δεν επηρεάζει τα φάσματά τους $X(e^{j\omega})$ και $Y(e^{j\omega})$, τα οποία είναι συνεχή. Απλώς, αυτό που έχουμε επιτύχει με το να πάρουμε N δείγματα στη συχνότητα, (υπολογίζοντας τους DFT μήκους N), είναι να αυξήσουμε το πλήθος των δειγμάτων, τα οποία αντιπροσωπεύουν τις ακολουθίες αυτές στο πεδίο της συχνότητας, πέρα από το ελάχιστο πλήθος (L και M αντίστοιχα).

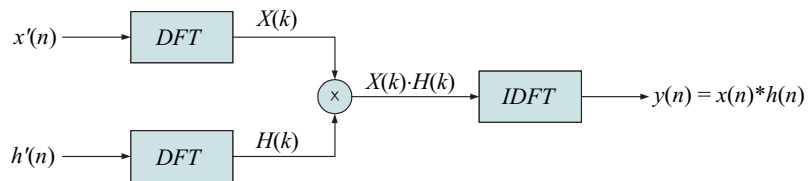
Ο N -σημείων DFT, όπου $N = L + M - 1$, της ακολουθίας εξόδου $y(n)$, είναι αρκετός για την αναπαράσταση της $y(n)$ στο πεδίο των συχνοτήτων. Κατά συνέπεια, και ο πολλαπλασιασμός των N -σημείων DFT $X(k)$ και $H(k)$, σύμφωνα με τη σχέση (2.40) και ο επακόλουθος N -σημείων IDFT του γινομένου, θα μας δώσει την ακολουθία $y(n)$ (Βλ. Σχήμα 2.11). Κατ' αναλογία, στο πεδίο του χρόνου αυτό σημαίνει πως η N -σημείων κυκλική συνέλιξη των $x'(n)$ και $h'(n)$ ισοδυναμεί με τη γραμμική συνέλιξη των $x(n)$ (μήκους L) και $h(n)$ (μήκους M). Με άλλα λόγια, αυξάνοντας το μήκος των ακολουθιών $x(n)$ και $h(n)$ σε N (προσθέτοντας στο τέλος καθεμιάς στοιχεία μηδενικής τιμής) και εκτελώντας την κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών που προκύπτουν,





παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα με εκείνο που θα παίρναμε, εάν εκτελούσαμε τη γραμμική συνέλιξη των αρχικών ακολουθιών. Επομένως, ο DFT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης, εφαρμόζοντας αυτόν στις ακολουθίες που έχουν κατάλληλα επιμηκυνθεί.

Σχήμα 2.11
Γραμμική συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας



Παράδειγμα 2.6

Χρησιμοποιήστε το ζεύγος του DFT για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = \{1, 4, 4, 1\}$ στο οποίο εφαρμόζεται είσοδος $x(n) = \{5, 4, 3, 2, 1\}$.

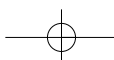
Λύση

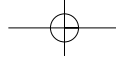
Η ακολουθία εισόδου έχει μήκος $L = 4$ και η κρουστική ακολουθία έχει μήκος $M = 5$. Η γραμμική συνέλιξη των δύο αυτών ακολουθιών θα μας δώσει την ακολουθία εξόδου $y(n)$ μήκους $N = L + M - 1 = 8$. Επομένως, το μήκος του DFT θα πρέπει να είναι (τουλάχιστον) οχτώ. Επιμηκύνουμε τις ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$, ώστε καθεμιά να αποκτήσει μήκος ίσο με οχτώ, προσθέτοντας στοιχεία μηδενικής τιμής, και στη συνέχεια υπολογίζουμε τον DFT των νέων ακολουθιών. Οι ακολουθίες που προκύπτουν είναι $x'(n) = \{5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0\}$ και $h'(n) = \{1, 4, 4, 1, 0, 0, 0, 0\}$.

Ο 8-σημείων DFT της εισόδου $x'(n)$ ισούται με $X(k) = \sum_{n=0}^7 x'(n)e^{-j2\pi kn/8}$, $k = 0, 1, \dots, 7$ και επομένως:

$$\begin{aligned} X(0) &= 15 & X(4) &= 3 \\ X(1) &= 5,41 - j7,24 & X(5) &= 2,6 + j1,24 \\ X(2) &= 3 - j2 & X(6) &= 3 + j2 \\ X(3) &= 2,6 - j1,24 & X(7) &= 5,41 + j7,24 \end{aligned}$$

Ο 8-σημείων DFT της κρουστικής $h'(n)$ ισούται με $H(k) = \sum_{n=0}^7 h'(n)e^{-j2\pi kn/8}$, $k = 0, 1, \dots, 7$ και επομένως:





$$\begin{aligned} H(0) &= 10 & H(4) &= 0 \\ H(1) &= 3,12-j7,54 & H(5) &= -1,12-j0,46 \\ H(2) &= -3-j3 & H(6) &= -3 + j3 \\ H(3) &= -1,12 + j0,46 & H(7) &= 3,12 + j7,54 \end{aligned}$$

Το γινόμενο των δύο αυτών DFT στοιχείο προς στοιχείο θα μας δώσει την $Y(k)$:

$$\begin{aligned} Y(0) &= 150 & Y(4) &= 0 \\ Y(1) &= -37,68-j63,41 & Y(5) &= -2,32-j2,59 \\ Y(2) &= -15-j3 & Y(6) &= -15 + j3 \\ Y(3) &= -2,32 + j2,59 & Y(7) &= -37,68 + j63,41 \end{aligned}$$

Η απόκριση $y(n)$ προκύπτει από τον 8-σημείων IDFT της $Y(k)$ ως

$$y(n) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 Y(k) e^{j2\pi kn/8}, \quad n = 0, 1, \dots, 7 \text{ και τελικά } y(n) = \{5, 25, 39, 35, 25, 15, 6, 1\}.$$

Σημειώστε ότι στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν εκτελέσουμε την κυκλική συνέλιξη απευθείας στο πεδίο του χρόνου, όπως έγινε στο Παράδειγμα 2.5, τοποθετώντας τις μήκους οχτώ σημείων ακολουθίες $x'(n)$ και $h'(n)$ στις περιφέρειες κύκλων, περιστρέφοντας και προσθέτοντας τα γινόμενα.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.11

Να υπολογίσετε την απόκριση ενός συστήματος με κρουστική $h(n) = \{1, 2, 3\}$ για είσοδο $x(n) = \{3, 4, 5, 2\}$ χρησιμοποιώντας DFT και IDFT των οχτώ σημείων.

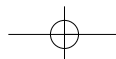
2.2.4 Ο DFT σε μορφή πινάκων

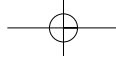
Ο DFT N -σημείων (εξίσωση 2.21) μπορεί να θεωρηθεί και ως γραμμικός μετασχηματισμός ενός διάνυσματος N -διαστάσεων στο χρόνο σε ένα N -διαστάσεων διάνυσμα στη συχνότητα. Έστω \mathbf{x} το διάνυσμα των N στοιχείων της ακολουθίας $x(n)$,

$$\mathbf{x} = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1)]^T \quad (2.41)$$

όπου ο εκθέτης T υποδηλώνει τον ανάστροφο πίνακα, \mathbf{X} το διάνυσμα των N συντελεστών $X(k)$

$$\mathbf{X} = [X(0) \ X(1) \ \dots \ X(N-1)]^T \quad (2.42)$$





και \mathbf{W} ο $N \times N$ DFT πίνακας

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

όπου $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ η N οστή ρίζα της μονάδας. Ο πίνακας \mathbf{W} είναι συμμετρικός. Με βάση αυτούς τους ορισμούς, ο DFT μπορεί να εκφρασθεί σε μορφή πινάκων ως:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} \quad (2.44)$$

Θεωρούμε ότι ο αντίστροφος του \mathbf{W} υπάρχει και είναι ο \mathbf{W}^{-1} , οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης με \mathbf{W}^{-1} παίρνουμε

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{X} \quad (2.45)$$

Όμως, η σχέση (2.22) του IDFT εκφράζεται σε μορφή πινάκων ως:

$$\mathbf{x} = (1/N)\mathbf{W}^*\mathbf{X} \quad (2.46)$$

όπου \mathbf{W}^* ο συζυγής μιγαδικός του \mathbf{W} . Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

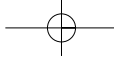
$$\mathbf{W}^{-1} = (1/N)\mathbf{W}^* \quad (2.47)$$

και, κατά συνέπεια,

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^* = \mathbf{I} \quad (2.48)$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $N \times N$. Επομένως, ο πίνακας \mathbf{W} είναι ένας ορθογώνιος (unitary) πίνακας.

Από τις σχέσεις αυτές γίνεται σαφές ότι για τον υπολογισμό του DFT απαιτούνται N^2 μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και $N(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις (λαμβάνοντας υπόψη τους πολλαπλασιασμούς ακόμη και με τη μονάδα). Όμως, αφού ο πίνακας \mathbf{W} είναι συμμετρικός, οι μισές τιμές αυτού είναι ίδιες με τις άλλες μισές. Επιπλέον, οι τιμές αυτές είναι οι N ρίζες της μονάδας, και από αυτές οι μισές είναι αντίθετες των άλλων. Αυτό μπορεί να γίνει φανερό αν γράψουμε τον πίνακα \mathbf{W} για $N = 8$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.12. Ο πίνακας αυτός προέκυψε με τη βοήθεια του Σχήματος



2.6. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο τέσσερις διαφορετικές τιμές στον πίνακα αυτό. Αξιοποιώντας, επομένως, τη συμμετρία και την περιοδικότητα των τιμών του πίνακα, μπορούμε να απαλείψουμε τον πλεονασμό. Έτσι, μπορούμε να καταλήξουμε σε τεχνικές υπολογισμού του DFT με αρκετά λιγότερες πράξεις, δηλαδή, καταλήγουμε σε έναν ταχύ μετασχηματισμό Fourier (fast Fourier transform, FFT), όπως θα δούμε στην ενότητα 2.3.

		$n \longrightarrow$							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$k \downarrow$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	a	$-j$	$-b$	-1	$-a$	j	b
	2	1	$-j$	-1	j	1	$-j$	-1	j
	3	1	$-b$	j	a	-1	b	$-j$	$-a$
	4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	5	1	$-a$	$-j$	b	-1	a	j	$-b$
	6	1	j	-1	$-j$	1	j	-1	$-j$
	7	1	b	j	$-a$	-1	$-b$	$-j$	a

Σχήμα 2.12

Ο πίνακας W για $N = 8$

$$(a = \frac{1-j}{\sqrt{2}}, b = \frac{1+j}{\sqrt{2}}, j = \sqrt{-1})$$

Παράδειγμα 2.7

Να υπολογιστεί ο DFT της ακολουθίας $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$.

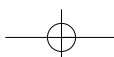
Λύση

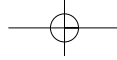
Η ακολουθία $x(n)$ είναι μήκους τέσσερα, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα W για $N = 4$. Αξιοποιώντας την περιοδικότητα και τη συμμετρία ($W_N^{k+N/2} = -W_N^k$) των τιμών του πίνακα έχουμε

$$W_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-j \\ 0 \\ 1+j \end{bmatrix}.$$

Όπως ήταν φυσικό, το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με εκείνο του Παραδείγματος 2.4.





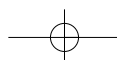
Σύνοψη ενότητας

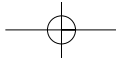
Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier, δηλαδή το μετασχηματισμό που εφαρμόζεται σε ακολουθίες πεπερασμένου μήκους. Αυτός είναι ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιείται στην πράξη στην επεξεργασία σημάτων με υπολογιστή. Είδαμε ότι για ένα σήμα N δειγμάτων, προκύπτουν N δείγματα στη συχνότητα. Πρόκειται για ένα περιοδικό διακριτό φάσμα. Γνωρίσαμε επίσης την έννοια της κυκλικής ολίσθησης ενός σήματος. Είδαμε ότι η κυκλική συνέλιξη δύο σημάτων διακριτού χρόνου, μήκους L και M αντίστοιχα, μπορεί να δώσει το ίδιο αποτέλεσμα με τη γραμμική συνέλιξη αυτών, μόνο αφού επεκτείνουμε τα αρχικά σήματα με επιπλέον στοιχεία μηδενικής τιμής, ώστε να αποκτήσουν μήκος τουλάχιστον ίσο με $L + M - 1$ το καθένα, και αφού υπολογίσουμε την κυκλική συνέλιξη των νέων, μεγαλύτερου μήκους, ακολουθιών. Τέλος, διαπιστώσαμε για μία ακόμα φορά, ότι κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας η ενέργεια διατηρείται (θεώρημα Parseval).

2.3 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT)

Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier (fast Fourier transform, FFT) δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας αποδοτικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του DFT. Στην πράξη, δεν υπάρχει μόνο ένας αλγόριθμος, αλλά πλήθος από διαφορετικούς αλγόριθμους που επιτυγχάνουν το σκοπό αυτό. Οι διαφορές τους βρίσκονται κυρίως στο πλήθος και στο είδος των πράξεων καθώς και στο μέγεθος της απαιτούμενης μνήμης. Όλοι όμως, έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: *χρειάζονται μόνο $(N/2) \log_2 N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς για τον υπολογισμό ενός DFT N -σημείων*. Εμείς θα αναφερθούμε στον αλγόριθμο των Cooley–Tukey, ο οποίος προτάθηκε το 1965 και ο οποίος έδωσε μία πραγματικά εντυπωσιακή ώθηση στην ψηφιακή επεξεργασία σημάτων. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εφαρμοστεί σε σήματα αποτελούμενα από N δείγματα, όπου $N = 2^m$, δηλαδή πρόκειται για έναν αλγόριθμο βάσης-2 (radix-2), όπως αυτός ονομάζεται. Αρχικά, η ακολουθία των N στοιχείων εισόδου $x(n)$ χωρίζεται σε δύο ακολουθίες μήκους $N/2$ η καθεμία, τις $x(2n)$ και $x(2n + 1)$, αποτελούμενες από στοιχεία με άρτιους και περιττούς δείκτες, αντίστοιχα. Έτσι, ξεκινώντας από τον ορισμό του DFT (εξίσωση 2.21) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{2nk}
 \end{aligned} \tag{2.49}$$





Όμως $W_N^{2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} = W_{N/2}^{nk}$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_{N/2}^{nk}}_{X_1(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_{N/2}^{nk}}_{X_2(k)}$$

ή $X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$ (2.50)

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός των N σημείων του $X(k)$ έχει εκφραστεί ως άθροισμα δύο DFTs με πλήθος σημείων $N/2$ ο καθένας, εκ των οποίων ο ένας πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί W_N^k . Αυτός ο πολλαπλασιασμός ήταν αναμενόμενος, αν σκεφθούμε ότι η ακολουθία των περιττών δεικτών είναι ολισθημένη κατά ένα δείγμα ως προς την αρχή του χρόνου, οπότε με βάση την ιδιότητα της κυκλικής ολίσθησης στο χρόνο, αυτό συνεπάγεται πολλαπλασιασμό επί W_N^k στο πεδίο της συχνότητας.

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ και $W_N^{n\left(k+\frac{N}{2}\right)} = W_N^{nk}$, η σχέση (2.50)

για k ίσο με $k + (N/2)$ γίνεται:

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k)$$
 (2.51)

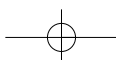
Κατά συνέπεια, έχουμε επιτύχει μέχρι το σημείο αυτό, να εκφράσουμε τον αρχικό DFT των N σημείων ως συνδυασμό δύο άλλων DFTs μισού μήκους ο καθένας. Ας ξαναγράψουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις, προσέχοντας όμως αυτή τη φορά, ότι τα n , k κυμαίνονται μεταξύ 0 και $(N/2)-1$ και όχι μεταξύ 0 και $N-1$, όπως είχαμε ξεκινήσει:

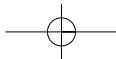
$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$
 (2.52)

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k)$$
 (2.53)

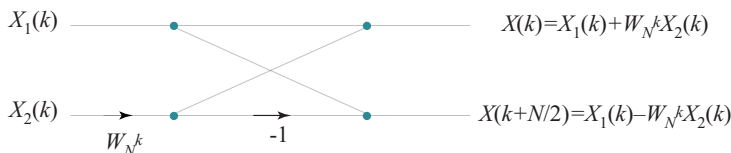
όπου $k = 0, 1, \dots, N/2-1$.

Ο υπολογισμός των τιμών αυτών μπορεί να γίνει συνδυαστικά εκτελώντας μόνο ένα πολλαπλασιασμό. Παραστατικά, η διαδικασία αυτή δίνεται με τη βοήθεια της λεγόμενης πεταλούδας (butterfly) του Σχήματος 2.13. Πρόκειται ουσιαστικά, για τον υπολογισμό ενός DFT 2 σημείων. Στο πάνω δεξί άκρο της πεταλούδας έχουμε την πρόσθεση των αριθμών που καταλήγουν σ' αυτό, ενώ στο κάτω δεξί άκρο εκτελούμε την αφαίρεση των ίδιων αριθμών.



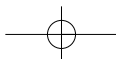
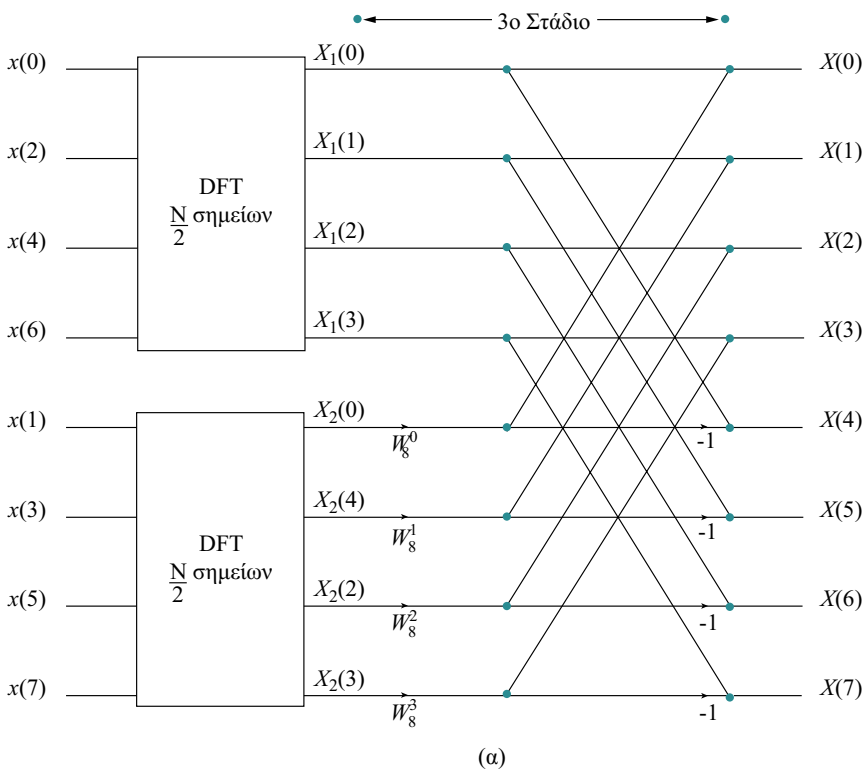


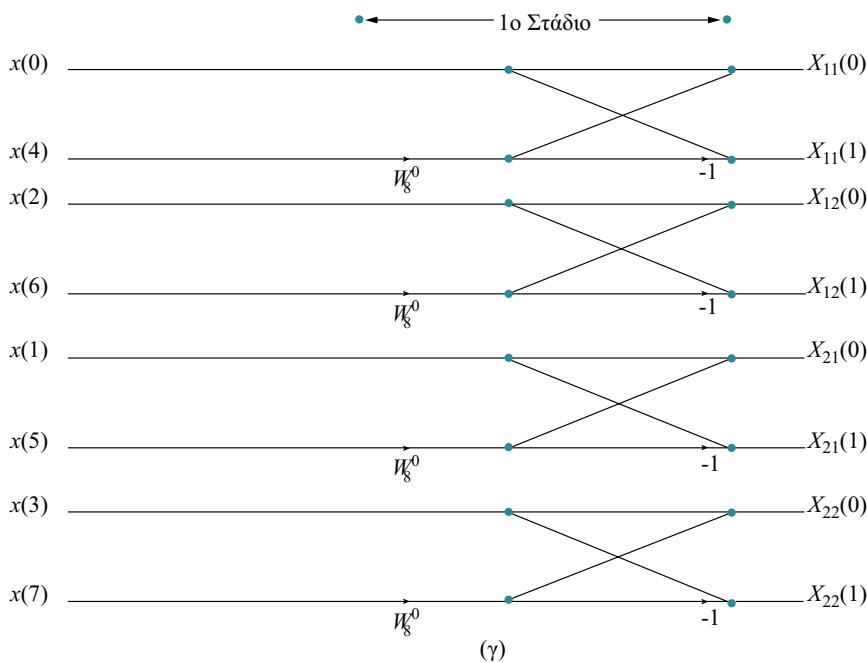
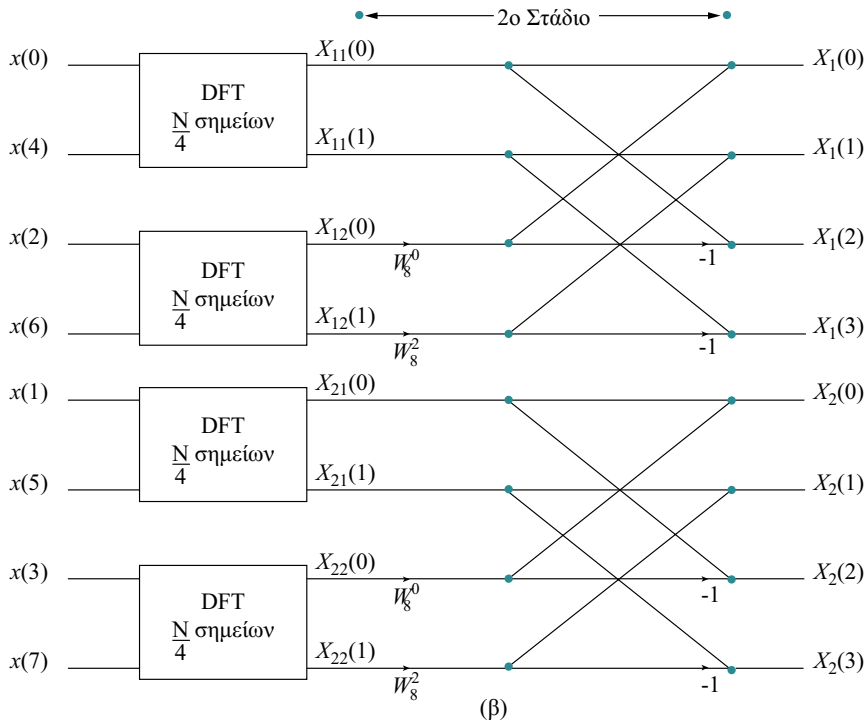
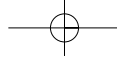
Σχήμα 2.13
 Βασική πεταλούδα
 2 σημείων

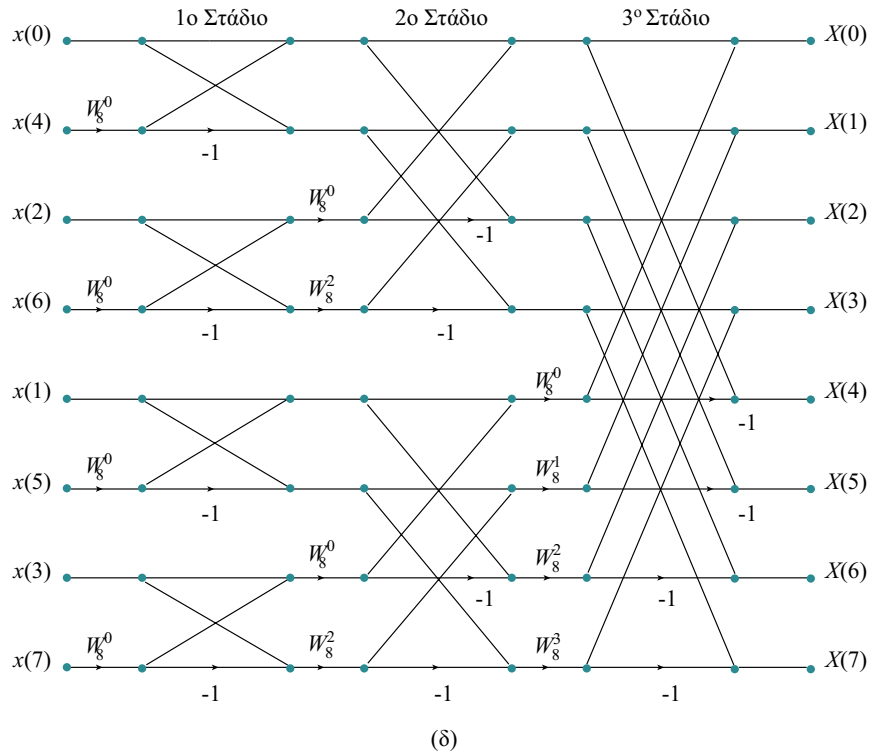
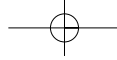


Γραφικά, η μέχρι τώρα ανάλυση του DFT δίνεται στο Σχήμα 2.14α για την περίπτωση που έχουμε οχτώ δείγματα ($N=8$). Γίνεται σαφές ότι ο υπολογισμός του N -σημείων DFT έχει αναχθεί στον υπολογισμό δύο DFTs $N/2$ -σημείων ο καθένας και στον τελικό συνδυασμό των αποτελεσμάτων τους. Η διαδικασία ανάλυσης που ακολουθήθηκε προηγουμένως μπορεί να συνεχιστεί και για τους δύο νέους DFTs των $N/2$ σημείων. Έτσι, χωρίζουμε και πάλι σε άρτια και περιττά και ακολουθώντας την ίδια τακτική καταλήγουμε στο διάγραμμα του Σχήματος 2.14β. Αυτή η διαδικασία ανάλυσης (αποδεκατισμού) συνεχίζεται μέχρις ότου καταλήξουμε στον υπολογισμό DFT 2-σημείων (Σχήμα 2.14γ). Αυτό θα γίνει μετά από m στάδια, όπου $m = \log_2 N$. Το συνολικό διάγραμμα ροής ενός FFT οχτώ σημείων φαίνεται στο Σχήμα 2.14δ.

Σχήμα 2.14
 Διαγράμματα ροής
 FFT οχτώ σημείων:
 (α)–(γ) τα τρία διαδοχικά
 στάδια ανάπτυξης
 του αλγορίθμου,
 (δ) το συνολικό
 διάγραμμα ροής





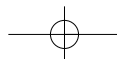


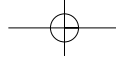
Σχήμα 2.14

Διαγράμματα ροής FFT οχτώ σημείων: (α)–(γ) τα τρία διαδοχικά στάδια ανάπτυξης του αλγορίθμου, (δ) το συνολικό διάγραμμα ροής

Από το Σχήμα 2.14δ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

Η διάταξη των δειγμάτων εξόδου (συντελεστών) είναι κανονική, δηλαδή $X(0), X(1), \dots, X(7)$, ενώ η διάταξη των δειγμάτων εισόδου (δεδομένων) είναι μη κανονική, $x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7)$. Η μη κανονική αυτή διάταξη των δειγμάτων εισόδου είναι αποτέλεσμα της σταδιακής αποσύνθεσης των δειγμάτων εισόδου (πεδίο χρόνου), που εφαρμόσαμε κατά την ανάπτυξη του αλγορίθμου. Αυτή η διαδικασία αποσύνθεσης ονομάζεται αποδεκατισμός στο χρόνο (decimation-in-time, DIT). Η διάταξη των στοιχείων εισόδου δεν είναι τυχαία, αλλά προκύπτει από την κανονική διάταξη των δειγμάτων με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων των δεικτών τους (bit-reversal). Η πλήρης αντιστοίχιση των κανονικών και των αναδιαταγμένων δεικτών για $N = 8$ δίνεται στον Πίνακα 2.4.





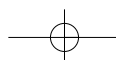
Πίνακας 2.4

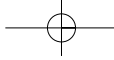
Κανονική διάταξη και διάταξη που προκύπτει από αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων για $N = 8$

Κανονική διάταξη		Διάταξη από αντιστροφή της σειράς των bits	
Δεκαδικός	Δυαδικός	Δυαδικός	Δεκαδικός
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Ένα ενδιαφέρον στοιχείο του FFT που μόλις αναπτύξαμε, είναι η δυνατότητα εκτέλεσης των υπολογισμών στις ίδιες θέσεις μνήμης (in place). Δεν απαιτείται, δηλαδή, επιπλέον χώρος για την αποθήκευση των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων. Από το Σχήμα 2.14, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι σε κάθε στάδιο, οι έξοδοι μπορούν να αποθηκεύονται στις ίδιες θέσεις μνήμης, όπου ήταν αποθηκευμένες οι είσοδοι του σταδίου εκείνου.

Τέλος, το πλέον ουσιαστικό στοιχείο του FFT είναι η μειωμένη υπολογιστική πολυπλοκότητά του, δηλαδή, το συνολικό πλήθος πράξεων (πολλαπλασιασμών και προσθέσεων). Γενικεύοντας την περίπτωση του Σχήματος 2.14δ μπορούμε να δούμε ότι ο υπολογισμός του FFT N δειγμάτων ($N = 2^m$) γίνεται σε m στάδια ($m = \log_2 N$). Σε κάθε στάδιο έχουμε $N/2$ πεταλούδες, δηλαδή, $(N/2) \log_2 N$ πεταλούδες συνολικά. Από το Σχήμα 2.14δ διαπιστώνουμε ότι για τον υπολογισμό κάθε πεταλούδας απαιτείται ένας μιγαδικός πολλαπλασιασμός και δύο μιγαδικές προσθέσεις. Έτσι, ο N -σημείων FFT απαιτεί $(N/2) \log_2 N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και $N \log_2 N$ μιγαδικές προσθέσεις. Είδαμε στην παράγραφο 2.2.4, ότι για τον απευθείας υπολογισμό του N -σημείων DFT, απαιτούνται N^2 μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και $N(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις. Κατά συνέπεια, το κέρδος σε πράξεις και άρα σε χρόνο υπολογισμού, είναι πολύ μεγάλο, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.5 για διαφορετικό πλήθος δειγμάτων.





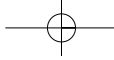
Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για $N = 1024$ το κέρδος αυτό γίνεται μεγαλύτερο του διακόσια, δηλαδή ο χρόνος υπολογισμού μειώνεται τουλάχιστον κατά δύο τάξεις μεγέθους.

Πίνακας 2.5

Μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί για τον υπολογισμό του DFT και του FFT

N	DFT	FFT	Λόγος Μιγαδικών
	Πλήθος Μιγαδικών Πολλαπλασιασμών	Πλήθος Μιγαδικών Πολλαπλασιασμών	Πολλαπλασιασμών (#DFT / #FFT)
2	4	1	4
4	16	4	4
8	64	12	5,3
16	256	32	8,0
32	1 024	80	12,8
64	4 096	192	21,3
128	16 384	448	36,6
256	65 536	1 024	64,0
512	262 144	2 304	113,8
1024	1 048 576	5 120	204,8
2048	4 194 304	11 264	372,4
4096	16 777 216	24 576	682,7
8192	67 108 864	53 248	1 260,3

Θα πρέπει να τονιστεί ότι ο FFT αλγόριθμος, που μόλις αναπτύχθηκε, εφαρμόζεται μόνο για πλήθος δειγμάτων που είναι δύναμη του δύο ($\text{radix}=2$). Το γεγονός αυτό αποτελεί άλλωστε και τον περιορισμό του FFT, δηλαδή ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί, έτσι όπως παρουσιάστηκε εδώ, για τυχαίο πλήθος σημείων — όπως ο DFT. Υπάρχουν πολλοί FFT αλγόριθμοι στη διεθνή βιβλιογραφία οι οποίοι αξιοποιούν τα διαφορετικά χαρακτηριστικά της εισόδου και επιτυγχάνουν υψηλότερες επιδόσεις. Έτσι, συναντούμε αλγόριθμους που εφαρμόζονται μόνο για πλήθος σημείων που είναι δυνάμεις του τέσσερα ($\text{radix}=4$), ή αλγόριθμους μόνο για πραγματικές εισόδους (real-valued), ή αλγόριθμους για πλήθος σημείων που είναι πρώτοι αριθμοί



(prime length).

Η προηγούμενη ανάλυση βασίστηκε στον *αποδεκατισμό στο χρόνο* (DIT). Με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε *αποδεκατισμό στη συχνότητα* (decimation-in-frequency, DIF) καταλήγοντας σ' έναν FFT αλγόριθμο (Sande–Tukey, 1966), ο οποίος έχει την ίδια υπολογιστική πολυπλοκότητα με τον αντίστοιχο DIT αλγόριθμο. Χαρακτηριστικό του DIF αλγορίθμου είναι ότι οι πολλαπλασιασμοί στις πεταλούδες γίνονται μετά την άθροιση των εισόδων και ότι τα δείγματα εισόδου είναι σε κανονική διάταξη, ενώ τα δείγματα εξόδου σε μη κανονική διάταξη (bit-reversed).

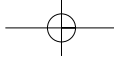
Υπενθυμίζεται τέλος, ότι ο FFT δεν αποτελεί κάποιο νέο μετασχηματισμό Fourier, αλλά μία αποδοτική αλγοριθμική μέθοδο για τον υπολογισμό του DFT.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.12

Πόσοι μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί απαιτούνται για την υλοποίηση της γραμμικής συνέλιξης δύο ακολουθιών μήκους N η καθεμιά, όπου N δύναμη του δύο; Υπολογίστε τη γραμμική συνέλιξη (α) απευθείας στο πεδίο του χρόνου, (β) μέσω του πεδίου της συχνότητας με χρήση του DFT και (γ) μέσω του πεδίου της συχνότητας με χρήση του FFT. Καταστρώστε πίνακα ο οποίος να δείχνει το πλήθος των πράξεων συναρτήσει του αριθμού των σημείων N . Για ποιες τιμές του N μας συμφέρει να υπολογίσουμε τη γραμμική συνέλιξη μέσω του FFT και όχι απευθείας;

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier. Αναπτύξαμε τον αλγόριθμο αποδεκατισμού στο χρόνο για την περίπτωση που το πλήθος των σημείων είναι δύναμη του δύο. Είδαμε ότι υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι για τον ταχύ υπολογισμό του DFT, η υπολογιστική πολυπλοκότητα των οποίων, είναι της τάξεως του $N \log_2 N$ και όχι του N^2 , όπως συμβαίνει με τον απευθείας υπολογισμό του DFT.



Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τα σήματα διακριτού χρόνου από την πλευρά του πεδίου της συχνότητας και είδαμε ότι:

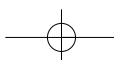
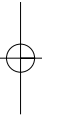
Η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας επιτυγχάνεται με το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (εξίσωση ανάλυσης), ενώ η μετάβαση από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου γίνεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (εξίσωση σύνθεσης).

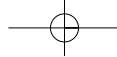
Κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας η ενέργεια του σήματος διατηρείται (θεώρημα Parseval). Πρόκειται στην ουσία για την αναπαράσταση της ίδιας πληροφορίας με διαφορετικό τρόπο.

Ο DTFT ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι μία συνεχής και περιοδική συνάρτηση.

Ο DFT ενός σήματος διακριτού χρόνου πεπερασμένης διάρκειας είναι μία περιοδική ακολουθία.

Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT) είναι κάθε αλγόριθμος ο οποίος έχει υπολογιστική πολυπλοκότητα μικρότερη από εκείνη του απευθείας υπολογισμού του DFT. Η συνήθης υπολογιστική πολυπλοκότητα του FFT είναι της τάξεως του $M \log_2 N$, ενώ εκείνη του DFT είναι της τάξεως του N^2 .



**Βιβλιογραφία κεφαλαίου***ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ*

Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων*, Τυπωθήτω Γ. Δαρδανός, Αθήνα, 1998.

Ν.Καλουπτσίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*, Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα, 1993.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

D.J.DeFatta, J.G.Lucas, W.S.Hodgkiss, *Digital Signal Processing: A System Design Approach*, J. Wiley & Sons, 1988.

P.Duhamel, M.Vetterli, *Fast Fourier Transforms: A Tutorial Review and a State of the Art*, Signal Processing, 19, 259, 1990.

E.C.Ifeachor, B.W.Jervis, *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Second Edition, Pearson Education Limited, 2002.

P.A.Lynn, W.Fuerst, *Introductory Digital Signal Processing With Computer Applications*, J.Wiley & Sons Ltd, 1989.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-Based Approach*, Second Edition, McGraw Hill, 2001.

S.J.Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.

A.V.Oppenheim, A.S.Willsky, *Signals & Systems*, Second Edition, Prentice-Hall, 1997.

J.G.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, 1996.

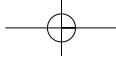
L.R.Rabiner et al, *Terminology in Digital Signal Processing*, IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-20, No. 5, pp. 322-337, Dec. 1972.

S.W.Smith, *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, Second Edition, California Technical Publishing, 1999

R.D.Strum, D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική

band-limited	περιορισμένου εύρους
bit reversal	αντιστροφή δυαδικών ψηφίων
circular shift	κυκλική ολίσθηση ή μετατόπιση
decimation in frequency	αποδεκατισμός στη συχνότητα
decimation in time	αποδεκατισμός στο χρόνο
discrete Fourier transform	διακριτός μετασχηματισμός Fourier
domain	πεδίο, χώρος
dual	διττός
energy-density spectrum	φάσμα ενεργειακής πυκνότητας
fast Fourier transform	ταχύς μετασχηματισμός Fourier
magnitude spectrum	φάσμα μέτρου
phase spectrum	φάσμα φάσης
radix	βάση
sampling frequency	συχνότητα δειγματοληψίας
sampling rate	ρυθμός δειγματοληψίας
shift	ολίσθηση, μετατόπιση
spectral overlap	φασματική επικάλυψη
twiddle factor	παράγοντας στροφής
zero padding	προσθήκη μηδενικών στοιχείων



Μετασχηματισμός-z

Σκοπός

Οι μετασχηματισμοί αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία στην ανάλυση σημάτων και LTI συστημάτων. Στο παρόν Κεφάλαιο εισάγουμε το μετασχηματισμό-z, μελετούμε τις ιδιότητές του και αναδεικνύουμε τη σπουδαιότητά του στην ανάλυση και στο χαρακτηρισμό διακριτών LTI συστημάτων.

Ο μετασχηματισμός-z παίζει σπουδαίο ρόλο στην ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου και LTI συστημάτων, αντίστοιχο με εκείνον του μετασχηματισμού Laplace για την ανάλυση σημάτων και LTI συστημάτων συνεχούς χρόνου. Για παράδειγμα, θα δούμε ότι η συνέλιξη δύο σημάτων στο χρόνο, ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων μετασχηματισμών-z αυτών. Μία τέτοια ιδιότητα απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση της απόκρισης ενός LTI συστήματος για διάφορα σήματα. Ακόμη, ο μετασχηματισμός-z μας παρέχει τη δυνατότητα χαρακτηρισμού ενός LTI συστήματος και υπολογισμού της απόκρισής του για διάφορα σήματα, με απλή τοποθέτηση των πόλων και μηδενικών του στο επίπεδο-z.

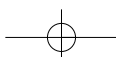
Προσδοκώμενα αποτελέσματα

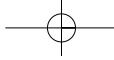
Όταν ολοκληρώσετε τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού θα είστε σε θέση να:

- Υπολογίζετε το μετασχηματισμό-z οποιασδήποτε πεπερασμένης ακολουθίας
- Υπολογίζετε το μετασχηματισμό-z και να προσδιορίζετε την περιοχή σύγκλισης ακολουθιών απείρου μήκους
- Προσδιορίζετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό-z συναρτήσεων
- Αποφαινεστε εύκολα σχετικά με την αιτιατότητα και ευστάθεια συστημάτων διακριτού χρόνου
- Σχεδιάζετε τη δομή πραγματοποίησης συστημάτων διακριτού χρόνου
- Υπολογίζετε την απόκριση συχνότητας συστημάτων διακριτού χρόνου

Έννοιες κλειδιά

- Μετασχηματισμός-z
- Περιοχή σύγκλισης



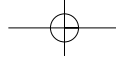


- Συνάρτηση μεταφοράς
- Ευστάθεια
- Πραγματοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου
- Απόκριση συχνότητας
- Εξισώσεις διαφορών

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Ο μετασχηματισμός- z (z -transform) για τα σήματα διακριτού χρόνου είναι ό,τι και ο μετασχηματισμός Laplace για τα σήματα συνεχούς χρόνου (continuous-time). Θα δούμε ότι ο μετασχηματισμός- z είναι πιο γενικός από το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (discrete-time Fourier transform, DTFT), αφού ο τελευταίος αποτελεί ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού- z . Συμπερασματικά, ο μετασχηματισμός- z είναι ένα πολύ ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη διακριτών σημάτων και συστημάτων. Για την κατανόηση του Κεφαλαίου ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει εξοικειωθεί με τους μιγαδικούς αριθμούς, καθώς και με τις σειρές με σταθερούς όρους.

Στην ενότητα 3.1 ορίζουμε το μετασχηματισμό- z και μελετούμε τις ιδιότητές του. Στη συνέχεια ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό- z , δηλαδή το μετασχηματισμό ο οποίος μας οδηγεί από το πεδίο- z στο πεδίο του χρόνου (ενότητα 3.2). Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός- z , ο οποίος χρησιμοποιείται για την ανάλυση συστημάτων που αρχικά δεν βρίσκονται σε ηρεμία, παρουσιάζεται στην ενότητα 3.3. Τέλος, γνωρίζοντας το μετασχηματισμό- z και τις ιδιότητές του, προχωρούμε στην αξιοποίηση αυτού για τη μελέτη συστημάτων διακριτού χρόνου. Έτσι, στην ενότητα 3.4 μελετούμε την αιτιατότητα και την ευστάθεια τέτοιων συστημάτων, τις δομές πραγματοποίησής τους και την απόκρισή τους στη συχνότητα.



3.1 Ο Μετασχηματισμός-z

3.1.1 Ορισμός

Ο μετασχηματισμός-z (M.Z.) ενός σήματος $x(n)$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.1)$$

όπου z μία μιγαδική μεταβλητή. Για λόγους ευκολίας θα συμβολίζουμε το M.Z. της ακολουθίας $x(n)$ ως $Z\{x(n)\}$ και τη σχέση μεταξύ της $x(n)$ και του M.Z. $X(z)$ ως:

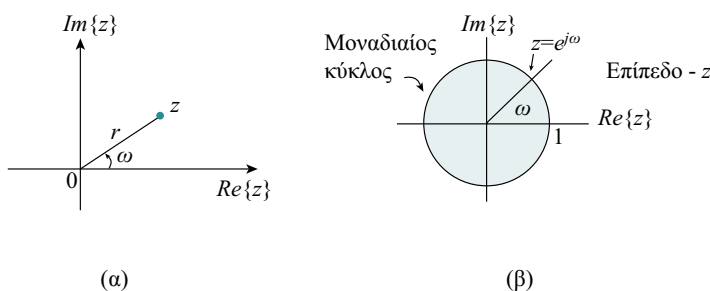
$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad (3.2)$$

Ο M.Z. όπως ορίζεται στη σχέση (3.1) ονομάζεται *αμφίπλευρος* M.Z. (bilateral z -transform), γιατί το άθροισμα εκτείνεται από το $-\infty$ έως το $+\infty$. Υπάρχει και ο *μονόπλευρος* M.Z. (unilateral z -transform), τον οποίο θα εξετάσουμε αργότερα (ενότητα 3.3), όπου το άθροισμα εκτείνεται από το 0 έως το $+\infty$. Ο μονόπλευρος M.Z. εφαρμόζεται στην ανάλυση αιτιατών συστημάτων με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Η μιγαδική μεταβλητή z σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται ως:

$$z = re^{j\omega} \quad (3.3)$$

όπου r το μέτρο της z και ω η γωνία της z , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1α.



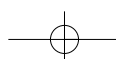
Σχήμα 3.1

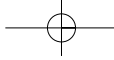
(α) Μιγαδικό επίπεδο, (β) ο M.Z. όταν υπολογίζεται για τις τιμές του z που ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο ισοδυναμεί με τον DTFT.

Τώρα μπορούμε να εκφράσουμε την (3.1) ως συνάρτηση των r και ω , αντικαθιστώντας σ' αυτήν τη μεταβλητή z από τη σχέση (3.3). Έτσι έχουμε:

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n} = F\{x(n)r^{-n}\} \quad (3.4)$$

όπου με $F\{g(n)\}$ συμβολίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της ακολουθίας $g(n)$.





Η σχέση (3.4) μας δείχνει ότι ο Μ.Ζ. της ακολουθίας $x(n)$ στο σημείο $z = re^{j\omega}$ ισούται με το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της τροποποιημένης ακολουθίας $x(n)r^{-n}$ για τη γωνιακή συχνότητα ω . Αν η παράμετρος r επιλεγεί ίση με τη μονάδα, τότε η (3.4) μας δίνει τον DTFT της $x(n)$. Επιπλέον, όταν η παράμετρος ω μεταβάλλεται, τότε όλες οι τιμές της μιγαδικής μεταβλητής z θα βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο (unit circle) του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη μονάδα. Η σχέση μεταξύ του DTFT και του Μ.Ζ. είναι πλέον προφανής. *Ο DTFT μιας ακολουθίας ισούται με το Μ.Ζ. αυτής για τις τιμές του z που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου-z (z-plane)* (Βλ. Σχήμα 3.1β). Δηλαδή για $r = |z| = 1$ η σχέση (3.4) καταλήγει σ' αυτή του διακριτού χρόνου μετασχηματισμού Fourier:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x(n)\} \quad (3.5)$$

3.1.2 Ύπαρξη του Μετασχηματισμού-z

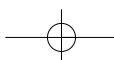
Ο Μ.Ζ., ως δυναμοσειρά απείρων όρων, μπορεί να μην υπάρχει, δηλαδή να μην συγκλίνει για όλες τις τιμές της μιγαδικής μεταβλητής z . Η περιοχή τιμών του z για τις οποίες ο Μ.Ζ. $X(z)$ έχει πεπερασμένες τιμές καλείται *περιοχή σύγκλισης* (Π.Σ.) (region of convergence, ROC). Έστω, τώρα ότι η $x(n)r^{-n}$ είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή. Τότε

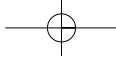
$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \quad (3.6)$$

Η σχέση (3.6) μας δείχνει ότι η $|X(z)|$ είναι πεπερασμένη (συγκλίνει) αν η ακολουθία $x(n)r^{-n}$ είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή (absolutely summable). Γίνεται φανερό ότι η σύγκλιση εξαρτάται μόνο από το $r = |z|$ και όχι από το ω . Γενικά, ισχύει ότι η Π.Σ. θα καθορίζεται από ομόκεντρους δακτυλίους με κέντρο την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου. Στη γενική περίπτωση η Π.Σ. του Μ.Ζ. θα είναι της μορφής $R_1 < |z| < R_2$, όπου τα όρια R_1, R_2 εξαρτώνται από την ακολουθία $x(n)$. Ας προσπαθήσουμε να εξετάσουμε τις διαφορετικές περιπτώσεις σύγκλισης με τη βοήθεια ορισμένων παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 3.1

Να υπολογισθεί η Π.Σ. του Μ.Ζ. της δεξιόπλευρης (right-sided) εκθετικής ακολουθίας $x_1(n) = a^n u(n)$.





Λύση

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.1) του Μ.Ζ. έχουμε:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \quad (3.7)$$

Η (3.7) είναι άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο az^{-1} και ισούται με

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (3.8)$$

με την προϋπόθεση βέβαια ότι $|az^{-1}| < 1$ ή ισοδύναμα $|z| > |a|$. Η ανισότητα αυτή προσδιορίζει την Π.Σ. πάνω στο μιγαδικό επίπεδο-z. Πρόκειται για όλα τα σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου με ακτίνα $|a|$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2α. Ο Μ.Ζ. της $x_1(n)$ είναι ρητή συνάρτηση (σχέση 3.8). Κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής χαρακτηρίζεται από τα μηδενικά (δηλαδή τις ρίζες του αριθμητή) και τους πόλους (δηλαδή τις ρίζες του παρανομαστή). Η συνάρτηση $X_1(z)$ έχει ένα μηδενικό στο σημείο $z = 0$ και ένα πόλο στο $z = a$. Παρατηρούμε επομένως, ότι η Π.Σ. της $X_1(z)$ εκτείνεται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο που είναι έξω από τον κύκλο ο οποίος έχει ακτίνα τον πόλο αυτής. Η Π.Σ. δεν περιέχει ποτέ κάποιον πόλο.

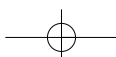
Γενικά, μια δεξιόπλευρη ακολουθία $x(n)$ ικανοποιεί τη συνθήκη $x(n) = 0$ για $n < N_1$. Ο Μ.Ζ. αυτής ισούται με:

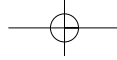
$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.9)$$

και η Π.Σ. αυτού είναι της μορφής $|z| > R_1$. Δηλαδή η Π.Σ. περιλαμβάνει όλες τις τιμές του μιγαδικού επιπέδου-z που βρίσκονται έξω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = R_1$, όπου R_1 είναι εκείνος ο πόλος της $X(z)$ ο οποίος απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων. Προσοχή θα πρέπει να δοθεί όταν $N_1 < 0$. Σε μια τέτοια περίπτωση η σχέση (3.9) περιλαμβάνει όρους με θετικές δυνάμεις του z . Επομένως, η τιμή $z = \infty$ θα πρέπει να αποκλειστεί από την Π.Σ., αφού αυτή θα οδηγήσει σε μη φραγμένο Μ.Ζ.

Παράδειγμα 3.2

Να υπολογισθεί η Π.Σ. της αριστερόπλευρης (left-sided) εκθετικής ακολουθίας $x_2(n) = -a^n u(-n-1)$.





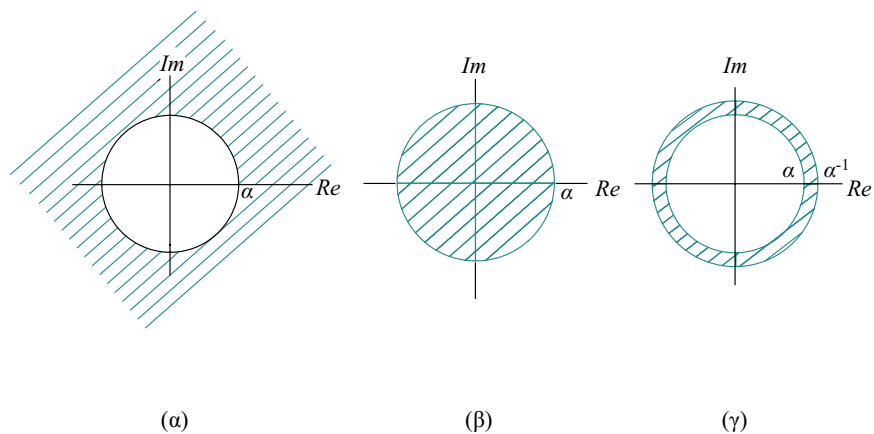
Λύση

Από τον ορισμό (3.1) του Μ.Ζ. έχουμε:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n)z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(-n-1)z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n \end{aligned} \quad (3.10)$$

Για $|a^{-1}z| < 1$ ή ισοδύναμα $|z| < |a|$ το άθροισμα της (3.10) συγκλίνει δίνοντας:

$$X_2(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (3.11)$$



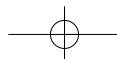
Σχήμα 3.2

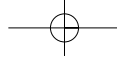
Περιοχή σύγκλισης (α) δεξιόπλευρης, (β) αριστερόπλευρης, (γ) αμφίπλευρης ακολουθίας

Η Π.Σ. της $X_2(z)$ είναι οι τιμές του μιγαδικού επιπέδου z με $|z| < |a|$, δηλαδή το εσωτερικό του κύκλου ακτίνας $|z| = |a|$ (Σχήμα 3.2β). Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις $X_1(z)$ και $X_2(z)$ είναι ακριβώς ίδιες (Βλ. σχέσεις 3.8 και 3.11). Η μόνη διαφορά βρίσκεται στην Π.Σ. Αυτό σημαίνει ότι η Π.Σ. αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα του Μ.Ζ. και πρέπει πάντοτε να καθορίζεται. Αν μας δοθεί μόνο ο Μ.Ζ. χωρίς την αντίστοιχη Π.Σ. αυτού, θα υπάρχει αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ακολουθίας που οδήγησε σ' αυτόν, αφού μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία απαντήσεις.

Γενικά, μία αριστερόπλευρη ακολουθία $x(n)$ ικανοποιεί τη συνθήκη $x(n) = 0$ για $n > N_2$. Ο Μ.Ζ. αυτής ισούται με:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x(n)z^{-n} \quad (3.12)$$





και η Π.Σ. αυτού είναι της μορφής $|z| < R_2$, δηλαδή οι τιμές του μιγαδικού επιπέδου z που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = R_2$, όπου R_2 είναι εκείνος ο πόλος της $X(z)$ ο οποίος απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων. Προσοχή θα πρέπει να δοθεί όταν $N_2 > 0$. Σ' αυτή την περίπτωση η σχέση (3.12) περιλαμβάνει όρους με αρνητικές δυνάμεις του z . Επομένως, η τιμή $z = 0$ θα πρέπει να αποκλειστεί από την Π.Σ., αφού αυτή θα οδηγήσει σε μη φραγμένο Μ.Ζ.

Παράδειγμα 3.3

Να υπολογιστεί η Π.Σ. της αμφίπλευρης (two-sided) εκθετικής ακολουθίας $x(n) = a^{|n|}$, $a > 0$.

Λύση

Η ακολουθία $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο άλλων ακολουθιών, μιας δεξιόπλευρης και μιας αριστερόπλευρης, ως εξής:

$$x(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(-n-1) \quad (3.13)$$

ή

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (3.14)$$

Από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα γνωρίζουμε ότι οι Μ.Ζ. των παραπάνω ακολουθιών είναι:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{για } |z| > a \quad (3.15)$$

$$X_2(z) = \frac{-1}{1-a^{-1}z^{-1}} \quad \text{για } |z| < a^{-1} \quad (3.16)$$

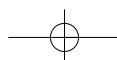
Ο Μ.Ζ. $X(z)$ της αμφίπλευρης ακολουθίας ισούται με το άθροισμα των Μ.Ζ. των επιμέρους ακολουθιών (βλ. ιδιότητα γραμμικότητας στην επόμενη υποενότητα), άρα:

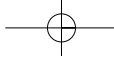
$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) \quad (3.17)$$

$$\text{ή} \quad X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}}, \quad a < |z| < a^{-1} \quad (3.18)$$

$$\text{ή} \quad X(z) = \frac{a^2 - 1}{a} \frac{z}{(z-a)(z-a^{-1})}, \quad a < |z| < a^{-1}$$

Η αντίστοιχη Π.Σ. φαίνεται στο Σχήμα 3.2γ και ισούται με το κοινό τμήμα των δύο περιοχών όπως τις γνωρίσαμε στα παραδείγματα 3.1 και 3.2 προηγουμένως. Είναι φανερό ότι για να υπάρχει κοινό τμήμα (επικάλυψη) μεταξύ των δύο περιοχών σύγκλι-





σης, θα πρέπει $a < 1$. Για $a > 1$ δεν υπάρχει επικάλυψη των περιοχών σύγκλισης και έτσι η (3.13) δεν θα έχει Μ.Ζ., παρόλο που οι επιμέρους ακολουθίες που την απαρτίζουν (αριστερόπλευρη και δεξιόπλευρη) από μόνες τους έχουν!

Γενικά, εάν υπάρχει η Π.Σ. μιας αμφίπλευρης ακολουθίας της μορφής $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$, όπου $x_1(n)$, $x_2(n)$ δεξιόπλευρη και αριστερόπλευρη ακολουθία άπειρου μήκους αντίστοιχα, τότε αυτή αποτελείται από τις τιμές του μιγαδικού επιπέδου- z για τις οποίες ισχύει:

$$R_1 < |z| < R_2 \quad (3.20)$$

Πρόκειται δηλαδή για ένα δακτύλιο του οποίου η μικρότερη ακτίνα R_1 προσδιορίζεται από εκείνον τον πόλο της $X_1(z)$ ο οποίος απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων του επιπέδου- z , ενώ η μεγαλύτερη ακτίνα R_2 προσδιορίζεται από εκείνο τον πόλο της $X_2(z)$ ο οποίος απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων. Αν $R_1 \geq R_2$, τότε οι δύο περιοχές σύγκλισης δεν καλύπτουν η μία την άλλη και η τελική Π.Σ. της $X(z)$ είναι το κενό, δηλαδή ο Μ.Ζ. δεν υπάρχει.

Σημαντική παρατήρηση

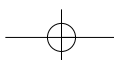
Μία πεπερασμένου μήκους ακολουθία αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών στοιχείων. Έστω ότι μια τέτοια ακολουθία $x(n)$ εκτείνεται μεταξύ N_1 και N_2 , δηλαδή

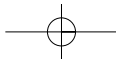
$$x(n) = 0 \text{ για } n < N_1 \text{ ή } n > N_2 \quad (3.21)$$

όπου N_1, N_2 πεπερασμένοι αριθμοί. Ο Μ.Ζ. αυτής ισούται με:

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n} \quad (3.22)$$

Είναι φανερό ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε τιμή του z , δηλαδή η Π.Σ. είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο- z . Προσοχή όμως χρειάζεται στα εξής σημεία: Εάν N_1 αρνητικός και N_2 θετικός, τότε το άθροισμα περιλαμβάνει όρους με αρνητικές και θετικές δυνάμεις του z . Έτσι, όταν $z = 0$, οι όροι με αρνητικές δυνάμεις του z τείνουν στο άπειρο, ενώ όταν $z = \infty$, οι όροι με θετικές δυνάμεις του z τείνουν στο άπειρο. Επομένως, σε μια τέτοια περίπτωση η Π.Σ. δεν περιλαμβάνει τις τιμές $z = 0$ και $z = \infty$. Εάν $N_1 \geq 0$, τότε έχουμε μόνο αρνητικές δυνάμεις του z στην εξίσωση (3.22) και, κατά συνέπεια, η Π.Σ. περιλαμβάνει την τιμή $z = \infty$. Εάν $N_2 \leq 0$, τότε έχουμε μόνο θετικές δυνάμεις του z στην εξίσωση (3.22) και κατά συνέπεια η Π.Σ. περιλαμβάνει την τιμή $z = 0$.





Παράδειγμα 3.4

Να υπολογιστεί ο Μ.Ζ. καθενός από τα παρακάτω διακριτά σήματα πεπερασμένης διάρκειας: (Η έντονη υπογράμμιση υποδηλώνει την χρονική στιγμή $n = 0$).

$$\alpha. \{x_1(n)\} = \{\underline{3}, 4, 5, 0, 1, 2\}$$

$$\epsilon. x_5(n) = \delta(n)$$

$$\beta. \{x_2(n)\} = \{3, 4, \underline{5}, 0, 1, 2\}$$

$$\sigma\tau. x_6(n) = \delta(n-m), m > 0$$

$$\gamma. \{x_3(n)\} = \{\underline{0}, 0, 3, 4, 5, 0, 1, 2\}$$

$$\zeta. x_7(n) = \delta(n+m), m > 0$$

$$\delta. \{x_4(n)\} = \{4, 6, \underline{5}, 0, 1, 2\}$$

Λύση

Από τον ορισμό (3.1) του Μ.Ζ. έχουμε:

$$\alpha. X_1(z) = 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + z^{-4} + 2z^{-5}, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0$$

$$\beta. X_2(z) = 3z^2 + 4z + 5 + z^{-2} + 2z^{-3}, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0 \text{ και του } z = \infty$$

$$\gamma. X_3(z) = 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6} + 2z^{-7}, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0$$

$$\delta. X_4(z) = 4z^2 + 6z + 5 + z^{-2} + 2z^{-3}, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0 \text{ και του } z = \infty$$

$$\epsilon. X_5(z) = 1, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z$$

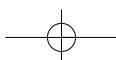
$$\sigma\tau. X_6(z) = z^{-m}, \text{ όπου } m > 0, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = 0$$

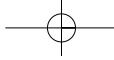
$$\zeta. X_7(z) = z^m, \text{ όπου } m > 0, \quad \text{με Π.Σ.:} \quad \text{όλο το επίπεδο-}z \text{ εκτός του } z = \infty$$

Από το παράδειγμα αυτό γίνεται φανερό ότι η Π.Σ. του Μ.Ζ. μίας ακολουθίας πεπερασμένου μήκους (διάρκειας), είναι όλο το επίπεδο- z , εκτός ίσως από τα σημεία $z = 0$ και/ή $z = \infty$. Αυτά τα σημεία αποκλείονται γιατί το z^m ($m > 0$) τείνει στο άπειρο για $z = \infty$ και το z^{-m} τείνει στο άπειρο για $z = 0$.

Από το ίδιο παράδειγμα συνειδητοποιούμε επίσης ότι από μαθηματική άποψη ο Μ.Ζ. είναι απλώς ένας εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης ενός σήματος. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ο συντελεστής του z^{-n} είναι ουσιαστικά η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή n . Με άλλα λόγια, ο εκθέτης του z παρέχει εκείνη την πληροφορία για το χρόνο, η οποία μας είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό των δειγμάτων ενός σήματος.

Σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να εκφράσουμε το άθροισμα μιας σειράς πεπερασμένου ή απείρου μήκους, σε κλειστή μορφή. Στις περιπτώσεις αυτές ο Μ.Ζ. μας παρέχει μια εναλλακτική συμπαγή μορφή αναπαράστασης ενός σήματος, όπως φαί-





νεται και στον Πίνακα 3.1. που ακολουθεί.

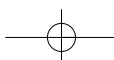
ΣΥΝΗΘΗ ΖΕΥΓΗ Μ.Ζ.

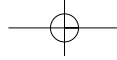
Ορισμένα από τα πιο συνηθισμένα ζεύγη Μ.Ζ. παρατίθενται στον Πίνακα 3.1. Αυτά θα μας βοηθήσουν πάρα πολύ και στον υπολογισμό του αντίστροφου Μ.Ζ., εκφράζοντας τη συνάρτηση $X(z)$ ως γραμμικό συνδυασμό απλούστερων συναρτήσεων, όπως θα δούμε στην ενότητα 3.2.

Πίνακας 3.1

Συνήθη ζεύγη μετασχηματισμών-z

Σήμα	Μετασχηματισμός-z	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta(n)$	1	Όλο το z
$\delta(n - m)$	z^{-m}	Όλο το z , εκτός $z = 0$ αν $m > 0$ ή $z = \infty$ αν $m < 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - (\cos \omega_0)z^{-1}}{1 - (2 \cos \omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{(\sin \omega_0)z^{-1}}{1 - (2 \cos \omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$





$$\begin{aligned} (r^n \cos \omega_0 n) u(n) & \quad \frac{1 - (r \cos \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} & |z| > |r| \\ (r^n \sin \omega_0 n) u(n) & \quad \frac{(r \sin \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} & |z| > |r| \end{aligned}$$

3.1.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού-z

Ο Μ.Ζ. έχει ορισμένες ιδιότητες οι οποίες τον καθιστούν ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη των σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζουμε με συντομία τις πιο χρήσιμες από αυτές και όλες μαζί τις παραθέτουμε στον Πίνακα 3.2.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Εάν

$$x_1(n) \xrightarrow{Z} X_1(z) \text{ με Π.Σ. } P_1$$

και

$$x_2(n) \xrightarrow{Z} X_2(z) \text{ με Π.Σ. } P_2$$

τότε

$$ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z) \text{ με Π.Σ. τουλάχιστον } P_1 \cap P_2 \quad (3.23)$$

όπου a, b σταθερές και $P_1 \cap P_2$ η τομή των περιοχών P_1 και P_2 . Η λέξη «τουλάχιστον» χρησιμοποιήθηκε για την περίπτωση κατά την οποία ο γραμμικός συνδυασμός είναι τέτοιος ώστε κάποια μηδενικά εξουδετερώνουν ορισμένους πόλους. Σε μια τέτοια περίπτωση η Π.Σ. είναι μεγαλύτερη από την τομή των δύο περιοχών.

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

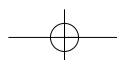
$$\text{Εάν } x(n) \xrightarrow{Z} X(z) \text{ με Π.Σ. } P$$

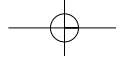
$$\text{τότε } x(n-m) \xrightarrow{Z} z^{-m} X(z) \text{ με Π.Σ. } P' \quad (3.24)$$

όπου $P' = P$ με ενδεχόμενο όμως την προσθήκη ή απόρριψη των τιμών 0 και ∞ , λόγω του παράγοντα z^{-m} .

Απόδειξη:

$$Z\{x(n-m)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) z^{-n} = z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) z^{-(n-m)} = z^{-m} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) z^{-l} = z^{-m} X(z)$$





ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Εάν $x_1(n) \xrightarrow{Z} X_1(z)$ με Π.Σ. P_1

και $x_2(n) \xrightarrow{Z} X_2(z)$ με Π.Σ. P_2

τότε $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$ με Π.Σ. τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$ (3.25)

Απόδειξη:

Από τον ορισμό της συνέλιξης της ενότητας 1.5 του Κεφαλαίου 1 γνωρίζουμε ότι

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)x_2(n-m).$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην (3.1) έχουμε:

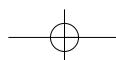
$$\begin{aligned} Z\{x_1(n) * x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x_1(n) * x_2(n)]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m) \right] z^{-n} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n-m)z^{-n} \right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) [z^{-m}X_2(z)] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)z^{-m}X_2(z) = X_1(z)X_2(z) \end{aligned}$$

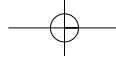
Στον Πίνακα 3.2 παραθέτουμε τις πιο γνωστές ιδιότητες του Μ.Ζ.

Πίνακας 3.2

Ιδιότητες του Μ.Ζ.

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός-z	Περιοχή σύγκλισης
	$x(n)$	$X(z)$	$P: R_1 < z < R_2$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	P_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	P_2
Γραμμικότητα	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$P_1 \cap P_2$ τουλάχιστον
Ολίσθηση στο χρόνο	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$	P , εκτός $z=0$ αν $m > 0$ ή $z=\infty$ αν $m < 0$
Κλιμάκωση στο πεδίο-z	$\alpha^n x(n)$	$X(\alpha^{-1}z)$	$ \alpha R_1 < z < \alpha R_2$





Κατοπτρισμός στο χρόνο	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_2} < z < \frac{1}{R_1}$
Συζυγία	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	P
Παραγώγιση στο πεδίο-z	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	P
Συνέλιξη	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	$P_1 \cap P_2$ τουλάχιστον
Πρώτη διαφορά	$x(n) - x(n-1)$	$(1-z^{-1})X(z)$	Τουλάχιστον η τομή της P και της $ z > 0$

Θεώρημα αρχικής τιμής Αν $x(n) = 0$ για $n < 0$, τότε $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} zX(z)$

Παράδειγμα 3.5

Υπολογίστε το Μ.Ζ. των σημάτων $x_2(n)$ και $x_3(n)$ του Παραδείγματος 3.4, βασιζόμενοι στο Μ.Ζ. του σήματος $x_1(n)$.

Λύση

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι $x_2(n) = x_1(n+2)$ και $x_3(n) = x_1(n-2)$. Άρα, με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης στο χρόνο, βρίσκουμε ότι

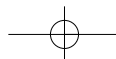
$$X_2(z) = z^2 X_1(z) = 3z^2 + 4z + 5 + z^{-2} + 2z^{-3} \text{ και } X_3(z) = z^{-2} X_1(z) = 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6} + 2z^{-7}.$$

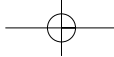
Ας σημειωθεί ότι λόγω του πολλαπλασιασμού επί z^2 η Π.Σ. του $X_2(z)$ δεν περιλαμβάνει το σημείο $z = \infty$, αν και αυτό ανήκε στην Π.Σ. του $X_1(z)$.

Το παράδειγμα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσουμε καλύτερα την ιδιότητα της ολίσθησης. Πράγματι, αν θυμηθούμε ότι ο συντελεστής του z^{-n} αντιστοιχεί στην τιμή του δείγματος στην χρονική στιγμή, καταλαβαίνουμε αμέσως ότι η καθυστέρηση ενός σήματος κατά m ($m > 0$) δείγματα, δηλαδή $x(n) \rightarrow x(n-m)$, ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό όλων των όρων του Μ.Ζ. επί z^{-m} . Ο συντελεστής του z^{-n} γίνεται συντελεστής του $z^{-(n+m)}$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.1

Να υπολογίσετε την έξοδο $y(n)$ του Παραδείγματος 1.6, αξιοποιώντας τις ιδιότητες του Μ.Ζ.





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.2

Να υπολογίσετε το Μ.Ζ. του σήματος $x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases}$

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε το Μ.Ζ. $X(z)$ της ακολουθίας $x(n)$ και είδαμε ότι:

Η Π.Σ. της συνάρτησης $X(z)$ είναι στη γενική περίπτωση, ένας κυκλικός δακτύλιος ($R_1 < |z| < R_2$) στο επίπεδο- z με κέντρο την αρχή των αξόνων. Σε ορισμένες περιπτώσεις $R_1 = 0$, οπότε η Π.Σ. γίνεται ένας δίσκος ακτίνας R_2 , ενώ σε άλλες $R_2 = \infty$, οπότε η Π.Σ. εκτείνεται σε όλο το επίπεδο $|z| > R_1$.

Η Π.Σ. δεν περιλαμβάνει του πόλους της συνάρτησης $X(z)$.

Εάν η $x(n)$ είναι πεπερασμένου μήκους, τότε η Π.Σ. είναι όλο το επίπεδο- z , με πιθανή εξαίρεση τα σημεία $z = 0$ και / ή $z = \infty$.

Εάν η $X(z)$ είναι ρητή και η $x(n)$ δεξιόπλευρη, τότε η Π.Σ. ορίζεται στο επίπεδο- z εκτός του κύκλου με ακτίνα τον πλέον απομακρυσμένο πόλο της $X(z)$. Εάν επιπλέον, η $x(n)$ είναι αιτιατή, τότε η Π.Σ. συμπεριλαμβάνει και την τιμή $z = \infty$.

Εάν η $X(z)$ είναι ρητή και η $x(n)$ αριστερόπλευρη, τότε η Π.Σ. ορίζεται στο επίπεδο- z εντός του κύκλου με ακτίνα τον πλησιέστερο στο κέντρο πόλο της $X(z)$. Εάν, επιπλέον, η $x(n)$ είναι αντι-αιτιατή (δηλαδή αριστερόπλευρη και ίση με 0 για $n > 0$), τότε η Π.Σ. συμπεριλαμβάνει και την τιμή $z = 0$.

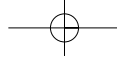
3.2 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός-z

Ο αντίστροφος Μ.Ζ. μας βοηθά να υπολογίσουμε το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ όταν γνωρίζουμε το Μ.Ζ. αυτού, $X(z)$. Συμβολικά γράφουμε $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$. Αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος Μ.Ζ. της $X(z)$ δίνεται από τη σχέση:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (3.26)$$

όπου c μια αριστερόστροφη κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης γύρω από την αρχή των αξόνων και εντός της Π.Σ. της $X(z)$. Για δεδομένη Π.Σ. ο αντίστροφος Μ.Ζ. είναι μοναδικά ορισμένος.

Ένας τρόπος να υπολογίσουμε την $x(n)$ είναι να αναπτύξουμε την $X(z)$ σε δυναμοσειρά (power-series expansion) ως προς z^{-1} , δηλαδή:



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \dots + x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \tag{3.27}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το ζητούμενο σήμα είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου. Όταν η $X(z)$ δίνεται σε κλειστή μορφή, λ.χ. ως μια ρητή συνάρτηση πολυωνύμων, ένα τέτοιο ανάπτυγμα δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί. Σε αυτές τις περιπτώσεις, για τον υπολογισμό της ακολουθίας $x(n)$, χρησιμοποιούμε είτε τη μέθοδο της ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα (partial-fraction expansion) είτε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων (residue method). Θα εξετάσουμε στα επόμενα εδάφια τον υπολογισμό του αντίστροφου M.Z. με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και με ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα.

3.2.1 Υπολογισμός του αντίστροφου M.Z. με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά

Η ανάπτυξη μιας ρητής συνάρτησης σε δυναμοσειρά επιτυγχάνεται συνήθως με *συνεχή διαίρεση* (long division). Η μέθοδος αυτή δεν καταλήγει σε μια αναλυτική έκφραση για την $x(n)$. Είναι μία αριθμητική μέθοδος με την οποία μπορούμε να υπολογίζουμε ένα νέο στοιχείο της $x(n)$ κάθε φορά.

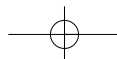
Παράδειγμα 3.6

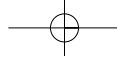
Να υπολογιστεί η δεξιόπλευρη ακολουθία $x(n)$ της οποίας ο M.Z. είναι:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,4z^{-1} - 0,12z^{-2}}$$

Λύση Η συνεχής διαίρεση του αριθμητή με τον παρανομαστή μας δίνει:

$$\begin{array}{r}
 1 + 0,4z^{-1} - 0,12z^{-2} \overline{) 1 + 1,6z^{-1} - 0,52z^{-2} + 0,4z^{-3} + \dots} \\
 \underline{1 + 2z^{-1}} \\
 1 + 0,4z^{-1} - 0,12z^{-2} \\
 \underline{1,6z^{-1} + 0,12z^{-2}} \\
 1,6z^{-1} + 0,64z^{-2} - 0,192z^{-3} \\
 \underline{- 0,52z^{-2} + 0,192z^{-3}} \\
 - 0,52z^{-2} - 0,208z^{-3} + 0,0624z^{-4} \\
 \underline{- 0,4z^{-3} - 0,0624z^{-4}} \\
 \dots \\
 \dots
 \end{array}$$





Επομένως η $X(z)$ μπορεί να εκφραστεί ως δυναμοσειρά:

$$X(z) = 1 + 1,6z^{-1} - 0,52z^{-2} + 0,4z^{-3} + \dots$$

Είναι φανερό ότι:

$$x(0) = 1, x(1) = 1,6, x(2) = -0,52, x(3) = 0,4, \dots$$

Συνεχίζοντας τη διαίρεση θα μπορούσαμε να πάρουμε και άλλα στοιχεία της $x(n)$.

3.2.2 Υπολογισμός του αντίστροφου M.Z. με ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα

Έστω $X(z)$ ρητή συνάρτηση της μορφής

$$X(z) = \frac{C(z)}{D(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}}{1 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}} \quad (3.28)$$

Θεωρήσαμε ότι $b_0 = 1$. Αυτό όμως δεν περιορίζει τη γενικότητα της έκφρασης, αφού εάν $b_0 \neq 1$, μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με b_0 και να καταλήξουμε στη μορφή της σχέσης (3.28). Μία ρητή συνάρτηση της μορφής αυτής ονομάζεται κανονική (proper) εάν $b_N \neq 0$ και $M < N$, δηλαδή όταν ο αριθμός των μηδενικών της συνάρτησης είναι μικρότερος του αριθμού των πόλων αυτής. Εάν η ρητή συνάρτηση είναι μη-κανονική ($M \geq N$), τότε αυτή μπορεί πάντοτε να εκφραστεί ως άθροισμα ενός πολωνύμου και μιας κανονικής ρητής συνάρτησης, εκτελώντας τη διαίρεση του $C(z)$ δια του $D(z)$, δηλαδή

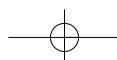
$$X(z) = \frac{C(z)}{D(z)} = c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_{M-N}z^{-(M-N)} + \frac{C_1(z)}{D(z)} = X_0(z) + X_1(z) \quad (3.29)$$

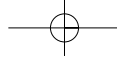
$$\text{όπου} \quad X_0(z) = c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_{M-N}z^{-(M-N)} = \sum_{q=0}^{M-N} c_q z^{-q} \quad (3.30)$$

$$\text{και} \quad X_1(z) = \frac{C_1(z)}{D(z)} \quad (3.31)$$

Ο υπολογισμός του αντίστροφου M.Z. του πολωνύμου $X_0(z)$ είναι προφανής και γίνεται απευθείας χωρίς επιπλέον πράξεις, από τον ορισμό του M.Z. (σχέση 3.1).

Η συνάρτηση $X_1(z)$ είναι κανονική ρητή συνάρτηση. Στόχος μας είναι να την αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα, δηλαδή να την εκφράσουμε ως άθροισμα απλών κλασμάτων και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τον αντίστροφο M.Z. κάθε κλάσματος ξεχωριστά. Λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας, ο αντίστροφος M.Z. της συνάρ-





τησης $X_1(z)$ θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αντίστροφων Μ.Ζ. των κλάσμάτων. Ας δούμε λοιπόν, πώς γίνεται η ανάπτυξη μιας κανονικής ρητής συνάρτησης σε μερικά κλάσματα.

Έστω ότι η $X(z)$ είναι κανονική ρητή συνάρτηση της μορφής (3.28). Για να απλοποιήσουμε την όλη ανάλυση, απαλείφουμε τις αρνητικές δυνάμεις του z πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί z^N , οπότε η σχέση γίνεται:

$$X(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_M z^{N-M}}{z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N} \quad (3.32)$$

Επειδή $N > M$ η συνάρτηση

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_0 z^{N-1} + a_1 z^{N-2} + \dots + a_M z^{N-M-1}}{z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N} \quad (3.33)$$

είναι πάντοτε κανονική. Για να αναπτύξουμε την τελευταία συνάρτηση σε μερικά κλάσματα, βρίσκουμε τις ρίζες p_1, p_2, \dots, p_N του παρονομαστή, δηλαδή τους πόλους της $X(z)$. Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την περίπτωση που οι πόλοι είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή είναι πολλαπλότητας 1. Σε μια τέτοια περίπτωση η (3.33) γράφεται ως

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{z - p_N} \quad (3.34)$$

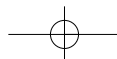
Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές A_1, A_2, \dots, A_N . Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.34) με καθέναν από τους όρους $(z - p_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$ και υπολογίζοντας την έκφραση που προκύπτει στις αντίστοιχες θέσεις των πόλων p_1, p_2, \dots, p_N . Έτσι, στη γενική περίπτωση θα έχουμε

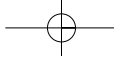
$$\frac{(z - p_k)X(z)}{z} = \frac{(z - p_k)A_1}{z - p_1} + \frac{(z - p_k)A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{(z - p_k)A_N}{z - p_N} \quad (3.35)$$

και, επομένως, για $z = p_k$ η σχέση αυτή θα μας δώσει το συντελεστή A_k , αφού όλοι οι άλλοι όροι του δευτέρου μέλους μηδενίζονται. Δηλαδή

$$A_k = \left. \frac{(z - p_k)X(z)}{z} \right|_{z=p_k} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.36)$$

Σημειώνεται ότι οι σχέσεις (3.34) και (3.36) ισχύουν τόσο για πραγματικούς, όσο και για μιγαδικούς πόλους.





Η διαδικασία της ανάπτυξης της $X(z)$ σε μερικά κλάσματα έχει ολοκληρωθεί στο σημείο αυτό, αφού έχουμε υπολογίσει τις τιμές A_1, A_2, \dots, A_N . Η $X(z)$ γράφεται τώρα ως

$$X(z) = A_1 \frac{z}{z - p_1} + A_2 \frac{z}{z - p_2} + \dots + A_N \frac{z}{z - p_N} \quad (3.37)$$

ή διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή κάθε μερικού κλάσματος με z έχουμε την τελική έκφραση του $X(z)$ σε μορφή αρνητικών δυνάμεων του z :

$$X(z) = A_1 \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + A_N \frac{1}{1 - p_N z^{-1}} \quad (3.38)$$

Ο αντίστροφος M.Z. $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$ μπορεί τώρα εύκολα να υπολογιστεί με τον αντίστροφο M.Z. κάθε μερικού κλάσματος ξεχωριστά και τελικά τον γραμμικό συνδυασμό τους. Από τον Πίνακα 3.1 μπορούμε να δούμε ότι

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} p_k^n u(n) & \text{αν Π.Σ.: } |z| > |p_k| \quad (\text{αιτιατό σήμα}) \\ -p_k^n u(-n-1) & \text{αν Π.Σ.: } |z| < |p_k| \quad (\text{μη αιτιατό σήμα}) \end{cases} \quad (3.39)$$

Το ποια από τις σχέσεις θα επιλέξουμε, εξαρτάται από την επιπλέον πληροφορία που έχουμε. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι το σήμα $x(n)$ είναι αιτιατό, τότε θα επιλέξουμε τη δεξιόπλευρη ακολουθία (πρώτη από τις σχέσεις 3.39) και ο αντίστροφος M.Z. της (3.38) θα ισούται με

$$x(n) = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots + A_N p_N^n) u(n) \quad (3.40)$$

Ας παρακολουθήσουμε την όλη διαδικασία υπολογισμού του αντίστροφου M.Z. μιας κανονικής ρητής συνάρτησης με τη μέθοδο της ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα, μέσα από το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.7

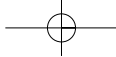
Να υπολογιστεί η δεξιόπλευρη ακολουθία $x(n)$ της συνάρτησης του Παραδείγματος 3.6.

Λύση

Καταρχήν απαλείφουμε τις αρνητικές δυνάμεις του z από τη συνάρτηση, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με το z^2 . Έτσι έχουμε:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0,4z^{-1} - 0,12z^{-2}} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 0,4z - 0,12}$$

Οι πόλοι της $X(z)$ είναι $p_1 = 0,2$ και $p_2 = -0,6$, οπότε η σχέση αυτή γράφεται στη



μορφή της (3.34) ως εξής:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{(z-0,2)(z+0,6)} = \frac{A_1}{z-0,2} + \frac{A_2}{z+0,6}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.36) υπολογίζουμε τα A_1 και A_2

$$A_1 = \left. \frac{(z-0,2)X(z)}{z} \right|_{z=0,2} = \left. \frac{z+2}{z+0,6} \right|_{z=0,2} = 2,75$$

$$A_2 = \left. \frac{(z+0,6)X(z)}{z} \right|_{z=-0,6} = \left. \frac{z+2}{z-0,2} \right|_{z=-0,6} = -1,75$$

Άρα η $X(z)$ μπορεί πλέον να εκφραστεί ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2,75}{z-0,2} - \frac{1,75}{z+0,6} \Rightarrow$$

$$X(z) = 2,75 \frac{z}{z-0,2} - 1,75 \frac{z}{z+0,6} \Rightarrow$$

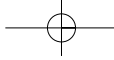
$$X(z) = 2,75 \frac{1}{1-0,2z^{-1}} - 1,75 \frac{1}{1+0,6z^{-1}}$$

Γνωρίζοντας ότι η ζητούμενη ακολουθία $x(n)$ είναι δεξιόπλευρη, υπολογίζουμε τον αντίστροφο M.Z. από την πρώτη σχέση της (3.39) ως

$$x(n) = 2,75(0,2)^n u(n) - 1,75(-0,6)^n u(n)$$

Αυτή είναι η ζητούμενη ακολουθία. Παρατηρούμε ότι για τις τιμές του $n = 0, 1, 2, 3$ παίρνουμε τα στοιχεία $x(0) = 1$, $x(1) = 1,6$, $x(2) = -0,52$, $x(3) = 0,4$, επιβεβαιώνοντας έτσι τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 3.6.

Η διαδικασία της ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα που εξετάσαμε μέχρι τώρα, εφαρμόζεται στην περίπτωση που έχουμε απλούς πόλους, δηλαδή πόλους διαφορετικούς μεταξύ τους. Εάν η $X(z)$ έχει πόλους πολλαπλότητας l , δηλαδή ο παρονομαστής της περιέχει παράγοντες της μορφής $(z-p_k)^l$, τότε η προηγούμενη διαδικασία δεν ισχύει όπως έχει, και πρέπει να τροποποιηθεί. Η περίπτωση αυτή, όμως, παρεκκλίνει από τους στόχους του παρόντος βιβλίου και δε θα εξεταστεί. Όπως επίσης δε θα εξεταστεί η περίπτωση υπολογισμού του αντίστροφου M.Z. με χρήση των ολοκληρωτι-



κόν υπολοίπων. Στη βιβλιογραφία του Κεφαλαίου δίνονται συγγράμματα τα οποία αναφέρονται εκτενώς στα θέματα αυτά.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.3

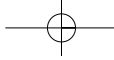
Να υπολογίσετε την $x(n)$ όταν γνωρίζετε ότι $X(z) = (z-1)/(z^2-1,9z+0,84)$ και η Π.Σ. είναι (α) $|z| > 1$ ή (β) $|z| < 0,5$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.4

Να υπολογίσετε τον αντίστροφο Μ.Ζ. της $X(z) = (6+z^{-1})/(1-0,25z^{-2})$.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή είδαμε τις μεθόδους υπολογισμού του αντίστροφου Μ.Ζ. Συγκεκριμένα, είδαμε ότι όταν μας δίνεται ο Μ.Ζ. μιας ακολουθίας, ο οποίος είναι συνήθως ρητής μορφής, μπορούμε να βρούμε την ίδια την ακολουθία είτε αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρά εκτελώντας τη λεγόμενη συνεχή διαίρεση, είτε αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα. Η πρώτη από τις μεθόδους αυτές δεν καταλήγει σε κάποια αναλυτική μορφή για την ζητούμενη ακολουθία, και χρησιμοποιείται κυρίως για τον υπολογισμό μερικών από τους πρώτους όρους του αναπτύγματος.



3.3 Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός-z

Ο Μ.Ζ. που γνωρίσαμε μέχρι τώρα αναφέρεται σε σήματα τα οποία ορίζονται σε όλο το διάστημα του χρόνου από το $-\infty$ έως το $+\infty$ ($-\infty < n < +\infty$) και ονομάζεται αμφίπλευρος Μ.Ζ. (bilateral z -transform). Εκτός αυτού, υπάρχει και ο *μονόπλευρος* Μ.Ζ. (one-sided or unilateral z -transform), ο οποίος είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για την ανάλυση διακριτών συστημάτων τα οποία αρχικά δεν βρίσκονται σε ηρεμία. Αυτά τα συστήματα περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με *μη μηδενικές αρχικές συνθήκες*. Με άλλα λόγια, ένα τέτοιο σύστημα αρχικά δεν βρίσκεται σε ηρεμία, λόγω διεγέρσεων που εφαρμόστηκαν σ' αυτό πριν ακόμα εφαρμοστεί η είσοδος $x(n)$ κατά τη χρονική στιγμή $n = 0$. Οι αρχικές τιμές $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ της εξόδου του συστήματος, οι οποίες οφείλονται στις προηγούμενες διεγέρσεις, αποτελούν τις αρχικές συνθήκες αυτού.

Ο μονόπλευρος Μ.Ζ. της ακολουθίας $x(n)$ ορίζεται ως

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.41)$$

και γράφουμε συνήθως

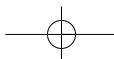
$$x(n) \xrightarrow{Z^+} X^+(z) = Z^+ \{x(n)\} \quad (3.42)$$

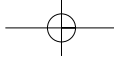
Παρατηρούμε ότι στο μονόπλευρο Μ.Ζ. το άθροισμα υπολογίζεται μόνο για τις μη-αρνητικές τιμές του n , ανεξάρτητα από το αν η ακολουθία $x(n)$ είναι μηδενική ή μη για $n < 0$. Δηλαδή ο μονόπλευρος Μ.Ζ. της $x(n)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο αμφίπλευρος Μ.Ζ. της $x(n)u(n)$. Επειδή η ακολουθία $x(n)u(n)$ είναι πάντοτε μία δεξιόπλευρη ακολουθία, η Π.Σ. του $X^+(z)$ είναι πάντοτε το *εξωτερικό ενός κύκλου*. Πολλές από τις ιδιότητες του μονόπλευρου Μ.Ζ. είναι ίδιες με εκείνες του αμφίπλευρου Μ.Ζ., όπως οι ιδιότητες της γραμμικότητας, κλιμάκωσης στο επίπεδο-z, επέκτασης στο χρόνο, συζυγούς ακολουθίας και παραγώγισης. Μία από τις ιδιότητες που διαφέρουν, και παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι εκείνη της ολίσθησης, την οποία και θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

Εάν $x(n) \xrightarrow{Z^+} X^+(z)$

τότε $x(n-m) \xrightarrow{Z^+} z^{-m} \left[X^+(z) + \sum_{n=1}^m x(-n)z^n \right]$ για $m > 0$ (3.43)





$$x(n+m) \xrightarrow{Z^+} z^m \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{m-1} x(n)z^{-n} \right] \text{ για } m > 0 \quad (3.44)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} Z^+ \{x(n-m)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n} = \sum_{l=-m}^{\infty} x(l)z^{-(l+m)} = z^{-m} \left[\sum_{l=-m}^{\infty} x(l)z^{-l} \right] = \\ &= z^{-m} \left[\sum_{l=-m}^{-1} x(l)z^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l} \right] = z^{-m} \left[\sum_{n=1}^m x(-n)z^n + X^+(z) \right] \end{aligned}$$

Η σχέση (3.43) αφορά τη δεξιά ολίσθηση ή καθυστέρηση της ακολουθίας $x(n)$, ενώ η (3.44) την αριστερή ολίσθηση ή προήγηση αυτής. Συγκρίνοντας τις σχέσεις αυτές με την αντίστοιχη σχέση (3.24), για τον αμφίπλευρο Μ.Ζ., γίνεται φανερό ότι κατά τη δεξιά ολίσθηση, νέα δείγματα εισέρχονται στο διάστημα $[0, +\infty)$ και άρα πρέπει να λάβουν και αυτά μέρος στους υπολογισμούς. Τα νέα αυτά δείγματα είναι τα $x(-1)$, $x(-2)$, ..., $x(-m)$. Κατά την αριστερή ολίσθηση, κάποια από τα υπάρχοντα δείγματα βρίσκονται εκτός του διαστήματος $[0, +\infty)$ και συνεπώς πρέπει να αφαιρεθούν από το συνολικό άθροισμα. Πρόκειται για τα δείγματα $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(m-1)$.

Παράδειγμα 3.8

Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος Μ.Ζ. των σημάτων $x_1(n) = a^n u(n)$ και $x_2(n) = x_1(n+1)$.

Λύση

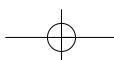
Ο υπολογισμός του $X_1^+(z)$ γίνεται εύκολα από τον ορισμό του μονόπλευρου Μ.Ζ. (3.41). Άλλωστε, το αποτέλεσμα είναι ίδιο με εκείνο του αμφίπλευρου Μ.Ζ. αφού πρόκειται για αιτιατή ακολουθία (βλ. σχέση 3.8). Έχουμε λοιπόν:

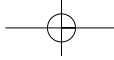
$$X_1^+(z) = X_1(z) = 1/(1-az^{-1}) \quad \text{με Π.Σ. } |z| > |a|.$$

Για τον υπολογισμό του $X_2^+(z)$ εφαρμόζουμε το θεώρημα της ολίσθησης (σχέση 3.44) για $m = 1$ και παίρνουμε

$$X_2^+(z) = z^1 [X_1^+(z) - x_1(0)z^0] = z[X_1^+(z) - 1] = z/(1-az^{-1}) - z$$

αφού $x_1(0) = 1$.





Σύνοψη ενότητας

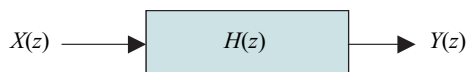
Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε το μονόπλευρο Μ.Ζ., ο οποίος χρησιμοποιείται στην ανάλυση διακριτών συστημάτων, όταν αυτά δεν βρίσκονται σε αρχική ηρεμία. Ο μονόπλευρος Μ.Ζ. δεν περιέχει πληροφορία για το σήμα στις αρνητικές χρονικές στιγμές. Ο μονόπλευρος Μ.Ζ. του σήματος $x(n)$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο Μ.Ζ. του σήματος $x(n)u(n)$, το οποίο είναι αιτιατό. Άρα, η Π.Σ. του Μ.Ζ. ορίζεται πάντα στο εξωτερικό ενός κύκλου.

3.4 Ο μετασχηματισμός-z στην ανάλυση συστημάτων

Ο Μ.Ζ. παίζει πρωτεύοντα ρόλο στη μελέτη LTI συστημάτων διακριτού χρόνου. Από τον ορισμό της συνέλιξης (σχέση 1.37) όπως και την ιδιότητα της συνέλιξης (σχέση 3.25), γίνεται προφανές ότι $Y(z) = H(z)X(z)$ ή:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.45)$$

όπου $X(z)$, $Y(z)$, $H(z)$ είναι οι Μ.Ζ. της εισόδου $x(n)$, της εξόδου $y(n)$ και της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ του συστήματος, αντίστοιχα. Διαγραμματικά αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Η συνάρτηση $H(z)$ ονομάζεται *συνάρτηση συστήματος* (system function) ή *συνάρτηση μεταφοράς* (transfer function) του συστήματος. Για τιμές του z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή για $z = e^{j\omega}$, η $H(z)$ μας δίνει την απόκριση συχνότητας (frequency response) του συστήματος, υπό την προϋπόθεση, βέβαια, ότι ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην Π.Σ. της $H(z)$. Πολλές από τις ιδιότητες ενός συστήματος εξάγονται κατευθείαν από τα χαρακτηριστικά των πόλων, των μηδενικών και της Π.Σ. της συνάρτησης μεταφοράς αυτού, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

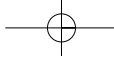


Σχήμα 3.3

Γενικό διάγραμμα συστήματος διακριτού χρόνου

3.4.1 Αιτιατότητα LTI συστήματος

Είδαμε στην ενότητα 1.4 ότι ένα σύστημα είναι αιτιατό όταν η έξοδος του εξαρτάται μόνο από τις παρούσες και προηγούμενες τιμές της εισόδου του συστήματος και όχι από μελλοντικές τιμές αυτής. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέλιξης (εξίσωση 1.17), μπορούμε να συνδυάσουμε την ιδιότητα της αιτιατότητας με την κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος. Συγκεκριμένα, για να είναι αιτιατό ένα LTI σύστημα διακριτού χρόνου, θα πρέπει η $y(n)$ να μην εξαρτάται από τη $x(m)$ για $m >$



n . Από τη σχέση (1.17), βλέπουμε ότι για να ισχύει αυτό, θα πρέπει όλοι οι συντελεστές $h(n-m)$ οι οποίοι πολλαπλασιάζουν τις τιμές του $x(m)$ για $m > n$ να είναι ίσοι με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η κρουστική απόκριση ενός αιτιατού LTI συστήματος διακριτού χρόνου θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$h(n) = 0 \text{ για } n < 0 \quad (3.46)$$

Η συνθήκη αυτή, για ένα αιτιατό LTI σύστημα διακριτού χρόνου, συνεπάγεται ότι το άθροισμα της συνέλιξης της σχέσης (1.17) γίνεται

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m) \quad (3.47)$$

και η ισοδύναμη σχέση (1.18) γίνεται

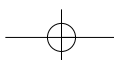
$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad (3.48)$$

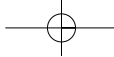
Από τη σχέση (3.46) παρατηρούμε ότι η $h(n)$ είναι μια δεξιόπλευρη ακολουθία. (Υπενθυμίζεται ότι ο Μ.Ζ. αυτής ισούται με την $H(z)$, τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος). Άρα, όπως είδαμε στην ενότητα 3.1, η Π.Σ. του Μ.Ζ. μιας τέτοιας ακολουθίας θα είναι το εξωτερικό ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, συμπεριλαμβανομένου και του απείρου. Στην περίπτωση κατά την οποία η $H(z)$ είναι ρητή συνάρτηση, αυτό σημαίνει ότι η Π.Σ. θα ορίζεται στο εξωτερικό του κύκλου με ακτίνα τον πλέον απομακρυσμένο πόλο αυτής. Επειδή μάλιστα, η τιμή $z = \infty$ ανήκει στην Π.Σ., συνεπάγεται ότι ο βαθμός του πολωνόμου του αριθμητή της $H(z)$ δε θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος του βαθμού του παρανομαστή, όταν τα πολώνυμα αυτά εκφραστούν ως συνάρτηση του z .

3.4.2 Ευστάθεια LTI συστήματος

Στην ενότητα 1.4 είδαμε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές εάν κάθε φραγμένη είσοδος παράγει μια φραγμένη έξοδο (BIBO). Ας δούμε τώρα τις συνθήκες υπό τις οποίες τα LTI συστήματα διακριτού χρόνου είναι ευσταθή. Αρχίζουμε θεωρώντας ότι η είσοδος $x(n)$ είναι φραγμένη κατά μέτρο, δηλαδή $|x(n)| < B$ για όλα τα n . Εάν η είσοδος αυτή εφαρμοστεί σ' ένα LTI σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h(n)$, τότε το μέτρο της εξόδου θα είναι

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \right| \quad (3.49)$$





Επειδή η απόλυτη τιμή του αθροίσματος αριθμών είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση του αθροίσματος των απολύτων τιμών των αριθμών, η σχέση (3.49) γίνεται

$$|y(n)| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| |x(n-m)| \quad (3.50)$$

και αφού $|x(n-m)| < B$ για όλες τις τιμές των m και n , η σχέση αυτή καταλήγει στην

$$|y(n)| \leq B \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| \quad \text{για όλα τα } n. \quad (3.51)$$

Άρα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι εάν η κρουστική απόκριση είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή, δηλαδή εάν

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| \leq \infty \quad (3.52)$$

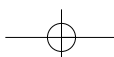
τότε η $y(n)$ είναι φραγμένη κατά μέτρο και κατά συνέπεια το σύστημα είναι ευσταθές. Η σχέση (3.52) αποτελεί την ικανή συνθήκη για την ευστάθεια ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου. Αποδεικνύεται ότι αυτή είναι επίσης, και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου. Γνωρίζουμε όμως ότι η 3.52 αποτελεί και την ικανή συνθήκη για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Άρα, για ευσταθή συστήματα, ο μετασχηματισμός Fourier της $h(n)$ συγκλίνει και κατά συνέπεια, η Π.Σ. της $H(z)$ πρέπει να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Άρα, ένα LTI σύστημα είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν η Π.Σ. της συνάρτησης μεταφοράς του $H(z)$ περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, $|z| = 1$.

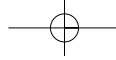
Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω συμπεράσματα, τα οποία προέκυψαν από την αιτιότητα και την ευστάθεια ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου, μπορούμε να καταλήξουμε στην ικανή και την αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα αιτιατό σύστημα και ευσταθές: Ένα αιτιατό LTI σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν όλοι οι πόλοι της $H(z)$ βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή το μέτρο τους είναι μικρότερο της μονάδας.

3.4.3 Εξισώσεις Διαφορών

Μία μεγάλη κατηγορία συστημάτων είναι αυτή που τα σήματα εισόδου-εξόδου συνδέονται με μια εξίσωση διαφορών (difference equation) της μορφής

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i) \quad (3.53)$$





όπου $x(n)$ η ακολουθία εισόδου, $y(n)$ η ακολουθία εξόδου και a_i, b_i οι συντελεστές του συστήματος. Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι η τρέχουσα τιμή του δείγματος εξόδου προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός του παρόντος και των προηγούμενων δειγμάτων της εισόδου, καθώς και από προηγούμενες τιμές της εξόδου. Η σύνδεση μεταξύ της εξίσωσης αυτής και της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος μπορεί εύκολα να γίνει με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της γραμμικότητας (σχέση 3.23) και της ολίσθησης στο χρόνο (σχέση 3.24) του Μ.Ζ. Έτσι, παίρνοντας το Μ.Ζ. και των δύο μελών της (3.53) έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{i=0}^M \alpha_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} Y(z) \quad (3.54)$$

$$\text{ή} \quad Y(z) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} \right) = X(z) \cdot \sum_{i=0}^M \alpha_i z^{-i} \quad (3.55)$$

και, κατά συνέπεια:

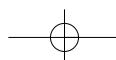
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M \alpha_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad (3.56)$$

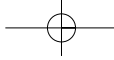
Με άλλα λόγια, η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος, του οποίου η εξίσωση διαφορών είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές, είναι πάντοτε ρητή. Εάν οι συντελεστές b_i του παρανομαστή είναι μηδενικοί ($b_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$), τότε οι παραπάνω εξισώσεις (3.53) και (3.56) γίνονται αντίστοιχα:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M \alpha_i x(n-i) \quad (3.57)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^M \alpha_i z^{-i} \quad (3.58)$$

Η έξοδος του συστήματος $y(n)$ εξαρτάται τώρα μόνο από την τρέχουσα και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου, και όχι από τις προηγούμενες τιμές της εξόδου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $h(n) \xleftrightarrow{Z} H(z)$, καταλαβαίνουμε ότι $\alpha_i = h(n)$. Δηλαδή, οι συντελεστές α_i συμπίπτουν με την κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος. Τα LTI συστήματα αυτής της κατηγορίας ονομάζονται συστήματα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR, Finite Impulse Response), επειδή το μήκος της ακολουθίας $h(n)$ είναι πεπερασμένο. Τα συστήματα αυτά είναι πάντοτε ευσταθή, αφού η κρουστική





τους απόκριση $h(n)$ είναι πεπερασμένου μήκους και άρα αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή (βλ. σχέση 3.52).

Τα συστήματα με συνάρτηση μεταφοράς της μορφής (3.56) στην οποία τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές του παρανομαστή είναι διάφορος του μηδενός, ονομάζονται συστήματα *άπειρης κρουστικής απόκρισης* (IIR, Infinite Impulse Response), επειδή η αντίστοιχη κρουστική απόκριση $h(n)$ αποτελείται από άπειρους όρους. (Θυμηθείτε την ενότητα 3.2 στην οποία ο υπολογισμός του αντίστροφου Μ.Ζ. μιας ρητής συνάρτησης με τη μέθοδο της ανάπτυξης σε δυναμοσειρά ή σε μερικά κλάσματα, κατέληγε σε ακολουθία απείρων όρων). Για αιτιατά συστήματα, οι πόλοι της $H(z)$ θα πρέπει να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου για να είναι ευσταθή.

Μια διαφορετική ταξινόμηση των συστημάτων είναι σε *επαναληπτικά* (recursive) ή *μη επαναληπτικά* (non recursive) συστήματα^[1]. Επαναληπτικά είναι τα συστήματα στα οποία η εξίσωση διαφορών εκφράζεται με τη μορφή (3.53) με $b_i \neq 0$. Σ' αυτά τα συστήματα η έξοδος $y(n)$ σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται και από τιμές της εξόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές $y(n-1)$, $y(n-2)$,... Έχουμε δηλαδή, ανατροφοδότηση (feedback) τιμών της εξόδου στο σύστημα. Στα μη επαναληπτικά συστήματα, η εξίσωση διαφορών εκφράζεται με τη μορφή (3.57), γεγονός που σημαίνει πως η έξοδος $y(n)$ σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου.

3.4.4 Δομές συστημάτων διακριτού χρόνου

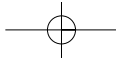
Τα συστήματα διακριτού χρόνου παριστάνονται συχνά με τη μορφή διαγραμμάτων ροής. Πρόκειται για ένα απλό και κατανοητό τρόπο αναπαράστασης των εξισώσεων διαφορών και των συναρτήσεων μεταφοράς. Ας μελετήσουμε αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης με τη βοήθεια της εξίσωσης διαφορών ενός αιτιατού ψηφιακού φίλτρου δεύτερης τάξης. Το ότι το συγκεκριμένο φίλτρο είναι δεύτερης τάξης, σημαίνει ότι στην εξίσωση (3.53) έχουμε $N = 2$. Το ότι αυτό είναι και αιτιατό, σημαίνει επιπλέον ότι $M \leq N$. Άρα η γενική μορφή της εξίσωσης διαφορών ενός τέτοιου φίλτρου θα είναι

$$y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2) \quad (3.59)$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς

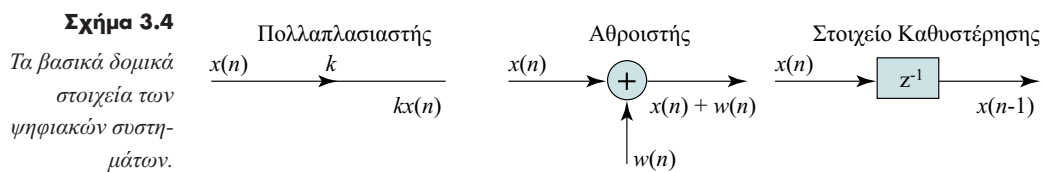
$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \quad (3.60)$$

[1] Στην ελληνική βιβλιογραφία τα συστήματα αυτά θα τα δούμε και ως *αναδρομικά* και ως *μη αναδρομικά*.

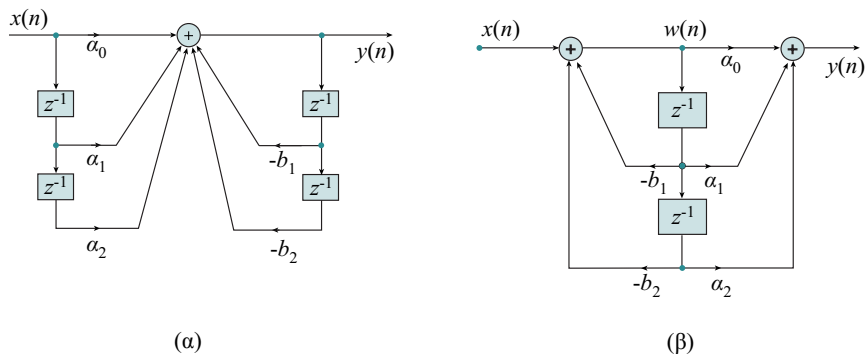


Για τον υπολογισμό των εξισώσεων διαφορών της μορφής (3.59), ή γενικότερα της μορφής (3.53), χρειαζόμαστε πολλαπλασιαστές, αθροιστές και στοιχεία καθυστέρησης. Οι αντίστοιχες σχηματικές τους αναπαραστάσεις δίνονται από το Σχήμα 3.4.

Το διάγραμμα ροής που αντιστοιχεί στην εξίσωση (3.59) δίνεται από το Σχήμα 3.5α. Το σύμβολο z^{-1} αντιπροσωπεύει καθυστέρηση 1 μονάδας χρόνου (μοναδιαία καθυστέρηση, unit delay), γεγονός που μας είναι ήδη γνωστό από την ιδιότητα της ολίσθησης του M.Z. (σχέση 3.24).

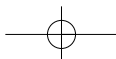


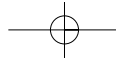
Σχήμα 3.5
 Πραγματοποίηση δομής δεύτερης τάξης: (α) άμεση μορφή τύπου-1, (β) κανονική ή άμεση μορφή τύπου-2



Η πραγματοποίηση^[2] του φίλτρου δεύτερης τάξης με το διάγραμμα του Σχήματος 3.5α, προκύπτει άμεσα από τη σχέση (3.59) και ονομάζεται *άμεση μορφή τύπου-1* (direct form type – 1). Παρατηρούμε ότι μια τέτοια δομή πραγματοποίησης απαιτεί τέσσερα στοιχεία καθυστέρησης. Ένας διαφορετικός τρόπος πραγματοποίησης του ίδιου φίλτρου είναι ο ακόλουθος:

[2] Με τον όρο «πραγματοποίηση» (realization) εννοούμε τον τρόπο με τον οποίο αναπαριστούμε και τελικά υπολογίζουμε μία εξίσωση διαφορών ή την αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς. Με τον όρο «υλοποίηση» (implementation) εννοούμε τον τελικό υπολογισμό αυτών με τη βοήθεια ειδικών ψηφιακών κυκλωμάτων ή υπολογιστών.





Αρχίζοντας από τη συνάρτηση μεταφοράς (3.60), έχουμε ότι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) \cdot \frac{1}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(z) = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) \cdot \frac{X(z)}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}$$

ή
$$Y(z) = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) \cdot W(z) \tag{3.61}$$

όπου
$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \tag{3.62}$$

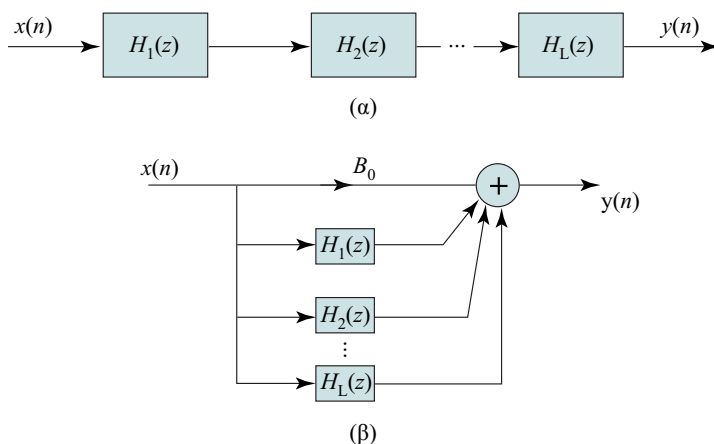
Ο αντίστροφος Μ.Ζ. των τελευταίων δύο σχέσεων (3.61) και (3.62) μας δίνει αντίστοιχα:

$$y(n) = a_0w(n) + a_1w(n-1) + a_2w(n-2) \tag{3.63}$$

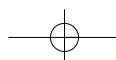
$$w(n) = x(n) - b_1w(n-1) - b_2w(n-2) \tag{3.64}$$

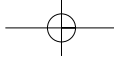
Η δομή πραγματοποίησης των τελευταίων σχέσεων δίνεται από το Σχήμα 3.5β και είναι γνωστή ως *άμεση μορφή τύπου-2 ή κανονική μορφή* πραγματοποίησης του ίδιου φίλτρου. Στην περίπτωση αυτή απαιτούνται μόνο δύο στοιχεία καθυστέρησης.

Συστήματα διακριτού χρόνου τάξης υψηλότερης της δεύτερης, που μόλις εξετάσαμε, μπορούν να πραγματοποιηθούν με τρόπο αντίστοιχο εκείνου του Σχήματος 3.5. Στην πράξη όμως, οι υψηλής τάξης συναρτήσεις ($N > 2$) πραγματοποιούνται ως συνδυασμοί δομών πρώτης και / ή δεύτερης τάξης σε *σειρά* (cascade) ή *παράλληλα* (parallel), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6. Αυτό γίνεται για να μειωθούν τα σφάλματα των υπολογισμών κατά την υλοποίησή τους με ψηφιακά συστήματα τα οποία χρησιμοποιούν πεπερασμένη ακρίβεια για την αναπαράσταση των συντελεστών και τον υπολογισμό των πράξεων.



Σχήμα 3.6
 Δομές υψηλής τάξης ως συνδυασμός δομών πρώτης ή δεύτερης τάξης (α) σε σειρά και (β) παράλληλα





Για την *πραγματοποίηση σε σειρά* (cascade realisation), η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots H_L(z) = \prod_{i=1}^L H_i(z) \quad (3.65)$$

όπου L το ακέραιο μέρος του $(N+1)/2$ και $H_i(z)$ δομή πρώτης ή δεύτερης τάξης:

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{0i} + \alpha_{1i}z^{-1}}{1 + b_{1i}z^{-1}} \quad \text{πρώτης τάξης} \quad (3.66)$$

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{0i} + \alpha_{1i}z^{-1} + \alpha_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \quad \text{δεύτερης τάξης} \quad (3.67)$$

Τρία είναι τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν κατά την πραγματοποίηση σε σειρά:

- 1) με ποιο τρόπο θα πρέπει να συνδυαστούν οι αριθμητές με τους παρανομαστές, μετά την παραγοντοποίηση της $H(z)$
- 2) με ποια σειρά θα πρέπει οι επιμέρους δομές να συνδεθούν, και
- 3) η ανάγκη κλιμάκωσης, δηλαδή μείωσης του πλάτους του σήματος σε ενδιάμεσα σημεία της δομής, ώστε αυτό να μην είναι ούτε πολύ μεγάλο, ούτε πολύ μικρό.

Για την *παράλληλη πραγματοποίηση* (parallel realisation), η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αναλύεται σε άθροισμα παραγόντων ως:

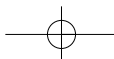
$$H(z) = B_0 + \sum_{i=1}^L H_i(z) \quad (3.68)$$

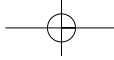
όπου L το ακέραιο μέρος του $(N+1)/2$, $B_0 = \alpha_M/b_N$ και

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{0i}}{1 + b_{1i}z^{-1}} \quad \text{πρώτης τάξης} \quad (3.69)$$

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{0i} + \alpha_{1i}z^{-1}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \quad \text{δεύτερης τάξης} \quad (3.70)$$

Στην παράλληλη πραγματοποίηση δεν παίζει ρόλο η σειρά διασύνδεσης των επιμέρους δομών. Επιπλέον, η κλιμάκωση είναι πιο εύκολη υπόθεση, αφού μπορεί να γίνει για κάθε μία δομή ανεξάρτητα. Τα μηδενικά όμως των επιμέρους δομών είναι περισσότερο ευαίσθητα στα σφάλματα κβάντισης των συντελεστών.





3.4.5 Απόκριση συχνότητας συστημάτων διακριτού χρόνου

Η σχέση εισόδου-εξόδου ενός LTI συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h(n)$ δίνεται από την εξίσωση της συνέλιξης (1.18)

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad (3.71)$$

όπου $x(n)$, $y(n)$ οι ακολουθίες εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Αν η ακολουθία εισόδου $x(n)$ είναι εκθετικής μορφής

$$x(n) = e^{j\omega n} \quad -\infty < n < \infty \quad (3.72)$$

τότε η έξοδος $y(n)$ θα ισούται με

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} \quad (3.73)$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$y(n) = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \quad (3.74)$$

όπου

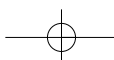
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} \quad (3.75)$$

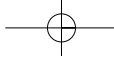
Η ποσότητα $H(e^{j\omega})$ ονομάζεται *απόκριση συχνότητας* (frequency response) του LTI συστήματος και μας παρέχει μια περιγραφή αυτού στο πεδίο της συχνότητας. Από την εξίσωση (3.75) παρατηρούμε ότι η $H(e^{j\omega})$ αποτελεί ουσιαστικά το μετασχηματισμό *Fourier* διακριτού χρόνου (DTFT) της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ του συστήματος. Η εξίσωση (3.74) μας λέει ότι για μια μιγαδική ακολουθία εισόδου $x(n)$ γωνιακής συχνότητας ω , η έξοδος είναι επίσης μια μιγαδική ακολουθία της ίδιας γωνιακής συχνότητας, πολλαπλασιασμένη όμως με το μιγαδικό παράγοντα $H(e^{j\omega})$. Ο παράγοντας αυτός εξαρτάται από τη συχνότητα εισόδου ω και την κρουστική ακολουθία $h(n)$.

Η $H(e^{j\omega})$, όπως είδαμε άλλωστε και στην ενότητα 2.1 για τον DTFT, είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση του ω με περίοδο 2π και μπορεί να εκφραστεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega}) + jH_i(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (3.76)$$

όπου $H_r(e^{j\omega})$ και $H_i(e^{j\omega})$ είναι πραγματικές συναρτήσεις ως προς ω , και αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $H(e^{j\omega})$ αντίστοιχα, και





$$\Theta(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\} = \angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left[\frac{H_i(e^{j\omega})}{H_r(e^{j\omega})} \right] \quad (3.77)$$

Η ποσότητα $|H(e^{j\omega})|$ ονομάζεται *απόκριση μέτρου* (magnitude response) και η ποσότητα $\Theta(\omega)$ *απόκριση φάσης* (phase response) του LTI συστήματος διακριτού χρόνου. Και οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι πραγματικές συναρτήσεις του ω .

Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος διακριτού χρόνου μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συστήματος. Φυσικά, όπως έχουμε ήδη σχολιάσει, η απόκριση συχνότητας έχει νόημα μόνο για ευσταθή συστήματα. Είδαμε ότι η απόκριση συχνότητας του συστήματος δεν είναι άλλη από το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής του απόκρισης. Για να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier του συστήματος πρέπει να υπολογίσουμε το Μ.Ζ. πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή για $z = e^{j\omega}$. Έχουμε, επομένως, από τον ορισμό του Μ.Ζ.:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (3.78)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ογεωμετρικός ή γραφικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας που θα εξετάσουμε αμέσως τώρα. Είναι ένας εύκολος και χρήσιμος τρόπος για να υπολογίζουμε ποιοτικά κυρίως, την απόκριση συχνότητας σχετικά απλών συστημάτων και βασίζεται στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$. Ταυτόχρονα αναδεικνύει και μια φυσική σημασία των πόλων και μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς. Συγκεκριμένα, η ρητή συνάρτηση $H(z)$ της σχέσης (3.56) γράφεται ως:

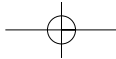
$$H(z) = \frac{b_0 z^{N-M} (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} \quad (3.79)$$

όπου z_1, z_2, \dots, z_M τα M μηδενικά και p_1, p_2, \dots, p_N οι N πόλοι αυτής.

Για $z = e^{j\omega}$ η σχέση αυτή γίνεται:

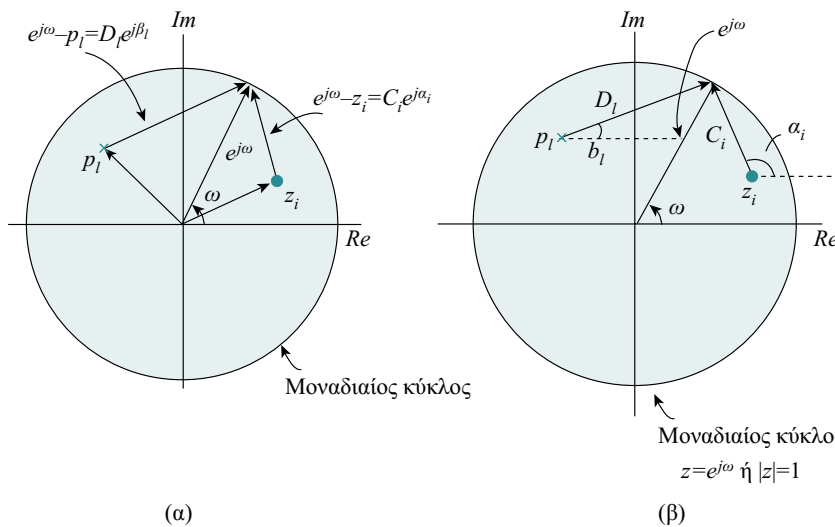
$$H(e^{j\omega}) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{(e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2) \dots (e^{j\omega} - z_M)}{(e^{j\omega} - p_1)(e^{j\omega} - p_2) \dots (e^{j\omega} - p_N)} \quad (3.80)$$

και εκφράζοντας κάθε μιγαδικό αριθμό του αριθμητή και παρανομαστή σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:



$$H(e^{j\omega}) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{(C_1 e^{j\alpha_1})(C_2 e^{j\alpha_2}) \dots (C_M e^{j\alpha_M})}{(D_1 e^{j\beta_1})(D_2 e^{j\beta_2}) \dots (D_N e^{j\beta_N})} \equiv V e^{j\theta} \quad (3.81)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε μιγαδικός z_i μπορεί να αναπαρασταθεί και από ένα διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο και ότι ο $e^{j\omega}$ είναι το διάνυσμα μέτρου ίσου με τη μονάδα με κέντρο την αρχή των αξόνων και γωνίας ω με τον άξονα των θετικών πραγματικών, τότε το $e^{j\omega} - z_i = C_i e^{j\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, M$, αντιπροσωπεύει το διάνυσμα από το μηδενικό z_i μέχρι εκείνο το σημείο του μοναδιαίου κύκλου, όπου καταλήγει το $e^{j\omega}$ (Βλ. Σχήμα 3.7α). Αντίστοιχα ορίζονται και τα διανύσματα $e^{j\omega} - p_l = D_l e^{j\beta_l}$, $l = 1, 2, \dots, N$, για τους πόλους της σχέσης (3.80). Παρατηρούμε λοιπόν ότι το C_i είναι η απόσταση του μηδενικού z_i από το σημείο του μοναδιαίου κύκλου όπου καταλήγει το διάνυσμα $e^{j\omega}$ και D_l είναι η απόσταση του πόλου p_l από το ίδιο σημείο. Οι φάσεις α_i και β_l είναι οι γωνίες των αντιστοίχων διανυσμάτων με τον άξονα των θετικών πραγματικών. Αυτές οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις φαίνονται στο Σχήμα 3.7β.



Σχήμα 3.7

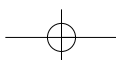
Γραφικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας.

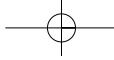
Από τη σχέση (3.81) βρίσκουμε πλέον ότι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ισούται με

$$V = |b_0| \frac{C_1 C_2 \dots C_M}{D_1 D_2 \dots D_N} \quad (3.82)$$

και η φάση της με

$$\theta = \angle b_0 + (N - M)\omega + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_M) - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N) \quad (3.83)$$



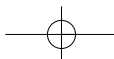


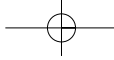
Η φάση του συντελεστή b_0 είναι 0 ή π , ανάλογα με το πρόσημο αυτού (θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα).

Η γεωμετρική αναπαράσταση είναι πολύ χρήσιμη στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι θέσεις των πόλων και των μηδενικών επηρεάζουν την απόκριση μέτρου και φάσης ενός συστήματος. Για παράδειγμα, εάν ένα μηδενικό z_i βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, τότε το μέτρο του αντίστοιχου διανύσματος C_i θα ισούται με μηδέν για $\omega = \angle z_i$, με αποτέλεσμα και το μέτρο $|H(e^{j\omega})|$ να γίνεται 0 για τη συχνότητα αυτή. Όμοια, όταν ένας πόλος p_l βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, τότε το μέτρο του αντίστοιχου διανύσματος D_l θα ισούται με 0 για $\omega = \angle p_l$, με αποτέλεσμα το μέτρο $|H(e^{j\omega})|$ να γίνεται άπειρο για τη συχνότητα αυτή. Γίνεται λοιπόν φανερό, ότι η παρουσία ενός μηδενικού κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αναγκάζει το μέτρο της απόκρισης συχνότητας να παίρνει πολύ μικρές τιμές, για τιμές της συχνότητας κοντά στο συγκεκριμένο σημείο του μοναδιαίου κύκλου. Κατ' αναλογία, η παρουσία ενός πόλου κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, αναγκάζει το μέτρο της απόκρισης συχνότητας να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές για τιμές της συχνότητας κοντά στο συγκεκριμένο σημείο του μοναδιαίου κύκλου. Επομένως, οι πόλοι επιφέρουν το αντίθετο αποτέλεσμα από τα μηδενικά. Θέτοντας ένα μηδενικό κοντά σ' ένα πόλο, αυτό εξουδετερώνει την επίδραση του πόλου. Το ίδιο συμβαίνει και αν θέσουμε ένα πόλο κοντά σ' ένα μηδενικό. Αυτό γίνεται κατανοητό και από την εξίσωση (3.80), όπου φαίνεται ότι για $z_i = p_l$ οι όροι $e^{j\omega} - z_i$ και $e^{j\omega} - p_l$ απλοποιούνται.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι η γεωμετρική αναπαράσταση των πόλων και των μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος είναι ουσιώδους σημασίας για τον προσδιορισμό της απόκρισης συχνότητας αυτού. Και αντίθετα, εάν μας δίνεται η επιθυμητή απόκριση συχνότητας, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος εκείνου που έχει την απόκριση αυτή. Με άλλα λόγια, μπορούμε να σχεδιάσουμε το κατάλληλο φίλτρο το οποίο παρουσιάζει την απόκριση συχνότητας που μας ενδιαφέρει. Πριν όμως προχωρήσουμε σε κάποια παραδείγματα σχετικά με τον γεωμετρικό προσδιορισμό της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος, θα ήταν καλό να κάνουμε μια σύντομη αναφορά στα φίλτρα.

Ο όρος *φίλτρο* (filter) αναφέρεται σε ένα LTI σύστημα το οποίο χρησιμοποιείται για την επιλογή διαφόρων συχνοτήτων μεταξύ αυτών που εφαρμόζονται στην είσοδό του. Οι συχνότητες που θα επιλεγούν καθορίζονται από την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του συστήματος, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από τις παραμέτρους του συστήματος, λ.χ. τους συντελεστές a_i , b_i της εξίσωσης διαφορών (3.53). Επομένως, επιλέγοντας κατάλληλα τους συντελεστές, μπορούμε να σχεδιάσουμε φίλτρα τα οποία επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων με συνιστώσες συχνότητας σε ορισμένες

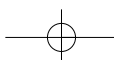


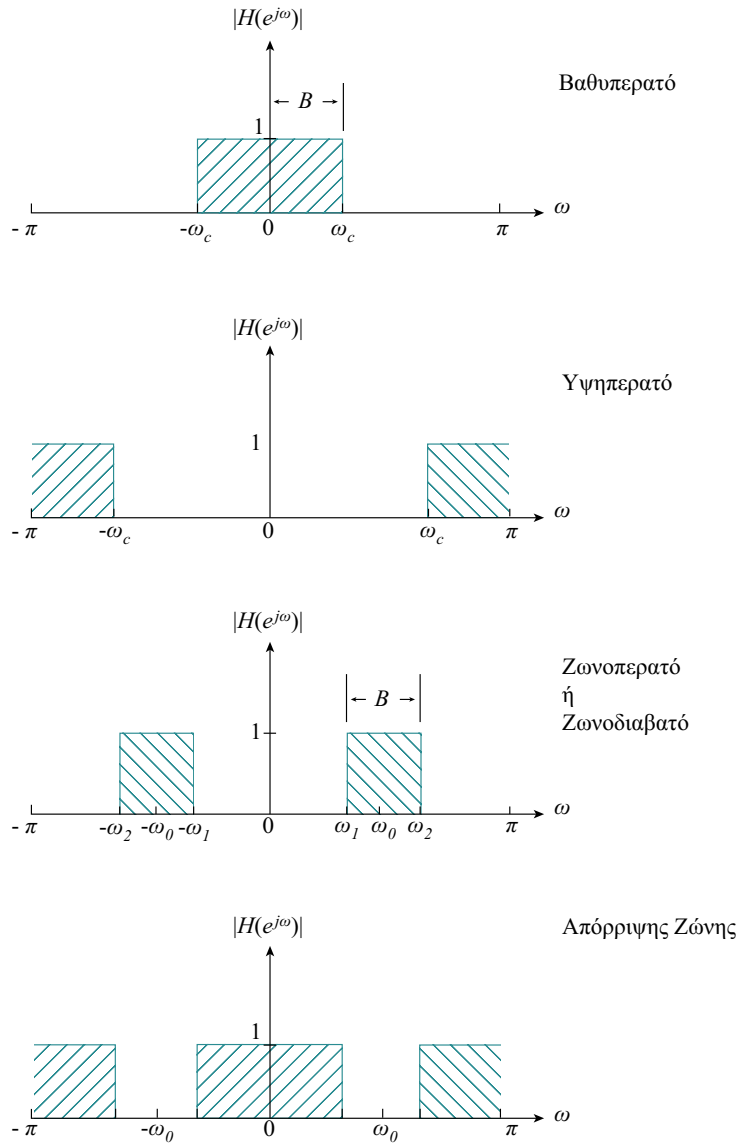
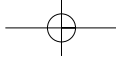


περιοχές, ενώ εξασθενίζουν τις συνιστώσες συχνότητας σε άλλες περιοχές. Γενικά, ένα LTI σύστημα τροποποιεί το φάσμα του σήματος $X(e^{j\omega})$ σύμφωνα με την απόκριση $H(e^{j\omega})$ αυτού, δίνοντας στην έξοδο ένα σήμα με φάσμα $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$. Με άλλα λόγια, η $H(e^{j\omega})$ δρα ως *συνάρτηση βάρους* (weighting function) για τις διαφορετικές συνιστώσες της συχνότητας του σήματος εισόδου. Από αυτή την άποψη, μπορούμε να πούμε ότι κάθε LTI σύστημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα φίλτρο, ακόμη και αν αυτό δεν εμποδίζει τη διέλευση σε κάποιες ή σε όλες τις συχνότητες. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι όροι «LTI σύστημα» και «φίλτρο» χρησιμοποιούνται ο ένας αντί του άλλου.

Τα φίλτρα ταξινομούνται σε *βαθυπερατά* (lowpass), *υψηπερατά* (highpass), *ζωνοπερατά* (bandpass) και *απόρριψης ζώνης* (bandstop), ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους στο πεδίο της συχνότητας. Η ιδανική απόκριση μέτρου των φίλτρων αυτών φαίνεται στο Σχήμα 3.8. Οι συχνότητες ω_c , ω_1 , ω_2 ονομάζονται *συχνότητες αποκοπής* (cutoff frequencies) και ορίζουν τα όρια μεταξύ των συχνοτήτων που επιτρέπεται να διέλθουν από το σύστημα και αυτών που απορρίπτονται. Η περιοχή συχνοτήτων στην οποία επιτρέπεται η διέλευση αποτελεί τη *ζώνη διέλευσης* (passband), ενώ η περιοχή συχνοτήτων στην οποία δεν επιτρέπεται η διέλευση ονομάζεται *ζώνη απόρριψης* ή *ζώνη αποκοπής* (stopband). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8, τα ιδανικά φίλτρα έχουν ζώνη διέλευσης σταθερού κέρδους, δηλαδή σταθερής τιμής (συνήθως ίσης με 1) και ζώνη αποκοπής μηδενικού κέρδους.

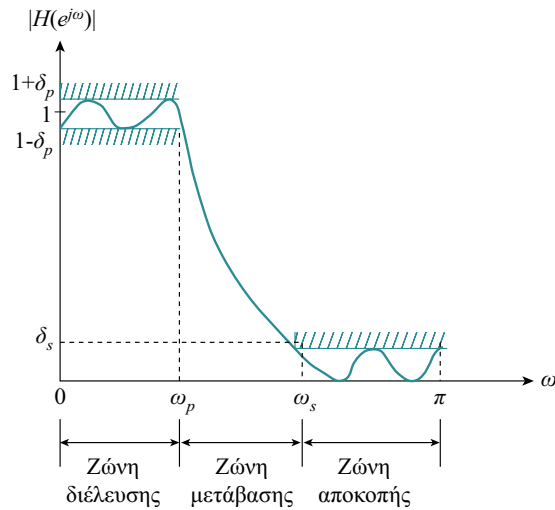
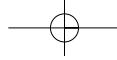
Στην πραγματικότητα όμως, η μορφή ενός φίλτρου αποκλίνει από τις ιδανικές αυτές μορφές, όπως για παράδειγμα αυτή του Σχήματος 3.9 για ένα βαθυπερατό φίλτρο. Η μετάβαση από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής δεν γίνεται ακαριαία, και καθορίζει έτσι μια νέα περιοχή συχνοτήτων, τη λεγόμενη *ζώνη μετάβασης* (transition band). Η συχνότητα ω_p αναφέρεται και ως *όριο ζώνης διέλευσης* (passband edge), και η συχνότητα ω_s ως *όριο ζώνης αποκοπής* (stopband edge). Η ζώνη μετάβασης καθορίζεται μεταξύ των συχνοτήτων ω_p και ω_s . Επίσης, το κέρδος στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται. Για παράδειγμα, μπορεί να παρουσιάζεται κάποια κυμάτωση (απόκλιση) γύρω από τις τιμές 1 και 0 αντίστοιχα, η οποία συμβολίζεται με δ_p και δ_s για την κάθε περιοχή αντίστοιχα.





Σχήμα 3.8

Απόκριση μέτρου των βασικών ιδανικών φίλτρων διακριτού χρόνου



Σχήμα 3.9

Μη ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο

Παράδειγμα 3.9

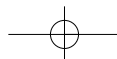
Να προσδιοριστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος διακριτού χρόνου το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = (z + 0,5)/(z - 0,5)$ με $|z| > 0,5$.

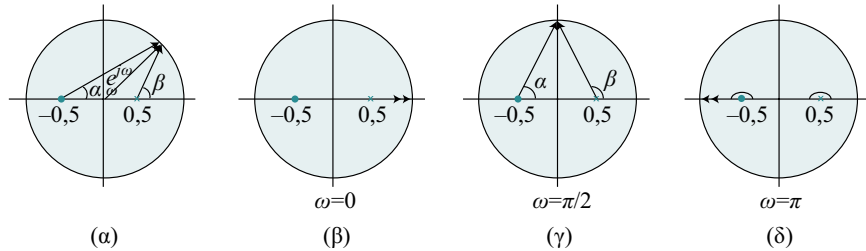
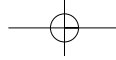
Λύση

Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος, πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς για όλες τις τιμές $|z| = 1$ ή $z = e^{j\omega}$. Έτσι, με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,5 + e^{j\omega}}{-0,5 + e^{j\omega}} = \frac{C e^{j\alpha}}{D e^{j\beta}} = V e^{j\theta}$$

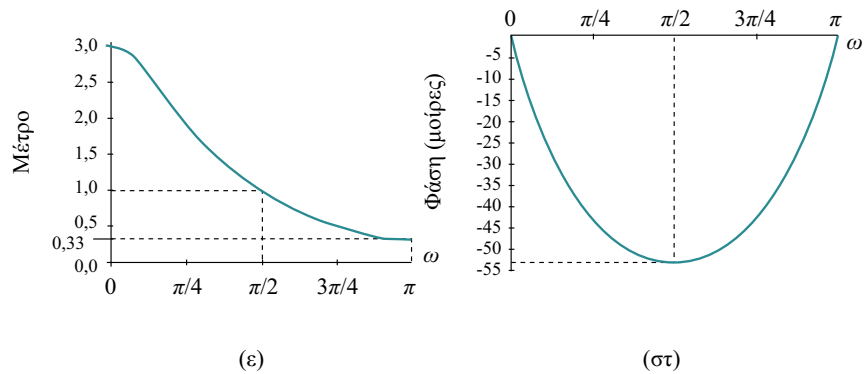
όπου $V = C/D$ και $\theta = \alpha - \beta$. Γραφικά, οι υπολογισμοί αυτοί αρχίζουν με την τοποθέτηση στο μιγαδικό επίπεδο-z του πόλου στο σημείο $z = 0,5$ (σύμβολο x) και του μηδενικού στο σημείο $z = -0,5$ (σύμβολο o), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.10α. Στη συνέχεια, για κάθε γωνία ω υπολογίζουμε το μέτρο V και την φάση θ . Το μέτρο και η φάση της απόκρισης συχνότητας του συγκεκριμένου συστήματος δείχνονται στο Σχήμα 3.10ε και 3.10στ αντίστοιχα.





Σχήμα 3.10

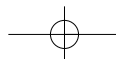
Γεωμετρικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας του Παραδείγματος 3.9: (α)–(δ) διάγραμμα πόλων–μηδενικών για διαφορετικές συχνότητες, (ε)–(στ) μέτρο και φάση της απόκρισης

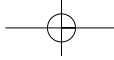


Οι υπολογισμοί αυτοί επιβεβαιώνονται εύκολα με τη βοήθεια των σχημάτων 3.10β–3.10δ. Έτσι, για γωνία ίση με 0 (Σχήμα 3.10β) $C = 1,5, D = 0,5, \alpha = \beta = 0$ και, κατά συνέπεια, $V = 3$ και $\Theta = 0$. Για γωνία ίση με $\pi/2$ (Σχήμα 3.10γ) $C = D, \alpha < \beta$ και άρα $V = 1$ και $\Theta < 0$. Για γωνία ίση με π (Σχήμα 3.10δ) $C = 0,5, D = 1,5, \alpha = \beta = \pi$ και άρα $V = 1/3$ και $\Theta = 0$. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα βαθυπερατό φίλτρο. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας $|H(e^{j\omega})|$ είναι συμμετρική συνάρτηση γύρω από το σημείο $\omega = \pi$, ενώ η φάση είναι αντι-συμμετρική γύρω από το ίδιο σημείο. Επιπλέον, επιβεβαιώνεται ότι η απόκριση συχνότητας είναι περιοδική.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.5

Η κρουστική απόκριση ενός ευσταθούς LTI συστήματος διακριτού χρόνου δίνεται από τη σχέση $h(n) = a^n u(n)$ με $a = 0,5$. Να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.





Παράδειγμα 3.10

Να σχεδιαστεί ψηφιακό φίλτρο το οποίο να αποκόπτει τη συχνότητα ω_0 .

Λύση

Τα φίλτρα αυτής της κατηγορίας ονομάζονται *φίλτρα αποκοπής ή απόρριψης συχνότητας* (notch filters). Τέτοια φίλτρα είναι συνήθως πολύ χρήσιμα σε όργανα ή συστήματα εγγραφής στα οποία θέλουμε να αποκόψουμε τη συχνότητα των 50 Hz της γραμμής τροφοδοσίας που παρεισδύει σ' αυτά.

Για να δημιουργήσουμε ένα μηδενικό στην απόκριση συχνότητας για μια συγκεκριμένη συχνότητα ω_0 , απλώς εισάγουμε ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών μηδενικών πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και σε μία γωνία ω_0 , δηλαδή $z_{1,2} = 1e^{\pm j\omega_0}$ (Βλ. Σχήμα 3.11α). Κατά συνέπεια, η συνάρτηση μεταφοράς του FIR φίλτρου που προκύπτει είναι:

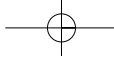
$$H(e^{j\omega}) = b_0(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}) = b_0(1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})$$

Σχεδιάζοντας την απόκριση συχνότητας του συστήματος αυτού παρατηρούμε ότι αυτό μηδενίζει τη συχνότητα ω_0 , ταυτόχρονα όμως, εξασθενίζει σημαντικά και τις συχνότητες γύρω από την ω_0 . (Στο Σχήμα 3.11α φαίνεται η απόκριση συχνότητας για $\omega_0 = \pi/4$). Για να μειώσουμε το εύρος των συχνοτήτων που επηρεάζονται, θα πρέπει να καταφύγουμε σε τεχνικές σχεδιασμού FIR φίλτρων μεγαλύτερης τάξης, όπως αυτές παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο. Μια διαφορετική προσέγγιση είναι αυτή της εισαγωγής πόλων στη συνάρτηση του συστήματος. Έστω, λοιπόν, ότι τοποθετούμε ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών πόλων στα σημεία $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$, $0 < r < 1$, δηλαδή στην ίδια γωνία (συχνότητα) που βρίσκονται και τα μηδενικά (Βλ. Σχήμα 3.11β). Το αποτέλεσμα των πόλων είναι η εισαγωγή συντονισμού στην περιοχή γύρω από τα μηδενικά και συνεπώς η ελάττωση του εύρους των συχνοτήτων που επηρεάζονται. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γίνεται τώρα:

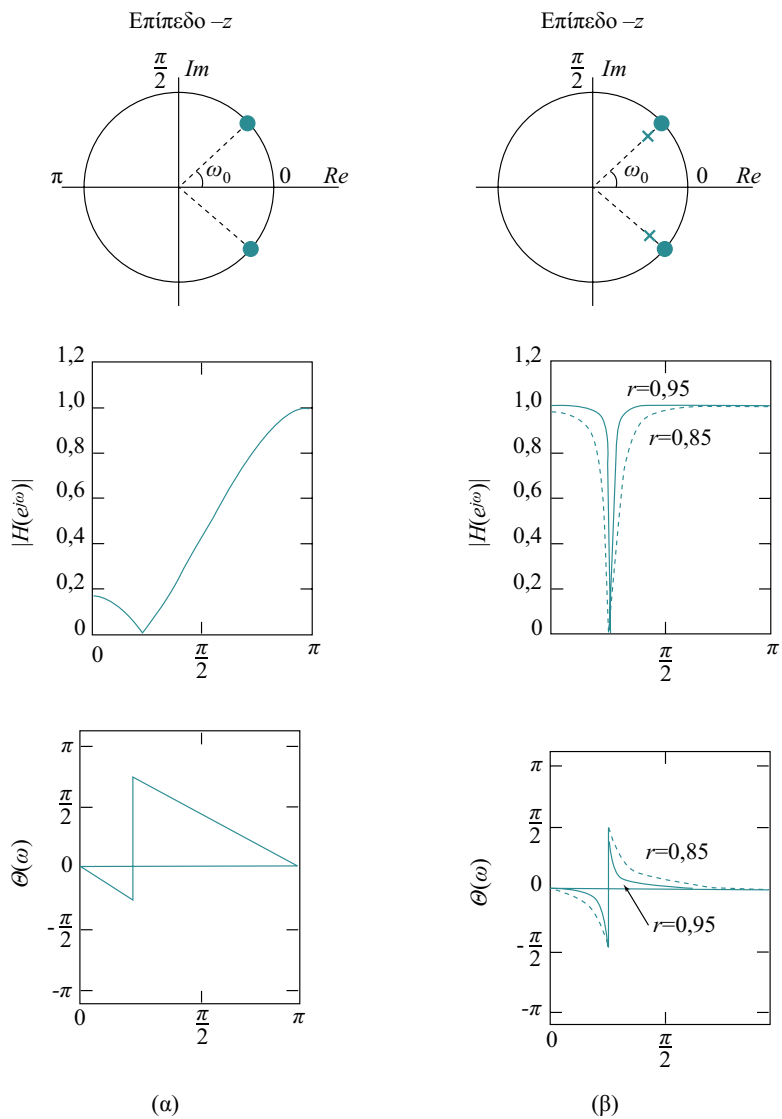
$$H(e^{j\omega}) = b_0 \frac{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})} = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 3.11β για $\omega_0 = \pi/4$ και $r = 0,85$ ή $r = 0,95$ και $b_0 = 1$. Συγκρίνοντας αυτή με την απόκριση του FIR φίλτρου του Σχήματος 3.11α, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της εισαγωγής των πόλων ήταν η σημαντική μείωση του εύρους των συχνοτήτων γύρω από τη συχνότητα ω_0 .

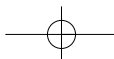
Τέλος, η σύγκριση της τελευταίας συνάρτησης μεταφοράς με εκείνη της σχέσης (3.60) μας οδηγεί στην εύρεση των τιμών των συντελεστών του φίλτρου, δηλαδή a_0

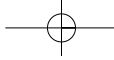


$= 1, a_1 = -2\cos\omega_0, a_2 = 1, b_1 = -2r\cos\omega_0, b_2 = r^2$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που $\omega_0 = \pi/4$ και $r = 0,85$ οι συντελεστές αυτοί είναι αντίστοιχα: $a_0 = 1, a_1 = -1,41, a_2 = 1, b_1 = -1,2, b_2 = 0,72$. Συνεπώς, η πραγματοποίηση του δεύτερης τάξης φίλτρου το οποίο εξετάζουμε, μπορεί να γίνει με μία από τις άμεσες μορφές τύπου-1 ή τύπου-2 του Σχήματος 3.5, με τιμές συντελεστών αυτές που μόλις υπολογίσαμε.



Σχήμα 3.11
 Διάγραμμα πόλων
 - μηδενικών και
 απόκριση συχνό-
 τητας (α) του FIR
 και (β) του IIR
 φίλτρου του
 Παραδείγματος
 3.10.





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.6

Ποια η έξοδος του συστήματος $y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$, όταν η είσοδος είναι $x(n) = \delta(n) - (1/3)\delta(n-1)$;

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.7

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού LTI συστήματος διακριτού χρόνου ισούται με $H(z) = 1/(1 + 0,5z^{-1})$. Εξετάστε αν το σύστημα είναι ευσταθές και σχεδιάστε τη δομή πραγματοποίησης του συστήματος καθώς και την απόκριση συχνότητας αυτού.

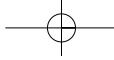
Σύνοψη ενότητας

Στην αυτή ενότητα ασχοληθήκαμε με την ανάλυση συστημάτων βασιζόμενοι στον Μ.Ζ. Είδαμε ότι από τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος μπορούμε άμεσα να εξάγουμε συμπεράσματα για την αιτιατότητα και την ευστάθεια αυτού. Είδαμε επίσης ότι από τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη εξίσωση διαφορών αυτού, όπως και το αντίστροφο. Γνωρίσαμε τις δομές πραγματοποίησης των συστημάτων διακριτού χρόνου και αναφερθήκαμε στην αναγκαιότητα πραγματοποίησης δομών υψηλής τάξης με δομή πρώτης ή / και δεύτερης τάξης σε σειρά ή παράλληλα. Τέλος, μελετήσαμε την απόκριση συχνότητας των συστημάτων διακριτού χρόνου και ασχοληθήκαμε με το γεωμετρικό (γραφικό) προσδιορισμό αυτής. Είδαμε ότι η απόκριση συχνότητας προκύπτει από τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, υπολογίζοντας αυτή πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στο Κεφάλαιο αυτό ασχοληθήκαμε με το Μ.Ζ. σημάτων διακριτού χρόνου, και διαπιστώσαμε ότι πρόκειται για ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο στη μελέτη διακριτών σημάτων και συστημάτων, αντίστοιχο του μετασχηματισμού Laplace για σήματα και συστήματα συνεχούς-χρόνου. Είδαμε ότι:

Η συνέλιξη δύο ακολουθιών ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων Μ.Ζ. τους.



Ο καθορισμός της Π.Σ. του Μ.Ζ. είναι πάντοτε απαραίτητος.

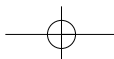
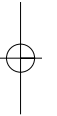
Η Π.Σ. αιτιατής ακολουθίας εκτείνεται στο εξωτερικό ενός κύκλου ακτίνας ίσης με το μέτρο του πλέον απομακρυσμένου πόλου του Μ.Ζ. από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου-z.

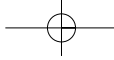
Τα LTI συστήματα, τα οποία περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές, έχουν ρητές συναρτήσεις μεταφοράς.

Ο μονόπλευρος Μ.Ζ. μας λύνει το πρόβλημα του υπολογισμού της απόκρισης διακριτών συστημάτων με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ενός συστήματος διακριτού χρόνου, μπορούμε άμεσα να εξάγουμε συμπεράσματα για την αιτιατότητα και ευστάθεια του συστήματος. Επίσης, εύκολα προσδιορίζουμε την εξίσωση διαφορών του συστήματος και τη δομή πραγματοποίησης αυτού.

Η απόκριση συχνότητας ενός ευσταθούς συστήματος προσδιορίζεται από τη συνάρτηση μεταφοράς αυτού για $z = e^{j\omega}$, δηλαδή για τις τιμές του z που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Η χρήση του διαγράμματος πόλων-μηδενικών οδηγεί σε εύκολο γεωμετρικό (γραφικό) προσδιορισμό της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος.



**Βιβλιογραφία κεφαλαίου***ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ*

Σ.Θεοδωρίδης, Κ.Μπερμπερίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων*, Τυπωθήτω Γ. Δαρδανός, Αθήνα, 1998.

Ν.Καλουπτσίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι* Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα, 1993.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

E.C.Ifeachor, B.W. Jervis, *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Second Edition, Pearson Education Limited, 2002.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-Based Approach*, Second Edition, McGraw Hill, 2001.

S.J.Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.

A.V.Oppenheim, A.S.Willsky, *Signals & Systems*, Second Edition, Prentice-Hall, 1997.

J.P.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, 1996.

R.D.Strum, D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988 .

ΟΔΗΓΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗΣ

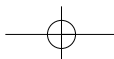
Σ.Θεοδωρίδης, Κ.Μπερμπερίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων & Συστημάτων*, Τυπωθήτω Γ. Δαρδανός, 1998.

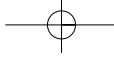
Το Κεφάλαιο 5 αναφέρεται σε σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου. Γίνεται αναλυτική αναφορά στις ιδιότητες του μετασχηματισμού- z και δίνονται παραδείγματα και ασκήσεις.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-Based Approach*, Second Edition, McGraw Hill, 2001.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια σχετικά σύντομη αναφορά στο μετασχηματισμό- z , στις ιδιότητες και στις εφαρμογές του. Περιέχονται πολλά παραδείγματα τα οποία υλοποιούνται σε Matlab.

A.V.Oppenheim, A.S.Willsky, *Signals & Systems*, Second Edition, Prentice-Hall, 1997.

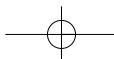
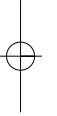


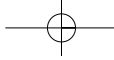


Εκτενής αναφορά στο μετασχηματισμό-z, με πολλά παραδείγματα και με αυστηρή μαθηματική θεμελίωση γίνεται στο Κεφάλαιο 10 του βιβλίου. Υπάρχουν επίσης πολλές ασκήσεις με τις απαντήσεις τους.

J.P.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, 1996.

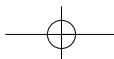
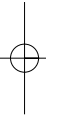
Το Κεφάλαιο 3 του βιβλίου αναφέρεται στο M.Z. Εξαιρετική παρουσίαση με πολλά παραδείγματα και ασκήσεις.

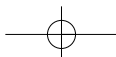
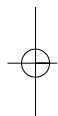
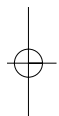
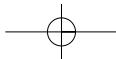




Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική

absolutely summable	αθροίσιμος κατ' απόλυτη τιμή
bandpass filter	ζωνοδιαβατό ή ζωνοπερατό φίλτρο
bandstop filter	φίλτρο απόρριψης ζώνης
bilateral transform	αμφίπλευρος μετασχηματισμός
cascade realisation	πραγματοποίηση σε σειρά
cutoff frequency	συχνότητα αποκοπής
difference equation	εξίσωση διαφορών
feedback	ανάδραση, ανατροφοδότηση
frequency response	απόκριση συχνότητας
highpass filter	υψηπερατό φίλτρο
left-sided	αριστερόπλευρος
long division	συνεχής διαίρεση
lowpass filter	βαθυπερατό φίλτρο
magnitude response	απόκριση μέτρου
notch filter	φίλτρο αποκοπής (απόρριψης) συχνότητας
passband	ζώνη διέλευσης
phase response	απόκριση φάσης
recursive	επαναληπτικός, αναδρομικός
right-sided	δεξιόπλευρος
ring	δακτύλιος
ROC	Π.Σ., περιοχή σύγκλισης
stopband	ζώνη απόρριψης ή αποκοπής
system function	συνάρτηση συστήματος
transfer function	συνάρτηση μεταφοράς
transition band	ζώνη μετάβασης
two-sided	αμφίπλευρος
unilateral transform	μονόπλευρος μετασχηματισμός
unit circle	μοναδιαίος κύκλος
unit delay	μοναδιαία καθυστέρηση
z -plane	επίπεδο- z





4

Ψηφιακά φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των ψηφιακών φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (*Finite Impulse Response – FIR*). Επίσης, θα γνωρίσουμε τις δύο πιο σημαντικές μεθόδους σχεδίασής τους και θα αναλύσουμε εκτενώς τη μέθοδο των παραθύρων. Τα FIR φίλτρα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος λόγω δύο πολύ σημαντικών ιδιοτήτων που παρουσιάζουν, και τις οποίες επίσης θα εξετάσουμε εδώ: τη γραμμική απόκριση φάσης και την ευστάθεια.

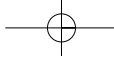
Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Όταν ολοκληρώσετε τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού θα είστε σε θέση να:

- Σχεδιάζετε τη γενική δομή ενός FIR ψηφιακού φίλτρου
- Γνωρίζετε τα πλεονεκτήματά τους, για τα οποία άλλωστε και τα χρησιμοποιούμε
- Καθορίζετε τις προδιαγραφές ενός FIR φίλτρου
- Υπολογίζετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ενός FIR φίλτρου
- Κατανοείτε το ρόλο της γραμμικής απόκρισης φάσης στη διατήρηση της μορφής του σήματος
- Υπολογίζετε την απόκριση φάσης στα φίλτρα αυτά
- Σχεδιάζετε ένα FIR φίλτρο με τη μέθοδο των παραθύρων
- Εξηγείτε τι είναι βέλτιστο φίλτρο και σε τι πλεονεκτεί η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων σε σχέση με εκείνη των παραθύρων
- Επιλέγετε την απαιτούμενη ακρίβεια των συντελεστών του FIR φίλτρου για να επιτευχθούν τα επιθυμητά χαρακτηριστικά

Έννοιες κλειδιά

- Πεπερασμένη κρουστική απόκριση
- Συμμετρική κρουστική απόκριση



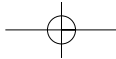
- Γραμμική απόκριση φάσης
- Ευστάθεια των FIR φίλτρων
- Μέθοδος σχεδίασης με παράθυρα
- Συνάρτηση παραθύρου
- Φάσμα παραθύρου
- Φαινόμενο Gibbs
- Βέλτιστο φίλτρο
- Υλοποίηση γραμμικής απόκρισης φάσης
- Κβάντιση των συντελεστών

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Τα γραμμικά ψηφιακά φίλτρα που θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουν πεπερασμένη χρονική διάρκεια απόκριση σε είσοδο μοναδιαίας κρούσης. Στη διεθνή βιβλιογραφία τα συναντούμε ως *Finite Impulse Response* ή *FIR* φίλτρα. Αποτελούν ουσιαστικά μερική περίπτωση των φίλτρων άπειρης κρουστικής απόκρισης (*IIR*). Από τα γραμμικά ψηφιακά φίλτρα, προτιμούνται συνήθως τα *FIR* έναντι των *IIR*, λόγω της ευστάθειας στη λειτουργία τους και της γραμμικής απόκρισης που παρουσιάζουν στη φάση. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τα είδη και τα χαρακτηριστικά των *FIR* φίλτρων και θα μελετήσουμε τη μέθοδο σχεδίασης τους με τα παράθυρα. Τέλος, θα περιγράψουμε δομές υλοποίησης των *FIR* φίλτρων, καθώς και τα προβλήματα που προκύπτουν κατά την υλοποίηση αυτή. Απαραίτητο γνωστικό υπόβαθρο αποτελεί η ύλη του προηγούμενου κεφαλαίου.

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τις ακόλουθες ενότητες:

- 4.1 Χαρακτηριστικά των *FIR* φίλτρων
- 4.2 Τύποι και προδιαγραφές των *FIR* φίλτρων
- 4.3 Μέθοδοι σχεδίασης των *FIR* φίλτρων
- 4.4 Θέματα υλοποίησης *FIR* φίλτρων



4.1 Χαρακτηριστικά των FIR φίλτρων

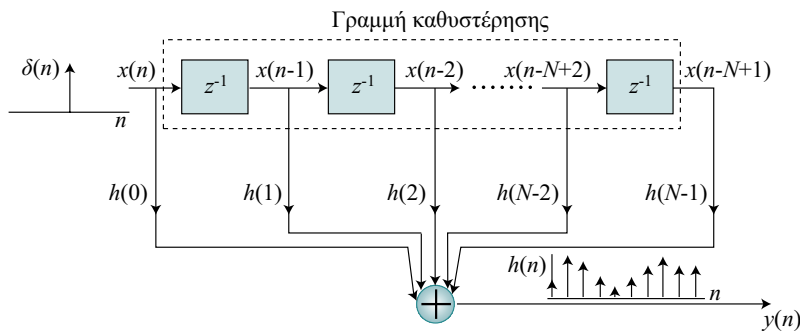
Η γενική δομή των FIR φίλτρων έχει όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Αποτελείται από μία γραμμή καθυστέρησης (delay line), όπου ολισθαίνουν τα δείγματα του σήματος εισόδου $x(n)$, και από τους πολλαπλασιαστές $h(m)$. Τα αποτελέσματα των πολλαπλασιασμών προστίθενται για να δώσουν την τελική έξοδο του φίλτρου $y(n)$. Είναι προφανές ότι η έξοδος $y(n)$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δειγμάτων εισόδου $x(n)$:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \tag{4.1}$$

Αν το σήμα εισόδου στο FIR φίλτρο είναι η μοναδιαία κρούση $\delta(n)$, τότε η έξοδος του (κρουστική απόκριση του φίλτρου ή Impulse Response) θα είναι διαδοχικά ίση με κάθε έναν από τους συντελεστές $h(m)$. Έτσι, έχουμε πεπερασμένη σε χρονική διάρκεια κρουστική απόκριση $h(m)$ για τα FIR φίλτρα (Finite Impulse Response). Η εξίσωση διαφορών (4.1) αποτελεί τη σχέση εισόδου-εξόδου του FIR φίλτρου. Επίσης ξέρουμε ότι για τη συνάρτηση μεταφοράς ισχύει,

$$H(z) \leftrightarrow h(n) \Leftrightarrow H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-m} \tag{4.2}$$

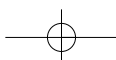
Ο βαθμός N του φίλτρου χαρακτηρίζεται από το πλήθος των όρων της κρουστικής απόκρισης (πλήθος συντελεστών $h(m)$).

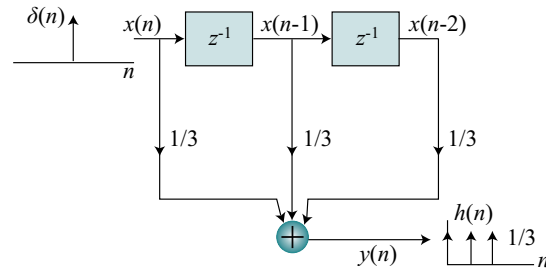
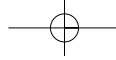


Σχήμα 4.1
Δομή FIR ψηφιακού φίλτρου.

Παράδειγμα 4.1

Για το FIR φίλτρο του Σχήματος 4.2 να γραφεί η εξίσωση εισόδου-εξόδου και η συνάρτηση μεταφοράς. Επίσης, να σχεδιαστεί η κρουστική απόκριση του φίλτρου.



**Σχήμα 4.2**

Ψηφιακό φίλτρο
μέσης τιμής με
τρεις όρους.

Λύση

Το φίλτρο του Σχήματος 4.2 είναι FIR, διότι η κρουστική του απόκριση είναι πεπερασμένης χρονικής διάρκειας (τρεις όροι). Κάθε όρος της κρουστικής απόκρισης είναι ίσος με $1/3$, όσο δηλαδή ο αντίστοιχος συντελεστής του φίλτρου. Η εξίσωση εισόδου–εξόδου (εξίσωση διαφορών) είναι η ακόλουθη:

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n) + x(n-1) + x(n-2)]$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το φίλτρο του Σχήματος 4.2 είναι ένα ψηφιακό σύστημα μέσης τιμής (averager). Με τη βοήθεια της σχέσης (4.2) η συνάρτηση μεταφοράς έχει ως εξής:

$$H(z) = \frac{1}{3} (1 + z^{-1} + z^{-2})$$

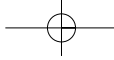
Δραστηριότητα 4.1

Να σχεδιαστεί ένας απλός ψηφιακός διαφοριστής (digital differentiator). Να γραφεί η σχέση εισόδου–εξόδου, η συνάρτηση μεταφοράς και να σχεδιαστεί η δομή του φίλτρου. Επίσης να σχεδιαστεί η κρουστική του απόκριση.

Ο απλούστερος ψηφιακός διαφοριστής θα έχει έξοδο $y(n)$ τη διαφορά δύο διαδοχικών δειγμάτων της εισόδου $x(n)$. Έτσι η σχέση εισόδου–εξόδου του φίλτρου θα είναι

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

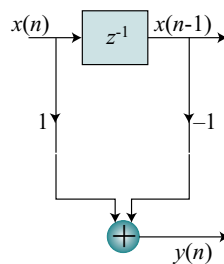
Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να υπολογιστεί αν λάβουμε το μετασχηματισμό- z και των δύο μερών της προηγούμενης σχέσης:



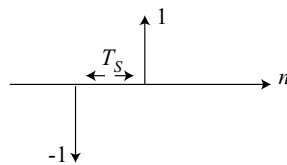
$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-1}$$

Η δομή του φίλτρου είναι πολύ απλή και έχει ως εξής:



Όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία κρούση, η έξοδος του φίλτρου (κρουστική απόκριση) θα ισούται με τους συντελεστές της αρχικής σχέσης εισόδου-εξόδου, δηλαδή με 1 και -1 . Η μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει ως εξής:

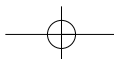


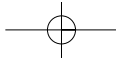
4.1.1 Γραμμική απόκριση φάσης

Ένα φίλτρο έχει γραμμική απόκριση φάσης (linear phase response) όταν η διαφορά φάσης $\theta(\omega)$ μεταξύ εισόδου και εξόδου για σήμα γωνιακής συχνότητας ω , δίνεται ως:

$$\theta(\omega) = -a\omega \quad \text{ή} \quad \theta(\omega) = b - a\omega \quad (4.3)$$

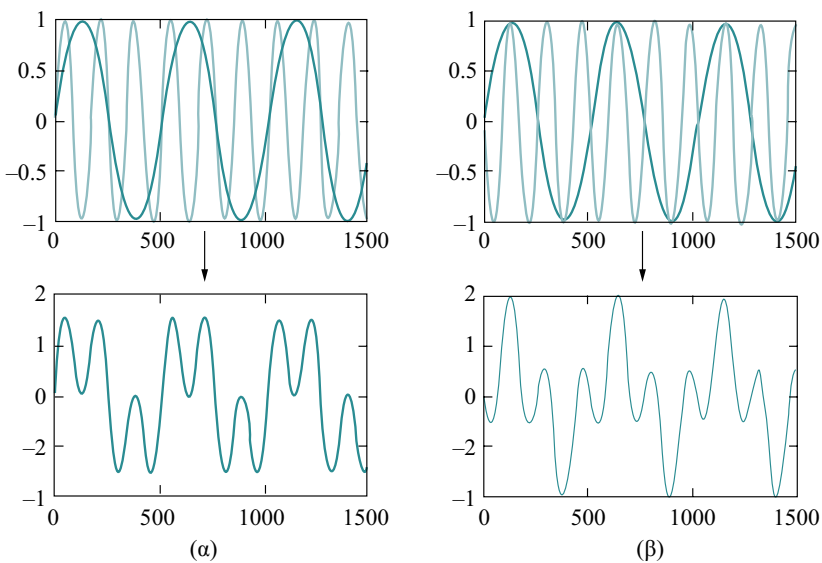
Όπου a και b σταθερές που εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του φίλτρου. Όταν οι αρμονικές συνιστώσες ενός σήματος, διέλθουν από σύστημα που έχει γραμμική απόκριση φάσης σύμφωνα με την (4.3), υπόκεινται όλες στην ίδια χρονική καθυστέρηση ίση με a sec, με αποτέλεσμα να μην καταστρέφεται η μορφή του σήματος. Αυτό γίνεται φανερό αν σκεφτούμε ότι $\cos(\omega t + \theta) = \cos(\omega t - a\omega) = \cos[\omega(t - a)]$. Στο Σχήμα 4.3α φαίνονται οι δύο αρμονικές συνιστώσες από τις οποίες αποτελείται ένα σήμα, που έχουν μηδενική διαφορά φάσης για $t = 0$, καθώς και η μορφή του σήματος. Το σήμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.3β αποτελείται από τις ίδιες συνιστώσες, που έχουν όμως υποστεί διαφορετική χρονική καθυστέρηση η μία ως προς την άλλη, έτσι ώστε να έχουν διαφορά φάσης για $t = 0$ ίση με π . Το αποτέλεσμα είναι ότι η μορφή του





σήματος έχει αλλάξει ριζικά. Παρ' ότι το ανθρώπινο σύστημα ακοής δεν είναι ευαίσθητο στις φασικές μετατοπίσεις των αρμονικών ενός σήματος, μία τέτοια αλλαγή θα μπορούσε να έχει καταστρεπτικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις που ενδιαφέρει η μορφή του σήματος (τηλεπικοινωνίες, καρδιογράφημα, εικόνες κτλ.).

Σχήμα 4.3
 Δύο αρμονικές που δίνουν διαφορετική μορφή για το σύνθετο σήμα ανάλογα με τη μεταξύ τους αρχική διαφορά φάσης. α) Αρχική διαφορά φάσης 0. β) Αρχική διαφορά φάσης π .

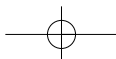


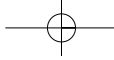
Για να έχει ένα FIR φίλτρο την ιδιότητα της γραμμικής απόκρισης φάσης, θα πρέπει να παρουσιάζει κάποιας μορφής συμμετρία στην κρουστική απόκριση $h(n)$. Έτσι, έστω ένα FIR φίλτρο με N όρους στην κρουστική απόκριση $h(n)$ ($n = 0, \dots, N-1$), όπου το N είναι περιττός αριθμός και οι όροι $h(n)$ παρουσιάζουν τη συμμετρία:

$$h(n) = h(N - n - 1) \tag{4.4}$$

Τότε, το φίλτρο αυτό έχει γραμμική απόκριση φάσης. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την απόκριση συχνότητας του φίλτρου για $N = 5$. Θέτουμε στην (4.2) $z = e^{j\omega}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{m=0}^4 h(m)e^{-j\omega m} = \\ &= h(0) + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} + h(3)e^{-j3\omega} + h(4)e^{-j4\omega} \\ &= e^{-j2\omega} [h(0)e^{j2\omega} + h(1)e^{j\omega} + h(2) + h(3)e^{-j\omega} + h(4)e^{-j2\omega}] \\ &= e^{-j2\omega} [h(0)(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + h(1)(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + h(2)] \\ &= e^{-j2\omega} [2h(0)\cos(2\omega) + 2h(1)\cos(\omega) + h(2)] \end{aligned} \tag{4.5}$$





Το μέτρο της $H(e^{j\omega})$ είναι η πραγματική ποσότητα μέσα στην αγκύλη. Η φάση της ισούται με τη φάση που δημιουργεί ο όρος $e^{-j2\omega}$. Ο υπολογισμός της δίνει

$$\theta(\omega) = -2\omega. \text{ Στη γενική περίπτωση φίλτρων μήκους } N \text{ θα είναι } \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega.$$

Επομένως ο συντελεστής αναλογίας της σχέσης (4.3) ισούται με $(N-1)/2$. Συμπερασματικά, ένα FIR φίλτρο με συμμετρική κρουστική απόκριση και περιττό πλήθος όρων έχει γραμμική φάση, και όπως είδαμε αυτό έχει ως συνέπεια τη χρονική καθυστέρηση όλων των αρμονικών του σήματος κατά $\frac{N-1}{2}$ δείγματα.

Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τύποι FIR φίλτρων γραμμικής φάσης, ανάλογα με το αν το πλήθος N των συντελεστών της $h(n)$ είναι άρτιο ή περιττό και αν η $h(n)$ είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική. Σε όλες τις περιπτώσεις ο υπολογισμός του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\omega})$ γίνεται όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, και αποδεικνύεται ότι η φάση είναι γραμμική.

Παράδειγμα 4.2

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) για το φίλτρο του παραδείγματος 4.1.

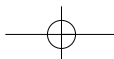
Λύση

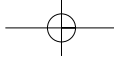
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{m=0}^2 h(m)e^{-j\omega m} = \frac{1}{3}[1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}] = \frac{1}{3}e^{-j\omega}[e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}] \\ &= \frac{1}{3}e^{-j\omega}[(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 1] = \frac{1}{3}e^{-j\omega}[2\cos(\omega) + 1] \end{aligned}$$

Το μέτρο της $H(e^{j\omega})$ είναι $\frac{1}{3}[2\cos(\omega) + 1]$. Η φάση της υπολογίζεται από τη φάση που δημιουργεί ο μιγαδικός $e^{-j\omega}$, και η οποία είναι $\theta(\omega) = -\omega$.

Δραστηριότητα 4.2

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) του φίλτρου που περιγράφηκε στην δραστηριότητα 1/ κεφάλαιο 4.





Η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ υπολογίζεται αν στη σχέση $H(z) = 1 - z^{-1}$ θέσουμε $z = e^{j\omega}$:

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega}{2}} [e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}] = je^{-j\frac{\omega}{2}} [2 \sin \frac{\omega}{2}]$$

Το μέτρο της $H(e^{j\omega})$ είναι:

$$|H(e^{j\omega})| = 2 \sin \frac{\omega}{2},$$

ενώ η φάση ισούται με $\pi/2$ που εισάγει η μιγαδική μονάδα και $-\omega/2$ από τον εκθετικό όρο:

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$

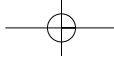
4.1.2 Ευστάθεια των φίλτρων - Πόλοι και μηδενικά

Στα FIR φίλτρα η έξοδος εξαρτάται μόνο από τις τιμές της εισόδου $x(n-k)$ με $k = 0, \dots, N-1$. Καμία καθυστερημένη τιμή της εξόδου $y(n-k)$ δεν συμμετέχει στον υπολογισμό της. Έτσι η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένη και η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου $H(z)$ που δίνεται από την (4.2) δεν έχει παρονομαστή, επομένως δεν έχει πόλους που δημιουργούν αστάθεια. Όλα αυτά έχουν ως αποτέλεσμα την ευστάθεια του φίλτρου, που σημαίνει ότι για οποιοδήποτε πεπερασμένο σε πλάτος σήμα εισόδου, η έξοδος είναι επίσης πεπερασμένη σε μέγεθος. Η θέση όπου η $H(z)$ μηδενίζεται (μηδενικά) μπορεί να καθοριστεί, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται από το φίλτρο πολύ καλή απόρριψη κάποιων από τις αρμονικές συνιστώσες του σήματος.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.1

Σε ένα FIR φίλτρο η κρουστική απόκριση έχει τους πέντε όρους της ίσους με 0,2. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς και γιατί;

- Το φίλτρο χρειάζεται τέσσερις μονάδες καθυστέρησης για την υλοποίησή του.
- Οι συντελεστές του φίλτρου είναι 6.
- Κάθε συντελεστής έχει τιμή 0,3.
- Η καθυστέρηση φάσης που δημιουργεί το φίλτρο είναι 2ω .
- Για συχνότητα δειγματοληψίας 44,1 kHz η χρονική καθυστέρηση που δημιουργείται σε κάθε αρμονική του σήματος είναι $2T_s = 50,5 \text{ } \mu\text{sec}$.



Σύνοψη ενότητας

Τα FIR φίλτρα παρουσιάζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τα οποία είναι απαραίτητα στις περισσότερες περιπτώσεις ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Το πρώτο από αυτά, η ευστάθεια, οφείλεται στο γεγονός ότι η έξοδος $y(n)$ στα FIR φίλτρα υπολογίζεται μόνο από τιμές της εισόδου $x(n)$, επομένως τα φίλτρα δεν έχουν κλάδο ανατροφοδότησης. Το άλλο χαρακτηριστικό, η γραμμική απόκριση φάσης, λαμβάνεται όταν η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι συμμετρική.

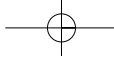
4.2 Τύποι και προδιαγραφές των FIR φίλτρων

Ο τρόπος με τον οποίο κυρίως καθορίζεται αλλά και χρησιμοποιείται ένα ψηφιακό φίλτρο είναι η συμπεριφορά του στη συχνότητα. Η συμπεριφορά αυτή περιγράφεται από την απόκριση στη συχνότητα του φίλτρου, τόσο σε ό,τι έχει σχέση με την επίδρασή του στο πλάτος των διαφόρων αρμονικών του σήματος (απόκριση πλάτους), όσο και στο τρόπο με τον οποίο επηρεάζει τη φασική σχέση των αρμονικών (απόκριση φάσης). Δεδομένου ότι η απόκριση στη συχνότητα των ψηφιακών συστημάτων είναι περιοδική, αρκεί να καθοριστεί η συμπεριφορά του ψηφιακού φίλτρου στην περιοχή από 0 ως π .

Η απόκριση φάσης στα FIR φίλτρα μπορεί να είναι γραμμική αν η κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική. Στην απόκριση μέτρου του φίλτρου ενδιαφέρον παρουσιάζουν τόσο οι αποκλίσεις από την επιθυμητή απόκριση στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής, όσο και οι συχνότητες που καθορίζουν τα όρια των ζωνών αυτών. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 3, παράγραφος 3.4.5 και ιδιαίτερα στο Σχήμα 3.9. Στο Σχήμα αυτό μπορούμε να διακρίνουμε τις επόμενες παραμέτρους:

- δ_p είναι η απόκλιση (από τη μονάδα) στη ζώνη διέλευσης
- δ_s είναι η απόκλιση (από το μηδέν) στη ζώνη αποκοπής
- ω_p είναι το όριο της ζώνης διέλευσης
- ω_s είναι το όριο της ζώνης αποκοπής
- 2π είναι η κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας

Το εύρος της ζώνης μετάβασης είναι $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$. Συνήθως τα ω_p και ω_s ορίζονται ως κλάσματα του π , ενώ οι αποκλίσεις δ_p και δ_s ορίζονται σε dB μέσω των ποσοτήτων $20 \log(1 + \delta_p)$ και $20 \log(\delta_s)$, αντίστοιχα. Επιπλέον, ως χαρακτηριστικό σχεδίασης μπορεί να θεωρηθεί το μέγιστο αποδεκτό πλήθος N των συντελεστών $h(n)$ του φίλτρου. Οι προηγούμενες προδιαγραφές αφορούν την πραγματική συμπεριφο-



ρά ενός FIR φίλτρου. Όταν τα μεγέθη δ_s , δ_p και $\Delta\omega$ τείνουν στο μηδέν, το απαιτούμενο πλήθος N των συντελεστών τείνει στο άπειρο και η απόκριση του φίλτρου προσεγγίζει την ιδανική απόκριση (Βλέπε Σχήμα 3.8).

Παράδειγμα 4.3

Οι προδιαγραφές FIR φίλτρου είναι 0,01 dB κυμάτωση (απόκλιση) στη ζώνη διέλευσης, -60 dBs στη ζώνη αποκοπής, $\omega_s = 0,4\pi$ και ζώνη μετάβασης ίση με $0,2\pi$. Να εξηγήσετε τι ακριβώς σημαίνει καθεμιά από τις προδιαγραφές αυτές.

Λύση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα πρέπει από το φίλτρο να διέρχονται όλες οι συχνότητες μέχρι το $0,4\pi$, και να αποκόπτονται όλες οι συχνότητες πάνω από τα $0,6\pi$. Η ζώνη μετάβασης βρίσκεται από το $0,4\pi$ μέχρι το $0,6\pi$. Στη ζώνη διέλευσης η απόκλιση από τη μονάδα είναι δ_p και προσδιορίζεται από τη σχέση:

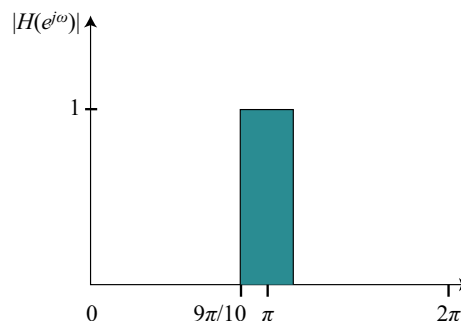
$$20 \log(1 + \delta_p) = 0,01 \Rightarrow \delta_p = 0,001$$

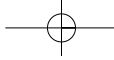
Στη ζώνη αποκοπής ισχύει $20 \log(\delta_s) = -60 \Rightarrow \delta_s = 1/1000$. Αυτό σημαίνει ότι μόνο το ένα χιλιοστό από το πλάτος των συχνοτήτων στην περιοχή αυτή διέρχεται από το φίλτρο.

Δραστηριότητα 4.3

Να σχεδιαστεί η απόκριση μέτρου στη συχνότητα ιδανικού υπερπαρατού φίλτρου με ζώνη διέλευσης το $1/N$ της συχνότητας Nyquist. Η τιμή του N είναι δική σας επιλογή.

Η συχνότητα Nyquist είναι ίση με π (μισό της συχνότητας δειγματοληψίας). Έτσι, η ζώνη διέλευσης του υπερπαρατού φίλτρου θα έχει εύρος π/N . Αν επιλέξουμε $N = 10$, τότε η απόκριση μέτρου του φίλτρου στη συχνότητα έχει όπως φαίνεται στο επόμενο Σχήμα.





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.2

Στην επόμενη πρόταση να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Σε ένα ζωνοδιαβατό FIR φίλτρο η ανώτερη συχνότητα αποκοπής είναι:

- Μεγαλύτερη από π
- Μικρότερη από π
- Μεγαλύτερη από 2π

Σύνοψη ενότητας

Οι τύποι των ψηφιακών φίλτρων που μπορούν να σχεδιαστούν ως FIR φίλτρα ποικίλλουν και μπορούν να έχουν όλες τις μορφές όπως βαθυπερατά, ζωνοδιαβατά και υψηπερατά. Επίσης οι προδιαγραφές τους μπορεί να είναι πολύ αυστηρές τόσο στη ζώνη διέλευσης των συχνοτήτων, όσο και στη ζώνη αποκοπής.

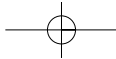
4.3 Μέθοδοι σχεδίασης των FIR φίλτρων

Η διαδικασία για τη σχεδίαση FIR φίλτρων περιλαμβάνει τον καθορισμό των προδιαγραφών του φίλτρου, τον υπολογισμό των συντελεστών του φίλτρου με μία από τις διαθέσιμες μεθόδους, τον καθορισμό της δομής υλοποίησης, την ανάλυση σφαλμάτων λόγω του πεπερασμένου μήκους των συντελεστών καθώς και την επιλογή για υλοποίηση με λογισμικό ή υλικό.

Σημαντικό βήμα στη διαδικασία σχεδίασης των FIR φίλτρων είναι να υπολογιστούν οι συντελεστές $h(n)$, ώστε το φίλτρο να πληροί τις επιθυμητές προδιαγραφές μέτρου και φάσης στη συχνότητα. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ευρύτατα είναι κυρίως οι επόμενες τρεις. Η μέθοδος των παραθύρων (windows method), η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων φίλτρων (optimal method) και η μέθοδος της δειγματοληψίας στη συχνότητα (frequency sampling method). Εδώ θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο των παραθύρων που είναι απλή. Η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων φίλτρων δίνει την καλύτερη δυνατή απόκριση συχνότητας για συγκεκριμένο πλήθος συντελεστών. Όλες οι μέθοδοι μπορούν να δώσουν FIR φίλτρα γραμμικής φάσης.

4.3.1 Μέθοδος των παραθύρων

Η μέθοδος των παραθύρων αποτελεί μια σχετικά απλή διαδικασία σχεδίασης FIR φίλτρων. Οι συντελεστές $h_D(n)$ του ιδανικού φίλτρου υπολογίζονται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης συχνότητας $H_D(e^{j\omega})$:



$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{4.6}$$

Το γράμμα D χρησιμοποιείται για να δηλώσει την επιθυμητή (Desired) ή ιδανική συμπεριφορά.

Παράδειγμα 4.4

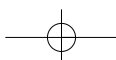
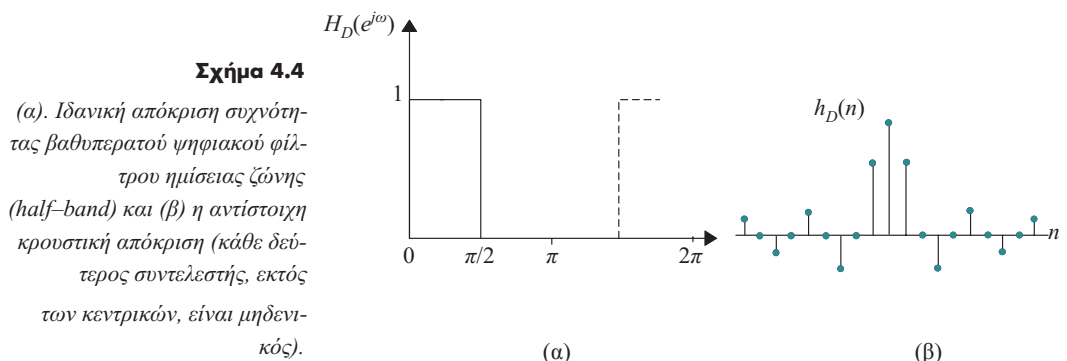
Να σχεδιαστεί ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/2$ (ημίσειας ζώνης ή half-band), του οποίου η ιδανική απόκριση στη συχνότητα δίνεται στο Σχήμα 4.4α.

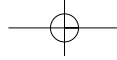
Λύση

Θεωρούμε ότι η συχνότητα δειγματοληψίας είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα ($\omega_s = 2\pi$). Από τη σχέση (4.6) οι συντελεστές $h(n)$ υπολογίζονται ως εξής:

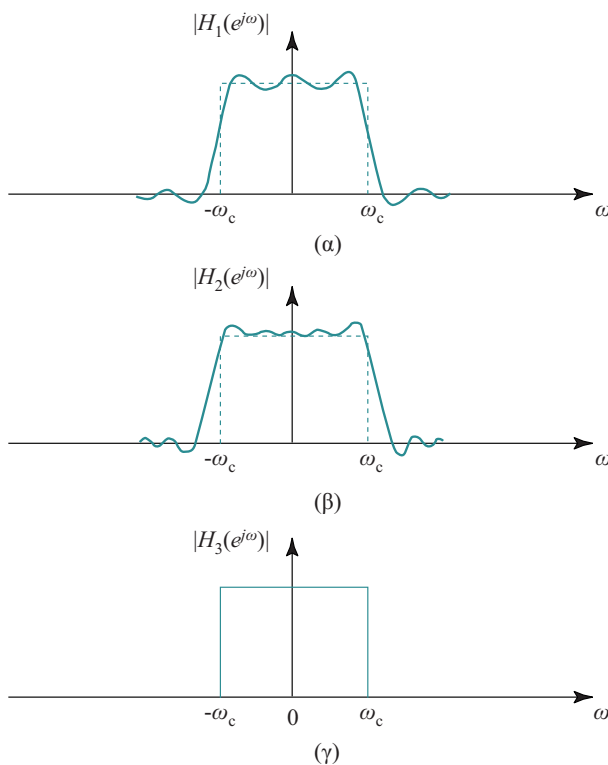
$$\begin{aligned} h_D(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{\omega_c \sin(n\omega_c)}{\pi n \omega_c} \xrightarrow{\omega_c = \pi/2} \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/2)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Η γραφική παράσταση των συντελεστών δίνεται στο Σχήμα 4.4β, από όπου φαίνεται ότι η κρουστική απόκριση είναι συμμετρική. Επομένως, το φίλτρο θα έχει γραμμική απόκριση φάσης. Από τη σχέση (4.7) είναι φανερό ότι οι όροι $h_D(n)$ φθίνουν συνεχώς αλλά, δεν μηδενίζονται ποτέ, με αποτέλεσμα η κρουστική απόκριση να είναι άπειρη.



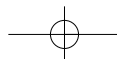


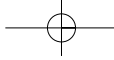
Η αποκοπή της κρουστικής απόκρισης $h_D(n)$ για $|n| > M$, ώστε αυτή να έχει πεπερασμένο μήκος και να διατηρεί τη συμμετρία της, έχει ως αποτέλεσμα να αλλοιωθεί η ζητούμενη ιδανική απόκριση στη συχνότητα. Η αλλοίωση αυτή είναι εμφανής στο Σχήμα 4.5 όπου δείχνονται οι αποκρίσεις στη συχνότητα για κρουστική απόκριση με 13 (Σχήμα 4.5α), 25 (Σχήμα 4.5β) και άπειρους όρους (Σχήμα 4.5γ). Η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$, εμφανίζει κυμάτωση σε όλη την έκταση της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής, ενώ παρουσιάζει διαπλάτυνση της ζώνης μετάβασης. Η εμφάνιση της κυμάτωσης είναι γνωστή ως φαινόμενο *Gibbs*, και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της κοντά στις ασυνέχειες της $H(e^{j\omega})$, στην περιοχή της ζώνης μετάβασης. Η μέγιστη αυτή τιμή κυμαίνεται περίπου στο 9% του ύψους της ασυνέχειας και παραμένει σταθερή ανεξάρτητα από το μήκος $2M + 1$ της κρουστικής απόκρισης. Για τη ζώνη της αποκοπής η τιμή του 9% αντιστοιχεί σε 21 περίπου dBs εξασθένιση, τιμή που δεν είναι αποδεκτή για πρακτικές εφαρμογές. Έτσι, για ικανοποιητική προσέγγιση των ιδανικών μορφών των διάφορων φίλτρων, δεν συνιστάται ο απευθείας περιορισμός του μήκους της κρουστικής απόκρισης $h(n)$.



Σχήμα 4.5

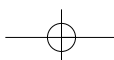
Απόκριση συχνότητας βαθνπερατού φίλτρου με (α) 13, (β) 25 και (γ) άπειρους όρους στην κρουστική απόκριση.

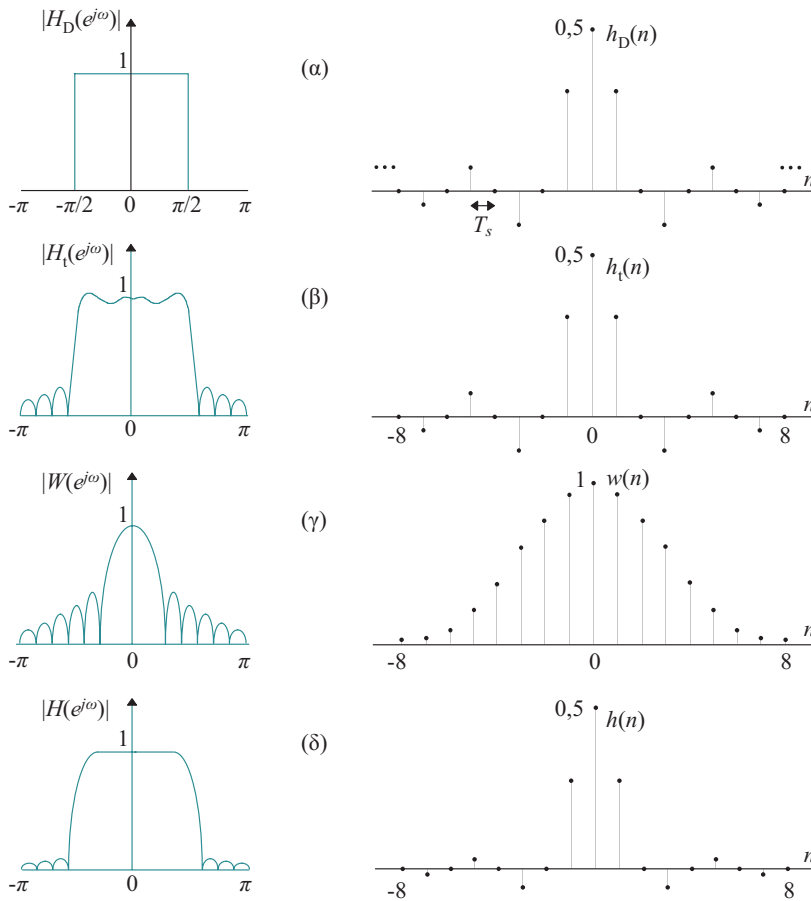
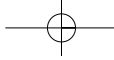




Ένας δόκιμος τρόπος, για να πετύχουμε ικανοποιητική προσέγγιση στην απόκριση συχνότητας ενός FIR φίλτρου, είναι να χρησιμοποιηθεί μια πεπερασμένη ακολουθία συντελεστών $w(n)$, που καλείται *παραθύρο*, για να τροποποιήσει τους συντελεστές $h_D(n)$ της εξίσωσης (4.7). Η νέα κρουστική απόκριση $h(n)$ προκύπτει ως το γινόμενο $h_D(n)w(n)$. Με τον τρόπο που περιγράφεται στο Σχήμα 4.6 ελέγχονται τα προβλήματα σύγκλισης (φαινόμενο Gibbs) του μετασχηματισμού Fourier στα σημεία ασυνέχειας της $H(e^{j\omega})$. Στο Σχήμα 4.6α απεικονίζεται η επιθυμητή απόκριση $H_D(e^{j\omega})$ του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου ημίσειας ζώνης (half-band). Ακριβώς δίπλα δίνεται η απεριόριστη στο χρόνο κρουστική απόκριση $h_D(n)$. Στο επόμενο Σχήμα 4.6β δίνεται η απόκριση $H_1(e^{j\omega})$, όπως προκύπτει από την αποκοπή της $h_D(n)$ για $M=8$. Εδώ εμφανίζεται καθαρά το φαινόμενο Gibbs. Ακολούθως, στο Σχήμα 4.6γ, δίνεται το παράθυρο $w(n)$, το οποίο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $-8 \leq n \leq 8$ και μηδέν για $|n| > 8$. Στο αριστερό μέρος δίνεται το φάσμα του παραθύρου $W(e^{j\omega})$. Στο Σχήμα 4.6δ δίνεται η τελική κρουστική απόκριση $h(n)$ η οποία προκύπτει από το γινόμενο $h_D(n)w(n)$, από πολλαπλασιασμό δηλαδή σημείο προς σημείο των δύο χρονικών ακολουθιών. Η αντίστοιχη τελική απόκριση $H(e^{j\omega})$ προκύπτει φυσικά από τη συνέλιξη της $H_1(e^{j\omega})$ με την $W(e^{j\omega})$. Στο Σχήμα αυτό έχει μειωθεί αισθητά το φαινόμενο Gibbs, αλλά έχει αυξηθεί η ζώνη μετάβασης του φίλτρου. Η τελική κρουστική απόκριση $h(n)$ πρέπει να ολισθήσει στο χρόνο για να γίνει αιτιατή (causal), και επομένως φυσικά πραγματοποιήσιμη (η $h(n)$ ευρίσκεται όλη στα θετικά n). Η χρονική αυτή ολίσθηση πρακτικά αντιστοιχεί στην προσθήκη της γραμμικής απόκρισης φάσης που εισάγουν τα FIR φίλτρα. Αυτό γίνεται ξεκάθαρα από τη σχέση (4.5), όπου ο κοινός παράγοντας που δημιουργεί τη γραμμική απόκριση φάσης έχει προκύψει ακριβώς διότι η κρουστική απόκριση του φίλτρου έχει γίνει αιτιατή.

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι η αύξηση του πλήθους των συντελεστών που προκύπτει όταν το μήκος του παραθύρου είναι μεγαλύτερο, έχει ως αποτέλεσμα να γίνει στενότερη η ζώνη μετάβασης, δηλαδή το φίλτρο πιο απότομο. Από την άλλη, το είδος του χρησιμοποιούμενου παραθύρου θα επηρεάσει την κυμάτωση στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής.





Σχήμα 4.6

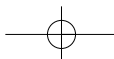
Γραφική παράσταση του τρόπου εφαρμογής των παραθύρων στη σχεδίαση FIR φίλτρων.

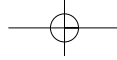
Δραστηριότητα 4.4

Με τη βοήθεια της εξίσωσης 4.7, να υπολογίσετε τους συντελεστές της κρουστικής απόκρισης ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/N$ (N -th band ή N -ζωνικό φίλτρο). Η επιλογή του N είναι δική σας.

4.3.2 Ιδιότητες και τύποι των παραθύρων

Η συνάρτηση $W(e^{j\omega})$, που είναι το φάσμα του παραθύρου $w(n)$, αποτελείται από έναν κύριο λοβό που περιέχει την περισσότερη φασματική ενέργεια του παραθύρου, καθώς και από παράπλευρους λοβούς που γενικά ελαττώνονται γρήγορα (Σχήμα 4.6γ). Το εύρος της ζώνης μετάβασης του φίλτρου εξαρτάται από το εύρος του κύριου λοβού της $W(e^{j\omega})$. Στην τελική $H(e^{j\omega})$ επιδρούν επίσης οι παράπλευροι λοβοί της $W(e^{j\omega})$, εισάγοντας σ' αυτή μικρή κυμάτωση σε όλες τις συχνότητες. Το φάσμα μιας





συνάρτησης παραθύρου πρέπει να έχει στενό κύριο λοβό, ο οποίος να περιέχει όσο το δυνατόν περισσότερη φασματική ενέργεια, με παράπλευρους λοβούς που να φθίνουν γρήγορα. Από τις πλέον γνωστές συναρτήσεις παραθύρων είναι οι ακόλουθες:

A. Το τετραγωνικό παράθυρο (rectangular). Αντιστοιχεί στην απλή αποκοπή της ακολουθίας $h_D(n)$. Η ακολουθία βάρους δίνεται από τη σχέση:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (4.8)$$

B. Το γενικευμένο παράθυρο Hamming:

$$w_R(n) = \begin{cases} a + (1-a) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (4.9)$$

Το παράθυρο αυτό για $a = 0,54$ δίνει το γνωστό παράθυρο Hamming. Για την τιμή αυτή του a , ο κεντρικός λοβός της $W(e^{j\omega})$ περιέχει το 99,96% της συνολικής φασματικής ενέργειας, ενώ επιτυγχάνονται -52 dB εξασθένιση στη ζώνη απόρριψης των φίλτρων που σχεδιάζονται. Η μορφή του παραθύρου $w(n)$ για $N = 17$ είναι αυτή του Σχήματος 4.6γ.

Η μέθοδος σχεδίασης των FIR φίλτρων με τα παράθυρα, παρ' ότι απλή, δεν αίρει το βασικό μειονέκτημα των FIR φίλτρων, να απαιτούν πολλούς συντελεστές και, επομένως, αυξημένες απαιτήσεις σε υλικό για την υλοποίησή τους. Με κατάλληλη χρήση του παραθύρου Hamming και άλλων παραθύρων έχει γίνει δυνατή η μείωση του απαιτούμενου υλικού υλοποίησης των φίλτρων.

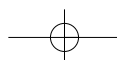
Παράδειγμα 4.5

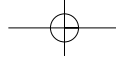
Να δειχθεί γραφικά η επίδραση του πλήθους N των συντελεστών του παραθύρου Hamming (και κατά συνέπεια του πλήθους των συντελεστών του φίλτρου) στα χαρακτηριστικά της απόκρισης συχνότητας ενός FIR φίλτρου ημίσειας ζώνης.

Λύση

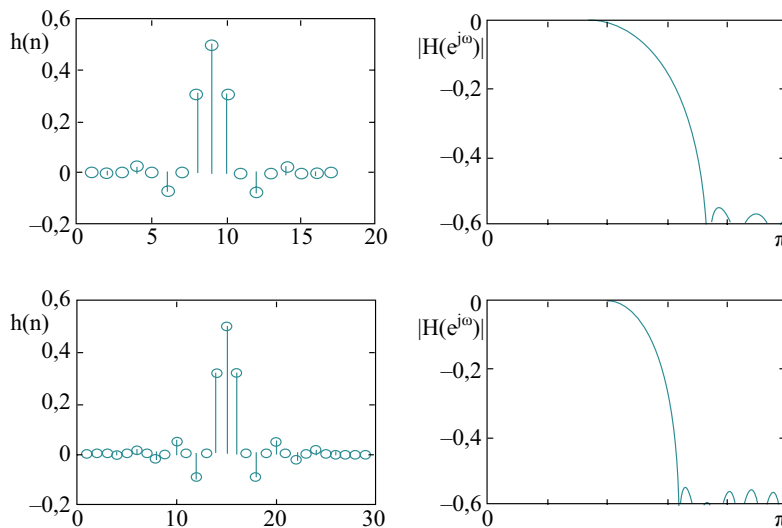
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.7) και (4.9), έχουμε για τους συντελεστές $h(n)$ ενός FIR φίλτρου ημίσειας ζώνης με τη χρήση του παραθύρου Hamming

$$h(n) = h_D(n)w_R(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/2)} [0,54 + 0,46 \cos(\frac{2\pi n}{N})] \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$





Η σχέση αυτή θα χρησιμοποιηθεί για να σχεδιαστούν δύο FIR φίλτρα, το πρώτο με $N = 17$ συντελεστές και το δεύτερο με $N = 29$. Ο υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας για τα δύο φίλτρα, γίνεται όπως ακριβώς και στη σχέση (4.5). Οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 4.7 ελήφθησαν με τη βοήθεια του MATLAB και με εφαρμογή της προηγούμενης διαδικασίας. Τα δύο πρώτα Σχήματα, δείχνουν τους συντελεστές του φίλτρου και την απόκριση συχνότητας για $N = 17$. Τα δύο επόμενα, παρουσιάζουν το φίλτρο με $N = 29$ συντελεστές. Από τη σύγκριση των δύο αποκρίσεων στη συχνότητα γίνεται φανερό ότι η αύξηση των συντελεστών του παραθύρου οδηγεί σε πιο μικρή ζώνη μετάβασης (transition band), άρα και πιο απότομο φίλτρο, όχι όμως και σε μεγαλύτερη εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής. Για να πετύχει κάτι τέτοιο ο σχεδιαστής πρέπει να αναζητήσει στη βιβλιογραφία διαφορετικού τύπου παράθυρο.



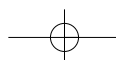
Σχήμα 4.7

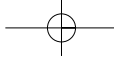
Βαθυπερατό FIR φίλτρο σχεδιασμένο με δέκα επτά και εικοσιεννέα συντελεστές. Στη δεύτερη περίπτωση το φίλτρο είναι πιο απότομο.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.3

Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις, που αφορούν στη σχεδίαση FIR φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων, είναι σωστές και γιατί;

1. Η συνάρτηση του παραθύρου επιδρά απευθείας στο φάσμα του σήματος.
2. Το τελικό φίλτρο έχει ευρύτερη ζώνη μετάβασης
3. Το τετραγωνικό παράθυρο που δίνεται από τη σχέση 4.8 έχει σαράντα έναν όρους.
4. Η εξασθένηση στη ζώνη αποκοπής του φίλτρου εξαρτάται από το είδος του χρησιμοποιούμενου παραθύρου και όχι από το πλήθος των όρων του.





Δραστηριότητα 4.5

Με τη βοήθεια του παραθύρου Hamming να υπολογιστούν οι συντελεστές του φίλτρου της δραστηριότητας 4 /Κεφάλαιο 4 για να γίνει FIR φίλτρο με δέκα εφτά όρους. Με κατάλληλο λογισμικό να σχεδιαστεί η απόκριση μέτρου και φάσης του φίλτρου.

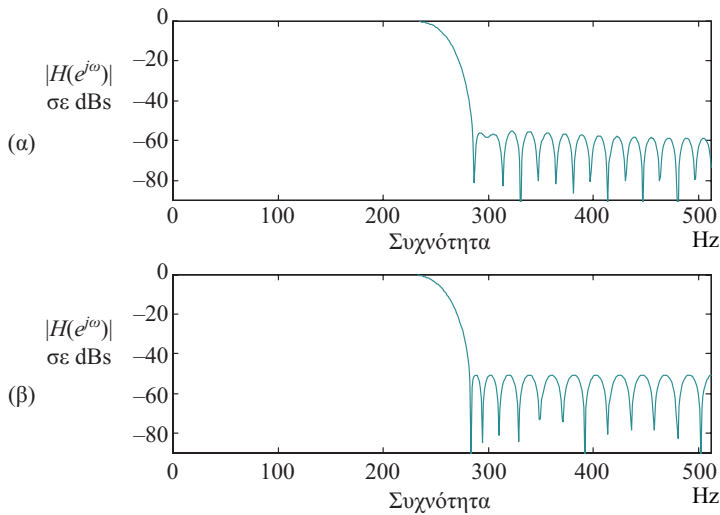
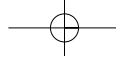
Οι συντελεστές του third band φίλτρου θα βρεθούν αν οι όροι $h_D(n)$ της δραστηριότητας 4.4 πολλαπλασιαστούν με τους όρους $g_R(n)$ της σχέσης (4.9) για $\alpha = 0,54$ και $N = 17$.

4.3.3 Μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων

Ο όρος *βέλτιστο FIR φίλτρο* σημαίνει την επίτευξη των καλύτερων δυνατών προδιαγραφών στην απόκριση συχνότητας με το μικρότερο πλήθος συντελεστών. Η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του '70, και έχει κωδικοποιηθεί σε πρόγραμμα υπολογιστή με αποτέλεσμα να είναι εύκολη η εφαρμογή της. Η μέθοδος παρέχει πλήρη έλεγχο της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης και αποκοπής, ενώ τα φίλτρα που προκύπτουν από αυτή είναι πάντα πιο οικονομικά σε πλήθος συντελεστών.

Σύνοψη ενότητας

Η μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων FIR φίλτρων είναι η καλύτερη επιλογή, όταν είναι διαθέσιμο το αντίστοιχο λογισμικό. Η μέθοδος παρέχει πλήρη έλεγχο της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης και αποκοπής, ενώ τα φίλτρα που προκύπτουν από αυτή είναι πάντα πιο οικονομικά σε πλήθος συντελεστών. Αντίθετα, η μέθοδος των παραθύρων είναι πολύ απλή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν δεν υπάρχει το απαραίτητο λογισμικό για την προηγούμενη μέθοδο. Δίνει πάντα την ίδια κυμάτωση στη ζώνη μετάβασης και τη ζώνη αποκοπής, ενώ δεν παρέχει έλεγχο στα όρια των ζωνών. Στο Σχήμα 4.8 δίνονται φίλτρα που έχουν σχεδιαστεί ώστε να έχουν τις ίδιες προδιαγραφές. Η σχεδίαση με τα παράθυρα δίνει εξήντα ένα συντελεστές, ενώ με τη μέθοδο των βέλτιστων φίλτρων σαράντα έξι συντελεστές.

**Σχήμα 4.8**

(α) Απόκριση μέτρου FIR ψηφιακού φίλτρου σχεδιασμένου με το παράθυρο Hamming και εξήντα ένα συντελεστές, (β) Απόκριση μέτρου βέλτιστου FIR βαθυπερατού φίλτρου. Το απαιτούμενο πλήθος των συντελεστών είναι σαράντα έξι.

4.4 Θέματα υλοποίησης FIR φίλτρων

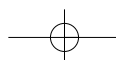
4.4.1 Δομές πραγματοποίησης των FIR φίλτρων

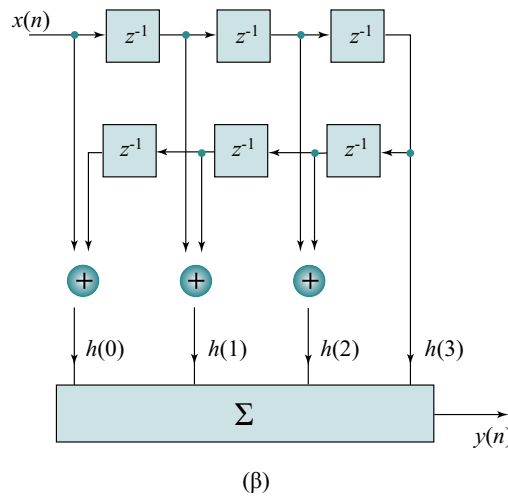
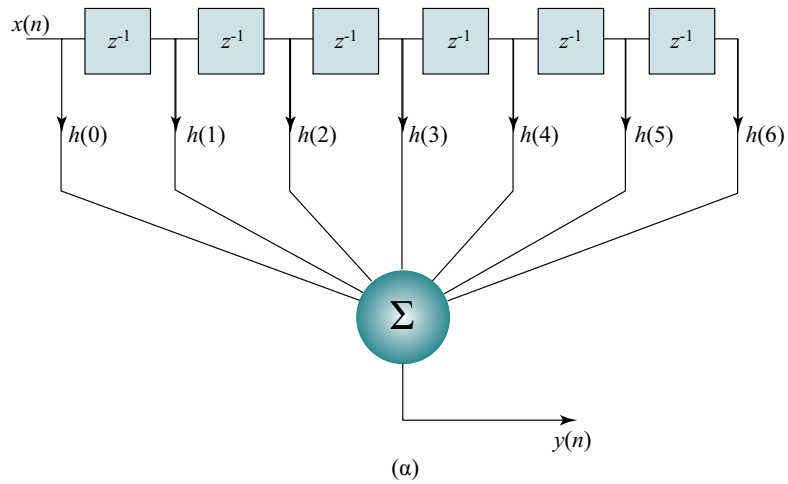
Οι δομές πραγματοποίησης των FIR φίλτρων είναι στην ουσία σχηματικά διαγράμματα για τους διαφορετικούς, αλλά θεωρητικά ισοδύναμους τρόπους που μπορεί να οργανωθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$. Η πιο διαδεδομένη δομή είναι η άμεση ή transversal. Για τη δομή αυτή, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.9α, η σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου–εξόδου του φίλτρου έχει ως εξής:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (4.10)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση αυτή η άμεση δομή απαιτεί για την πραγματοποίησή της:

- $N-1$ θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των δειγμάτων $x(n)$.
- N θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των συντελεστών $h(m)$.
- N πολλαπλασιασμούς.
- $N-1$ προσθέσεις.



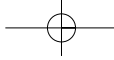


Σχήμα 4.9

Οι δύο κυριότερες δομές πραγματοποίησης FIR φίλτρων (α). Άμεση (Transversal) και (β) γραμμικής φάσης.

Τροποποίηση της transversal δομής αποτελεί η δομή γραμμικής φάσης. Στη δομή αυτή (Σχήμα 4.9β) τα δείγματα που πρόκειται να πολλαπλασιαστούν με ίδιους συντελεστές λόγω της συμμετρικής κρουστικής απόκρισης ($h(n) = \pm h(N - n - 1)$), πρώτα προστίθενται και μετά πολλαπλασιάζονται. Αποτέλεσμα αυτού είναι να απαιτείται μόνο ένας πολλαπλασιασμός για κάθε δύο δείγματα. Η εξίσωση εισόδου-εξόδου στην περίπτωση αυτή γράφεται ως:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(m)[x(n-m) + x(n-N+1+m)] \quad (4.11)$$



Η δομή της γραμμικής φάσης για να υλοποιηθεί απαιτεί τους μισούς πολλαπλασιασμούς σε σχέση με την άμεση, και βρίσκει εφαρμογή στα FIR φίλτρα γραμμικής φάσης (συμμετρική κρουστική απόκριση).

Παράδειγμα 4.6

Για το FIR φίλτρο ημίσειας ζώνης του παραδείγματος 4.5, να υπολογιστούν οι μονάδες καθυστέρησης και οι πολλαπλασιαστές που απαιτούνται για την πραγματοποίησή του με άμεση δομή και δομή γραμμικής φάσης.

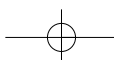
Λύση

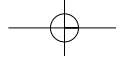
Σύμφωνα με το Σχήμα 4.9α, ένα FIR φίλτρο με N συντελεστές απαιτεί $N-1$ στοιχεία καθυστέρησης, και N πολλαπλασιαστές για την πραγματοποίησή του με την άμεση δομή. Στην περίπτωση μας ($N = 17$ συντελεστές) χρειάζονται δέκα έξι μονάδες καθυστέρησης και δέκα επτά πολλαπλασιασμοί. Αντίθετα, για την πραγματοποίηση της δομής γραμμικής φάσης, χρειάζονται (βλέπε Σχήμα 4.9β) δέκα έξι μονάδες καθυστέρησης, δεκαεπτά προσθετές και εννέα πολλαπλασιασμοί. Πρέπει να σημειώσουμε, ότι στο φίλτρο αυτό, με βάση την εξίσωση (4.7), αρκετοί συντελεστές είναι μηδέν επειδή το φίλτρο είναι ημίσειας ζώνης. Έτσι, ο αριθμός των πολλαπλασιασμών είναι ακόμη μικρότερος.

4.4.2 Σφάλμα από την κβάντιση των συντελεστών

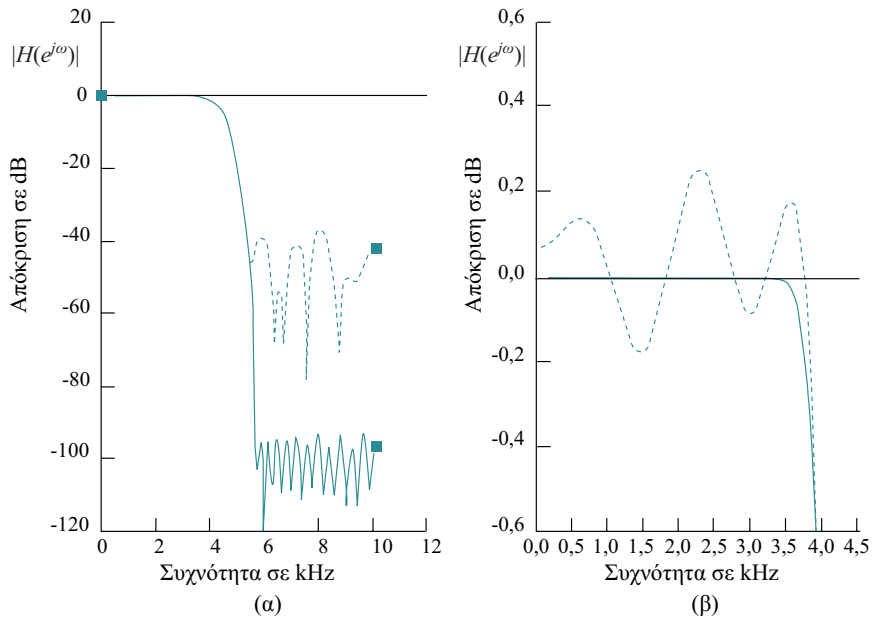
Η υλοποίηση των FIR φίλτρων με ψηφιακά κυκλώματα (hardware) συνεπάγεται πεπερασμένη ακρίβεια αναπαράστασης των συντελεστών του φίλτρου. Ο περιορισμός στην ακρίβεια των συντελεστών έχει ως αποτέλεσμα την απόκλιση των χαρακτηριστικών του φίλτρου από τις αρχικές προδιαγραφές. Ας σημειωθεί ότι μετά από τέτοια αλλαγή ένα φίλτρο παύει να είναι βέλτιστο. Το φαινόμενο αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως *φαινόμενο πεπερασμένου μήκους λέξης* (Finite Wordlength Effect). Στο Σχήμα 4.10 με τη συνεχόμενη γραμμή δίνεται η απόκριση του φίλτρου που σχεδιάστηκε αρχικά, ενώ με τη διακεκομμένη γραμμή δίνεται η απόκριση του ίδιου φίλτρου όταν οι συντελεστές του έχουν ακρίβεια 7 bits.

Αποδεικνύεται ότι κάθε αύξηση κατά 1 bit στην ακρίβεια των συντελεστών βελτιώνει την απόδοση του φίλτρου κατά έξι dBs (βλέπε επίσης ενότητα 1.2.2). Αν το φίλτρο έχει σχεδιαστεί με θεωρητική απόρριψη στη ζώνη αποκοπής A dBs, τότε απαιτούνται το λιγότερο $A/6$ bits στην δυαδική αναπαράσταση των συντελεστών για να μην αλλοιωθεί η θεωρητική απόκριση του φίλτρου.





Σχήμα 4.10
Αποτελέσματα από την κβάντιση των συντελεστών. Με διακεκομμένη γραμμή δίνεται η απόκριση του φίλτρου μετά την κβάντιση των συντελεστών. (α) Απόκριση συχνότητας, (β) Λεπτομέρεια της ζώνης διέλευσης.



Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.4

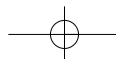
Ένα FIR φίλτρο με 31 συντελεστές απαιτεί για την υλοποίησή του με την άμεση δομή

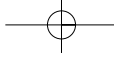
- α. 31 μονάδες καθυστέρησης και 31 πολλαπλασιασμούς.
- β. 30 μονάδες καθυστέρησης και 31 πολλαπλασιασμούς.
- γ. 30 μονάδες καθυστέρησης και 30 πολλαπλασιασμούς.
- δ. 31 μονάδες καθυστέρησης και 30 πολλαπλασιασμούς.

Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστή;

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4.5

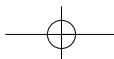
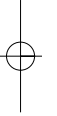
Η θεωρητική αποκοπή ενός FIR φίλτρου στη ζώνη απόρριψης είναι 106 dBs. Οι συντελεστές που χρειάζονται για την υλοποίηση του φίλτρου πρέπει να έχουν ακρίβεια σε bits: 8, 12, 14, 18.

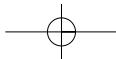




Σύνοψη κεφαλαίου

Τα FIR ψηφιακά φίλτρα που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουν δύο ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που είναι επιθυμητά στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Τη γραμμική απόκριση στη φάση και την ευστάθεια. Γνωρίσαμε τον τρόπο που καθορίζονται οι προδιαγραφές των φίλτρων αυτών και στη συνέχεια μελετήσαμε τη μέθοδο σχεδίασης των FIR φίλτρων με τα παράθυρα. Τέλος, με τη μέθοδο σχεδίασης των βέλτιστων FIR φίλτρων μπορούμε να λάβουμε πολύ καλή απόκριση συχνότητας με τους λιγότερο δυνατούς συντελεστές.





Βιβλιογραφία κεφαλαίου

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

B. Αναστασόπουλος, *Σχεδίαση οικονομικών FIR φίλτρων για σήματα Διαμόρφωσης Δ' Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών* 1986

N. Καλουπτσίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*, Εκδόσεις Δίαυλος, 1993.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

V. Anastassopoulos and T. Deliyannis, *Method to design FIR Hilbert transformers for delta modulated signals*, *IEE Proc. G, Circuits, Devices and Systems*, 1986, 133, (2), pp. 113–114.

V. Anastassopoulos and T. Deliyannis, *Efficient implementation of Nth-band FIR filters based on a simple window method*, *IEE Proc. G, Circuits, Devices and Systems*, 1990, 137, (4), pp. 302–308

V. Anastassopoulos, N. Kouvaras and T. Deliyannis, *Method for designing half-band delta-modulation FIR filters*, *IEE Proc. F, Commun., Radar and Signal Process.*, 1985, 132, (1), pp. 13–17

F. Harris, *On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform*, *Proc. IEEE*, No. 1, pp. 51–83, January 1978.

E.C. Ifeachor and B.W. Jervis, *Digital Signal Processing, A Practical Approach*, Second edition, Pearson Education Limited, 2002.

MATLAB, Signal processing toolbox, MathWorks, 1994.

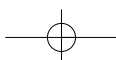
F. Mintzer, *On Half-band, Third-band and Nth-band FIR filters and their design*, *ASSP* 30, No. 5, pp. 734–738, October 1982.

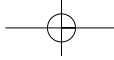
T.W. Parks and J.H. McClellan, *A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Filters*, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU–20, pp. 195–199, No. 3, Aug. 1972.

L.R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs NJ, Prentice–Hall, 1975.

ΟΔΗΓΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗΣ

B. Αναστασόπουλος, *Ανάλυση και Επεξεργασία Ψηφιακών σημάτων*, Σημειώσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1998.



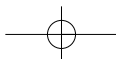
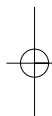
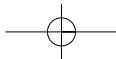


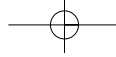
Το κεφάλαιο 4 αναφέρεται περισσότερο αναλυτικά στα FIR φίλτρα.

MATLAB, Signal processing toolbox, MathWorks, 1994. Το MATLAB με το αντίστοιχο εγχειρίδιο του Toolbox, αποτελεί τον καλύτερο τρόπο πειραματισμού στη σχεδίαση των FIR, καθώς και στη μελέτη της συμπεριφοράς τους σε διάφορες περιπτώσεις.

Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική

Averager	Κύκλωμα μέσης τιμής
Causal	Αιτιατό
Delay line	Γραμμή καθυστέρησης
Digital differentiator	Ψηφιακός διαφοριστής
Finite Impulse Response	Πεπερασμένη κρουστική απόκριση
Frequency sampling method	Μέθοδος δειγματοληψίας στη συχνότητα
Half band	Ημίσειας ζώνης
Linear Phase Resonse	Απόκριση γραμμικής φάσης
Optimal method	Βέλτιστη μέθοδος
Pass band	Ζώνη διέλευσης
Stop band	Ζώνη απόρριψης (αποκοπής)
Third band	Ζώνης ενός τρίτου
Transversal	Άμεση
Windows method	Μέθοδος παραθύρων





Ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τα ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης. Στα φίλτρα αυτά, για τον υπολογισμό της εξόδου, χρησιμοποιούμε τιμές της εισόδου, καθώς και τιμές της εξόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Επομένως, αναφερόμαστε σε επαναληπτικά φίλτρα. Τα φίλτρα αυτά παρουσιάζουν μικρότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα έναντι των αντίστοιχων FIR φίλτρων, αλλά έχουν μη γραμμική απόκριση φάσης. Στόχος μας στο κεφάλαιο αυτό είναι η μελέτη των μεθόδων σχεδίασης των ψηφιακών IIR φίλτρων και των τρόπων υλοποίησής τους.

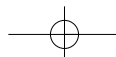
Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Όταν ολοκληρώσετε τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού θα είστε σε θέση να:

- Σχεδιάζετε IIR φίλτρα με βάση τη γραφική μέθοδο, τη μέθοδο αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης και τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού
- Σχεδιάζετε οποιοδήποτε τύπο φίλτρου (βαθυπερατό, υψηπερατό, διέλευσης ζώνης και απόρριψης ζώνης)
- Μειώνετε τα σφάλματα λόγω του πεπερασμένου μήκους λέξης, πραγματοποιώντας τα φίλτρα ως δομές χαμηλής τάξης σε σειρά ή παράλληλα

Έννοιες κλειδιά

- Αναλογικά φίλτρα
- Μετασχηματισμοί συχνότητας
- Γραφική μέθοδος σχεδίασης
- Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής
- Διγραμμικός μετασχηματισμός
- Στρέβλωση συχνότητας
- Φαινόμενα πεπερασμένου μήκους λέξης
- Οριακοί κύκλοι



Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Γνωρίσαμε τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR, Infinite Impulse Response) στην Ενότητα 3.4 του Κεφαλαίου 3. Είδαμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός τέτοιου φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad (5.1)$$

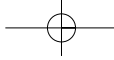
όπου a_i , b_i οι συντελεστές του φίλτρου και τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές b_i είναι διάφορος του μηδενός. Ο αριθμός N προσδιορίζει την τάξη του φίλτρου, το οποίο για να είναι αιτιατό προϋποθέτει ότι $N \geq M$. Για να είναι ένα τέτοιο φίλτρο ευσταθές θα πρέπει όλοι οι πόλοι του να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο $-z$. Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών του φίλτρου είναι:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i) \quad (5.2)$$

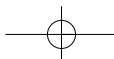
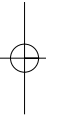
όπου $x(n)$ και $y(n)$ οι ακολουθίες εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα.

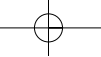
Είδαμε ότι για την υλοποίηση ενός φίλτρου χρειαζόμαστε πολλαπλασιαστές, αθροιστές και στοιχεία καθυστέρησης (Σχήμα 3.4), και αναφερθήκαμε στις διαφορετικές δομές πραγματοποίησής του (Σχήμα 3.5), καθώς και στις δομές πραγματοποίησης φίλτρων υψηλής τάξης ως συνδυασμού δομών πρώτης και δεύτερης τάξης σε σειρά ή παράλληλα (Σχήμα 3.6).

Από τη σχέση (5.2) γίνεται φανερό ότι τα IIR φίλτρα είναι επαναληπτικά ή αναδρομικά (recursive), με την έννοια ότι δείγματα της εξόδου χρησιμοποιούνται από το σύστημα για τον υπολογισμό των νέων τιμών της εξόδου σε επόμενες χρονικές στιγμές. Το γεγονός αυτό παρουσιάζει μεγάλο πλεονέκτημα από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας, σε σχέση με τα FIR φίλτρα. Με άλλα λόγια, για να επιτύχουμε μια επιθυμητή απόκριση χρειαζόμαστε σημαντικά λιγότερους συντελεστές για ένα IIR φίλτρο σε σχέση με το αντίστοιχο FIR φίλτρο. Από την άλλη πλευρά όμως, υπάρχουν δύο σοβαρά μειονεκτήματα: (α) τα IIR φίλτρα είναι ασταθή, αν οι συντελεστές δεν έχουν επιλεγεί σωστά, δηλαδή αν οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου (βλ. ενότητα 3.4), και (β) τα IIR φίλτρα δεν έχουν γραμμική απόκριση φάσης στη ζώνη διέλευσης, όπως έχουν τα μη επαναληπτικά FIR φίλτρα με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.



Το κύριο αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η σχεδίαση IIR φίλτρων, ή με άλλα λόγια, ο υπολογισμός των συντελεστών a_n , b_n , όταν μας δίνονται οι προδιαγραφές του φίλτρου. Λέγοντας «προδιαγραφές του φίλτρου», εννοούμε κυρίως την επιθυμητή απόκριση στη συχνότητα (Σχήματα 3.8 και 3.9). Το θέμα της σχεδίασης τέτοιων φίλτρων το αντιμετωπίσαμε ήδη στην Ενότητα 3.4 με την τοποθέτηση των πόλων και των μηδενικών στο επίπεδο- z . Αυτή είναι η πρώτη μέθοδος σχεδίασης, η οποία όμως δεν είναι συστηματική, ειδικά για φίλτρα υψηλής τάξης. Έτσι, εκτός από αυτή, στο παρόν κεφάλαιο θα γνωρίσουμε και δύο άλλες μεθόδους: τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης και τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού. Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στη μετατροπή ενός αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό φίλτρο. Μια τέτοια προσέγγιση χρησιμοποιείται ευρέως για πολλούς λόγους καθώς: (α) οι τεχνικές σχεδίασης αναλογικών φίλτρων είναι πολύ ανεπτυγμένες, (β) καταλήγουν συνήθως σε λύσεις κλειστής μορφής, (γ) διατίθενται έτοιμοι πίνακες για τη σχεδίαση αναλογικών φίλτρων, και (δ) σε πολλές εφαρμογές απαιτούνται ψηφιακά φίλτρα τα οποία να προσομοιώνουν γνωστά αναλογικά φίλτρα. Έτσι, αρχίζουμε το σχεδιασμό ενός ψηφιακού φίλτρου από το «αντίστοιχο» αναλογικό και στη συνέχεια κάνουμε την κατάλληλη μετατροπή του σε ψηφιακό. Για την καλύτερη κατανόηση των σχετικών εννοιών, θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στα αναλογικά φίλτρα, στην αμέσως επόμενη ενότητα. Στη συνέχεια, θα γνωρίσουμε τις διάφορες μεθόδους σχεδίασης των IIR φίλτρων (Ενότητα 5.2) και θα συζητήσουμε για θέματα σχετικά με την υλοποίησή τους (Ενότητα 5.3).





5.1 Αναλογικά φίλτρα

Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, τα IIR ψηφιακά φίλτρα μπορούν εύκολα να σχεδιαστούν αρχίζοντας από ένα αναλογικό φίλτρο και κατόπιν χρησιμοποιώντας κατάλληλη απεικόνιση του επιπέδου- s στο επίπεδο- z . Έτσι, η σχεδίαση ενός ψηφιακού φίλτρου ανάγεται ουσιαστικά στη σχεδίαση του κατάλληλου αναλογικού φίλτρου και στην μετέπειτα μετάβαση από το $H(s)$ στο $H(z)$, έτσι ώστε τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του αναλογικού φίλτρου να διατηρούνται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Η σχεδίαση αναλογικών φίλτρων είναι ένας τομέας για τον οποίο υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία. Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε σε συντομία τα χαρακτηριστικά των πλέον γνωστών βαθυπερατών (lowpass) αναλογικών φίλτρων. Ακολουθώντας, θα αναφέρουμε τους μετασχηματισμούς συχνότητας με τους οποίους ένα αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο μετατρέπεται σε υψηπερατό (highpass), ζωνοδιαβατό (bandpass) ή φίλτρο απόρριψης ζώνης (bandstop).

Πριν όμως προχωρήσουμε, ας δούμε τη γενική μορφή της απόκρισης συχνότητας ενός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου, ώστε να εξοικειωθούμε με τις έννοιες και τους συμβολισμούς. Η απόκριση συχνότητας ενός αναλογικού φίλτρου (αναλογικού συστήματος) προκύπτει από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ αυτού για τιμές του s πάνω στον άξονα των φανταστικών $j\Omega$, δηλαδή:

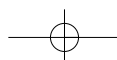
$$H(j\Omega) = H(s) \Big|_{s=j\Omega} \quad (5.3)$$

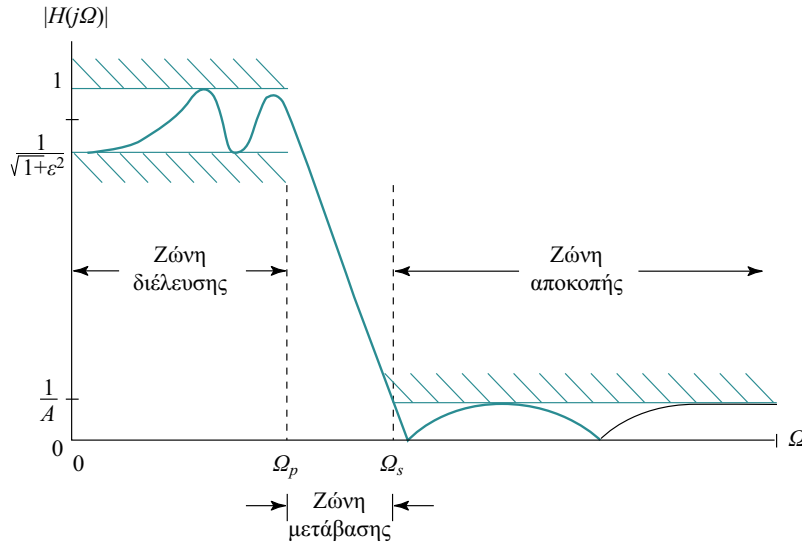
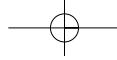
Το μέτρο της κανονικοποιημένης απόκρισης συχνότητας (normalised magnitude response) ενός μη ιδανικού αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Η μορφή της απόκρισης είναι παρόμοια με εκείνη του Σχήματος 3.9 για την περίπτωση των ψηφιακών φίλτρων.

Η απόκριση αυτή ονομάζεται «κανονικοποιημένη», επειδή η μέγιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη διέλευσης είναι ίση με τη μονάδα (ή ίση με 0 dB). Η κυμάτωση (ripple)

στη ζώνη διέλευσης συμβολίζεται με $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ και αντιπροσωπεύει την ελάχιστη τιμή

του μέτρου στη ζώνη διέλευσης. Η μέγιστη τιμή της κυμάτωσης στη ζώνη αποκοπής συμβολίζεται με $1/A$. Η τιμή αυτή σε dB ισούται με $-20 \log(1/A)$. Οι συχνότητες Ω_p και Ω_s αποτελούν τις συχνότητες στοόριο της ζώνης διέλευσης (passband edge frequency) και στο όριο της ζώνης αποκοπής (stopband edge frequency), αντίστοιχα. Ο λόγος των δύο αυτών συχνοτήτων ονομάζεται λόγος μετάβασης (transition ratio) ή παράμετρος επιλεκτικότητας (selectivity parameter) και συμβολίζεται συνή-





Σχήμα 5.1
Κανονικοποιημένη απόκριση συχνότητας βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου.

θως ως k , δηλαδή $k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$. Για ένα βαθυπερατό φίλτρο ισχύει $k < 1$. Τέλος, ο λόγος

$\frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$ ονομάζεται *παράμετρος διακριτότητας* (discrimination parameter) και

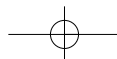
συμβολίζεται ως k_1 , δηλαδή $k_1 = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$. Συνήθως ισχύει $k_1 \ll 1$.

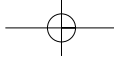
5.1.1 Γνωστά βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα

Σε όλες τις περιπτώσεις των φίλτρων που θα αναφέρουμε αμέσως τώρα, ο στόχος μας θα είναι ο εξής: να προσεγγίσουμε κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο την απόκριση ενός ιδανικού φίλτρου το οποίο έχει κέρδος ίσο με 1 σε όλη τη ζώνη διέλευσης, κέρδος ίσο με 0 σε όλη τη ζώνη αποκοπής, και η ζώνη μετάβασης είναι μηδενικού εύρους, δηλαδή δεν υπάρχει ζώνη μετάβασης. Τα πιο γνωστά βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα είναι τα ακόλουθα:

Φίλτρα Butterworth. Τα βαθυπερατά φίλτρα Butterworth έχουν μόνο πόλους και το μέτρο της απόκρισης συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 + \epsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2N}\right)^{1/2}} \quad (5.4)$$





όπου N η τάξη του φίλτρου, Ω_c η συχνότητα αποκοπής (cut-off frequency), Ω_p η συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης και $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στο όριο της ζώνης διέλευσης. Παρατηρούμε ότι:

α. Για $\Omega = \Omega_c$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ισούται με $\frac{1}{\sqrt{2}}$, δηλαδή

$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ανεξάρτητα από την τιμή του N . Αυτό σημαίνει ότι η ισχύς του σήματος υποδιπλασιάζεται για τη συγκεκριμένη συχνότητα. Η τιμή αυτή εκφρασμένη σε decibels (dB) ισούται με -3 , δηλαδή:

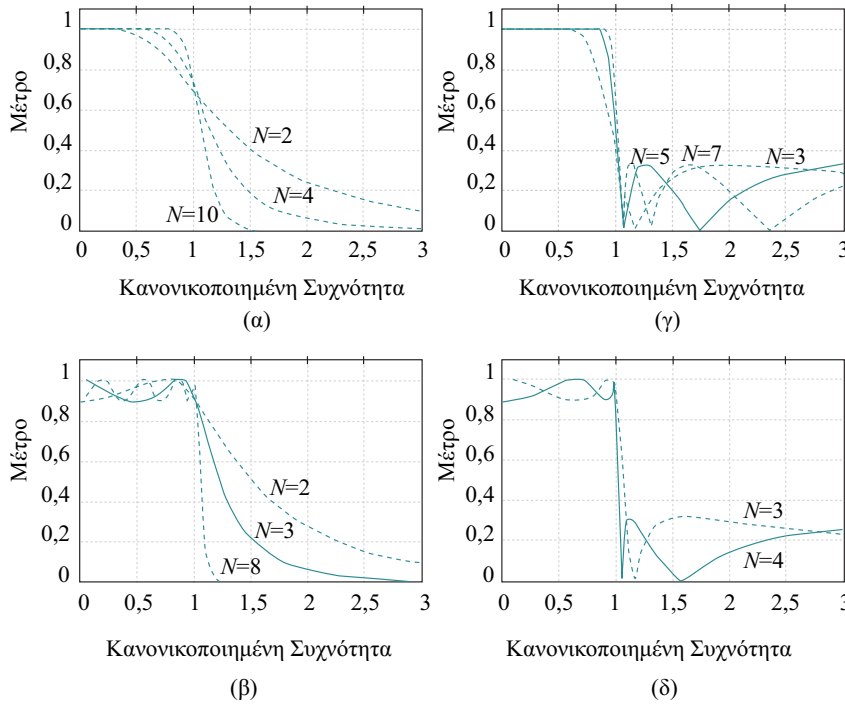
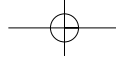
$$|H(j\Omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\Omega)| = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3.0103 \cong -3 \text{ dB}.$$

β. Για $\Omega = 0$ το μέτρο της απόκρισης ισούται με 1, δηλαδή με 0 dB, ανεξάρτητα από την τιμή του N .

γ. Επειδή η παράγωγος του μέτρου της απόκρισης είναι πάντοτε αρνητική για θετικές τιμές του Ω , συνεπάγεται ότι η απόκριση συχνότητας μειώνεται μονοτονικά καθώς το Ω αυξάνεται. Με άλλα λόγια $|H(j\Omega_2)| < |H(j\Omega_1)|$ για $0 \leq \Omega_1 < \Omega_2$.

Για συχνότητα αποκοπής Ω_c ίση με 1 rad/sec ($\Omega_c = 1$) παίρνουμε από τη σχέση (5.4) το ονομαζόμενο «πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο» (prototype lowpass filter). Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του κανονικοποιημένου Butterworth βαθυπερατού φίλτρου με $\Omega_c = 1$ (πρωτότυπου) για διαφορετικές τιμές του N , φαίνεται στο Σχήμα 5.2α. Παρατηρούμε ότι αύξηση της τάξης N του φίλτρου οδηγεί σε βελτίωση των ζωνών διέλευσης και αποκοπής με ταυτόχρονη μείωση της ζώνης μετάβασης.

Οι δύο παράμετροι οι οποίες χαρακτηρίζουν πλήρως ένα φίλτρο Butterworth είναι η συχνότητα αποκοπής Ω_c στα -3 dB και η τάξη του φίλτρου N (βλ. σχέση 5.4). Αυτές οι παράμετροι μπορούν να προσδιοριστούν από τις προδιαγραφές του φίλτρου, όπως αυτές φαίνονται στο Σχήμα 5.1, δηλαδή το όριο της ζώνης διέλευσης Ω_p , την ελάχιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη διέλευσης $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$, το όριο της ζώνης αποκοπής Ω_s και τη μέγιστη τιμή του μέτρου στη ζώνη αποκοπής $1/A$. Έτσι, από την εξίσωση (5.4) έχουμε:



Σχήμα 5.2
 Απόκριση συχνότητας βαθμπερατών αναλογικών φίλτρων τύπου (α) Butterworth, (β) Chebyshev τύπου I, (γ) Chebyshev τύπου II και (δ) ελλειπτικού.

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (5.5\alpha)$$

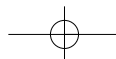
$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{A^2} \quad (5.5\beta)$$

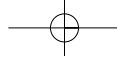
Λύνοντας το σύστημα αυτό των εξισώσεων ως προς την τάξη N του φίλτρου καταλήγουμε στη σχέση:

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log_{10}[(A^2 - 1) / \varepsilon^2]}{\log_{10}(\Omega_s / \Omega_p)} = \frac{\log_{10}(1 / k_1)}{\log_{10}(1 / k)} \quad (5.6)$$

Εξυπακούεται ότι η τιμή του N πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός. Στην περίπτωση όπου η τιμή που υπολογίζεται από την παραπάνω σχέση δεν είναι ακέραιος, τότε αυτή στρογγυλεύεται στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο.

Τέλος, όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου, τα φίλτρα Butterworth έχουν μόνο πόλους. Αυτό φαίνεται από τη σχέση (5.4). Οι θέσεις των πόλων πάνω





στο μιγαδικό επίπεδο μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

Αφού $H(s)H(-s) = |H(j\Omega)|^2$ για $s = j\Omega$, η εξίσωση (5.4) γράφεται ως:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2 / \Omega_c^2)^N} \tag{5.7}$$

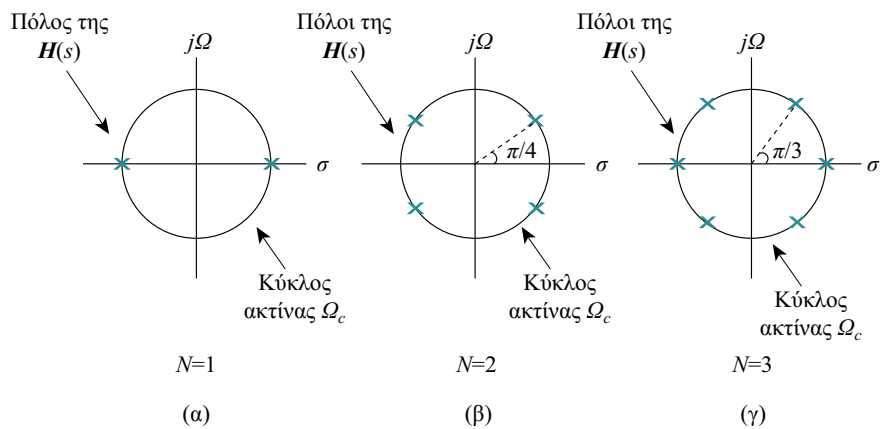
Οι πόλοι της $H(s)H(-s)$ βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας Ω_c και σε σημεία που ισαπέχουν το ένα από το άλλο. Αυτό προκύπτει από την εξίσωση (5.7) με μηδενισμό του παρανομαστή της, δηλαδή:

$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2q+1)\pi/N}, \quad q = 0, 1, \dots, N-1 \tag{5.8}$$

και συνεπώς

$$s_q = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2q+1)\pi/2N}, \quad q = 0, 1, \dots, N-1 \tag{5.9}$$

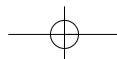
Στο Σχήμα 5.3 δείχνονται οι θέσεις των πόλων διαφόρων φίλτρων Butterworth τάξης $N = 1, N = 2$ και $N = 3$. Οι πόλοι που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο είναι αυτοί που αντιστοιχούν στην $H(s)$, ενώ εκείνοι του δεξιού ημιεπιπέδου αντιστοιχούν στην $H(-s)$. Υπενθυμίζεται ότι για να είναι ένα αναλογικό σύστημα ευσταθές, πρέπει οι πόλοι του να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο.

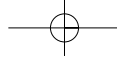


Σχήμα 5.3

Θέσεις των πόλων βαθυπερατών φίλτρων Butterworth τάξης (α) $N = 1$, (β) $N = 2$ και (γ) $N = 3$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς των πρωτότυπων ($\Omega_c = 1$) βαθυπερατών φίλτρων Butterworth πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης είναι αντίστοιχα:





$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad \text{και} \quad H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Παράδειγμα 5.1

Υπολογίστε την τάξη ενός βαθυπερατού Butterworth φίλτρου το οποίο παρουσιάζει εξασθένηση 1 dB στο 1 kHz και 40 dB στα 5 kHz.

Λύση

Από τις προδιαγραφές που μας δίνονται και με βάση τη γενική μορφή της απόκρισης συχνότητας ενός βαθυπερατού φίλτρου (Σχήμα 5.1) έχουμε ότι:

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) = -1 \text{ dB}, \quad \text{οπότε προκύπτει } \varepsilon^2 = 0,2589$$

$$F_p = 1 \text{ kHz}, \quad \text{οπότε } \Omega_p = 2\pi F_p = 2\pi 1000 \text{ rad/s}$$

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) = -40 \text{ dB}, \quad \text{οπότε } A^2 = 10^4$$

$$F_s = 5 \text{ kHz}, \quad \text{οπότε } \Omega_s = 2\pi F_s = 2\pi 5000 \text{ rad/s}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση (5.6) βρίσκουμε ότι:

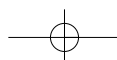
$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} = \frac{\log_{10}[(A^2 - 1)/\varepsilon^2]}{2 \log_{10}(\Omega_s / \Omega_p)} = \frac{\log_{10}(38621)}{2 \log(5)} = 3,281$$

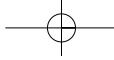
Αφού η τάξη του φίλτρου πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, στρογγυλεύουμε το αποτέλεσμα αυτό στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο, $N = 4$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.1

Υπολογίστε την τάξη και τους πόλους ενός βαθυπερατού φίλτρου Butterworth το οποίο παρουσιάζει εξασθένηση 3 dB στα 500 Hz και 40 dB στα 1000 Hz.

Φίλτρα Chebyshev. Υπάρχουν δύο τύποι φίλτρων Chebyshev. Τα φίλτρα τύπου I είναι φίλτρα μόνο με πόλους τα οποία παρουσιάζουν ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης και μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη αποκοπής (Σχήμα 5.2β). Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας των βαθυπερατών φίλτρων Chebyshev τύπου I δίνεται από τη σχέση:





$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega / \Omega_p)\right)^{1/2}} \quad (5.10)$$

όπου ε η παράμετρος του φίλτρου που σχετίζεται με την κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης, Ω_p η συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης και $T_N(x)$ πολυώνυμο Chebyshev τάξης N , το οποίο ορίζεται ως:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & |x| < 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & |x| > 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Τα φίλτρα Chebyshev τύπου II είναι φίλτρα με πόλους και μηδενικά, παρουσιάζουν μονοτονική συμπεριφορά στη ζώνη διέλευσης και ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής (Σχήμα 5.2γ). Τα μηδενικά στην περίπτωση αυτών των φίλτρων βρίσκονται πάνω στο φανταστικό άξονα του επιπέδου- s . Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^2 \left[T_N^2(\Omega_s / \Omega_p) / T_N^2(\Omega_s / \Omega) \right] \right)^{1/2}} \quad (5.12)$$

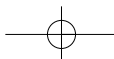
όπου $T_N(x)$ είναι και πάλι το πολυώνυμο Chebyshev τάξης N , και Ω_s η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής.

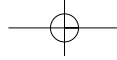
Ελλειπτικά φίλτρα. Τα ελλειπτικά φίλτρα ή φίλτρα Caueer παρουσιάζουν ομοιόμορφη κυμάτωση τόσο στη ζώνη διέλευσης, όσο και στη ζώνη αποκοπής (Σχήμα 5.2δ). Τα φίλτρα αυτά έχουν πόλους και μηδενικά και το μέτρο της απόκρισης στη συχνότητα δίνεται από τη σχέση:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^2 U_N(\Omega / \Omega_p)\right)^{1/2}} \quad (5.13)$$

όπου $U_N(x)$ η Ιακωβιανή (Jacobian) ελλειπτική συνάρτηση τάξης N . Τα μηδενικά βρίσκονται πάνω στον άξονα των φανταστικών του επιπέδου- s .

Τα ελλειπτικά φίλτρα είναι καλύτερα των φίλτρων Butterworth και Chebyshev, ως προς το γεγονός ότι απαιτούνται φίλτρα μικρότερης τάξης, δηλαδή λιγότεροι συντελεστές, για να ικανοποιήσουν τις ίδιες προδιαγραφές. Με άλλα λόγια, για δεδομένη τάξη του φίλτρου και δεδομένες προδιαγραφές, ένα ελλειπτικό φίλτρο θα παρουσιάζει την στενότερη ζώνη μετάβασης. Από την άλλη πλευρά όμως, η απόκριση φάσης των ελλειπτικών φίλτρων παρουσιάζει περισσότερες μη γραμμικότητες στη ζώνη διέλευσης σε σχέση με τα αντίστοιχα φίλτρα Butterworth ή Chebyshev.





5.1.2 Μετασχηματισμοί συχνότητας αναλογικών φίλτρων

Τα φίλτρα που γνωρίσαμε στην προηγούμενη υποενότητα ήταν όλα βαθυπερατά. Αυτά αποτελούν τη βάση για τη σχεδίαση των υπολοίπων κατηγοριών φίλτρων. Για να σχεδιάσουμε ένα υψηπερατό, ζωνοδιαβατό ή απόρριψης ζώνης αναλογικό φίλτρο, βασιζόμαστε στο αντίστοιχο αναλογικό βαθυπερατό (τύπου Butterworth, Chebyshev ή Ελλειπτικό) και εκτελούμε ένα μετασχηματισμό συχνότητας. Αυτούς ακριβώς τους μετασχηματισμούς συχνότητας θα γνωρίσουμε στην παρούσα υποενότητα.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ

Εάν έχουμε ένα βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, και θέλουμε να το μετατρέψουμε σ' ένα άλλο βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα Ω'_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s \quad (\text{βαθυπερατό σε βαθυπερατό}) \quad (5.14)$$

Με άλλα λόγια, εάν $H_p(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, τότε η συνάρτηση μεταφοράς $H_{LP}(s)$ του νέου βαθυπερατού φίλτρου θα είναι:

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s} \quad (5.15)$$

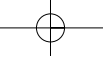
ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΥΨΗΠΕΡΑΤΟ

Για τη μετατροπή ενός βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε υψηπερατό φίλτρο με συχνότητα Ω'_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \longrightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s} \quad (\text{βαθυπερατό σε υψηπερατό}) \quad (5.16)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς $H_{HP}(s)$ του υψηπερατού φίλτρου προκύπτει από την αντίστοιχη του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου σύμφωνα με τη σχέση:

$$H_{HP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}} \quad (5.17)$$



ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΖΩΝΟΔΙΑΒΑΤΟ

Για τη μετατροπή ενός βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε ζωνοδιαβατό φίλτρο με συχνότητες Ω_l και Ω_u στο κατώτερο και ανώτερο όριο της ζώνης διέλευσης αντίστοιχα, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)} \quad (\text{βαθυπερατό σε ζωνοδιαβατό}) \quad (5.18)$$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση μεταφοράς $H_{BP}(s)$ του ζωνοδιαβατού φίλτρου προκύπτει από την αντίστοιχη του βαθυπερατού φίλτρου σύμφωνα με τη σχέση:

$$H_{BP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)}} \quad (5.19)$$

Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι η τάξη του ζωνοδιαβατού φίλτρου που προκύπτει είναι διπλάσια της τάξης του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΣΕ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΖΩΝΗΣ

Για τη μετατροπή ενός βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου με συχνότητα Ω_p στο όριο της ζώνης διέλευσης, σε φίλτρο απόρριψης ζώνης με συχνότητες Ω_l και Ω_u στα όρια των ζωνών διέλευσης, εκτελούμε το μετασχηματισμό:

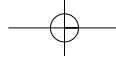
$$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l} \quad (\text{βαθυπερατό σε απόρριψης ζώνης}) \quad (5.20)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς $H_{BS}(s)$ του φίλτρου απόρριψης ζώνης προκύπτει από την αντίστοιχη του βαθυπερατού φίλτρου με βάση τη σχέση:

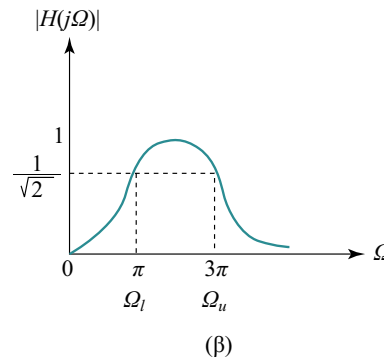
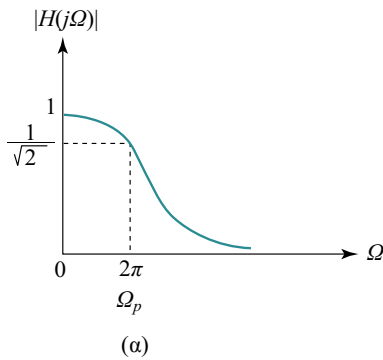
$$H_{BS}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}} \quad (5.21)$$

Παράδειγμα 5.2

Να μετασχηματιστεί το πρώτης τάξης βαθυπερατό φίλτρο Butterworth με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \Omega_p / (s + \Omega_p)$, όπου $\Omega_p = 2\pi \text{ rad/s}$, σ' ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο με συχνότητες στα όρια της ζώνης διέλευσης $\Omega_l = \pi \text{ rad/s}$ και $\Omega_u = 3\pi \text{ rad/s}$.



Λύση



Σχήμα 5.4

Μέτρο της απόκρισης συχνότητας (α) του αρχικού βαθυπερατού και (β) του ζητούμενου ζωνοδιαβατού αναλογικού φίλτρου.

Τα μέτρα των αποκρίσεων συχνότητας του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου Butterworth και του ζητούμενου ζωνοδιαβατού φίλτρου, φαίνονται στο Σχήμα 5.4.

Εφόσον μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς του βαθυπερατού φίλτρου, ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς του ζητούμενου ζωνοδιαβατού φίλτρου γίνεται εύκολα με βάση το μετασχηματισμό συχνότητας της σχέσης (5.18).

$$s = \Omega_p \cdot \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)} = 2\pi \frac{s^2 + 3\pi \cdot \pi}{s(3\pi - \pi)} = \frac{s^2 + 3\pi^2}{s}$$

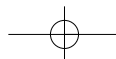
Άρα αντικαθιστώντας στη σχέση (5.19) βρίσκουμε τη ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοδιαβατού φίλτρου:

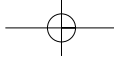
$$H_{BP}(s) = H(s) \Big|_{s = \frac{s^2 + 3\pi^2}{s}} = \frac{2\pi}{\left(\frac{s^2 + 3\pi^2}{s}\right) + 2\pi} = \frac{2\pi s}{s^2 + 2\pi s + 3\pi^2}$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του φίλτρου που προέκυψε είναι διπλάσια αυτής του αρχικού βαθυπερατού φίλτρου. Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι για $s = 0$ έχουμε $H(s) = 0$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.2

Η συνάρτηση μεταφοράς του δεύτερης τάξης πρωτότυπου ($\Omega_c = 1$) βαθυπερατού φίλτρου Chebyshev τύπου I με κυμάτωση στη ζώνη διέλευσής του ίση με 1 dB, δίνεται από τη σχέση $H_p(s) = 1/(s^2 + 1,098s + 1,103)$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς του αντίστοιχου υψηλερατού φίλτρου, το οποίο έχει συχνότητα αποκοπής 4 rad/s.





Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τα αναλογικά φίλτρα, τα οποία είναι κυρίως τεσσάρων τύπων: Butterworth, Chebyshev I & II και Ελλειπτικά. Πρόκειται στην ουσία, για τις μαθηματικές εκείνες συναρτήσεις οι οποίες, με διαφορετικό τρόπο η καθεμία, προσεγγίζουν την καμπύλη ενός ιδανικού φίλτρου. Γνωρίσαμε επίσης, τους μετασχηματισμούς στη συχνότητα τους οποίους χρησιμοποιούμε για να μπορέσουμε να πάρουμε ένα επιθυμητό βαθυπερατό, υψηπερατό, ζωνοδιαβατό ή απόρριψης ζώνης αναλογικό φίλτρο, έχοντας ως αναφορά ένα πρωτότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο.

5.2 Σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων

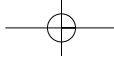
Όπως και στην περίπτωση των FIR φίλτρων, έτσι και εδώ, υπάρχουν πολλές μέθοδοι σχεδίασης IIR φίλτρων. Η πρώτη και πιο απλή από αυτές, μας είναι ήδη γνωστή από το Κεφάλαιο 3, και είναι αυτή της απευθείας τοποθέτησης των πόλων και μηδενικών του φίλτρου πάνω στο μιγαδικό επίπεδο- z , προσδιορίζοντας άμεσα τη συνάρτηση μεταφοράς και κατά συνέπεια, τους συντελεστές του φίλτρου. Η μέθοδος αυτή έχει περισσότερο θεωρητική και εκπαιδευτική σημασία παρά πρακτική αξία. Υπάρχουν και άλλες τεχνικές, κατά τις οποίες η σχεδίαση του φίλτρου γίνεται απευθείας στο πεδίο- z , όπως η μέθοδος των προσεγγίσεων Pade ή η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, τις οποίες όμως δε θα πραγματευτούμε.

Περισσότερο συνηθισμένο είναι να χρησιμοποιούμε τεχνικές οι οποίες μετατρέπουν ένα αναλογικό φίλτρο σε ψηφιακό. Και εδώ υπάρχουν διαφορετικές μέθοδοι μετατροπής ενός αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό. Εμείς θα αναφερθούμε στις δύο πιο γνωστές από αυτές, τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής και τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού.

Τέλος, θα πρέπει να επαναλάβουμε ότι υλοποιήσιμα και ευσταθή IIR φίλτρα δε μπορεί να έχουν γραμμική απόκριση φάσης. Έτσι, οι προδιαγραφές των φίλτρων θα αναφέρονται μόνο στο μέτρο της απόκρισης στη συχνότητα. Αυτό δεν σημαίνει ότι η φάση δεν είναι ουσιώδους σημασίας. Σημαίνει απλώς πως, αφού μέτρο και φάση είναι αλληλένδετα, δεχόμαστε τη φάση όπως αυτή προκύπτει από τη διαδικασία σχεδίασης. Αν κάποια εφαρμογή απαιτεί γραμμική φάση, τότε θα πρέπει να σχεδιάσουμε ένα FIR φίλτρο με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.

5.2.1 Γραφική μέθοδος

Τη γραφική μέθοδο σχεδίασης φίλτρων τη γνωρίσαμε στο Κεφάλαιο 3 (ενότητα 3.4). Η μέθοδος αυτή αναφέρεται και ως *γεωμετρική* ή ως *μέθοδος σχεδίασης βασισμένη*



στους πόλους και στα μηδενικά. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η σχεδίαση ενός IIR ψηφιακού φίλτρου γίνεται με κατάλληλη τοποθέτηση των πόλων και των μηδενικών πάνω στο μοναδιαίο κύκλο στο επίπεδο z . Η τοποθέτηση ενός πόλου κοντά στο μοναδιαίο κύκλο οδηγεί σε μεγάλες τιμές για τη συνάρτηση μεταφοράς σε συχνότητες που βρίσκονται κοντά στον πόλο. Αντίστοιχα, η ύπαρξη ενός μηδενικού κοντά ή και πάνω στον μοναδιαίο κύκλο οδηγεί σε πολύ μικρές τιμές ή και μηδενισμό της συνάρτησης μεταφοράς και κατ' επέκταση της εξόδου του φίλτρου (συστήματος). Θυμηθείτε ότι, για να είναι ευσταθές το φίλτρο που θα σχεδιαστεί, θα πρέπει οι πόλοι του να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Τα μηδενικά μπορεί να βρίσκονται οπουδήποτε στο επίπεδο z . Τέλος, οι πόλοι και τα μηδενικά μπορεί να είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Στην περίπτωση όμως που κάποιοι από τους πόλους ή τα μηδενικά είναι μιγαδικοί, τότε αυτοί θα πρέπει να εμφανίζονται ως ζεύγη συζυγών.

Το Παράδειγμα 3.10 αναφέρεται στο σχεδιασμό ενός IIR φίλτρου με τη γραφική μέθοδο. Ας προσπαθήσουμε να τη θυμηθούμε σχεδιάζοντας τη φορά αυτή ένα απλό ζωνοδιαβατό φίλτρο.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.3

Σχεδιάστε ψηφιακό φίλτρο το οποίο να εξασθενίζει τις συχνότητες 0 και π και να επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων γύρω από τη συχνότητα $\pi/2$.

5.2.2 Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής

Σκοπός μας σύμφωνα με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής (impulse invariance method) είναι να σχεδιάσουμε ένα IIR φίλτρο του οποίου η μοναδιαία κρουστική απόκριση $h(n)$ να ισοδυναμεί με τη δειγματοληπτημένη κρουστική απόκριση ενός κατάλληλα επιλεγμένου αναλογικού φίλτρου, δηλαδή:

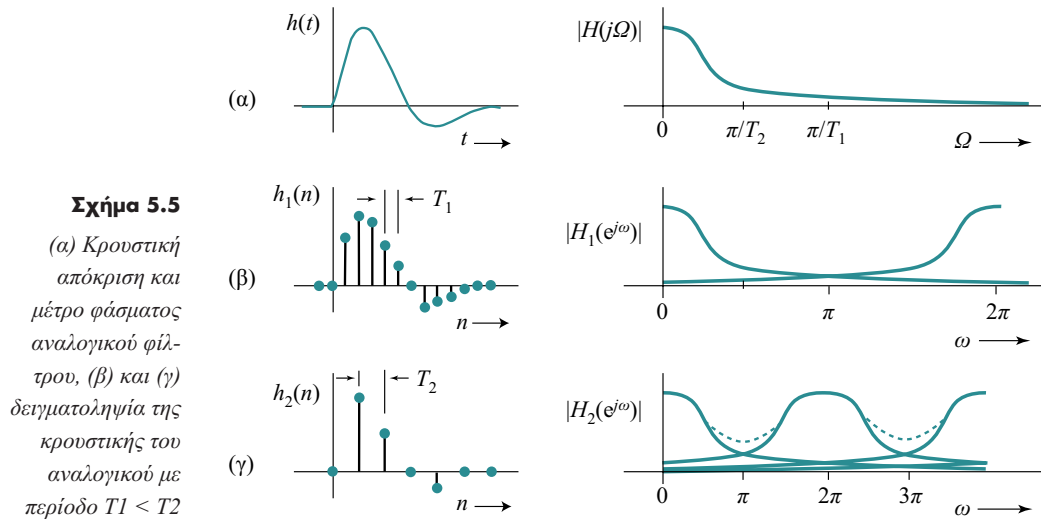
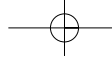
$$h(n) \equiv h(nT) = h(t) \Big|_{t=nT} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

όπου T η περίοδος δειγματοληψίας (βλ. Σχήμα 5.5α, β).

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ισούται με τον μετασχηματισμό z της δειγματοληπτημένης μοναδιαίας κρουστικής απόκρισης $h(nT)$, δηλαδή:

$$H(z) = Z\{h(nT)\} \quad (5.23)$$

Η αναλογική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ισούται με τον μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$.



Σχήμα 5.5

(α) Κρουστική απόκριση και μέτρο φάσματος αναλογικού φίλτρου, (β) και (γ) δειγματοληψία της κρουστικής του αναλογικού με περίοδο $T_1 < T_2$

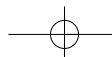
Στο σημείο αυτό θα πρέπει να εξετάσουμε το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας της αναλογικής κρουστικής απόκρισης, δηλαδή το αποτέλεσμα της σχέσης (5.22). Ας θυμηθούμε ότι, όταν λαμβάνουμε από ένα αναλογικό σήμα δείγματα με ρυθμό $F_s = 1/T$ δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο, το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος που προκύπτει είναι μια περιοδική επανάληψη του αναλογικού φάσματος, με περίοδο F_s . Συνεπώς, αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι μικρότερος από το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας που υπάρχει στο αναλογικό φάσμα, τότε θα παρουσιαστεί το φαινόμενο του ανεπαρκούς ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing), όπως αυτό δείχνεται στο Σχήμα 5.5γ. Γίνεται φανερό ότι η περίοδος δειγματοληψίας T θα πρέπει να είναι αρκετά μικρή, για να αποφύγουμε ή τουλάχιστον να ελαχιστοποιήσουμε το φαινόμενο αυτό. Επίσης, καταλαβαίνουμε ότι η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής δεν είναι κατάλληλη για τη σχεδίαση υψηπερατών φίλτρων, εξαιτίας του φαινομένου aliasing που παρουσιάζεται στο φάσμα λόγω της δειγματοληψίας. Για τους λόγους αυτούς, η μέθοδος χρησιμοποιείται κυρίως για την σχεδίαση βαθυπερατών και ζωνοδιαβατών ψηφιακών φίλτρων.

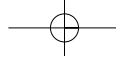
Η απεικόνιση των σημείων από το επίπεδο- s στο επίπεδο- z με την αμετάβλητη κρουστική απόκριση γίνεται μέσω της σχέσης:

$$z = e^{sT} \tag{5.24}$$

Για $s = \sigma + j\Omega$ και $z = re^{j\omega}$ βρίσκουμε ότι:

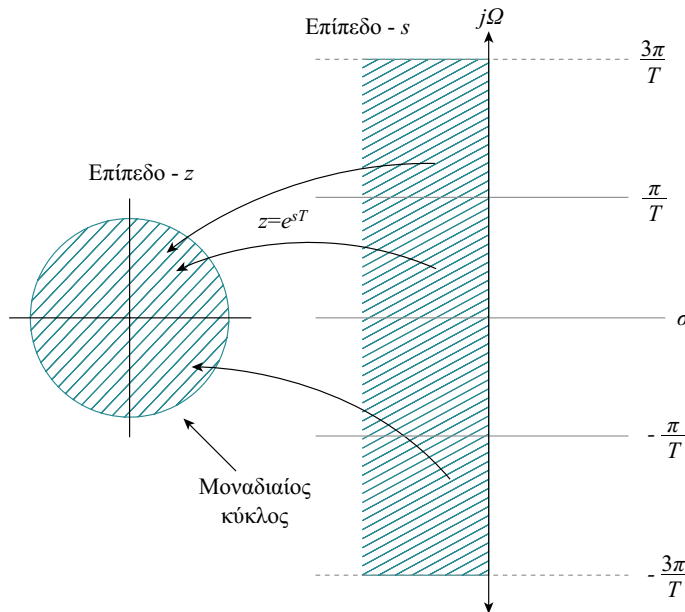
$$r = e^{\sigma T}$$





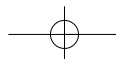
$$\omega = \Omega T \tag{5.25}$$

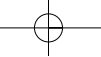
Επομένως, για $\sigma < 0$ έχουμε $0 < r < 1$, ενώ για $\sigma > 1$ έχουμε $r > 1$. Όταν $\sigma = 0$, τότε $r = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο z , ενώ το δεξί ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο z . Επίσης, ο άξονας $j\Omega$ απεικονίζεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου- z . Η απεικόνιση αυτή όμως δεν είναι απεικόνιση ένα προς ένα. Αφού το ω είναι μοναδικό στην περιοχή $(-\pi, \pi)$, η απεικόνιση $\omega = \Omega T$ συνεπάγεται ότι η περιοχή των συχνοτήτων $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$ απεικονίζεται στις αντίστοιχες τιμές $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Επιπλέον, όμως, και η περιοχή συχνοτήτων $\pi/T \leq \Omega \leq 3\pi/T$ απεικονίζεται επίσης στην ίδια περιοχή $-\pi \leq \omega \leq \pi$, και γενικά το ίδιο συμβαίνει για τις συχνοτήτες $(2k-1)\pi/T \leq \Omega \leq (2k+1)\pi/T$, όπου k ακέραιος. Άρα, η απεικόνιση της αναλογικής συχνότητας Ω στη συχνότητα ω του ψηφιακού χώρου είναι μία πολλά-σε-ένα απεικόνιση, γεγονός που αντικατοπτρίζει το φαινόμενο του ανεπαρκούς ρυθμού δειγματοληψίας. Η όλη απεικόνιση του επιπέδου- s στο επίπεδο- z φαίνεται στο Σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6

Η απεικόνιση του επιπέδου- s στο επίπεδο- z σύμφωνα με τη σχέση $z = e^{sT}$. Λωρίδες εύρους $2\pi/T$ (για $\sigma < 0$) του επιπέδου- s απεικονίζονται σε σημεία του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου- z .





Παράδειγμα 5.3

Αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού IIR φίλτρου το οποίο προκύπτει με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης.

Λύση

α. Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του αναλογικού φίλτρου από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $H(s)$, δηλαδή:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

β. Λαμβάνουμε δείγματα από την $h(t)$ αντικαθιστώντας το t με το nT . Τα δείγματα που προκύπτουν αντιστοιχούν στα στοιχεία της ακολουθίας $h(n)$, σύμφωνα με τη σχέση (5.22):

$$h(n) = h(t) \Big|_{t=nT} = e^{-nT} - e^{-2nT}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

γ. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από τον μετασχηματισμό- z της $h(nT)$, όπως υπαγορεύεται από τη σχέση (5.23):

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-2T}z^{-1}} = \frac{(e^{-T} - e^{-2T})z^{-1}}{(1 - e^{-T}z^{-1})(1 - e^{-2T}z^{-1})}, \quad |z| > e^{-T}$$

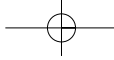
Ας προσπαθήσουμε τώρα να γενικεύσουμε τη διαδικασία σχεδίασης και ταυτόχρονα να αποδείξουμε ότι η $H(z)$ μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από την $H(s)$, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε την $h(t)$ και την $h(nT)$. Ας θεωρήσουμε ένα αναλογικό φίλτρο το οποίο έχει N διαφορετικούς πόλους. Η συνάρτηση μεταφοράς του μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων με τη μορφή:

$$H(s) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{s - p_{\xi}} \quad (5.26)$$

όπου p_{ξ} οι πόλοι του αναλογικού φίλτρου και C_{ξ} οι συντελεστές του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα.

Η αντίστοιχη κρουστική απόκριση θα είναι:

$$h(t) = \sum_{\xi=1}^N C_{\xi} e^{p_{\xi} t} \quad (5.27)$$



Αν από αυτή την κρουστική απόκριση λάβουμε δείγματα ανά T δευτερόλεπτα ($t = nT$), τότε θα πάρουμε την δειγματοληπτημένη απόκριση:

$$h(nT) = \sum_{\xi=1}^N C_{\xi} e^{p_{\xi} nT} \quad (5.28)$$

Τέλος, ο μετασχηματισμός- z της σχέσης (5.28) θα μας δώσει την επιθυμητή συνάρτηση μεταφοράς διακριτού χρόνου:

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{1 - e^{p_{\xi} T} z^{-1}} \quad (5.29)$$

Παρατηρώντας τη διαδικασία που περιγράφεται από τις σχέσεις (5.26) έως (5.29), διαπιστώνουμε ότι τα δύο ενδιάμεσα στάδια υπολογισμού της $h(t)$ και της $h(nT)$ θα μπορούσαν να παραλειφθούν και να υπολογίσουμε απευθείας την $H(z)$ (σχέση 5.29) από την $H(s)$ (σχέση 5.26) αντικαθιστώντας το $s - p_{\xi}$ με το $1 - e^{p_{\xi} T} z^{-1}$, δηλαδή:

$$H(s) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{s - p_{\xi}} \longrightarrow H(z) = \sum_{\xi=1}^N \frac{C_{\xi}}{1 - e^{p_{\xi} T} z^{-1}} \quad (5.30)$$

Η σχέση (5.30) αναφέρεται στην περίπτωση ενός φίλτρου του οποίου οι πόλοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή έχει πόλους πολλαπλότητας 1. Η περίπτωση φίλτρου με πόλους μεγαλύτερης πολλαπλότητας ξεφεύγει από τους στόχους του παρόντος κεφαλαίου, και δε θα μας απασχολήσει.

Παράδειγμα 5.4

Από το αναλογικό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = (s + 0,1)/[(s + 0,1)^2 + 9]$ να προσδιοριστεί αντίστοιχο IIR ψηφιακό φίλτρο με χρήση της μεθόδου της αμετάβλητης κρουστικής.

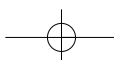
Λύση

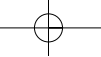
Παρατηρούμε ότι το αναλογικό φίλτρο έχει ένα μηδενικό στο σημείο $s = -0,1$ και ένα ζεύγος συζυγών πόλων $p_{\xi} = -0,1 \pm j3$. Εκφράζουμε την $H(s)$ ως άπτυγμα μερικών κλασμάτων:

$$H(s) = \frac{0,5}{s + 0,1 - j3} + \frac{0,5}{s + 0,1 + j3}$$

και υπολογίζουμε την $H(z)$ με βάση τη σχέση (5.30):

$$H(z) = \frac{0,5}{1 - e^{(-0,1+j3)T} z^{-1}} + \frac{0,5}{1 - e^{(-0,1-j3)T} z^{-1}} = \frac{1 - (e^{-0,1T} \cos 3T) z^{-1}}{1 - (2e^{-0,1T} \cos 3T) z^{-1} + e^{-0,2T} z^{-1}}$$





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.4

Με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ψηφιακού IIR φίλτρου που αντιστοιχεί στο αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο $H(s) = 1/(s+1)(s^2+s+1)$.

5.2.3 Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού

Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης για τη σχεδίαση IIR ψηφιακών φίλτρων είναι κατάλληλη για βαθυπερατά και ορισμένα ζωνοδιαβατά φίλτρα. Θα ασχοληθούμε τώρα με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού (bilinear transformation method), η οποία τουλάχιστον δεν θέτει τέτοιους περιορισμούς. Πρόκειται για έναν μαθηματικό μετασχηματισμό του πεδίου- s στο πεδίο- z . Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό αυτό, όταν μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του αναλογικού φίλτρου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του αντίστοιχου ψηφιακού φίλτρου, αντικαθιστώντας το s με το $(z-1)/(z+1)$, δηλαδή:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} \quad (5.31)$$

Με άλλα λόγια, η απεικόνιση από το επίπεδο s στο επίπεδο z γίνεται με βάση τη σχέση^[1]:

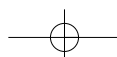
$$s = \frac{z-1}{z+1} \quad (5.32)$$

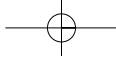
Για να διερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά του διγραμμικού μετασχηματισμού, ας θεωρήσουμε ότι $z = re^{j\omega}$ και $s = \sigma + j\Omega$. Τότε, η σχέση (5.32) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$s = \frac{re^{j\omega} - 1}{re^{j\omega} + 1} = \frac{r^2 - 1}{\underbrace{1 + r^2 + 2r \cos \omega}_{\Omega}} + j \frac{2r \sin \omega}{\underbrace{1 + r^2 + 2r \cos \omega}_{\Omega}} \quad (5.33)$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι, εάν $r < 1$, τότε $\sigma < 0$ και εάν $r > 1$, τότε $\sigma > 0$. Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο- z , ενώ το δεξί ημιεπίπεδο του s απεικονίζεται στο

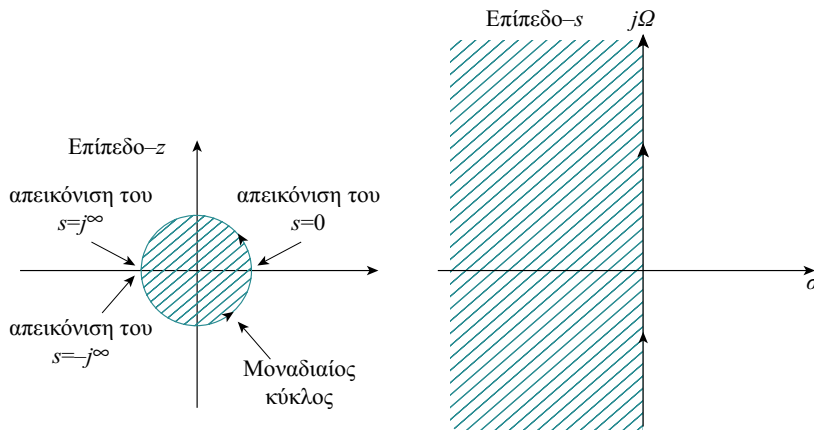
[1] Η σχέση $s = (z-1)/(z+1)$ μπορεί να γραφεί και ως $sz + s - z + 1 = 0$. Παρατηρούμε ότι η τελευταία σχέση είναι γραμμική ως προς s και γραμμική ως προς z ή διγραμμική ως προς s και z .





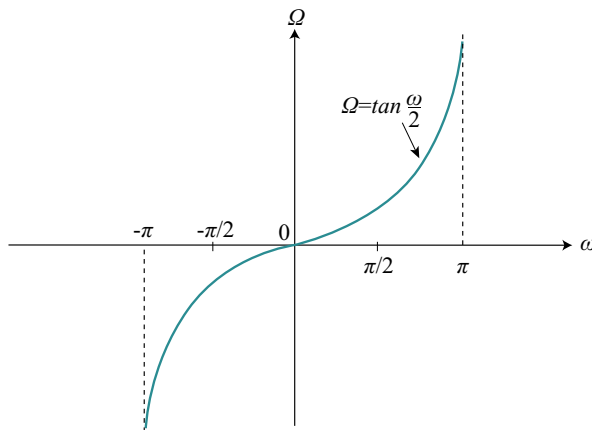
εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (βλ. Σχήμα 5.7). Άρα, από ένα ευσταθές αναλογικό φίλτρο παίρνουμε ένα ευσταθές ψηφιακό φίλτρο. Όταν $r = 1$, τότε $\sigma = 0$ και:

$$\Omega = \tan \frac{\omega}{2} \quad (5.34)$$



Σχήμα 5.7

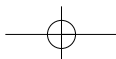
Απεικόνιση του επιπέδου-s στο επίπεδο-z μέσω του διγραμμικού μετασχηματισμού

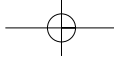


Σχήμα 5.8

Μη γραμμική σχέση μεταξύ των αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων λόγω του διγραμμικού μετασχηματισμού

Η σχέση μεταξύ των συχνοτήτων στα δύο πεδία s και z φαίνεται στο Σχήμα 5.8. Γίνεται φανερό ότι όλη η περιοχή των συχνοτήτων Ω απεικονίζεται μόνο μία φορά στην περιοχή $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Πρόκειται επομένως, για μια ένα-προς-ένα απεικόνιση. Η απεικόνιση όμως, αυτή είναι μη γραμμική. Παρατηρείται, δηλαδή, μια παραμόρφωση ή *στρέβλωση* των συχνοτήτων (frequency warping), εξαιτίας της μη γραμμικότητας της





συνάρτησης της εφαπτομένης. Αυτή η στρέβλωση των συχνοτήτων θα πρέπει, όπως θα δούμε στη συνέχεια, να λαμβάνεται υπόψη κατά την σχεδίαση ενός IIR φίλτρου.

Σχόλια σχετικά με τον διγραμμικό μετασχηματισμό:

1. Σε ορισμένα βιβλία ο διγραμμικός μετασχηματισμός ορίζεται ως $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, όπου T η περίοδος δειγματοληψίας. Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής $\frac{2}{T}$ δεν είναι απαραίτητος, αφού απαλείφεται κατά τη διαδικασία αντιστάθμισης της στρέβλωσης, όπως θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.
2. Για τα βαθυπερατά και υψηπερατά φίλτρα, η τάξη της $H(z)$ που προκύπτει, είναι ίδια με την τάξη της $H(s)$. Για παράδειγμα, από ένα δεύτερης τάξης βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο θα πάρουμε ένα δεύτερης τάξης βαθυπερατό ψηφιακό φίλτρο. Όμως, για τα ζωνοδιαβατά φίλτρα και τα φίλτρα απόρριψης ζώνης αυτό δεν ισχύει. Στην περίπτωση αυτή, η τάξη της $H(z)$ είναι διπλάσια της τάξης της $H(s)$.
3. Ευσταθή αναλογικά φίλτρα οδηγούν σε ευσταθή ψηφιακά φίλτρα.

Παράδειγμα 5.5

Το πιο απλό αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο αποτελείται από έναν αντιστάτη και έναν πυκνωτή. Πρόκειται για το γνωστό «RC κύκλωμα», η έξοδος του οποίου λαμβάνεται από τα άκρα του πυκνωτή (Σχήμα 5.9α). Με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού, να σχεδιαστεί το αντίστοιχο ψηφιακό φίλτρο, του οποίου η συχνότητα αποκοπής να είναι 30 Hz, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 150 Hz.

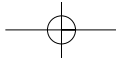
Λύση

Η συχνότητα αποκοπής του επιθυμητού ψηφιακού φίλτρου είναι (Βλ. σχέση 1.13)

$$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi F_c \frac{1}{F_s} = 2\pi 30 \frac{1}{150} = \frac{2}{5}\pi = 0,4\pi. \text{ Η συχνότητα αυτή του επιπέδου-} z$$

είναι η αντίστοιχη της συχνότητας $\Omega'_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan\left(\frac{0,4\pi}{2}\right) = 0,73$ του επιπέδου- s

(Βλ. σχέση 5.34). Ο υπολογισμός που μόλις εκτελέσαμε αποτελεί τη λεγόμενη *αντιστάθμιση στρέβλωσης* (prewarping). Επομένως, αυτό που χρειάζεται να σχεδιάσουμε είναι ένα αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής Ω'_c . Το πρωτότυπο ($\Omega_c = 1$) αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο το οποίο αντιστοιχεί στο απλό RC κύκλωμα έχει συνάρτηση μεταφοράς $H_p(s) = 1/(s+1)$. Εκτελούμε, επομένως, έναν



μετασηματισμό συχνότητας από βαθυπερατό σε βαθυπερατό (σχέση 5.15) για να υπολογίσουμε το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο το οποίο έχει $\Omega'_c = 0,73$.

$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Bigg|_{s = \frac{1}{\Omega'_c} s} = \frac{1}{\frac{s}{0,73} + 1} = \frac{0,73}{s + 0,73}$$

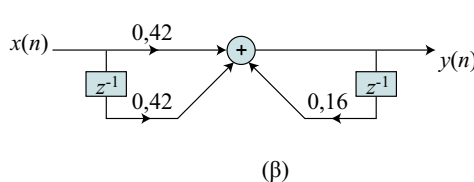
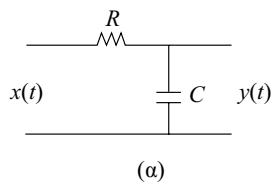
Γνωρίζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς του αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου, εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασηματισμό (σχέση 5.31) για να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς του επιθυμητού ψηφιακού φίλτρου:

$$H(z) = H_{LP}(s) \Bigg|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,73}{\frac{z-1}{z+1} + 0,73} = \frac{0,42(1+z^{-1})}{1-0,16z^{-1}}$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα ψηφιακό φίλτρο πρώτης τάξης, όπως και το αντίστοιχο αναλογικό φίλτρο. Η εξίσωση διαφορών του φίλτρου που προκύπτει είναι

$$y(n) = 0,42[x(n) + x(n-1)] + 0,16y(n-1),$$

ενώ η δομή πραγματοποίησής του φαίνεται στο Σχήμα 5.9β.



Σχήμα 5.9

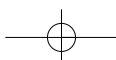
(α) Αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο πρώτης τάξης, (β) ψηφιακό φίλτρο πρώτης τάξης του Παραδείγματος 5.5.

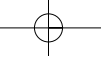
Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.5

Η συνάρτηση μεταφοράς του πρωτότυπου αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου πρώτης τάξης είναι $H_p(s) = 1/(s + 1)$. Σχεδιάστε το αντίστοιχο υψηπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο, το οποίο να έχει συχνότητα αποκοπής 30 Hz για συχνότητα δειγματοληψίας 150 Hz.

Πριν προχωρήσουμε στο σχεδιασμό IIR φίλτρων τάξης μεγαλύτερης της πρώτης, θα ήταν καλό να συστηματοποιήσουμε τη διαδικασία σχεδίασης με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασηματισμού. Η διαδικασία αυτή, όπως φάνηκε από το Παράδειγμα 5.5, αποτελείται από τα εξής στάδια:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο ($\Omega_c = 1$) αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο.





2. Μετασχηματίζουμε αυτό στο βαθυπερατό ή το υπερπερατό ή το ζωνοδιαβατό ή το απόρριψης ζώνης φίλτρο το οποίο έχει χαρακτηριστικές συχνότητες Ω' , που αντιστοιχούν στις επιθυμητές συχνότητες ω του ψηφιακού φίλτρου.
3. Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στη συνάρτηση μεταφοράς του αναλογικού φίλτρου που μόλις υπολογίσαμε.

Παράδειγμα 5.6

Με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού να σχεδιαστεί βαθυπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 150 Hz για ρυθμό δειγματοληψίας 1,5 kHz. Η σχεδίαση να βασιστεί στο πρωτότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο δεύτερης τάξης τύπου Butterworth.

Λύση

Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ του επιθυμητού IIR ψηφιακού φίλτρου, ακολουθούμε τα παραπάνω στάδια σχεδίασης:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο ($\Omega_c = 1$) αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο. Στην προκειμένη περίπτωση είναι το δεύτερης τάξης Butterworth φίλτρο $H_p(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

2. Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό σε βαθυπερατό με συχνότητα αποκοπής $\Omega'_c = \tan(\omega_c/2) = \tan(\Omega_c T/2) = \tan(2\pi 150(1/1500)/2) = \tan(0,1\pi) = 0,32$ εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό συχνότητας της σχέσης (5.15):

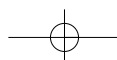
$$H_{LP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_c}{\Omega'_c} s = \frac{1}{0,32} s = \frac{s}{0,32}} = \frac{1}{\left(\frac{s}{0,32}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{0,32}\right) + 1} = \frac{1}{9,47s^2 + 4,35s + 1}$$

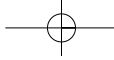
3. Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στην τελευταία σχέση:

$$H(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{9,47\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 4,35\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1} = \frac{0,07(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,14z^{-1} + 0,41z^{-2}}$$

Το ζητούμενο ψηφιακό φίλτρο είναι δεύτερης τάξης, όπως και το αναλογικό από το οποίο αρχίσαμε τη σχεδίαση, και έχει εξίσωση διαφορών:

$$y(n) = 0,07[x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)] + 1,14y(n-1) - 0,41y(n-2).$$





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5.6

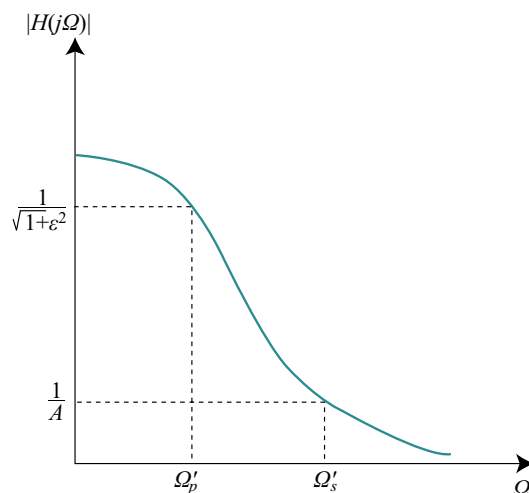
Σχεδιάστε ένα ζωνοδιαβατό IIR ψηφιακό φίλτρο δεύτερης τάξης του οποίου η ζώνη διέλευσης να κυμαίνεται μεταξύ 200 Hz και 300 Hz, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 2 kHz. Η σχεδίαση του φίλτρου να βασιστεί στη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού, εφαρμοσμένη σε αναλογικό φίλτρο Butterworth.

Παράδειγμα 5.7

Να σχεδιάσετε βαθυπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο το οποίο να εξασθενίζει μονοτονικά τις συχνότητες. Η ζώνη διέλευσης του φίλτρου να εκτείνεται μέχρι τα 125 Hz, ενώ η εξασθένιση στη ζώνη αυτή να μην υπερβαίνει τα 0,5 dB. Η μέγιστη εξασθένιση στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 15 dB, ενώ η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 275 Hz. Το όλο σύστημα λειτουργεί με συχνότητα δειγματοληψίας 1 kHz. Η σχεδίαση να γίνει με βάση τον διγραμμικό μετασχηματισμό.

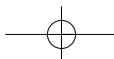
Λύση

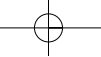
Από τις προδιαγραφές που μας δίνονται καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για κάποιο βαθυπερατό φίλτρο τύπου Butterworth (αφού πρέπει να παρουσιάζει μονοτονική εξασθένιση για όλες τις συχνότητες). Δεν γνωρίζουμε όμως την τάξη του φίλτρου. Αυτή μπορούμε να την προσδιορίσουμε από τις τιμές των συχνοτήτων και εξασθενίσεων που μας δίνονται. Το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο που ζητάμε να προσδιορίσουμε και στο οποίο θα εφαρμόσουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό, φαίνεται στο Σχήμα 5.10. Έχουμε γι' αυτό το φίλτρο:



Σχήμα 5.10

Το αρχικό αναλογικό φίλτρο από το οποίο θα προκύψει το ζητούμενο βαθυπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο.





$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) = 0 \text{ dB} \Rightarrow \varepsilon^2 = 0,122$$

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) = 15 \text{ dB} \Rightarrow A^2 = 31,623$$

$$\Omega'_p = \tan \left(\frac{\omega_p}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_p T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 125(1/1000)}{2} \right) = \tan(0,125)\pi = 0,41$$

$$\Omega'_s = \tan \left(\frac{\omega_s}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_s T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 275(1/1000)}{2} \right) = \tan(0,275)\pi = 1,17$$

Η τάξη του φίλτρου μπορεί τώρα να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της σχέσης (5.6):

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log_{10} \left[(A^2 - 1) / \varepsilon^2 \right]}{\log_{10} (\Omega'_s / \Omega'_p)} = \frac{\log_{10}(251)}{2 \log_{10}(2.85)} = \frac{2,40}{0,91} = 2,63$$

Άρα το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο πρέπει να είναι τρίτης τάξης ($N = 3$).

Από το σημείο αυτό πλέον, μπορούμε να ακολουθήσουμε τα τρία στάδια σχεδίασης ενός ψηφιακού IIR φίλτρου, όπως τα γνωρίσαμε προηγουμένως:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο.

Είδαμε ότι το πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο θα πρέπει να είναι τύπου Butterworth τρίτης τάξης. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού είναι (βλ. ενότητα 5.1)

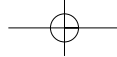
$$H_p(s) = 1/(s^3 + 2s^2 + 2s + 1).$$

2. Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό σε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης ίση με $\Omega'_p = 0,41$. Για να εκφράσουμε όμως το μετασχηματισμό από βαθυπερατό σε βαθυπερατό της σχέσης (5.15), πρέπει να γνωρίζουμε τη συχνότητα Ω_p του πρωτότυπου φίλτρου, δηλαδή του φίλτρου που έχει $\Omega_c = 1$. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει με βάση τη σχέση (5.5a) και το γεγονός ότι $N = 3$.

$$\frac{1}{1 + (\Omega_p / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 + (\Omega_p / 1)^6} = \frac{1}{1 + 0,122} \Rightarrow \Omega_p = 0,702$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (5.15) έχουμε:



$$\begin{aligned}
 H_{LP}(s) &= H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s = \frac{0,702}{0,41} s = 1,712s} = \\
 &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \Big|_{s = 1,712s} = \frac{1}{(1,712s)^3 + 2(1,712s)^2 + 2(1,712s) + 1} = \\
 &= \frac{1}{5,02s^3 + 5,86s^2 + 3,42s + 1}
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στην τελευταία σχέση:

$$H(z) = H_{LP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{5,02 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + 5,86 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 + 3,42 \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + 1}$$

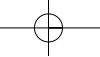
Η σχέση αυτή αποτελεί τη συνάρτηση μεταφοράς του ζητούμενου IIR ψηφιακού φίλτρου.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τρεις διαφορετικές μεθόδους για το σχεδιασμό IIR ψηφιακών φίλτρων. Η πρώτη ήταν η γραφική μέθοδος κατά την οποία ο προσδιορισμός της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου γίνεται με απευθείας τοποθέτηση των πόλων και μηδενικών πάνω στο επίπεδο- z . Η δεύτερη μέθοδος ήταν εκείνη της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης. Σύμφωνα με αυτή, το φίλτρο που σχεδιάζουμε έχει κρουστική απόκριση τη δειγματοληπτημένη κρουστική απόκριση του επιθυμητού αναλογικού φίλτρου. Διαπιστώσαμε ότι η μέθοδος αυτή είναι κατάλληλη για το σχεδιασμό κυρίως βαθυπερατών καθώς και ορισμένων ζωνοδιαβατών φίλτρων. Τέλος, η τρίτη μέθοδος ήταν εκείνη του διγραμμικού μετασχηματισμού. Πρόκειται για έναν μετασχηματισμό κατά τον οποίο το αριστερό ημιπερίπεδο του επιπέδου- s απεικονίζεται μη γραμμικά, αλλά όμως με μία ένα-προς-ένα απεικόνιση, στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου- z . Η μέθοδος είναι κατάλληλη για τη σχεδίαση φίλτρων οποιουδήποτε τύπου.

5.3 Υλοποίηση IIR ψηφιακών φίλτρων

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε τις τεχνικές σχεδίασης των IIR ψηφιακών φίλτρων και μάθαμε να προσδιορίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς και την εξίσωση



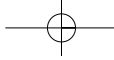
διαφορών LTI συστημάτων διακριτού χρόνου. Το τελευταίο στάδιο είναι η υλοποίηση των φίλτρων αυτών, ώστε να επιτελέσουν το σκοπό για τον οποίο αυτά σχεδιάστηκαν. Η υλοποίηση των IIR φίλτρων, όπως και αυτή των FIR φίλτρων, μπορεί να γίνει είτε σε κυκλωματική μορφή (hardware), είτε με προγραμματισμό (software) ενός υπολογιστικού συστήματος γενικού ή ειδικού σκοπού.

Γενικά, η εξίσωση διαφορών ενός φίλτρου είναι μια υπολογιστική διαδικασία (ένας αλγόριθμος) για τον υπολογισμό της ακολουθίας εξόδου $y(n)$ του συστήματος, από την ακολουθία εισόδου $x(n)$. Όμως, όπως είδαμε και στην ενότητα 3.4.4, οι υπολογισμοί αυτοί μπορούν να γίνουν με ένα διαφορετικό, αλλά ισοδύναμο, σύνολο εξισώσεων διαφορών. Κάθε ένα τέτοιο σύνολο εξισώσεων ορίζει μια υπολογιστική διαδικασία ή έναν αλγόριθμο για την υλοποίηση του συστήματος. Για κάθε ένα σύνολο εξισώσεων μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα βαθμίδων το οποίο να αποτελείται από στοιχεία καθυστέρησης, πολλαπλασιαστές και αθροιστές. Αυτό το διάγραμμα βαθμίδων το χαρακτηρίσαμε ως *δομή πραγματοποίησης* (realisation structure) του συστήματος. Στην περίπτωση κατά την οποία το σύστημα (φίλτρο) υλοποιηθεί προγραμματιστικά (software), το διάγραμμα βαθμίδων ή ισοδύναμο το σύνολο των εξισώσεων διαφορών, μετατρέπεται σε ένα σύνολο εντολών (πρόγραμμα) το οποίο «τρέχει» στο συγκεκριμένο υπολογιστικό σύστημα.

Το ερώτημα, βέβαια, που μπορεί να γεννηθεί στον αναγνώστη είναι το γιατί θα πρέπει να έχουμε διαφορετικές δομές πραγματοποίησης ενός φίλτρου, για παράδειγμα, άμεση μορφή τύπου 1 ή 2 (Σχήμα 3.5), σε σειρά ή παράλληλη (Σχήμα 3.6), από τη στιγμή που έχουμε σχεδιάσει το φίλτρο, γνωρίζουμε τους συντελεστές του και κατά συνέπεια μπορούμε να υλοποιήσουμε την εξίσωση διαφορών που έχει προκύψει ως έχει.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι ότι οι διάφορες δομές πραγματοποίησης παρουσιάζουν διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την απαιτούμενη *υπολογιστική πολυπλοκότητα* (computational complexity), τη *μνήμη* (memory) και τα προβλήματα λόγω του *πεπερασμένου μήκους λέξης* (finite wordlength effects).

Όταν λέμε *υπολογιστική πολυπλοκότητα* εννοούμε το πλήθος των αριθμητικών πράξεων (πολλαπλασιασμών, διαιρέσεων και προσθέσεων) οι οποίες απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου $y(n)$. Πριν από λίγα χρόνια, αυτές οι τρεις πράξεις ήταν οι μοναδικές που χρησιμοποιούσαμε για να μετρήσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Στις μέρες μας όμως, με την εντυπωσιακή πρόοδο που έχει συντελεστεί στο σχεδιασμό και την κατασκευή πολύπλοκων και αποτελεσματικών προγραμματιζόμενων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (digital signal processors, DSPs), άλλοι παράγοντες παίζουν επίσης ρόλο στον



προσδιορισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, όπως για παράδειγμα, το πλήθος των προσπελάσεων της μνήμης ή το πλήθος των συγκρίσεων δύο αριθμών.

Όταν λέμε *μνήμη* εννοούμε το πλήθος των θέσεων μνήμης που απαιτούνται για την αποθήκευση των δειγμάτων εισόδου και εξόδου, των παραμέτρων του συστήματος, καθώς και των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων που τυχόν προκύπτουν.

Τέλος, τα προβλήματα λόγω του *πεπερασμένου μήκους λέξης*, ή αλλιώς λόγω της πεπερασμένης ακριβείας, αναφέρονται στα φαινόμενα κβάντισης τα οποία ενυπάρχουν σε οποιαδήποτε ψηφιακή υλοποίηση ενός συστήματος είτε κυκλωματική, είτε προγραμματιστική. Οι παράμετροι του συστήματος πρέπει απαραίτητα να αναπαρασταθούν με πεπερασμένη ακρίβεια. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν στη διαδικασία υπολογισμού κάθε δείγματος εξόδου του συστήματος, πρέπει να στρογγυλευθούν (rounded) ή να αποκοπούν (truncated) στο κατάλληλο μήκος λέξης (κατάλληλη ακρίβεια) που επιβάλλει ο υπολογιστής ή το κύκλωμα που χρησιμοποιούμε για την υλοποίηση. Όλα αυτά είναι προβλήματα τα οποία επηρεάζουν σημαντικά την τελική μας απόφαση σχετικά με το ποια δομή πραγματοποίησης θα πρέπει να επιλέξουμε. Αποδεικνύεται ότι οι διαφορετικές δομές πραγματοποίησης ενός συστήματος, ενώ είναι ισοδύναμες στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε άπειρη ακρίβεια, παρουσιάζουν πολύ διαφορετική συμπεριφορά μεταξύ τους για πεπερασμένη ακρίβεια.

5.3.1 Πεπερασμένη ακρίβεια και υλοποίηση IIR ψηφιακών φίλτρων

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η πεπερασμένη ακρίβεια κατά την υλοποίηση ενός φίλτρου εισάγει σφάλματα τα οποία υποβαθμίζουν την απόδοση του φίλτρου ή και οδηγούν σε αστάθεια του όλου συστήματος. Για να γίνει κατανοητό αυτό, ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.8

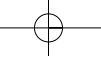
Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού IIR φίλτρου δεύτερης τάξης είναι:

$$H(z) = 1/(1 - 1,845z^{-1} + 0,850586z^{-2})$$

Να εξεταστεί η ευστάθεια του φίλτρου. Να επαναληφθεί η διαδικασία στην περίπτωση που οι συντελεστές αναπαριστάνονται με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

Λύση

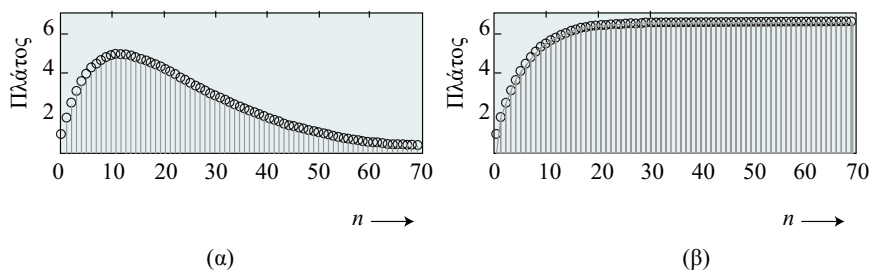
Η παραγοντοποίηση του παρανομαστή οδηγεί στην ισοδύναμη μορφή για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = 1/(1 - 0,902z^{-1})(1 - 0,943z^{-1})$. Το σύστημα έχει δύο πραγματικούς πόλους στα σημεία $z = 0,902$ και $z = 0,943$. Αφού το μέτρο κάθε πόλου είναι



μικρότερο της μονάδας, δηλαδή οι πόλοι βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο- z , το σύστημα είναι ευσταθές. Παρατηρήστε ότι η κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος είναι φθίνουσα (Σχήμα 5.11α), όπως ακριβώς απαιτείται για ένα ευσταθές σύστημα. Ας στρογγυλεύσουμε τώρα τους συντελεστές της $H(z)$ στα δύο δεκαδικά ψηφία. Αυτή γίνεται $H(z) = 1/(1 - 1,85z^{-1} + 0,85z^{-2})$ ή μετά την παραγοντοποίηση $H(z) = 1/(1 - z^{-1})(1 - 0,85z^{-1})$. Παρατηρούμε ότι η νέα συνάρτηση έχει πόλους στα σημεία $z = 1$ και $z = 0,85$. Ο ένας πόλος βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο με συνέπεια το σύστημα να μην είναι πλέον ευσταθές! Πράγματι, σχεδιάζοντας και πάλι την κρουστική απόκριση $h(n)$ του νέου συστήματος (Σχήμα 5.11β), παρατηρούμε ότι αυτή πολύ σύντομα αυξάνεται μέχρι να φτάσει σε μια σταθερή τιμή, στην οποία και παραμένει. Κατά συνέπεια, η κρουστική απόκριση δεν είναι αθροίσιμη κατ' απόλυτη τιμή (σχέση 3.52) και το σύστημα δεν είναι ευσταθές.

Σχήμα 5.11

Κρουστική απόκριση του συστήματος του Παραδείγματος 5.8 για ακρίβεια των συντελεστών (α) άπειρη και (β) δύο δεκαδικών ψηφίων.

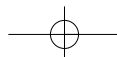


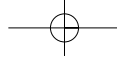
Από το παράδειγμα αυτό έγινε φανερό ότι τα σφάλματα λόγω της κβάντισης των συντελεστών του φίλτρου, μπορούν να επηρεάσουν δραστικά τη συμπεριφορά του. Αποδεικνύεται ότι η ευαισθησία της απόκρισης συχνότητας ενός φίλτρου, στην κβάντιση των συντελεστών του φίλτρου, μπορεί να ελαχιστοποιηθεί αν πραγματοποιήσουμε το υψηλής τάξης φίλτρο, (δηλαδή το φίλτρο με πολλούς πόλους και μηδενικά), ως συνδυασμό δομών δεύτερης τάξης σε σειρά ή παράλληλα (βλ. υποενότητα 3.4.4).

Γενικά, τα σφάλματα στα IIR είναι τριών ειδών:

1. Σφάλματα λόγω κβάντισης των συντελεστών του φίλτρου.
2. Σφάλματα λόγω υπερχείλισης (overflow), τα οποία προέρχονται από τις προσθήσεις των μερικών αποτελεσμάτων σε καταχωρητές περιορισμένου μήκους.
3. Σφάλματα λόγω στρογγύλευσης των γινομένων, τα οποία προέρχονται από την στρογγύλευση ή αποκοπή των ενδιάμεσων αριθμητικών πράξεων στο διαθέσιμο μήκος λέξης.

Ειδικά για τα επαναληπτικά φίλτρα που μελετάμε, οι μη γραμμικότητες οι οποίες





οφείλονται στις πράξεις με πεπερασμένη ακρίβεια, προκαλούν συνήθως κάποιες περιοδικές ταλαντώσεις στην έξοδο, ακόμη και όταν η είσοδος είναι μηδέν ή έχει μια σταθερή τιμή. Αυτές οι ταλαντώσεις ονομάζονται *οριακοί κύκλοι* (limit cycles) και οφείλονται στα σφάλματα στρογγύλευσης των γινομένων και στα σφάλματα υπερχείλισης κατά την πρόσθεση.

Το κατά πόσο καθένα από τα σφάλματα αυτά επηρεάζει την τελική συμπεριφορά ενός φίλτρου, εξαρτάται από: (α) το μήκος λέξης και τον τύπο της αριθμητικής που χρησιμοποιείται για την υλοποίηση, (β) τη μέθοδο κβάντισης των συντελεστών (λ.χ. στρογγύλευση ή αποκοπή) και (γ) τη δομή πραγματοποίησης του φίλτρου.

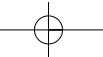
Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή είδαμε ότι τα σφάλματα που παρουσιάζονται λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας αποτελούν ένα καθοριστικό παράγοντα στην επιλογή του τρόπου υλοποίησης ενός IIR φίλτρου. Τα σφάλματα αυτά αφορούν την κβάντιση των συντελεστών του φίλτρου, την υπερχείλιση κατά την εκτέλεση των προσθέσεων και τη στρογγύλευση κατά τον υπολογισμό των γινομένων. Ως γενικό κανόνα, είδαμε ότι τα υψηλής τάξης IIR ψηφιακά φίλτρα, θα πρέπει να υλοποιούνται ως συνδυασμός δομών δευτέρης τάξης, για την ελαχιστοποίηση των παραπάνω σφαλμάτων.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τα ψηφιακά φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR). Η μελέτη αυτή αφορούσε κυρίως τη σχεδίαση και την υλοποίηση τέτοιων φίλτρων. Είδαμε ότι από όλες τις μεθόδους σχεδίασης IIR ψηφιακών φίλτρων, η πλέον συστηματική και γενική, δηλαδή η πλέον κατάλληλη για οποιοδήποτε τύπο φίλτρου, είναι η μέθοδος του διγραμμικού μετασχηματισμού. Με τη μέθοδο αυτή επιτυγχάνεται μια ένα-προς-ένα, αλλά μη γραμμική, απεικόνιση του φανταστικού άξονα του επιπέδου- s στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου- z . Επίσης, με τη μέθοδο αυτή από ευσταθή αναλογικά φίλτρα καταλήγουμε σε ευσταθή ψηφιακά φίλτρα.

Η ανάγκη σχεδίασης φίλτρων με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού μάς οδήγησε στο να κάνουμε μια μικρή αναφορά στα αναλογικά φίλτρα. Έτσι, γνωρίσαμε τα φίλτρα Butterworth, τα φίλτρα Chebyshev και τα Ελλειπτικά φίλτρα, καθώς και τους αναλογικούς μετασχηματισμούς συχνότητας, ώστε από ένα πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο να μπορούμε να παίρνουμε το επιθυμητό υπερπερατό, ζωνο-



διαβατό ή απόρριψης ζώνης φίλτρο.

Τέλος, γνωρίσαμε τα σχετικά με την υλοποίηση των IIR ψηφιακών φίλτρων που σχεδιάσαμε. Είδαμε ότι, κυρίως λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας, το ψηφιακό σύστημα μπορεί να μη συμπεριφέρεται όπως αρχικά είχε σχεδιαστεί. Ένα από τα βασικά μέτρα που πρέπει να λάβουμε, για να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα λόγω πεπερασμένης ακρίβειας, είναι να υλοποιήσουμε τα υψηλής τάξης φίλτρα ως συνδυασμό (σε σειρά ή παράλληλα) δομών δεύτερης τάξης.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

E.C.Ifeachor, B.W. Jervis, *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Second edition, Pearson Education Limited, 2002.

S.K.Mitra, *Digital Signal Processing: A computer-Based Approach*, McGraw Hill, 2001.

J.P.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, 1996.

R.D.Strum, D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

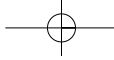
ΟΔΗΓΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗΣ

J.P.Proakis, D.G.Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, Third Edition, Prentice Hall, 1996.

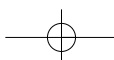
Στο βιβλίο αυτό θα βρείτε μια πολύ καλή παρουσίαση όλων των μεθόδων σχεδίασης IIR ψηφιακών φίλτρων. Επίσης γίνεται μια εξαιρετική παρουσίαση των αναλογικών φίλτρων.

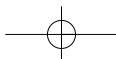
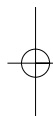
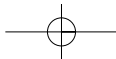
R.D.Strum, D.E.Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988 .

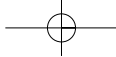
Μια εκτεταμένη αναφορά στα αναλογικά φίλτρα και στις μεθόδους σχεδίασης IIR φίλτρων, με πολλά παραδείγματα, γίνεται στο δέκατο κεφάλαιο αυτού του βιβλίου.

**Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική**

Aliasing	Φαινόμενο χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας
Analog filter	Αναλογικό φίλτρο
Bandpass filter	Ζωνοδιαβατό φίλτρο
Bandstop filter	Φίλτρο απόρριψης ζώνης
Bilinear transformation	Διγραμμικός μετασχηματισμός
Cascade realisation	Πραγματοποίηση σε σειρά
Computational complexity	Υπολογιστική πολυπλοκότητα
Elliptic	Ελλειπτικός
Finite wordlength effects	Φαινόμενα πεπερασμένου μήκους λέξης
FIR, Finite Impulse Response	Πεπερασμένη κρουστική απόκριση
Frequency warping	Στρέβλωση συχνότητας
Highpass filter	Υψηπερατό φίλτρο
IIR, Infinite Impulse Response	Άπειρη κρουστική απόκριση
Implementation	Υλοποίηση
Impulse invariance method	Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής
Limit cycles	Οριακοί κύκλοι
Lowpass filter	Βαθυπερατό φίλτρο
Parallel realisation	Παράλληλη πραγματοποίηση
Prewarping	Αντιστάθμιση στρέβλωσης
Prototype	Πρωτότυπο
Realisation structure	Δομή πραγματοποίησης
Recursive	Επαναληπτικός, αναδρομικός
Rounding	Στρογγύλευση
Truncation	Αποκοπή







Εισαγωγή στην ψηφιακή εικόνα

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών των ψηφιακών εικόνων. Τις ψηφιακές εικόνες θα τις θεωρήσουμε ως ψηφιακά σήματα στις δύο διαστάσεις. Θα γνωρίσουμε επίσης στοιχεία από τη λειτουργία του ανθρώπινου συστήματος όρασης, τα οποία θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση της πληροφορίας που περιέχει η ψηφιακή εικόνα. Έμφαση θα δώσουμε στα είδη των πράξεων που μπορούν να γίνουν σε μία ψηφιακή εικόνα. Θα δούμε επίσης τι είναι φάσμα μιας εικόνας, τον τρόπο που υπολογίζεται και τη σημασία της φάσης στη σωστή αναπαράσταση της πληροφορίας που περιέχει η εικόνα.

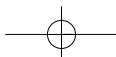
Προσδοκώμενα αποτελέσματα

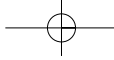
Όταν ολοκληρώσετε τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού θα είστε σε θέση να:

- Εκτιμάτε το μέγεθος μιας ψηφιακής εικόνας
- Αναγνωρίζετε τον τύπο (format) με τον οποίο είναι αποθηκευμένη σε αρχείο μία εικόνα
- Κατανοείτε τη συμπεριφορά του ανθρώπινου συστήματος όρασης στις διαφορετικές αποχρώσεις της αμαύρωσης
- Εκτελείτε απλές πράξεις πάνω σε ψηφιακές εικόνες
- Εκτιμάτε το πλήθος των υπολογισμών που απαιτούνται για μία συγκεκριμένη διαδικασία επεξεργασίας της ψηφιακής εικόνας
- Κατανοείτε το φάσμα της εικόνας και τον σημαντικό ρόλο που παίζει η φάση του

Έννοιες κλειδιά

- Εικονοστοιχείο
- Διαβαθμίσεις της αμαύρωσης
- Δισδιάστατη μοναδιαία κρούση
- Δισδιάστατη κρουστική γραμμή
- Δισδιάστατη βαθμίδα
- Απόκτηση της εικόνας





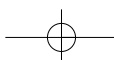
- Αποκατάσταση της εικόνας
- Βελτίωση της εικόνας
- Ανάλυση της εικόνας
- Τεχνητή όραση
- Φωτεινότητα
- Λαμπρότητα
- Συνάρτηση μεταφοράς διαμόρφωσης
- Τοπικές πράξεις
- Καθολικές πράξεις
- Πράξεις σημείου
- Γεωμετρικές πράξεις
- Χωρικές συχνότητες
- Φάσμα εικόνας
- Φάση του Φάσματος της εικόνας

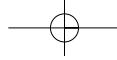
Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Η ψηφιακή εικόνα είναι ένα από τα διδιάστατα ψηφιακά σήματα που παρουσιάζουν σημαντικό ενδιαφέρον στη σύγχρονη κοινωνία της πληροφορίας. Στο κεφάλαιο αυτό θα γνωρίσουμε τα στοιχειώδη συστατικά της ψηφιακής εικόνας, όπως είναι το εικονοστοιχείο, το μέγεθος της εικόνας, οι πράξεις που μπορούμε να κάνουμε πάνω σε αυτή καθώς και το πλήθος των υπολογισμών που απαιτούνται. Θα γνωρίσουμε επίσης πώς είναι το φάσμα μιας εικόνας και τον τρόπο που αυτό μπορεί να υπολογιστεί. Τέλος, θα γνωρίσουμε στοιχεία από τον τρόπο λειτουργίας του ανθρώπινου οπτικού συστήματος. Περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να βρει στις αναφορές της ελληνικής και της ξενόγλωσσης βιβλιογραφίας.

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τις ακόλουθες ενότητες:

- 6.1. Η ψηφιακή εικόνα.
- 6.2. Η φυσιολογία της όρασης.
- 6.3. Είδη πράξεων στην επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας.
- 6.4. Το φάσμα της εικόνας.





6.1 Η ψηφιακή εικόνα

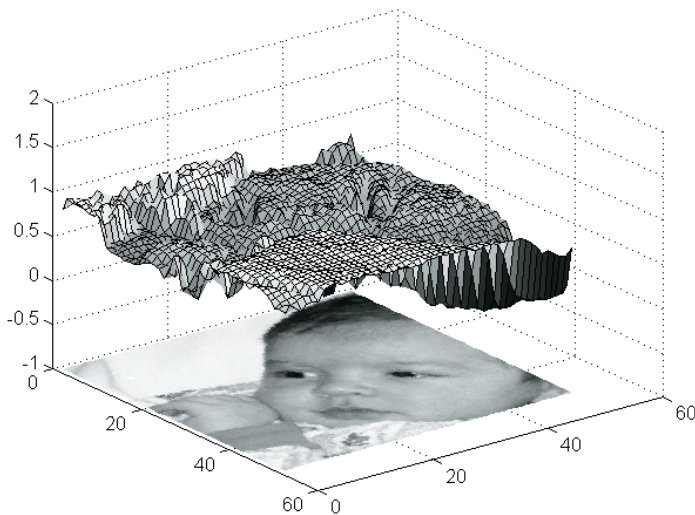
Η εικόνα αποτελεί στην εποχή μας μία από τις σημαντικότερες πηγές πληροφορίας. Τη συναντούμε ως εικόνα ακίνητη (φωτογραφία) ή κινούμενη (τηλεόραση), ασπρόμαυρη ή έγχρωμη. Η ψηφιακή εικόνα αποτελεί ό,τι πιο σύγχρονο, τόσο στο χώρο της ενημέρωσης (Internet) και της εκπαίδευσης (multimedia), όσο και στο χώρο του θεάματος και της ψυχαγωγίας (ψηφιακή τηλεόραση, DVD κτλ.). Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε εισαγωγικά θέματα που αφορούν την ψηφιακή εικόνα.

6.1.1 Η εικόνα ως δισδιάστατο σήμα

Μέχρι το προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε θεωρήσει τα σήματά μας ως συναρτήσεις μιας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής, του χρόνου. Η ανάγκη για επεξεργασία της πληροφορίας της εικόνας οδηγεί κατ' αρχήν στη μαθηματική περιγραφή του περιεχομένου της. Έτσι, την ασπρόμαυρη εικόνα μπορούμε να τη δούμε ως μία δισδιάστατη συνάρτηση των συντεταγμένων του χώρου x και y :

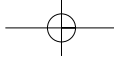
$$f \rightarrow f(x, y) \quad (6.1)$$

Αυτό σημαίνει ότι η f περιγράφει μία επιφάνεια, η οποία έχει μεγάλη τιμή όπου η εικόνα είναι πιο λευκή, ενώ για μικρές τιμές της f η εικόνα πλησιάζει το μαύρο. Στην ουσία η f περιγράφει την αμαύρωση της εικόνας σε κάθε θέση (x, y) . Η αναπαράσταση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 6.1, όπου παρουσιάζεται η εικόνα τμήματος προσώπου και η αντίστοιχη συνάρτηση της αμαύρωσης f .



Σχήμα 6.1

Η εικόνα προσώπου και η αντίστοιχη δισδιάστατη συνάρτηση της αμαύρωσης.



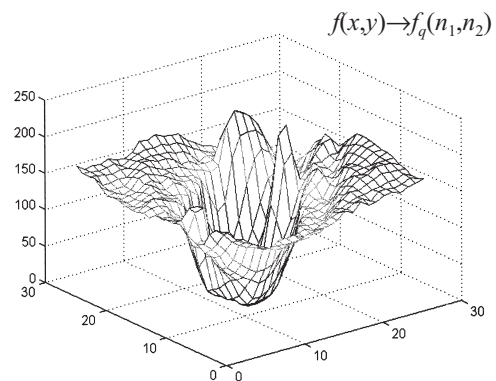
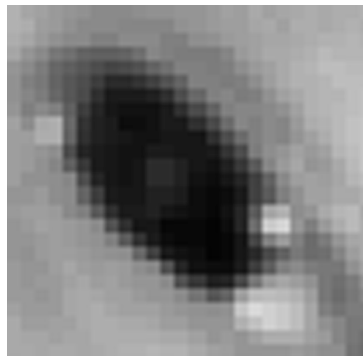
Στην πράξη, κάθε εικόνα για να υποστεί ψηφιακή επεξεργασία θα πρέπει κατ' αρχήν να μετατραπεί σε ψηφιακή. Η διαδικασία αυτή είναι περίπου η ίδια όπως και στην περίπτωση του μονοδιάστατου σήματος. Έτσι, θα πρέπει να λάβουμε ισαπέχοντα δείγματα της συνάρτησης $f(x,y)$ στις διευθύνσεις x και y . Η πυκνότητα με την οποία θα ληφθούν τα δείγματα καθορίζεται και στην περίπτωση αυτή (δισδιάστατη συνάρτηση στο χώρο) από το θεώρημα δειγματοληψίας:

Η απόσταση δύο διαδοχικών δειγμάτων στο επίπεδο (x,y) θα πρέπει να είναι μικρότερη από την ημιπερίοδο των ταχύτερων εναλλαγών της συνάρτησης $f(x,y)$.

Με άλλα λόγια, θα πρέπει να λαμβάνουμε τα δείγματα αρκετά πυκνά, ώστε να προλαβαίνουμε τις γρήγορες εναλλαγές της αμαύρωσης της εικόνας. Στη συνέχεια τα δείγματα θα πρέπει να κβαντιστούν σε πεπερασμένο αριθμό σταθμών. Συνήθως οι στάθμες που χρησιμοποιούνται είναι 256 (2^8). Στη στάθμη 255 αντιστοιχούμε το λευκό ενώ στη στάθμη 0 το μαύρο. Έτσι, ένας δυαδικός αριθμός των 8 bits (1 byte) επαρκεί για να περιγράψουμε την τιμή της αμαύρωσης ενός δείγματος της εικόνας, που καλείται και «εικονοστοιχείο» (picture element – pixel). Στην τελική της μορφή μία ασπρόμαυρη ψηφιακή εικόνα θα είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.2.

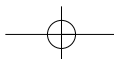
Σχήμα 6.2

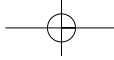
Η ψηφιακή εικόνα αποτελείται από μικρές κουκίδες τα εικονοστοιχεία (pixels). Τα λευκά εικονοστοιχεία αντιστοιχούν στο 255 ενώ τα μαύρα στο 0. Καθένα από τα εικονοστοιχεία είναι ένα δείγμα από τη συνάρτηση $f(x,y)$ που αντιστοιχεί στην αναλογική εικόνα.



Η ψηφιακή εικόνα της μορφής του σχήματος 6.2 παριστάνεται μαθηματικά ως η κβαντισμένη σε πλάτος συνάρτηση

$$f \rightarrow f_q(n_1, n_2) \quad (6.2)$$





όπου οι διακριτές χωρικές μεταβλητές n_1 και n_2 αντιστοιχούν στις συνεχείς χωρικές μεταβλητές x και y . Στη γενική περίπτωση, η μέγιστη τιμή του n_1 είναι M και του n_2 είναι N . Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε την ψηφιακή εικόνα ως μία μήτρα αριθμών διαστάσεων $M \times N$, που καθένας από αυτούς εκπροσωπεί την τιμή του αντίστοιχου εικονοστοιχείου. Για παράδειγμα, η εικόνα του Σχήματος 6.2 αποτελείται από $M \times N = 25 \times 25 = 625$ εικονοστοιχεία.

Σε ειδικού τύπου εικόνες, όπως είναι το κείμενο ή το σχέδιο, αρκούν δύο μόνο στάθμες, οι 0 και 1, που αντιστοιχούν στο μαύρο και το λευκό. Στην περίπτωση αυτή ένα μόνο δυαδικό ψηφίο είναι αρκετό για να αναπαραστήσει την πληροφορία. Μία τέτοιου τύπου εικόνα απεικονίζεται στο Σχήμα 6.3.

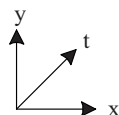
Σχήμα 6.3

Χειρόγραφη λέξη όπου η πληροφορία έχει καταγραφεί μόνο με μαύρα και λευκά εικονοστοιχεία (0 και 1).

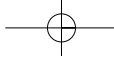
Σε περίπτωση που η εικόνα είναι έγχρωμη τότε σε κάθε θέση (n_1, n_2) η f έχει τρεις τιμές (άνυσμα), οι οποίες αντιστοιχούν στις τιμές των χρωμάτων κόκκινο, πράσινο και μπλε (Red, Green and Blue – RGB). Όταν, τέλος, έχουμε διαδοχή εικόνων η συνάρτηση f έχει μία επιπλέον μεταβλητή, το χρόνο t . Το σήμα είναι διακριτό και ως προς το χρόνο ($t \rightarrow n_3$):

$$f \rightarrow f_q(n_1, n_2, n_3) \quad (6.3)$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε εικόνα απέχει χρονικά από την άλλη κάποιο χρονικό διάστημα. Το διάστημα αυτό θα πρέπει να είναι αρκετά μικρό, περίπου 1/30 sec, για να γίνει δυνατή η παρουσίαση της κίνησης. Η συνάρτηση αυτή στον τρισδιάστατο χώρο (x, y, t) φαίνεται στο Σχήμα 6.4.

**Σχήμα 6.4**

Η διαδοχική παρουσίαση εικόνων που δίνει την αίσθηση της κίνησης μπορεί να παρασταθεί μαθηματικά ως συνάρτηση τριών μεταβλητών.



6.1.2 Στοιχειώδη δισδιάστατα ψηφιακά σήματα

Ένα δισδιάστατο ψηφιακό σήμα μπορεί να παρασταθεί γραφικά όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.5α. Το σήμα έχει τιμή μόνο για τα σημεία του πλέγματος (κβάντιση των x και y) καθώς επίσης και κβαντισμένο πλάτος. Τα πλέον στοιχειώδη δισδιάστατα ψηφιακά σήματα είναι η δισδιάστατη κρουστική $\delta(n_1, n_2)$ (Σχήμα 6.5β):

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (6.4)$$

η δισδιάστατη κρουστική γραμμή $\delta(n_1)$ ή $\delta(n_2)$ (Σχήμα 6.5γ και 6.5δ)

$$\delta(n_1) = \begin{cases} 1 & n_1 = 0 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad \delta(n_2) = \begin{cases} 1 & n_2 = 0 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (6.5)$$

καθώς και η δισδιάστατη βηματική $u(n_1, n_2)$ (Σχήμα 6.5ε):

$$u(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 \geq 0 \text{ και } n_2 \geq 0 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (6.6)$$

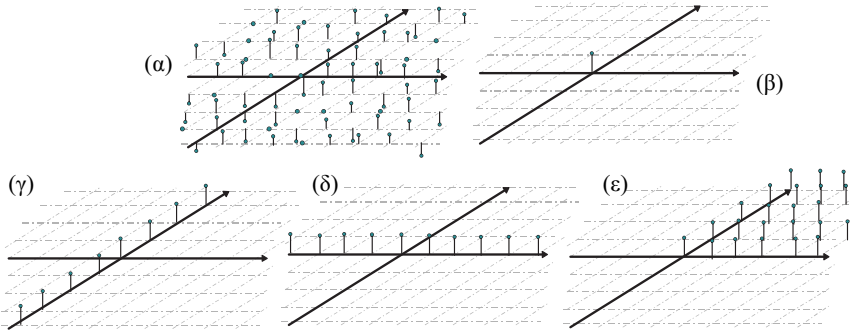
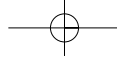
Χρησιμοποιώντας τα στοιχειώδη αυτά σήματα μπορούμε να εκφράσουμε κάθε δισδιάστατο ψηφιακό σήμα ως γραμμικό συνδυασμό τους. Έτσι, για το σήμα $f(n_1, n_2)$ ισχύει:

$$f(n_1, n_2) = \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} f(r_1, r_2) \delta(n_1 - r_1, n_2 - r_2) \quad (6.7)$$

Το σήμα $f(n_1, n_2)$, δηλαδή, είναι γραμμικός συνδυασμός δισδιάστατων κρουστικών. Μία πολύ σημαντική ιδιότητα που είναι επιθυμητή για τα δισδιάστατα ψηφιακά σήματα είναι η διαχωρισιμότητα. Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται τη μαθηματική έκφραση ενός δισδιάστατου σήματος $f(n_1, n_2)$ ως γινομένου δύο μονοδιάστατων σημάτων:

$$f(n_1, n_2) = f_1(n_1) f_2(n_2) \quad (6.8)$$

Την ιδιότητα αυτή την έχει τόσο η $\delta(n_1, n_2)$, όσο και η $u(n_1, n_2)$.



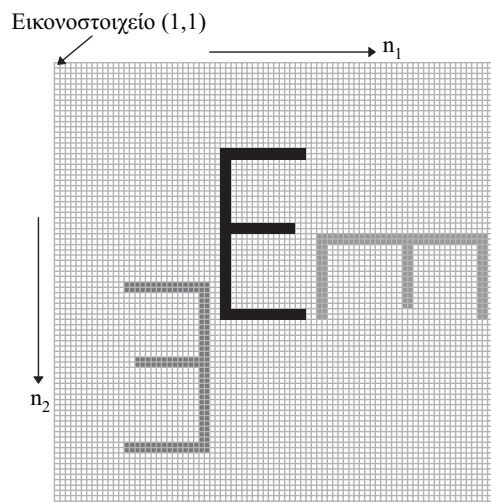
Σχήμα 6.5

α) Η μορφή ενός δισδιάστατου ψηφιακού σήματος. β) Δισδιάστατη κρουστική. γ) και δ) δισδιάστατη κρουστική γραμμή. ε) Δισδιάστατη βηματική.

6.1.3 Η γεωμετρία της εικόνας

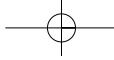
Όπως προαναφέρθηκε, η εικόνα θεωρείται ως η κατανομή της πληροφορίας (βαθμός αμαύρωσης ή χρώμα) στο επίπεδο (x,y) . Τα περισσότερα οπτικά συστήματα (φωτογραφικές μηχανές, βιντεοκάμερες) αποδίδουν αναλογικές εικόνες, δηλαδή, εικόνες όπου οι συντεταγμένες (x,y) αλλά και ο βαθμός αμαύρωσης f είναι συνεχείς ποσότητες. Αντίθετα, οι ψηφιακές εικόνες, που πρόκειται να αποθηκευτούν στη μνήμη του υπολογιστή, ή να τύχουν επεξεργασίας από αυτόν, έχουν τιμή μόνο σε διακριτό αριθμό συντεταγμένων (n_1, n_2) , που αποτελούν και τις θέσεις των εικονοστοιχείων. Επίσης, κάθε εικονοστοιχείο λαμβάνει πεπερασμένο αριθμό τιμών αμαύρωσης.

Ο προσανατολισμός των συντεταγμένων σε μία ψηφιακή εικόνα μπορεί να είναι αυθαίρετος. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις και κυρίως στις ποικίλες εφαρμογές λογισμικού που κυκλοφορούν στο εμπόριο, η αρχή των συντεταγμένων $(n_1, n_2) = (1,1)$ λαμβάνεται στην επάνω αριστερή γωνία της εικόνας (Σχήμα 6.6).



Σχήμα 6.6

Συνήθως τα εικονοστοιχεία σε μία ψηφιακή εικόνα είναι διατεταγμένα σε σειρές και στήλες με πρώτο αυτό της επάνω αριστερής γωνίας.



Καθένα εικονοστοιχείο έχει τις δικές του συντεταγμένες. Συνεπώς, μία εικόνα που έχει M εικονοστοιχεία στη διεύθυνση n_1 και N στη διεύθυνση n_2 , περιέχει συνολικά $N \times M$ εικονοστοιχεία. Το μέγεθος της πληροφορίας της εικόνας είναι γενικά μεγάλο. Ακόμα και μικρές σε διαστάσεις εικόνες περιέχουν μεγάλο αριθμό εικονοστοιχείων, γεγονός που καθιστά χρονοβόρα την ψηφιακή τους επεξεργασία. Για το λόγο αυτό, ο έλεγχος αλγορίθμων επεξεργασίας εικόνας γίνεται αρχικά σε ένα μικρό τμήμα της εικόνας.

Παράδειγμα 6.1

Μία εικόνα με διαστάσεις 1.000×1.000 έχει συνολικά 1.000.000 εικονοστοιχεία. Η επεξεργασία του πλήθους των εικονοστοιχείων αυτών με πολύπλοκους αλγόριθμους απαιτεί μεγάλο πλήθος υπολογισμών. Πόσο λιγότεροι υπολογισμοί θα χρειαστούν αν δοκιμάσει κανείς τους αλγόριθμους αυτούς σε ένα τμήμα της εικόνας μεγέθους 50×50 εικονοστοιχείων;

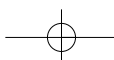
Λύση

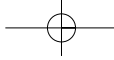
Το τμήμα αυτό της εικόνας περιέχει $50 \times 50 = 2.500$ εικονοστοιχεία, δηλαδή τετρακόσιες φορές λιγότερα απ' ότι σε ολόκληρη την εικόνα. Έτσι, οι απαιτούμενοι υπολογισμοί είναι τετρακόσιες φορές λιγότεροι. Από άποψη χρόνου, αν ολόκληρη η εικόνα απαιτούσε μία ολόκληρη ώρα για τη συγκεκριμένη ψηφιακή επεξεργασία, η δοκιμή των αλγορίθμων μόνο στο συγκεκριμένο τμήμα της χρειάζεται εννέα μόλις δευτερόλεπτα.

Δραστηριότητα 6.1

Ποιος είναι ο αριθμός των εικονοστοιχείων μιας εικόνας μεσαίων διαστάσεων; Πόσο χώρο στη μνήμη του υπολογιστή απαιτεί η εικόνα αυτή αν η πληροφορία κάθε εικονοστοιχείου είναι κωδικοποιημένη με δυαδικό αριθμό του ενός byte; Πόσος είναι ο χώρος αυτός αν η ίδια η εικόνα είναι έγχρωμη;

Μία τυπική εικόνα μεσαίων διαστάσεων έχει πλήθος εικονοστοιχείων $512 \times 512 = 262144$. Αν κάθε εικονοστοιχείο χρειάζεται ένα byte μνήμης για αποθήκευση (με ένα byte μπορούν να αναπαρασταθούν 256 διαβαθμίσεις του γκριζου), τότε η συνολική εικόνα απαιτεί 262.144 bytes ή 0,25 Mbytes μνήμης. Στην περίπτωση που η εικόνα είναι έγχρωμη, κάθε εικονοστοιχείο θέλει 3 bytes για αποθήκευση (1 για κάθε χρώμα από τα κόκκινο, πράσινο και μπλε). Για ολόκληρη την εικόνα χρειάζονται συνολικά 0,75 Mbytes μνήμης.





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 6.1

Μία ασπρόμαυρη εικόνα (1 byte/εικονοστοιχείο) 128×128 εικονοστοιχείων συγκριτικά με μία έγχρωμη 512×512 εικονοστοιχείων, απαιτεί για αποθήκευση:

- α. 4 φορές λιγότερη μνήμη.
- β. 16 φορές λιγότερη μνήμη.
- γ. 48 φορές λιγότερη μνήμη.
- δ. 64 φορές λιγότερη μνήμη.

Ποια από τις απαντήσεις είναι η σωστή.

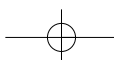
Οι σύγχρονες οθόνες των υπολογιστών έχουν τη δυνατότητα να επιδείξουν ψηφιακές εικόνες μεγάλων διαστάσεων. Η δυνατότητα αυτή συνδέεται άμεσα με την ανάλυση της οθόνης, ή αλλιώς με τον αριθμό των εικονοστοιχείων που μπορούν να εμφανίσουν. Η απλούστερη έγχρωμη οθόνη, με τη συνοδεία των αντίστοιχων ηλεκτρονικών κυκλωμάτων (κάρτα Video Graphics Adapter – VGA), μπορεί να παρουσιάσει $800 \times 600 = 480.000$ έγχρωμα εικονοστοιχεία. Με διάφορες τεχνικές είναι δυνατό να παρουσιάσουμε σε μία τέτοια οθόνη πολύ μεγαλύτερες εικόνες.

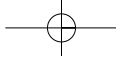
Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι ο απαιτούμενος χώρος σε bytes για να αποθηκευτεί η εικόνα εξαρτάται τόσο από το πλήθος των εικονοστοιχείων, όσο και από την πολυπλοκότητα στη διάταξή τους. Έτσι, αν πρόκειται για εικόνα που περιέχει σχέδιο ή κείμενο κάθε εικονοστοιχείο μπορεί να είναι μαύρο ή άσπρο, οπότε χρειάζεται μόνο 1 bit για την πληροφορία αυτή. Αν η εικόνα περιέχει ασπρόμαυρη φωτογραφία με 256 διαβαθμίσεις στην αμαύρωση, τότε χρειάζεται ένα byte για την αποθήκευση κάθε εικονοστοιχείου. Στις έγχρωμες εικόνες θέλουμε 3 bytes για κάθε εικονοστοιχείο. Με σύγχρονες μεθόδους συμπίεσης της πληροφορίας (image compression) είναι δυνατόν ο απαιτούμενος χώρος αποθήκευσης να είναι αρκετά μικρότερος.

Παράδειγμα 6.2

Πόσο χώρο σε bytes απαιτεί για την αποθήκευσή της μία εικόνα διαστάσεων 1024×1024 εικονοστοιχείων, όταν περιέχει :

- α. Κείμενο
- β. Ασπρόμαυρη εικόνα με 256 διαβαθμίσεις του γκριζου.
- γ. Έγχρωμη εικόνα



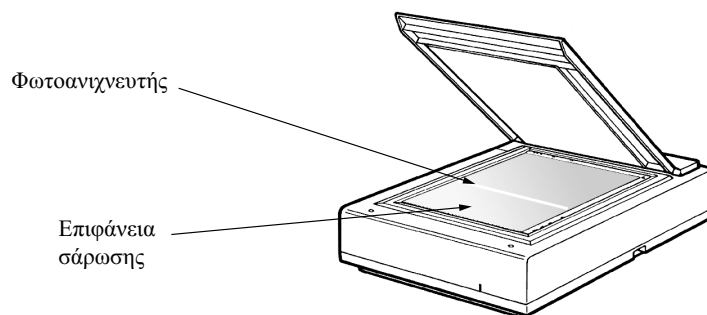


Λύση

- α. Στην περίπτωση κειμένου κάθε εικονοστοιχείο χρειάζεται 1 bit για να αποθηκευτεί. Έτσι, τα bits που απαιτούνται είναι $1.024 \times 1.024 \times 1 = 1.048.576$ ή 131.072 bytes που ισοδυναμούν με 128 kbytes.
- β. Στην περίπτωση της ασπρόμαυρης εικόνας χρειάζεται 1 byte για κάθε εικονοστοιχείο, οπότε 1.024×1.024 bytes για όλη την ασπρόμαυρη εικόνα που ισοδυναμούν με 1 Mbyte μνήμης.
- γ. Για την έγχρωμη εικόνα το ποσό αυτό είναι τριπλάσιο.

6.1.4 Τρόποι απόκτησης της ψηφιακής εικόνας

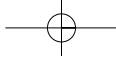
Η ψηφιακή εικόνα που, όπως αναφέραμε, αποτελεί ένα δισδιάστατο διακριτό σήμα στο χώρο (x,y) με κβαντισμένες τιμές πλάτους, μπορεί να ληφθεί είτε από αναλογικές εικόνες είτε απευθείας από συστήματα λήψης ψηφιακών εικόνων. Στην πρώτη περίπτωση, η αναλογική εικόνα θα μετατραπεί σε ψηφιακή με τη βοήθεια (το πιθανότερο) ενός σαρωτή εικόνας (scanner). Η συσκευή αυτή σαρώνει την εικόνα από πάνω προς τα κάτω σε γραμμές με τη βοήθεια ενός επιμήκους φωτο-ανιχνευτή (Σχήμα 6.7). Ο φωτο-ανιχνευτής διαθέτει λαμπτήρα λευκού φωτός, που φωτίζει μία στενή λωρίδα της εικόνας. Το ανακλώμενο φως καταγράφεται από τα φωτο-ευαίσθητα κύτταρα του ανιχνευτή που βρίσκονται σε γραμμική διάταξη. Οι σύγχρονοι σαρωτές εικόνας αποδίδουν πολύ καλή ανάλυση στην εικόνα. Η ανάλυση αυτή εκφράζεται σε εικονοστοιχεία ανά ίντσα (pixels per inch – ppi). Τυπικές τιμές αυτής της ανάλυσης είναι 75, 150, 300, 600 ή και 1.440 ppi.



Σχήμα 6.7

Σαρωτής εικόνας της εταιρίας Hewlett Packard (μοντέλο HP 9195A).

Αν πρόκειται για αναλογική εικόνα από video (διαδοχή εικόνων), τότε η μετατροπή σε ψηφιακή εικόνα γίνεται με ταχύτατα ηλεκτρονικά κυκλώματα, τους frame grabbers. Τα κυκλώματα αυτά εκτελούν τη μετατροπή κάθε αναλογικής εικόνας σε



ψηφιακή σε πραγματικό χρόνο (30 στιγμιότυπα/δευτερόλεπτο). Παρότι η ανάλυσή τους σε εικονοστοιχεία δε φθάνει αυτήν που αποδίδει ένας σαρωτής, σε γενικές γραμμές θεωρείται πολύ ικανοποιητική και δίνει εικόνες πολύ καλής ποιότητας.

Τα συστήματα απευθείας λήψης ψηφιακής εικόνας αναπτύσσονται τον τελευταίο καιρό, και η τεχνολογία τους βρίσκεται σε εξέλιξη. Έτσι, οι ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές, που ήδη κυκλοφορούν, έχουν ενσωματωμένη μνήμη RAM και δισκέτα για καταχώρηση της πληροφορίας. Το είδωλο της εικόνας δεν καταγράφεται πάνω σε φιλμ, αλλά σε μία μήτρα στοιχειωδών φωτο-ανιχνευτών (λ.χ. 600×350), το σήμα των οποίων κβαντίζεται και καταχωρείται στη μνήμη της μηχανής. Οι εικόνες αυτές έχουν φθάσει ήδη την ποιότητα της κλασικής φωτογραφίας, αφού η ανάλυσή τους έχει υπερβεί τα 1.024×1.024 εικονοστοιχεία. Το κυριότερο πλεονέκτημα των ψηφιακών συστημάτων είναι ότι παρέχουν την πληροφορία σε ψηφιακή μορφή, που μπορεί εύκολα να αντιγραφεί, να διαμορφωθεί και κυρίως να παραμένει αναλλοίωτη στο χρόνο λόγω της ψηφιακής της υφής.

Τα συστήματα λήψης ψηφιακής εικόνας παρέχουν τη δυνατότητα στο χρήστη να λάβει την ψηφιακή εικόνα με διαφορετικές αναλύσεις. Έτσι, του δίνεται η δυνατότητα να δοκιμάσει το ανεκτό όριο τόσο στην ανάλυση, όσο και στο πλήθος των διαβαθμίσεων της αμαύρωσης. Στο Σχήμα 6.8 δίνεται διαδοχικά η εικόνα του προσώπου η οποία έχει ληφθεί με διαφορετική κάθε φορά ανάλυση και πλήθος διαβαθμίσεων του γκριζού. Η ποιότητα της εικόνας υποβαθμίζεται με την ελάττωση της ανάλυσης, αλλά ταυτόχρονα μειώνεται και η απαιτούμενη μνήμη για αποθήκευσή της.



α



β



γ



δ



ε

Σχήμα 6.8

Οι πέντε εικόνες του προσώπου έχουν ληφθεί με διαφορετικές αναλύσεις και απαιτούν διαφορετική μνήμη.

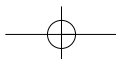
(α) 300 εικονοστοιχεία/ίντσα με 256 διαβαθμίσεις της αμαύρωσης απαιτούν για αποθήκευση 186 kbytes μνήμης

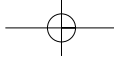
(β) 75 εικονοστοιχεία/ίντσα με 256 διαβαθμίσεις της αμαύρωσης απαιτούν για αποθήκευση 12 kbytes μνήμης.

(γ) 25 εικονοστοιχεία/ίντσα με 256 διαβαθμίσεις της αμαύρωσης απαιτούν για αποθήκευση 2 kbytes μνήμης.

(δ) 75 εικονοστοιχεία/ίντσα με 16 διαβαθμίσεις της αμαύρωσης απαιτούν για αποθήκευση 6 kbytes μνήμης.

(ε) 25 εικονοστοιχεία/ίντσα με 2 διαβαθμίσεις της αμαύρωσης απαιτούν για αποθήκευση 0,25 kbytes μνήμης.





Δραστηριότητα 6.2

Πόση μνήμη απαιτείται για να φυλαχτεί ως εικόνα η παρούσα σελίδα του βιβλίου. Εκτιμήστε μόνοι σας την απαιτούμενη ανάλυση σε ppi του σαρωτή εικόνας.

Για μία αποδεκτή ποιότητα εικόνας είναι αρκετά 100 ppi. Η ανάλυση αυτή αντιστοιχεί σε 100 εικονοστοιχεία/ίντσα σε κάθε κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι σε μία τετραγωνική ίντσα περιέχονται 10.000 εικονοστοιχεία. Μία σελίδα χαρτιού A4 είναι περίπου 90 τετραγωνικές ίντσες (8×11), επομένως θα έχουμε συνολικά 900.000 εικονοστοιχεία. Κάθε ένα εικονοστοιχείο απαιτεί μόνο ένα bit για την αντιπροσώπευσή του (μαύρο ή άσπρο). Επομένως η συνολική μνήμη θα είναι 900.000 bits ή 112.500 bytes.

Φυσικά, διαφορετικές απαιτήσεις στην ανάλυση της εικόνας θα οδηγήσουν σε διαφορετικά μεγέθη.

Οι ψηφιακές εικόνες είναι οργανωμένες και αποθηκεύονται σε αρχεία (files) διαφόρων ειδών ανάλογα με τον τρόπο και τη συσκευή απόκτησής τους, αλλά και την ανάγκη για γρήγορη μετάδοση ή οικονομική αποθήκευση. Έτσι, στην αρχή του αρχείου υπάρχει συνήθως η πληροφορία (header) για τον τρόπο που έχει καταγραφεί η εικόνα στο αρχείο. Οι κυριότεροι τύποι αρχείων που περιέχουν ψηφιακές εικόνες είναι οι ακόλουθοι:

imasename.bmp

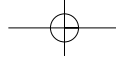
Τυποποίηση για έγχρωμες εικόνες σε Windows. Τα γράμματα της κατάληξης του ονόματος του αρχείου προέρχονται από τον όρο «Bit Mapped», που σημαίνει αντιστοιχία εικονοστοιχείου και byte. Είναι αρχεία ανεξάρτητα της συσκευής (device independent), μπορούν δηλαδή να «ανοιχτούν» χωρίς πρόβλημα από διαφορετικού τύπου λογισμικό, χωρίς αλλαγές.

imasename.tif

Tagget Image File Format. Είναι και αυτή τυποποίηση bit mapped που χρησιμοποιείται από όλα σχεδόν τα πακέτα λογισμικού για εικόνες, καθώς και όλα τα λειτουργικά συστήματα. Η διαφορά με την προηγούμενη τυποποίηση είναι ότι εδώ χρησιμοποιείται πίνακας αναφοράς για την επιλογή των χρωμάτων.

imasename.jpg

Συμπίεσμένες εικόνες σύμφωνα με το πρότυπο JPEG (Joint Photographic Experts Group). Οι συμπίεσμένες εικόνες καταλαμβάνουν λιγότερο χώρο μνήμης και επο-



μένως, μεταδίδονται πιο γρήγορα μέσα στο δίκτυο. Κατά τη συμπίεση ένα μέρος της πληροφορίας στην εικόνα χάνεται, επομένως η ανάκτησή της δεν γίνεται με την αρχική ακρίβεια.

imagenname.gif

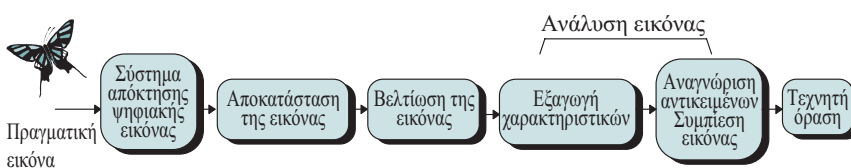
Ο τύπος αυτός αφορά τις εικόνες που είναι κωδικοποιημένες σύμφωνα με το Graphics Interchange Format, μία τυποποίηση για έγχρωμες εικόνες που παρουσιάζονται ή μεταφέρονται σε δικτυακές διασυνδέσεις και στο Διαδίκτυο (Internet).

6.1.5 Η επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας

Η επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας περιλαμβάνει στη γενικότερη περίπτωση πολλά και διαφορετικά στάδια ανάλογα με

- τη μορφή και την αρχική κατάσταση της ψηφιακής εικόνας
- το επιθυμητό τελικό αποτέλεσμα.

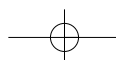
Στο Σχήμα 6.9 δίνεται ένα γενικό διάγραμμα που περιλαμβάνει πολλά από τα στάδια αυτά καθώς και τη μεταξύ τους σχέση. Έτσι, η πραγματική εικόνα θα καταγραφεί από το σύστημα απόκτησης της ψηφιακής εικόνας (image acquisition system). Θα ακολουθήσει το στάδιο της εξαγωγής του θορύβου (filtering) και της διόρθωσης (αποκατάστασης – restoration) σφαλμάτων που προκλήθηκαν είτε από το μέσο μεταξυ εικόνας και συστήματος απόκτησης είτε και από το ίδιο το σύστημα απόκτησης. Τα σφάλματα αυτά θα πρέπει να διορθωθούν πριν προχωρήσουμε σε επόμενο στάδιο στην επεξεργασία της εικόνας. Σφάλματα που παρουσιάζονται στην εικόνα κατά τη διάρκεια της απόκτησής της είναι ο θερμικός θόρυβος ή/και ο θόρυβος αιχμών (από το σύστημα απόκτησης) και η θόλωση της εικόνας. Η θόλωση προκαλείται συνήθως από την οπτική ανομοιογένεια του μέσου (αέρας) ή τη σχετική κίνηση της εικόνας ως προς το σύστημα απόκτησης.

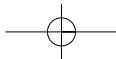


Σχήμα 6.9

Γενικό διάγραμμα των διαφόρων σταδίων στην επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας.

Οι αιτίες δημιουργίας σφαλμάτων κατά την απόκτηση της εικόνας έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία εκτενώς. Καλύτερος τρόπος για τη διόρθωση των σφαλμάτων αυτών είναι να περιγραφεί μαθηματικά η αιτία που τα προκαλεί και να υλοποιηθεί





με το σύστημα αποκατάστασης η αντίστροφη διαδικασία. Υπάρχουν φυσικά περιπτώσεις όπου η διαδικασία απόκτησης είναι αρκετά καλή, με αποτέλεσμα η εικόνα να μη χρειάζεται αποκατάσταση. Σε άλλες περιπτώσεις το στάδιο της αποκατάστασης είναι το τελευταίο πριν από την επίδειξη της εικόνας (τηλεόραση).

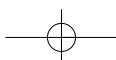
Η βελτίωση της εικόνας αφορά κυρίως στον τονισμό συγκεκριμένων στοιχείων της εικόνας με σκοπό τη διευκόλυνση των διαδικασιών που θα ακολουθήσουν. Τα επόμενα στάδια εντάσσονται σε ό, τι καλούμε «ανάλυση της εικόνας». Σημαντικά θέματα εδώ είναι:

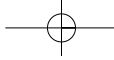
- Η εξαγωγή των κατάλληλων χαρακτηριστικών για αναγνώριση και ταξινόμηση αντικειμένων που υπάρχουν μέσα στην εικόνα.
- Η συμπίεση της εικόνας για γρήγορη μετάδοσή της ή οικονομική αποθήκευση.
- Ο μετασχηματισμός της σε άλλους χώρους, όπως αυτός των συχνοτήτων, για την αποκάλυψη πληροφορίας που στον αρχικό χώρο δεν είναι εμφανής.
- Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που είναι απαραίτητοι για τη σύγκριση εικόνων, τη σύνθεση της πληροφορίας σκηνών που έχουν ληφθεί από διαφορετική γωνία καθώς και τη σύνθεση εγκάρσιων τομών αντικειμένων από προβολικές εικόνες (τομοσύνθεση και αξονική τομογραφία).

Το τελευταίο στάδιο είναι η τεχνητή όραση. Εδώ, περιλαμβάνονται όλα τα αυτοματοποιημένα συστήματα επεξεργασίας εικόνας, αναγνώρισης αντικειμένων και λήψης αποφάσεων για συγκεκριμένες ενέργειες (robot) (Βλέπε «Ανάλυση εικόνας και Αναγνώριση Προτύπων», Ε. Σαγκριώτη και Σ. Θεοδορίδη).

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε την εικόνα ως δισδιάστατο σήμα, τη γεωμετρία της, καθώς και τους τρόπους που μπορεί να αποκτηθεί. Είδαμε επίσης αναλυτικά πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγεθος μιας εικόνας και το χώρο μνήμης που απαιτείται για την αποθήκευσή της. Τέλος, γνωρίσαμε μερικά από τα διαφορετικά στάδια από τα οποία μπορεί να αποτελείται η διαδικασία της επεξεργασίας της ψηφιακής εικόνας.





6.2 Η φυσιολογία της όρασης

Η όραση είναι ίσως η πλέον σημαντική από τις ανθρώπινες αισθήσεις, αφού δίνει τη δυνατότητα στον άνθρωπο να αντιληφθεί και να δράσει στο χώρο που τον περιβάλλει. Το ανθρώπινο σύστημα όρασης αποτελείται από τα ακόλουθα μέρη:

- Τον οφθαλμό (οπτικός αισθητήρας) που χρησιμεύει στη δημιουργία του ειδώλου.
- Το οπτικό νεύρο που μεταδίδει το ερέθισμα στον εγκέφαλο.
- Το τμήμα του εγκεφάλου που εκτελεί την επεξεργασία και την τελική κατανόηση της πληροφορίας

Η διαδικασία της όρασης είναι πολύπλοκη και δεν έχει ακόμη κατανοηθεί πλήρως. Η καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ο άνθρωπος βλέπει γύρω του, θα συμβάλει στη βελτίωση των τεχνητών οπτικών συστημάτων απόκτησης και επεξεργασίας της εικόνας. Επιπλέον, θα δώσει ώθηση στην ανάπτυξη νέων αλγορίθμων για την ανάλυση της εικόνας και τη βελτίωση των συστημάτων μηχανικής όρασης (robot).

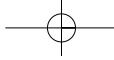
Η καταγραφή της συμπεριφοράς του ανθρώπινου συστήματος όρασης έχει γίνει με κάθε λεπτομέρεια. Έτσι, γνωρίζουμε:

- Πόσο φως είναι απαραίτητο για να διεγερθεί ο οφθαλμός.
- Σε πόσο έντονη ακτινοβολία μπορεί να αντέξει.
- Πόσο γρήγορα μπορεί να προσαρμοστεί στις αλλαγές της φωτεινότητας των αντικειμένων.
- Πότε και πόσο καλά μπορεί να διακρίνει τα χρώματα.
- Πώς αντιλαμβάνεται τα σχήματα παρουσία ή απουσία άλλων σχημάτων.
- Πώς γίνεται δυνατή η αίσθηση του βάθους.

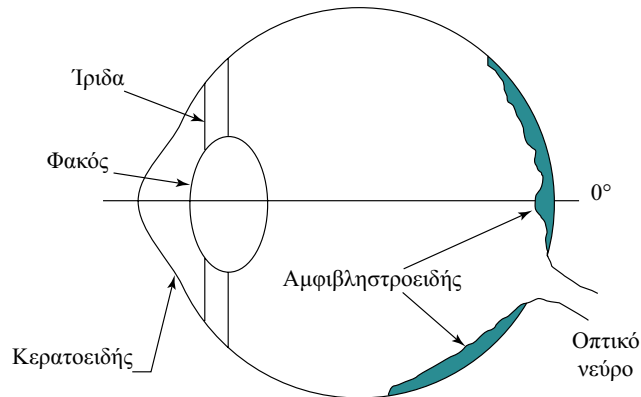
Με βάση αυτή την καταγραφή οι επιστήμονες προσπαθούν να περιγράψουν και να εξηγήσουν τη διαδικασία της όρασης. Στη συνέχεια, θα παραθέσουμε τα πλέον σημαντικά από τα στοιχεία αυτά, αφού πρώτα δώσουμε μια απλή περιγραφή της φυσιολογίας του οφθαλμού.

6.2.1 Ο ανθρώπινος οφθαλμός

Στο Σχήμα 6.10 παρουσιάζεται μια απλουστευμένη εικόνα του οφθαλμού. Στο μπροστινό μέρος βρίσκεται το σύστημα συγκέντρωσης και εστίασης των εικόνων (ίριδα, φακός). Το είδωλο της εικόνας σχηματίζεται ανεστραμμένο στο πίσω μέρος του οφθαλ-



μού πάνω στον αμφιβληστροειδή χιτώνα (retina). Στο σημείο της εστίασης υπάρχει μεγάλη συγκέντρωση των φωτοαισθητήρων. Δίπλα ακριβώς ξεκινά το οπτικό νεύρο που μεταφέρει τις ηλεκτροχημικές αντιδράσεις των φωτοαισθητήρων στον εγκέφαλο.



Σχήμα 6.10
Απλουστευμένη
εικόνα
του οφθαλμού.

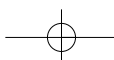
Υπάρχουν δύο είδη φωτοαισθητήρων στον αμφιβληστροειδή, τα ραβδία και οι κώνοι. Τα ραβδία είναι περίπου 100 εκατομμύρια και σχετίζονται με την όραση στο χαμηλό φως (scotopic vision). Οι κώνοι είναι γύρω στα έξι εκατομμύρια και είναι λιγότερο ευαίσθητοι από τα ραβδία. Σε φωτεινό περιβάλλον το κύριο βάρος της όρασης φέρουν οι κώνοι. Οι κώνοι επίσης είναι υπεύθυνοι για το χρώμα στην όραση. Το οπτικό σύστημα του ανθρώπου είναι ευαίσθητο στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και σε μήκη κύματος από 350 έως 780 nm (ορατό φως). Παρουσιάζει όμως μέγιστη ευαισθησία στο πράσινο φως (γύρω στα 550 nm). Επίσης, είναι ικανό να λειτουργήσει με ελάχιστο φως (ραβδία), αλλά και σε πολύ φωτεινό περιβάλλον (κώνοι). Η ικανότητα του οφθαλμού να προσαρμόζεται σε μεγάλη διαφορά φωτεινότητας φθάνει τις 10 τάξεις μεγέθους:

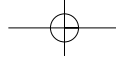
$$\frac{\text{Μέγιστη φωτεινή ενέργεια ανεκτή από το μάτι}}{\text{Ελάχιστη φωτεινή ενέργεια που διεγείρει το μάτι}} \approx 10^{10} \quad (6.9)$$

6.2.2 Φωτεινότητα, λαμπρότητα και αντίθεση

Δύο φυσικά μεγέθη, που σχετίζονται με τη φωτεινή ακτινοβολία και παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανθρώπινη όραση είναι η φωτεινότητα και η λαμπρότητα.

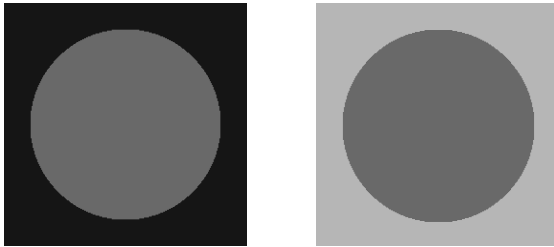
- Η φωτεινότητα ενός αντικειμένου (luminance) σχετίζεται με τη φωτεινή ενέργεια που εκπέμπει το αντικείμενο, ανεξάρτητα από τη φωτεινότητα των γειτονικών σωμάτων.





- Η λαμπρότητα ενός αντικειμένου (brightness) είναι η λαμβανόμενη από το μάτι φωτεινή ενέργεια που προέρχεται από το αντικείμενο και η οποία εξαρτάται από τη φωτεινότητα του περιβάλλοντος χώρου.

Τον διαφορετικό τρόπο (λαμπρότητα) που αντιλαμβάνεται το μάτι τα αντικείμενα της ίδιας φωτεινότητας (luminance) μπορούμε να τον δούμε στο παράδειγμα του Σχήματος 6.11. Οι δύο μικροί δίσκοι έχουν την ίδια φωτεινότητα, αλλά στο μάτι δείχνουν διαφορετικοί. Ο πρώτος φαίνεται περισσότερο φωτεινός, αφού έχει σκοτεινότερο υπόβαθρο.



Σχήμα 6.11

Οι δύο δίσκοι έχουν την ίδια φωτεινότητα, αλλά φαίνονται διαφορετικοί λόγω της διαφορετικής φωτεινότητας του υπόβαθρου.

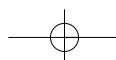
Πρέπει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με το νόμο του Weber, ένα αντικείμενο με φωτεινότητα f ξεχωρίζει από ένα περιβάλλον (background) φωτεινότητας f_0 όταν η σχετική τους διαφορά (αντίθεση ή contrast) είναι το λιγότερο 2%:

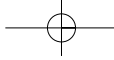
$$\frac{f_0 - f}{f_0} \geq 2\% \quad (6.10)$$

Η τελευταία αυτή σχέση δηλώνει ότι μεταξύ απολύτως μαύρου και απολύτως λευκού, το ανθρώπινο μάτι μπορεί να ξεχωρίσει το πολύ 50 διαβαθμίσεις του γκριζου (βλέπε Σχήμα 6.12). Η τελευταία σχέση φανερώνει τη μη γραμμική (λογαριθμική) συμπεριφορά στην αντίληψη της αμαύρωσης από το ανθρώπινο σύστημα όρασης αφού:

$$\frac{\Delta f}{f} = a \Rightarrow d(\log f) = a \quad (6.11)$$

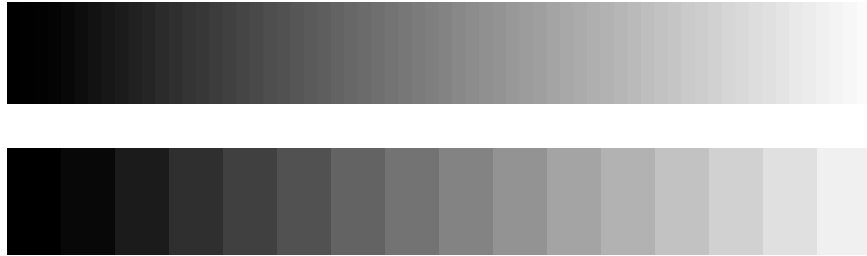
Δηλαδή, ίσες αυξήσεις στο λογάριθμο της φωτεινότητας εκλαμβάνονται από τον άνθρωπο έως ίσες διαφορές.





Σχήμα 6.12

Το ανθρώπινο μάτι μπορεί να διακρίνει σε ασπρόμαυρες εικόνες το πολύ μέχρι 50 διαφορετικές διαβαθμίσεις του γκριζου. Στην πρώτη λωρίδα παρουσιάζονται 64 διαβαθμίσεις (δύσκολα διακρίνονται μεταξύ τους) από το μαύρο έως το λευκό, ενώ στη δεύτερη 16.



Παράδειγμα 6.3

Τρία αντικείμενα α , β και γ έχουν φωτεινότητα 1, 10 και 100 αντίστοιχα, (εκφρασμένη πάντα σε κατάλληλες μονάδες). Πόσο φωτεινά αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος τα αντικείμενα αυτά;

Λύση

Με βάση τη σχέση (6.11), έχουμε για τους λογαρίθμους των φωτεινοτήτων:

$$\log(1) = 0$$

$$\log(10) = 1$$

$$\log(100) = 2$$

Επομένως, ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται ότι τα τρία διαφορετικά σώματα έχουν την ίδια διαφορά στη φωτεινότητα.

Μία άλλη συνάρτηση που χαρακτηρίζει την ευαισθησία του ανθρώπινου συστήματος όρασης στην αντίθεση της φωτεινότητας των σωμάτων, είναι η συνάρτηση μεταφοράς διαμόρφωσης (Modulation Transfer Function – MTF). Η συνάρτηση αυτή δείχνει ότι η μέγιστη ευαισθησία βρίσκεται στις μεσαίες χωρικές συχνότητες (βλέπε Σχήμα 6.13).

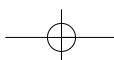
Σχήμα 6.13

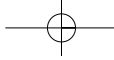
Η ευαισθησία στις μεσαίες χωρικές συχνότητες φαίνεται από το γεγονός ότι το μάτι διεγείρεται περισσότερο στις μεσαίες εναλλαγές της αμαύρωσης (ούτε πολύ γρήγορες ούτε πολύ αργές).



Μεσαίες εναλλαγές αμαύρωσης

Τέλος, το ανθρώπινο σύστημα όρασης δεν μπορεί να ξεχωρίσει περιοδικές αναλαμπές φωτεινής πηγής όταν η συχνότητά της ξεπερνά τα 50 Hz περίπου. Στην περίπτωση αυτή εκλαμβάνει ως συνεχή την εκπομπή της φωτεινής ακτινοβολίας. Το φαινόμενο καθορίζει την ταχύτητα με την οποία πρέπει να ανανεώνεται η πληροφορία στην οθόνη της τηλεόρασης ή του υπολογιστή. Συχνότητα ανανέωσης 60 Hz, δίνει σταθερή εικόνα χωρίς την αίσθηση της ασυνέχειας μεταξύ των διαδοχικών στιγμιότυπων.

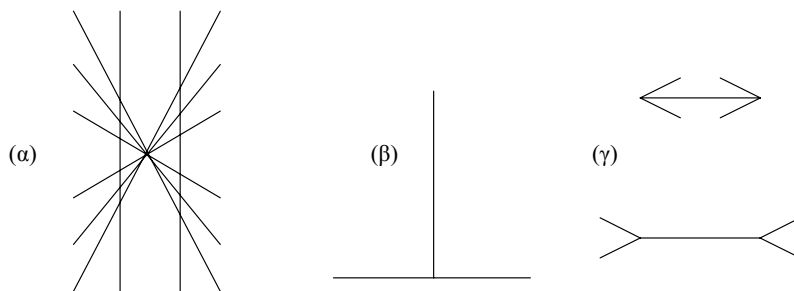




6.2.3 Χρώμα και ψυχοφυσικά φαινόμενα

Το ανθρώπινο οπτικό σύστημα παρουσιάζει την ιδιότητα να είναι πολύ περισσότερο ευαίσθητο στις έγχρωμες απ' ό,τι στις ασπρόμαυρες εικόνες. Έτσι, ενώ μπορεί να ξεχωρίσει μόνο μερικές δεκάδες αποχρώσεις του γκριζου στις ασπρόμαυρες εικόνες, έχει τη δυνατότητα να διακρίνει χιλιάδες διαφορετικά χρώματα. Τα μεγέθη που καθορίζουν τα χρώματα είναι η λαμπρότητα (brightness), η απόχρωση (hue) και ο κορεσμός (saturation). Η αναπαράσταση της χρωματικής πληροφορίας στηρίζεται στην «κλασική» θεωρία του Thomas Young (1802), ότι κάθε χρώμα μπορεί να δημιουργηθεί με την κατάλληλη μείξη τριών χρωμάτων, όπως για παράδειγμα του κόκκινου, πράσινου και μπλε (Red–Green–Blue, RGB).

Άλλα φαινόμενα, κυρίως ψυχοφυσικά (βλέπε Σχήμα 6.14), που συνδέονται με την ψυχοφυσιολογία της όρασης περιγράφονται εκτενώς στη βιβλιογραφία. Η ανάλυση παρόμοιων φαινομένων μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην ανάπτυξη και τη βελτίωση των συστημάτων τεχνητής όρασης.

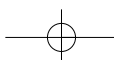


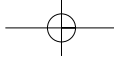
Σχήμα 6.14

Τα παράξενα της ψυχοφυσιολογίας της όρασης. α) Αυταπάτη Wundt, οι παράλληλες γραμμές δείχνουν παραμορφωμένες. β) Αυταπάτη οριζόντιας-κάθετης γραμμής, το κατακόρυφο τμήμα φαίνεται μεγαλύτερο. γ) Η αυταπάτη Mueller–Lyer, τα δύο οριζόντια τμήματα είναι ίσα.

6.2.4 Κριτήρια ποιότητας της εικόνας

Για να μετρήσουμε την ποιότητα των ψηφιακών εικόνων, αλλά και για να αξιολογήσουμε την απόδοση των συστημάτων απόκτησης και επεξεργασίας εικόνας, χρησιμοποιούμε διάφορα κριτήρια. Τα κριτήρια αυτά μπορούν να χωριστούν σε υποκειμενικά και ποσοτικά. Τα υποκειμενικά στηρίζονται στη γνώμη μιας μικρής ή μεγάλης ομάδας παρατηρητών που χαρακτηρίζουν την ποιότητα της εικόνας ως εξαιρετική, καλή, μέτρια, φτωχή ή μη ικανοποιητική. Τα ποσοτικά κριτήρια είναι καθιερωμένες μαθηματικές διαδικασίες που χρησιμοποιούν ποσότητες, όπως ο λόγος του σήματος προς το θόρυβο ή το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Πρέπει να τονιστεί ότι η επιλογή του κριτηρίου ποιότητας της εικόνας ποικίλλει ανάλογα με την εφαρμογή και δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη.





Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τα βασικά χαρακτηριστικά του ανθρώπινου συστήματος όρασης. Μεταξύ αυτών επισημαίνουμε τη μεγάλη προσαρμογή του οφθαλμού σε ελάχιστο, αλλά και πολύ έντονο φως, που οφείλεται στους δύο διαφορετικούς τύπους αισθητήρων, τους κώνους και τα ραβδία. Στην ουσία, η συμπεριφορά του οφθαλμού στη φωτεινότητα είναι λογαριθμική. Επίσης τονίσαμε τη σχετικότητα στη φωτεινότητα των σωμάτων και τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε την αντίθεση (contrast). Τέλος, τόσο η υψηλή ευαισθησία στις μεσαίες συχνότητες, όσο και η απαίτηση για τουλάχιστον 30 στιγμιότυπα ανά δευτερόλεπτο για σχηματισμό της κίνησης είναι από τα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά της ανθρώπινης όρασης.

6.3 Είδη πράξεων στην επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας

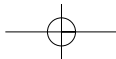
Όπως είδαμε στην υποενότητα 6.1.5, η διαδικασία της επεξεργασίας της ψηφιακής εικόνας περιλαμβάνει αρκετές βαθμίδες, ανάλογα με την ποιότητα της αρχικής εικόνας και την επιθυμητή έξοδο. Θα περίμενε κανείς πως κάθε μία από τις βαθμίδες αυτές θα έχει είσοδο μία εικόνα και έξοδο επίσης μία άλλη εικόνα. Όμως στη γενική της μορφή μία βαθμίδα επεξεργασίας μπορεί να έχει είσοδο ή έξοδο εικόνα ή μαθηματική περιγραφή (συνάρτηση ή άνυσμα). Στον Πίνακα 6.1 παρουσιάζονται οι δυνατοί συνδυασμοί εισόδου–εξόδου για μία βαθμίδα επεξεργασίας ψηφιακής εικόνας και οι πιθανές διαδικασίες που υλοποιούνται.

Πίνακας 6.1

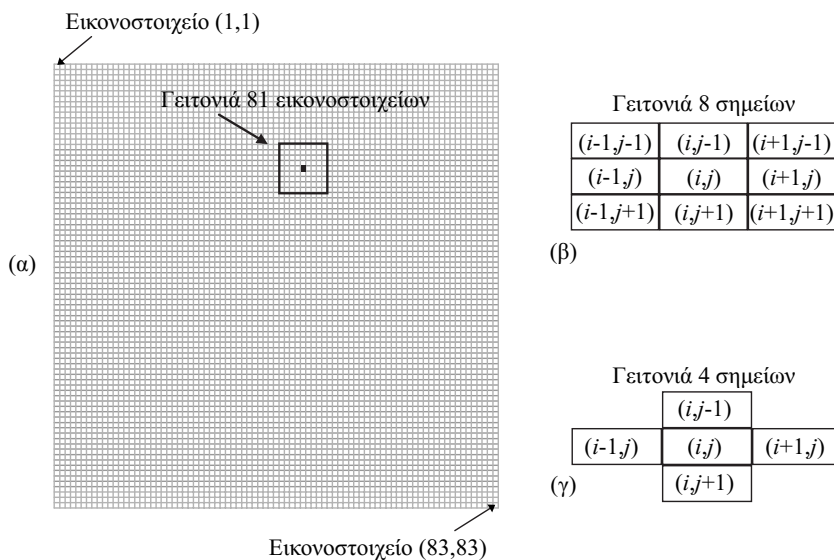
Πιθανές μορφές εισόδου–εξόδου σε μία βαθμίδα ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας.

Είσοδος	Έξοδος	Χαρακτηρισμός	Πιθανή πράξη
Εικόνα	Εικόνα	Επεξεργασία εικόνας	Εξαγωγή θορύβου
Εικόνα	Περιγραφή	Ανάλυση εικόνας	Εξαγωγή χαρακτηριστικών
Περιγραφή	Εικόνα	Γραφικά υπολογιστών	Σχεδιασμός με υπολογιστή
Περιγραφή	Περιγραφή	Μετασχηματισμοί	Μετασχηματισμός δεδομένων

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε μόνο τα είδη των πράξεων που μπορεί κανείς να συναντήσει στην περίπτωση που είσοδος και έξοδος της βαθμίδας είναι εικόνα. Απαραίτητη έννοια στις πράξεις αυτές είναι η έννοια της γειτονιάς ενός εικονοστοιχείου. Πρόκειται για τα εικονοστοιχεία που το περιβάλλουν (Σχήμα 6.15α). Ειδικότερα, ως γειτονιά των 8 σημείων ενός εικονοστοιχείου με συντεταγμένες $(n_1, n_2) = (i, j)$ ορίζεται η διάταξη των 8 εικονοστοιχείων γύρω από το (i, j) που οι συντεταγμέ-



νες δίνονται στο Σχήμα 6.15β. Επίσης, γειτονιά των 4 σημείων ορίζεται η διάταξη των εικονοστοιχείων γύρω από το (i,j) όπως δίνεται στο Σχήμα 6.15γ. Όλοι οι γείτονες του εικονοστοιχείου (i,j) χρησιμοποιούνται μαζί με αυτό για τον υπολογισμό του αντίστοιχου (στην ίδια θέση) εικονοστοιχείου στην εικόνα εξόδου. Ο όρος «παράθυρο με κέντρο το εικονοστοιχείο (i,j) » χρησιμοποιείται επίσης αντί του όρου «γειτονιά του εικονοστοιχείου».



Σχήμα 6.15

Η διάταξη των εικονοστοιχείων σε σειρές και στήλες, δημιουργεί για καθένα από αυτά γείτονες. Οι τιμές των 8 ή 4 γειτονικών εικονοστοιχείων χρησιμοποιούνται συχνότερα στις διάφορες πράξεις.

Οι πράξεις στην ψηφιακή επεξεργασία της εικόνας έχουν στόχο τον υπολογισμό κάθε εικονοστοιχείου της εικόνας εξόδου. Ανάλογα με τον τρόπο που υπολογίζεται η τιμή του εικονοστοιχείου αυτού, οι πράξεις διακρίνονται σε

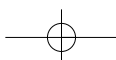
Τοπικές (local)

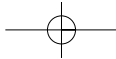
Καθολικές (global)

Γεωμετρικές (geometrical)

6.3.1 Τοπικές πράξεις

Στις πράξεις αυτές η τιμή κάθε εικονοστοιχείου στη θέση (n_1,n_2) στην εικόνα εξόδου υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την τιμή του εικονοστοιχείου στην αντίστοιχη θέση της εικόνας εισόδου, καθώς επίσης και τις τιμές των γειτονικών εικονοστοιχείων. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.16. Πιο συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό της τιμής του εικονοστοιχείου στη θέση (n_1,n_2) της εικόνας εξόδου, θεωρού-



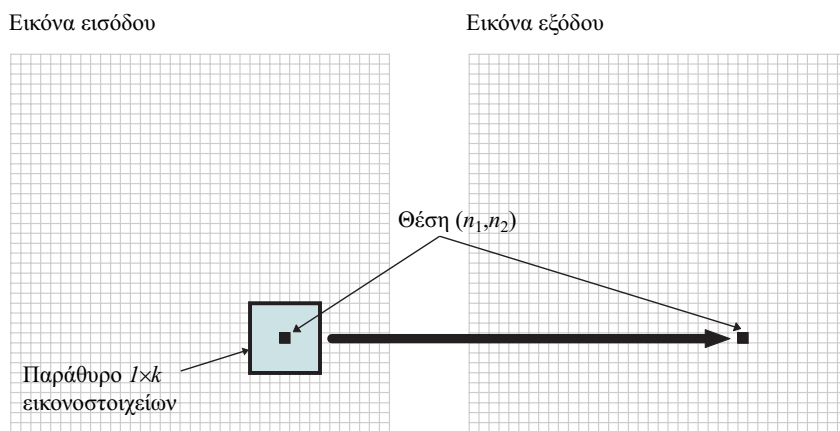


με μία γειτονιά (παράθυρο) $l \times k$ εικονοστοιχείων στην εικόνα εισόδου με κέντρο την αντίστοιχη θέση (n_1, n_2) . Οι τιμές q όλων των εικονοστοιχείων μέσα στο παράθυρο θα συμβάλουν στον υπολογισμό της τιμής $p(n_1, n_2)$ του εικονοστοιχείου εξόδου, για παράδειγμα:

Σχήμα 6.16

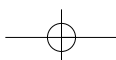
Το εικονοστοιχείο της εικόνας εξόδου υπολογίζεται από τα εικονοστοιχεία της εικόνας εισόδου που βρίσκονται σε ένα παράθυρο μεγέθους $(l \times k = 7 \times 7)$ γύρω από το αντίστοιχο εικονοστοιχείο της εικόνας εισόδου. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όλα τα εικονοστοιχεία της εικόνας εξόδου.

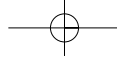
$$p(n_1, n_2) = \sum_{i=-l/2}^{l/2} \sum_{j=-k/2}^{k/2} a(i, j) f(q(n_1 - i, n_2 - j)) \tag{6.12}$$



Επομένως, στη γενικότερη περίπτωση οι τιμές q μετασχηματίζονται από μία συνάρτηση f (γραμμική ή μη γραμμική), και στη συνέχεια η έξοδος $p(n_1, n_2)$ υπολογίζεται ως γραμμικός συνδυασμός των αποτελεσμάτων αυτών με τους συντελεστές βάρους $a(i, j)$. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όλα τα εικονοστοιχεία της εικόνας εξόδου. Στην πράξη, ο πίνακας των συντελεστών $a(i, j)$ μοιάζει με παράθυρο που κινείται σε όλη την εικόνα και κάθε φορά συμβάλλει σύμφωνα με την (6.12) στον υπολογισμό του εικονοστοιχείου της εικόνας εξόδου, που αντιστοιχεί στη θέση του κέντρου του. Στην περίπτωση που $f(q) = q$, τότε η πράξη είναι γραμμική και δεν είναι τίποτε άλλο από τη γενίκευση της γνωστής μας συνέλιξης σε δύο διαστάσεις και ονομάζεται δισδιάστατη συνέλιξη. Τη δισδιάστατη συνέλιξη θα τη μελετήσουμε αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο όπου εξετάζονται τα γραμμικά δισδιάστατα συστήματα. Στην περίπτωση αυτή, οι συντελεστές $a(i, j)$ χαρακτηρίζουν το γραμμικό σύστημα. Βεβαίως, η μορφή της εξίσωσης 6.12 μπορεί να είναι διαφορετική ανάλογα με τις απαιτήσεις της εφαρμογής.

Όταν το μέγεθος του παραθύρου μικραίνει, η τιμή της $p(n_1, n_2)$ εξαρτάται όλο και λιγότερο από τα γειτονικά εικονοστοιχεία της θέσης (n_1, n_2) . Στην ειδική περίπτωση





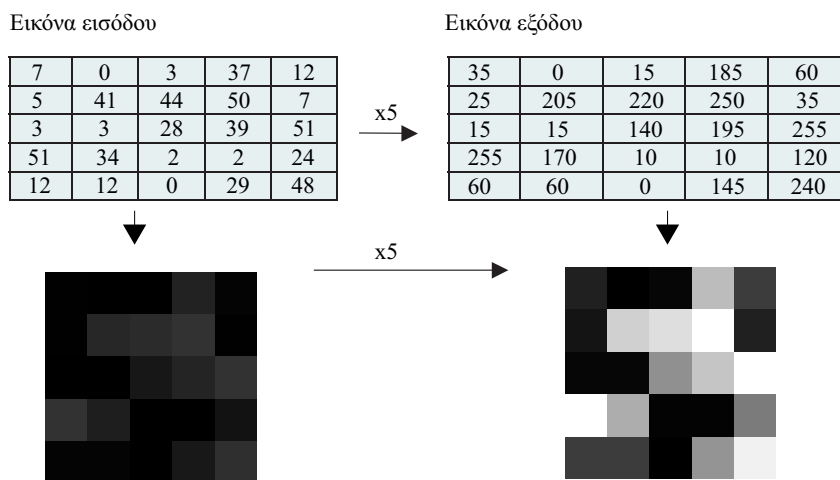
όπου $l = k = 1$ η τοπική πράξη εκφυλίζεται σε πράξη σημείου (point operation). Τότε η τιμή του εικονοστοιχείου στη θέση (n_1, n_2) της εικόνας εξόδου εξαρτάται μόνο από την τιμή του εικονοστοιχείου στην αντίστοιχη θέση της εικόνας εισόδου.

Παράδειγμα 6.4

Η παρακάτω εικόνα εισόδου (Σχήμα 6.17) έχει μέγεθος 5×5 και οι τιμές των εικονοστοιχείων κυμαίνονται μεταξύ 0 και 51. Να πολλαπλασιαστούν κατάλληλα οι τιμές των εικονοστοιχείων, ώστε αυτές να καταλαμβάνουν όλη την περιοχή από 0 ως 255 που καλύπτει δυαδικός αριθμός του ενός byte. Σε ποια κατηγορία ανήκει η πράξη αυτή;

Λύση

Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την τιμή κάθε εικονοστοιχείου με το 5. Με τον τρόπο αυτό δεν ξεπερνάμε την τιμή 255 για τα εικονοστοιχεία της εικόνας εξόδου (Σχήμα 6.17). Πρόκειται για πράξη σημείου (point operation), αφού κάθε εικονοστοιχείο της εικόνας εξόδου υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο εικονοστοιχείο της εικόνας εισόδου. Στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας η πράξη αυτή καλείται βελτίωση της αντίθεσης (contrast stretching).

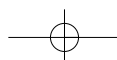


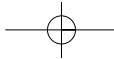
Σχήμα 6.17

Βελτίωση της αντίθεσης δια του πολλαπλασιασμού όλων των εικονοστοιχείων της εικόνας εισόδου με την ίδια τιμή (πράξη σημείου)

Παράδειγμα 6.5

Σε εικόνα εισόδου μεγέθους 7×7 εικονοστοιχείων (Σχήμα 6.18), πρόκειται να εκτελεστεί διαδικασία μέσης τιμής με παράθυρο 3×3 και τιμές για τους συντελεστές $a(i, j) = 1/9$. Να υπολογιστεί η εικόνα εξόδου. Σε ποια κατηγορία ανήκει η πράξη αυτή;





Λύση

Για να υπολογίσουμε κάθε ένα εικονοστοιχείο της εικόνας εξόδου, λαμβάνουμε το αντίστοιχο της εικόνας εισόδου καθώς και τους 8 γείτονές του, πολλαπλασιάζουμε με $1/9$ και αθροίζουμε τα γινόμενα. Η διαδικασία είναι ίδια με αυτή που περιγράφεται στο Σχήμα 6.15 για $l = k = 3$. Πρόκειται για τοπική πράξη στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας. Η διαδικασία που περιγράψαμε είναι διαδικασία μέσης τιμής και εύκολα μπορεί να ξεχωρίσει κανείς ότι η αρχική εικόνα (μαύρο τετράγωνο) έχει θολώσει.

Εικόνα εισόδου

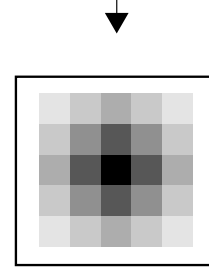
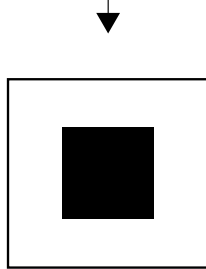
255	255	255	255	255	255	255
255	255	255	255	255	255	255
255	255	0	0	0	255	255
255	255	0	0	0	255	255
255	255	0	0	0	255	255
255	255	255	255	255	255	255
255	255	255	255	255	255	255

Εικόνα εξόδου

255	255	255	255	255	255	255
255	226	198	170	198	226	255
255	198	141	85	141	198	255
255	170	85	0	85	170	255
255	198	141	85	141	198	255
255	226	198	170	198	226	255
255	255	255	255	255	255	255

Σχήμα 6.18

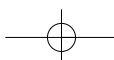
Καθένα εικονοστοιχείο της εικόνας εξόδου (δεξιά) υπολογίζεται από τον μέσο όρο 9 εικονοστοιχείων της εικόνας εισόδου (μέση τιμή)

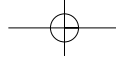


6.3.2 Καθολικές πράξεις

Στις πράξεις αυτές, για να υπολογιστεί η τιμή ενός εικονοστοιχείου της εικόνας εξόδου χρησιμοποιούνται όλα τα εικονοστοιχεία της εικόνας εισόδου. Οι πράξεις αυτές αποτελούν ουσιαστικά ειδική περίπτωση των τοπικών πράξεων όπου το μέγεθος $l \times k$ του παραθύρου γίνεται τόσο μεγάλο, όσο και η ίδια η εικόνα. Εδώ θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι τιμές των εικονοστοιχείων της εικόνας εξόδου διαφοροποιούνται μεταξύ τους από το γεγονός ότι, ανάλογα με τη θέση (n_1, n_2) του εικονοστοιχείου, οι συντελεστές $a(i, j)$ της σχέσης (6.12) αλλάζουν. Καθολικές πράξεις στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας είναι οι πράξεις των μετασχηματισμών που θα δούμε στη συνέχεια.

Το ολικό πλήθος των απαιτούμενων υπολογισμών για να υλοποιηθεί μία τοπική πράξη εξαρτάται από το πλήθος των εικονοστοιχείων της εικόνας και από το μέγεθος της γειτονιάς που χρησιμοποιείται. Για μία εικόνα μεγέθους $M \times N$ εικονοστοιχείων και μία γειτονιά $k \times l$ εικονοστοιχείων, με βάση τη σχέση (6.12), για το σχηματισμό της





εικόνας εξόδου απαιτούνται συνολικά $N \times M \times k \times l$ πράξεις (πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις). Στην περίπτωση που η πράξη είναι καθολική και η εικόνα τετραγωνική ($N \times N$), το πλήθος των απαιτούμενων υπολογισμών είναι της τάξης N^4 .

Δραστηριότητα 6.3

Να εκτελεστεί μία μη γραμμική πράξη σημείου στην εικόνα εισόδου του Παραδείγματος 6.4. Να προσέξετε ώστε οι τελικές τιμές να είναι στο όριο 0 ως 255. Για το λόγο αυτό να γίνει η κατάλληλη κανονικοποίηση.

Μία από τις σπουδαίες μη γραμμικές πράξεις σημείου είναι η λογαρίθμιση (εδώ χρησιμοποιούμε δεκαδικό λογάριθμο). Με τη βοήθεια του λογαρίθμου μπορούμε να μεταβάλλουμε τη φωτεινότητα των εικονοστοιχείων ανισομερώς. Στην εικόνα εισόδου που φαίνεται στο Σχήμα 6.19, πριν λογαριθμίσουμε την τιμή του κάθε εικονοστοιχείου, θα προσθέσουμε σε όλα τη μονάδα για να αποφύγουμε το λογάριθμο του μηδενός. Μετά τη λογαρίθμιση θα πολλαπλασιάσουμε όλες τις τιμές που προκύπτουν με το $255/\log_{10}(52)$, για να τις κανονικοποιήσουμε σε μέγιστη τιμή το 255. Συνολικά θα εκτελέσουμε την πράξη:

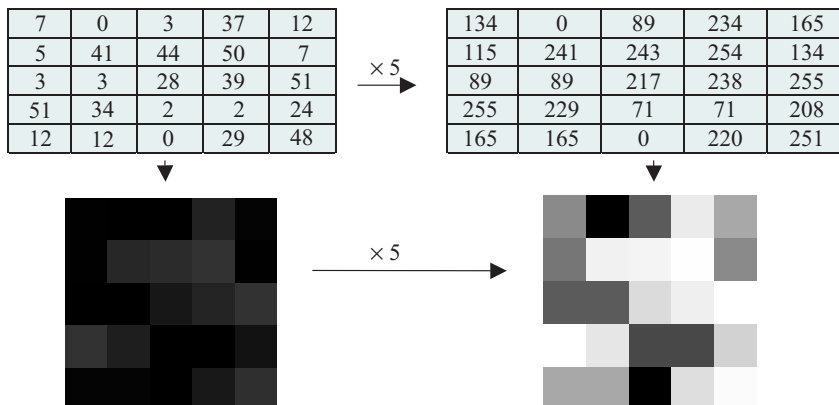
$$\log_{10}(\text{τιμή του εικονοστοιχείου} + 1) * 255 / \log_{10}(52)$$

όπου 52 είναι η μεγαλύτερη τιμή της εισόδου αυξημένη κατά 1.

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα (εικόνα εξόδου Σχήμα 6.19) με αυτό του Παραδείγματος 6.4, βλέπουμε ότι εδώ τα εικονοστοιχεία μικρής τιμής έχουν μεγαλώσει περισσότερο.

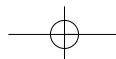
Εικόνα εισόδου

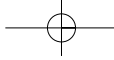
Εικόνα εξόδου



Σχήμα 6.19

Αύξηση της φωτεινότητας δυσανάλογα με την τιμή των εικονοστοιχείων. Τα αμυδρά εικονοστοιχεία ενισχύονται περισσότερο.





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 6.2

Οι πράξεις που απαιτούνται για να υπολογιστεί η εικόνα εξόδου, όταν η εικόνα εισόδου είναι 31×31 εικονοστοιχεία και η διαδικασία που θα εκτελεστεί περιλαμβάνει τοπική πράξη με παράθυρο 5×5 , είναι συνολικά: (α) 961, (β) 24,025, (γ) 155, (δ) 775.

Δραστηριότητα 6.4

Να αναφέρετε ένα πλεονέκτημα και ένα μειονέκτημα, που έχουμε, όταν το μέγεθος του παραθύρου σε μία τοπική πράξη μεγαλώνει.

Όταν το μέγεθος του παραθύρου σε μία τοπική πράξη αυξάνει, παρουσιάζεται το μειονέκτημα ότι το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων για τον υπολογισμό της εικόνας εξόδου αυξάνεται. Το πλεονέκτημα έγκειται στο γεγονός ότι με πιο μεγάλο παράθυρο, κάθε εικονοστοιχείο της εικόνας εξόδου, περιέχει πληροφορία από ευρύτερη περιοχή της εικόνας εισόδου.

6.3.3 Γεωμετρικές πράξεις

Οι πράξεις αυτές αφορούν στο μετασχηματισμό των συντεταγμένων της αρχικής εικόνας. Από τις κυριότερες γεωμετρικές πράξεις είναι η μετατόπιση (translation), η στροφή (rotation) και ο καθρεπτισμός (mirroring). Οι πράξεις αυτές αποδίδουν συνήθως εικόνα εξόδου ίδια σε διαστάσεις με την εικόνα εισόδου (μετασχηματισμός ένα προς ένα). Υπάρχουν όμως και γεωμετρικές πράξεις που αποδίδουν εικόνες μεγαλύτερες ή μικρότερες από την αρχική. Πρέπει να επισημάνουμε ότι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί βρίσκουν εφαρμογή σε πληθώρα περιπτώσεων επεξεργασίας εικόνας. Έτσι, για παράδειγμα, η στροφή είναι απαραίτητη για το ταίριασμα (matching) και σύγκριση εικόνων της ίδιας περιοχής που έχουν ληφθεί από διαφορετικές γωνίες.

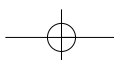
Παράδειγμα 6.6

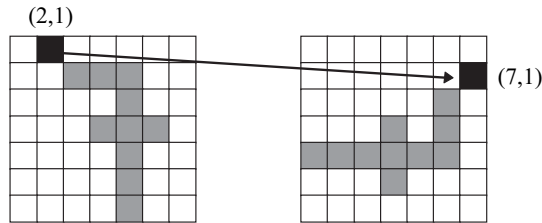
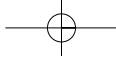
Να δοθεί η μαθηματική έκφραση για μετασχηματισμό στροφής μιας εικόνας κατά 90° .

Λύση

Θεωρούμε την εικόνα μεγέθους $N \times N = 7 \times 7$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.20. Στροφή κατά 90° σημαίνει το εικονοστοιχείο με συντεταγμένες (n_1, n_2) να πάει στη θέση $(N + 1 - n_2, n_1)$. Επομένως, πρέπει να γίνει ο μετασχηματισμός

$$T(n_1, n_2) = (N + 1 - n_2, n_1) \text{ όπου } N = 7$$





Σχήμα 6.20

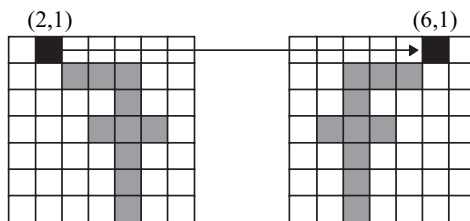
Στροφή εικόνας κατά 90°.

Δραστηριότητα 6.5

Να δοθεί μετασχηματισμός με τον οποίο λαμβάνουμε το συμμετρικό της προηγούμενης εικόνας.

Δεδομένου ότι είναι δυνατό να έχουμε συμμετρία πολλών ειδών (γύρω από κατακόρυφο, οριζόντιο ή διαγώνιο άξονα) θα αντιμετωπίσουμε εδώ μόνο την περίπτωση συμμετρίας γύρω από κατακόρυφο άξονα. Έτσι, με βάση το Σχήμα 6.21, για να λάβουμε τη συμμετρική εικόνα γύρω από άξονα που ταυτίζεται με τη μεσαία στήλη των εικονοστοιχείων, θα πρέπει να ισχύει:

$$T(n_1, n_2) = (N - n_1 + 1, n_2)$$



Σχήμα 6.21

Δημιουργία του συμμετρικού εικόνας γύρω από κατακόρυφο άξονα.

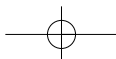
Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 6.3

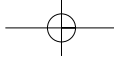
Ποιος από τους παρακάτω μετασχηματισμούς δίνει μία εικόνα $N \times N$ εικονοστοιχείων ανεστραμμένη;

$$T(n_1, n_2) = (n_2, n_1)$$

$$T(n_1, n_2) = (N - n_2 + 1, n_1)$$

$$T(n_1, n_2) = (n_1, N - n_2 + 1)$$





Σύνοψη ενότητας

Στην παράγραφο αυτή γνωρίσαμε τις στοιχειώδεις πράξεις που μπορούν να εκτελεστούν πάνω σε μία εικόνα. Τις πράξεις αυτές τις ταξινομήσαμε σε τοπικές, καθολικές και γεωμετρικές. Σημαντικό χαρακτηριστικό στην εκτέλεση των πράξεων αποτελεί η γειτονιά των εικονοστοιχείων που χρησιμοποιούνται στην εικόνα εισόδου, για να υπολογιστεί ένα εικονοστοιχείο στην εικόνα εξόδου. Όταν η γειτονιά αυτή (παράθυρο) εκφυλίζεται σ' ένα σημείο τότε έχουμε τις σημειακές πράξεις, ενώ όταν εκτείνεται σε ολόκληρη την εικόνα λαμβάνουμε τις καθολικές πράξεις. Γνωρίσαμε επίσης τον τρόπο υπολογισμού του απαιτούμενου πλήθους πράξεων.

6.4 Το φάσμα της εικόνας

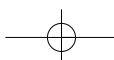
Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι ο μετασχηματισμός ενός σήματος από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων προσφέρει σημαντικές δυνατότητες για τη μελέτη του σήματος, αφού μπορούμε να το εξετάσουμε από μία άλλη σκοπιά. Επισημάναμε επίσης ότι τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) τον υλοποιούμε γρήγορα με τον αλγόριθμο FFT. Στα δισδιάστατα σήματα, όπως είναι οι εικόνες, υπάρχει ακριβώς η ίδια δυνατότητα μετασχηματισμού. Φυσικά, αφού η εικόνα αποτελεί σήμα που περιγράφει τον τρόπο μεταβολής της αμαύρωσης (ή του χρώματος) στο χώρο και όχι στο χρόνο, ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier θα μας μεταφέρει στην περιοχή των χωρικών συχνοτήτων (διαστάσεις αντιστρόφου χώρου). Κατά τα άλλα, ο δισδιάστατος διακριτός μετασχηματισμός Fourier έχει όλες τις ιδιότητες του μονοδιάστατου μετασχηματισμού. Ο δισδιάστατος μετασχηματισμός Fourier $p(k_1, k_2)$, μιας εικόνας $q(n_1, n_2)$ μεγέθους $N \times N$ εικονοστοιχείων, ορίζεται ως:

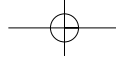
$$p(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} q(n_1, n_2) W_N^{k_1 n_1} W_N^{k_2 n_2} \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq N-1, \quad (6.13)$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο εξής:

$$q(n_1, n_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} p(k_1, k_2) W_N^{-k_1 n_1} W_N^{-k_2 n_2} \quad 0 \leq n_1, n_2 \leq N-1 \quad (6.14)$$

Από την πρώτη σχέση γίνεται σαφές ότι σε μία εικόνα q με $N \times N = N^2$ εικονοστοιχεία, αντιστοιχεί ένα φάσμα p με $N \times N = N^2$ όρους, που στη γενική τους περίπτωση είναι μιγαδικοί αριθμοί. Κάθε όρος $p(k_1, k_2)$ απαιτεί για τον υπολογισμό του N^2 πολλαπλασιασμούς και σχεδόν άλλες τόσες προσθέσεις. Επομένως, για τον υπολογισμό όλων των όρων του φάσματος απαιτείται ένα πλήθος πράξεων της τάξης N^4 .





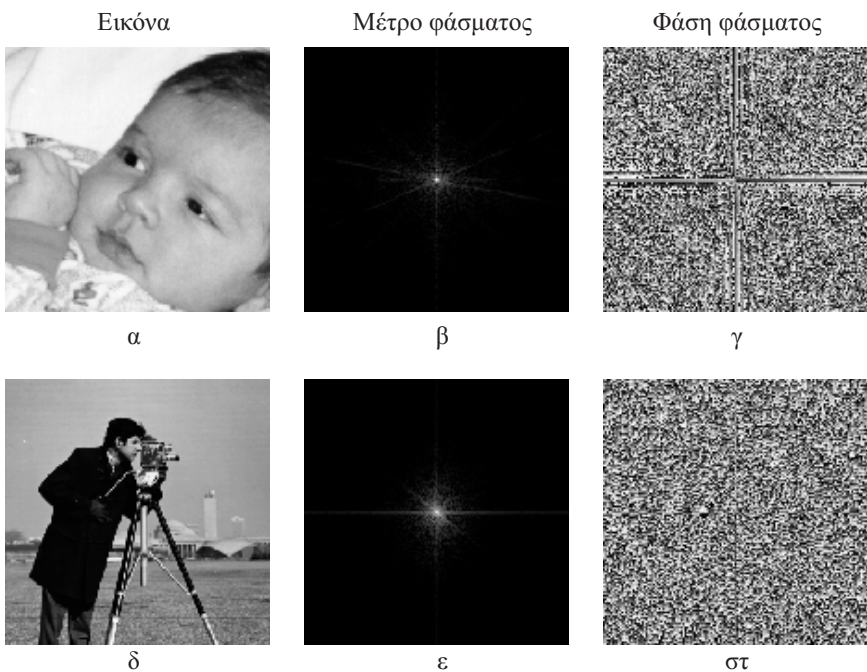
Επειδή ο διδιάστατος DFT είναι διαχωρίσιμη διαδικασία, το πλήθος των πράξεων είναι της τάξης του N^3 . Η διαχωρισιμότητα της σχέσης (6.13) απορρέει από το γεγονός ότι μπορεί να γραφεί και ως

$$p(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} W_N^{k_1 n_1} \sum_{n_2=0}^{N-1} q(n_1, n_2) W_N^{k_2 n_2} \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq N-1 \quad (6.15)$$

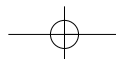
που σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα το εσωτερικό άθροισμα της σχέσης. Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με το να υπολογίσουμε τον DFT κάθε μιας γραμμής της εικόνας και στο αποτέλεσμα που προκύπτει να υπολογίσουμε τον DFT της κάθε στήλης. Η χρησιμοποίηση του FFT θα μειώσει τις απαιτούμενες πράξεις για τον υπολογισμό του φάσματος σε πλήθος της τάξης του $2N^2 \log_2 N$.

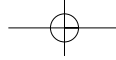
Δεδομένου ότι οι όροι $p(k_1, k_2)$ του φάσματος είναι μιγαδικοί αριθμοί, για να μελετήσουμε το φάσμα μιας εικόνας, συνήθως μελετούμε το μέτρο των χωρικών συνιστωσών και τη φάση τους ξεχωριστά.

Στο Σχήμα 6.22 φαίνεται το μέτρο και η φάση του φάσματος φυσικών εικόνων. Συγκρίνοντας το μέτρο των δύο εικόνων μπορούμε να πούμε ότι παρουσιάζει τις περισσότερες αρμονικές στις χαμηλές χωρικές συχνότητες (κέντρο των εικόνων του μέτρου). Αντίθετα, οι εικόνες της φάσης παρουσιάζουν έντονη τυχαιότητα και δεν είναι δυνατό να συγκριθούν.



Σχήμα 6.22
 Το μέτρο και η φάση του φάσματος δύο φυσικών εικόνων.



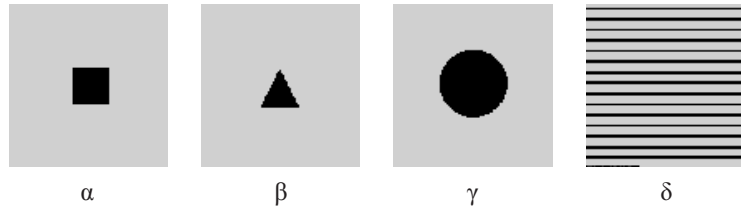


Στο Σχήμα 6.23 παρουσιάζονται τέσσερις γεωμετρικές εικόνες και το μέτρο των αντίστοιχων φασμάτων. Από τις φασματικές εικόνες παρατηρούμε ότι το φάσμα έχει έντονο αρμονικό περιεχόμενο σε διευθύνσεις όπου στην αντίστοιχη εικόνα υπάρχει απότομη μεταβολή της αμαύρωσης. Έτσι, στην περίπτωση του τετραγώνου έντονο αρμονικό περιεχόμενο παρουσιάζεται σε διευθύνσεις κάθετες στις πλευρές του. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει στο τρίγωνο, ενώ στον κύκλο έχουμε αρμονικό περιεχόμενο προς όλες τις κατευθύνσεις αφού η απότομη μεταβολή της αμαύρωσης συμβαίνει κυκλικά κατά μήκος της περιφέρειάς του. Τέλος, στο σχήμα με τις οριζόντιες γραμμές έχουμε μεταβολή της αμαύρωσης και μάλιστα περιοδική μόνο κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Το αντίστοιχο φάσμα είναι γραμμικό κατά τη διεύθυνση αυτή.

Σχήμα 6.23

Στην πρώτη σειρά παρουσιάζονται γεωμετρικά σχήματα, ενώ στην δεύτερη σειρά το μέτρο των αντίστοιχων φασμάτων. Τα φάσματα έχουν έντονο αρμονικό περιεχόμενο σε διευθύνσεις όπου στην αντίστοιχη εικόνα υπάρχει απότομη μεταβολή της αμαύρωσης.

Εικόνα



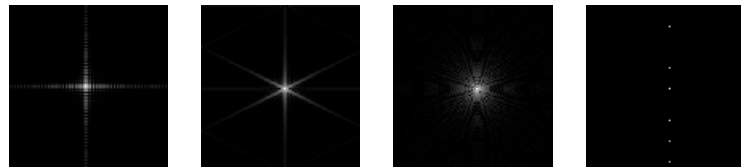
α

β

γ

δ

Μέτρο φάσματος



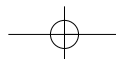
ε

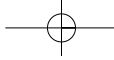
στ

ζ

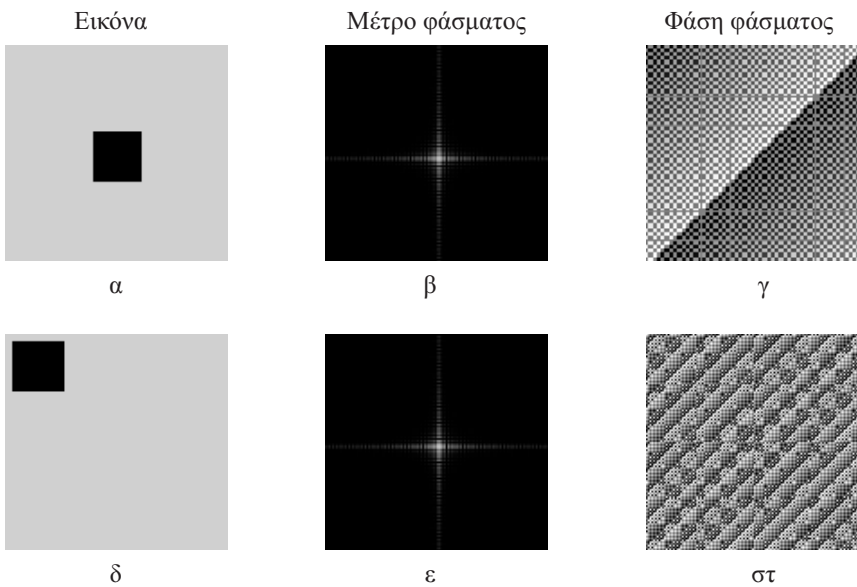
η

Τέλος, πρέπει να επισημάνουμε τη σημασία που έχει η φάση για την εικόνα. Στο Σχήμα 6.24 παρουσιάζονται το μέτρο και η φάση του φάσματος για το ίδιο σχήμα (ένα τετράγωνο) που είναι τοποθετημένο σε δύο διαφορετικές θέσεις της εικόνας. Το μέτρο του φάσματος και για τις δύο εικόνες είναι το ίδιο, ενώ η φάση είναι διαφορετική. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η φάση περιέχει σημαντική πληροφορία για τη θέση ενός σχήματος μέσα στην εικόνα. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι η εικόνα κρατά τα γενικά της χαρακτηριστικά αν το μέτρο του φάσματος μεταβληθεί, αλλά η φάση διατηρηθεί αναλλοίωτη. Έτσι η ανασύνθεση εικόνας, χρησιμοποιώντας την πληροφορία της φάσης του φάσματός της και μέτρο από φάσμα οποιασδήποτε φυσικής σκηνής, δίνει ικανοποιητική αναπαράσταση της εικόνας όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.25. Συμπερασματικά, θα πρέπει να τονίσουμε ότι στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας με διάφορα γραμμικά φίλτρα, αυτά θα πρέπει να μην επηρεάζουν τη φασική σχέση των χωρικών αρμονικών της εικόνας. Τέτοια φίλτρα είναι



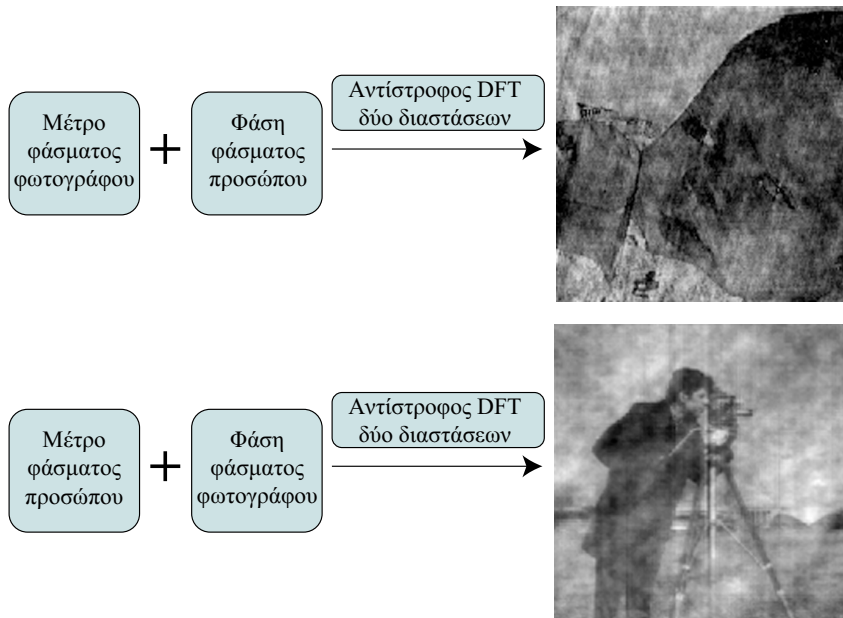


τα διδιάστατα FIR, που θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Τα FIR φίλτρα ως γνωστό (Κεφάλαιο 4) είναι δυνατό να δώσουν γραμμική απόκριση φάσης με αποτέλεσμα να διατηρούν τη φασική σχέση των αρμονικών του σήματος και επομένως, τη μορφή του.



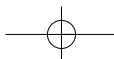
Σχήμα 6.24

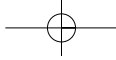
Η πληροφορία για τη θέση του τετραγώνου βρίσκεται στη φάση του φάσματος της εικόνας αφού αυτή διαφοροποιείται, και όχι στο μέτρο που παραμένει το ίδιο.



Σχήμα 6.25

Η φάση του φάσματος μιας εικόνας είναι καθοριστική στην ανασύνθεση της εικόνας. Το μέτρο του φάσματος παίζει δευτερεύοντα ρόλο.





Εκτός από το δισδιάστατο μετασχηματισμό Fourier, στην επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας χρησιμοποιούνται και πλήθος άλλων μετασχηματισμών με ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Ο σημαντικότερος εξ αυτών είναι ο δισδιάστατος μετασχηματισμός συνημιτόνου (Discreet Cosine Transform – DCT). Οι πολύ καλές ιδιότητες του DCT τον καθιστούν πολύ χρήσιμο σε διαδικασίες συμπίεσης εικόνας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι παρουσιάζει συγκέντρωση της ενέργειας του σήματος σε λίγους μόνο συντελεστές στον μετασχηματισμένο χώρο (με προϋποθέσεις φυσικά). Ο DCT μπορεί να υλοποιηθεί ταχύτατα μέσω του FFT, ή και απευθείας με τεχνικές αποδελτατισμού (decimation) ανάλογες εκείνων του FFT που γνωρίσαμε στο Κεφάλαιο 2.

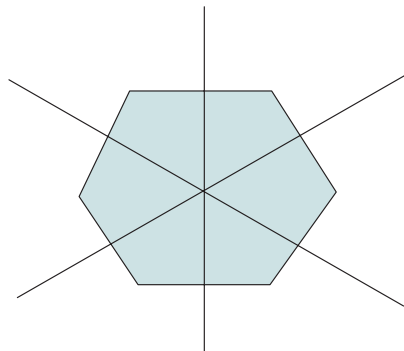
Δραστηριότητα 6.6

Να σχεδιάσετε κατά προσέγγιση τη μορφή του μέτρου του φάσματος κανονικού πολυγώνου.

Εδώ θα θεωρήσουμε ένα κανονικό εξάγωνο όπως φαίνεται στην εικόνα του Σχήματος 6.26. Περιμένουμε το μέτρο του φάσματος να έχει πλούσιο αρμονικό περιεχόμενο σε κατευθύνσεις κάθετες στις πλευρές του, δεδομένου ότι εκεί παρατηρούμε απότομη μεταβολή της αμαύρωσης.

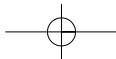
Σχήμα 6.26

Το φάσμα της εικόνας του εξάγωνου θα είναι πλούσιο σε αρμονικές συνιστώσες σε κατευθύνσεις κάθετες στις πλευρές του.



Σύνοψη ενότητας

Στην παράγραφο αυτή μελετήσαμε ποιοτικά το φάσμα της ψηφιακής εικόνας. Αφού έγινε εισαγωγή στο δισδιάστατο διακριτό μετασχηματισμό Fourier, στη συνέχεια είδαμε τα χαρακτηριστικά του μέτρου και της φάσης διαφόρων εικόνων και συζητήσαμε τη σπουδαιότητα της φάσης στη μορφή και τη θέση του περιεχόμενου της εικόνας.



Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό γνωρίσαμε τα απλά δισδιάστατα ψηφιακά σήματα και είδαμε ότι η ψηφιακή εικόνα αποτελεί ένα τέτοιο σήμα. Γνωρίσαμε επίσης, απλά στοιχεία από την ψηφιακή εικόνα, όπως είναι η γεωμετρία της και οι διαδικασίες που μπορούν να εκτελεστούν πάνω σε αυτή. Γνωρίσαμε τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της ανθρώπινης όρασης. Ταξινομήσαμε τα είδη των πράξεων που μπορούν να εκτελεστούν στην ψηφιακή εικόνα. Τέλος, μελετήσαμε τα χαρακτηριστικά του φάσματος της εικόνας, όπως αυτά εμφανίζονται τόσο στο μέτρο του, όσο και στη φάση του.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

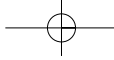
- I. Πήτας, *Ψηφιακή επεξεργασία Εικόνας*, Θεσσαλονίκη 1996.
E. Σαγκριώτης και Σ. Θεοδωρίδης, *Ανάλυση Εικόνας και Αναγνώριση Προτύπων*, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (υπό έκδοση).

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

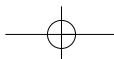
- M.D. Levine, *Vision in Man and Machine*, McGraw-Hill, 1985.
A.K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1989.
R.C. Gonzalez and R.E. Woods, *Digital Image Processing*, Addison-Wesley, New York, 1993.
R. Klette and P. Zamperoni, *Handbook of Image Processing Operators*, John Wiley and Sons, Chichester, 1996.
J.C. Russ, *The Image Processing Handbook*, CRC Press, Springer, IEEE Press, 1999.
K.R. Castleman, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1996

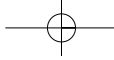
ΟΔΗΓΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗΣ

- I. Πήτας, *Ψηφιακή επεξεργασία Εικόνας*, Θεσσαλονίκη 1996.
Έμφαση μπορεί να δοθεί στα κεφάλαια 1,2,4 και 6

**Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική**

Brightness	Λαμπρότητα
Geometrical operation	Γεωμετρική πράξη
Global operation	Καθολική πράξη
Hue	Απόχρωση
Image compression	Συμπίεση εικόνας
Image acquisition	Απόκτηση εικόνας
Image restoration	Αποκατάσταση της εικόνας
Local operation	Τοπική πράξη
Luminance	Φωτεινότητα
Matching	Ταίριασμα
Mirroring	Καθρεπτισμός
MTF	Συνάρτηση Μεταφοράς Διαμόρφωσης
Picture element ή pixel	εικονοστοιχείο
Pixels per inch	Εικονοστοιχεία ανά ίντσα
Point operation	Πράξη σημείου
Retina	Αμφιβληστροειδής
RGB ή Red–Green–Blue	Κόκκινο–Πράσινο–Μπλε
Rotation	Στροφή
Saturation	Κορεσμός
Scanner	Σαρωτής εικόνας
Translation	Μεταφορά ή μετατόπιση





Δισδιάστατα ψηφιακά γραμμικά συστήματα

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό θα γνωρίσουμε τα δισδιάστατα ψηφιακά φίλτρα (Two-dimensional digital filters) και τις ιδιότητές τους. Η μετάβαση από τα μονοδιάστατα στα δισδιάστατα φίλτρα δεν είναι πολύ εύκολη, παρότι οι έννοιες είναι σε γενικές γραμμές οι ίδιες. Ο κυριότερος λόγος είναι ότι οι δισδιάστατες συναρτήσεις, όπως η δισδιάστατη κρουστική απόκριση και η δισδιάστατη απόκριση συχνότητας, είναι δυσκολότερες στη μαθηματική τους επεξεργασία από τις αντίστοιχες μονοδιάστατες. Σκοπός του κεφαλαίου είναι να γνωρίσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά των δισδιάστατων φίλτρων που έχουν μεγάλη σημασία στην ψηφιακή επεξεργασία της εικόνας. Έτσι, θα γνωρίσουμε κυρίως τα δισδιάστατα FIR φίλτρα και τις εφαρμογές τους.

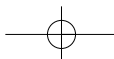
Προσδοκώμενα αποτελέσματα

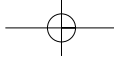
Όταν ολοκληρώσετε τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού θα είστε σε θέση να:

- Σχεδιάζετε τη μορφή δισδιάστατου σήματος ή την κρουστική απόκριση δισδιάστατου φίλτρου
- Υλοποιείτε δισδιάστατη συνέλιξη με σκοπό να υπολογίσετε την έξοδο δισδιάστατου ψηφιακού φίλτρου
- Αναγνωρίζετε αν ένα δισδιάστατο φίλτρο μπορεί να υλοποιηθεί ως συνδυασμός δύο μονοδιάστατων φίλτρων (διαχωριστικότητα)
- Σχεδιάζετε ένα απλό δισδιάστατο FIR φίλτρο
- Δείχνετε αν ένα δισδιάστατο φίλτρο έχει απόκριση μηδενικής φάσης (zero phase response)

Έννοιες κλειδιά

- Αμεταβλητότητα στην ολίσθηση ή μετατόπιση
- Αρχή της υπέρθεσης
- Ανιχνευτές ακμών
- Αντίστροφα προβλήματα

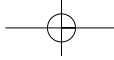




- Γραμμικά συστήματα
- Διακριτές χωρικές μεταβλητές
- Διαχωρίσιμες συναρτήσεις
- Διαχωρίσιμα φίλτρα
- Δισδιάστατα FIR φίλτρα
- Δισδιάστατη απόκριση συχνότητας
- Δισδιάστατη συνέλιξη
- Ευσταθή δισδιάστατα φίλτρα
- Μέθοδος των παραθύρων
- Μηδενική απόκριση φάσης
- Παράλληλη σύνδεση
- Περιοδική απόκριση συχνότητας
- Συμμετρική κρουστική απόκριση
- Σύνδεση σε σειρά
- Φίλτρο μέσης τιμής

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

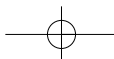
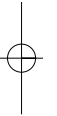
Στο Κεφάλαιο 6 γνωρίσαμε τα βασικά χαρακτηριστικά της ψηφιακής εικόνας και τον τρόπο με τον οποίο την αντιλαμβάνεται και μπορεί να την επεξεργαστεί ο άνθρωπος. Δεδομένου ότι η ψηφιακή εικόνα είναι ένα δισδιάστατο σήμα που εκφράζει τις μεταβολές της αμύρωσης στο επίπεδο (x,y) , η επεξεργασία της μπορεί να γίνει με τα δισδιάστατα ψηφιακά φίλτρα. Τα φίλτρα αυτά χαρακτηρίζονται από την κρουστική τους απόκριση. Η κρουστική απόκριση είναι δισδιάστατη διακριτή συνάρτηση και οι ιδιότητές της επηρεάζουν και καθορίζουν το σήμα εξόδου από το δισδιάστατο φίλτρο. Επειδή η εικόνα είναι πολύ ευαίσθητη στην αλλαγή της φασικής σχέσης μεταξύ των αρμονικών της, θα πρέπει κατά την ψηφιακή της επεξεργασία, το δισδιάστατο φίλτρο να μην αλλάξει τη σχέση αυτή. Τέτοια φίλτρα έχουν συμμετρική κρουστική απόκριση και καλούνται φίλτρα μηδενικής φάσης. Στο κεφάλαιο αυτό θα γνωρίσουμε τον τρόπο σχεδίασης απλών δισδιάστατων FIR φίλτρων που έχουν τις παραπάνω ιδιότητες. Το κεφάλαιο θα το ολοκληρώσουμε κάνοντας απλή αναφορά σε βασικές εφαρμογές των δισδιάστατων FIR φίλτρων στην ψηφιακή επεξεργασία της εικόνας. Σε όλη

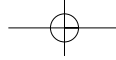


την έκταση του κεφαλαίου οι έννοιες ψηφιακά φίλτρα και ψηφιακά συστήματα εναλλάσσονται. Απαραίτητη γνώση για το κεφάλαιο αυτό αποτελεί η ύλη των Κεφαλαίων 3, 4 και 6 του βιβλίου. Περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να βρει στις αναφορές της ελληνικής και της ξενόγλωσσης βιβλιογραφίας.

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τις ακόλουθες ενότητες:

- 7.1. Δισδιάστατη συνέλιξη.
- 7.2. Χαρακτηριστικά των δισδιάστατων ψηφιακών συστημάτων.
- 7.3. Απόκριση στη συχνότητα των δισδιάστατων ψηφιακών συστημάτων.
- 7.4. Σχεδίαση των δισδιάστατων ψηφιακών φίλτρων.





7.1 Δισδιάστατη συνέλιξη

Ένα γραμμικό ψηφιακό σύστημα ουσιαστικά μετασχηματίζει ένα ψηφιακό σήμα $x(n)$ σε ένα νέο $y(n)$ (Σχήμα 7.1α). Η πράξη που εκτελεί είναι η συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ που χαρακτηρίζει το σύστημα με το σήμα εισόδου $x(n)$:

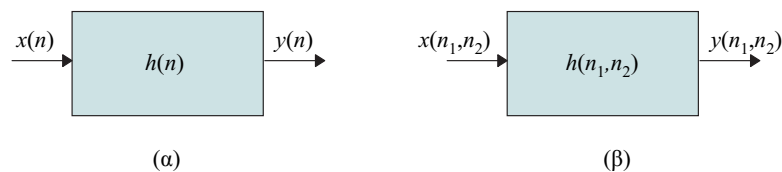
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n-r)h(r) \quad (7.1)$$

Με τον ίδιο τρόπο ένα δισδιάστατο ψηφιακό σήμα $x(n_1, n_2)$ μετασχηματίζεται από ένα δισδιάστατο γραμμικό ψηφιακό σύστημα σε ένα νέο δισδιάστατο ψηφιακό σήμα $y(n_1, n_2)$ όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.1β. Και εδώ η πράξη που εκτελεί το δισδιάστατο γραμμικό σύστημα είναι η συνέλιξη του σήματος εισόδου $x(n_1, n_2)$ με τη δισδιάστατη κρουστική του απόκριση $h(n_1, n_2)$:

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) = \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} x(n_1 - r_1, n_2 - r_2) h(r_1, r_2) \quad (7.2)$$

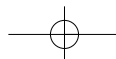
Σχήμα 7.1

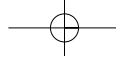
Σχηματική παράσταση α) Μονοδιάστατου ψηφιακού συστήματος β) Δισδιάστατου ψηφιακού συστήματος.



Στα μονοδιάστατα ψηφιακά φίλτρα η διακριτή μεταβλητή n αντιστοιχούσε κυρίως στο χρόνο, αφού τα μονοδιάστατα ψηφιακά σήματα είναι συνήθως σήματα χρόνου. Αντίθετα, στα δισδιάστατα ψηφιακά φίλτρα οι ανεξάρτητες μεταβλητές n_1 και n_2 είναι συνήθως διακριτές χωρικές μεταβλητές που αντιστοιχούν στις διευθύνσεις x και y . Ο κυριότερος λόγος για την επιλογή αυτή είναι ότι οι ψηφιακές εικόνες θεωρούνται δισδιάστατα διακριτά σήματα στο επίπεδο (x, y) .

Η σχέση (7.2) που μας περιγράφει τη δισδιάστατη συνέλιξη αποτελεί τη σχέση εισόδου-εξόδου του γραμμικού ψηφιακού συστήματος, αφού συνδέει τα δείγματα της εισόδου $x(n)$ με αυτά της εξόδου $y(n)$. Η δισδιάστατη συνέλιξη είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ιδιότητα της γραμμικότητας και αυτή της αμεταβλητότητας στο χρόνο. Στην συνέχεια θα εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι δύο αυτές ιδιότητες μας οδηγούν στη δισδιάστατη συνέλιξη.





7.1.1 Γραμμικότητα

Χρησιμοποιώντας τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού με σταθερά και της ολίσθησης, είναι δυνατό να εκφράσουμε κάθε δισδιάστατο σήμα $x(n_1, n_2)$ ως γραμμικό συνδυασμό ολισθημένων δισδιάστατων μοναδιαίων κρουστικών $\delta(n_1, n_2)$:

$$x(n_1, n_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} x(l_1, l_2) \delta(n_1 - l_1, n_2 - l_2) \quad (7.3)$$

Στην τελευταία σχέση η $\delta(n_1 - l_1, n_2 - l_2)$ είναι η δισδιάστατη μοναδιαία κρουστική μετατοπισμένη στη θέση $n_1 = l_1$ και $n_2 = l_2$ και οι τιμές $x(l_1, l_2)$ μπορούν να θεωρηθούν ως οι αντίστοιχοι πολλαπλασιαστές.

Όπως ήδη αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 3, για τα γραμμικά συστήματα (linear systems) ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Αυτό σημαίνει, ότι αν θέλουμε να υπολογίσουμε την απόκριση του γραμμικού συστήματος σε ένα σύνθετο σήμα που αποτελείται από το γραμμικό συνδυασμό επιμέρους απλών σημάτων, αρκεί να λάβουμε τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος στα απλά αυτά σήματα. Έτσι, αν η συμπεριφορά του συστήματος συμβολιστεί με $L(\cdot)$ και το σήμα εισόδου σε αυτό είναι το σήμα της σχέσης (7.3) τότε η έξοδος είναι:

$$y(n_1, n_2) = L \left[\sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} x(l_1, l_2) \delta(n_1 - l_1, n_2 - l_2) \right] \quad (7.4)$$

Για ένα γραμμικό σύστημα, η (7.4) μπορεί να ξαναγραφεί ως

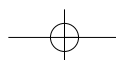
$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} x(l_1, l_2) L[\delta(n_1 - l_1, n_2 - l_2)] \\ &= \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} x(l_1, l_2) h_{l_1, l_2}(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (7.5)$$

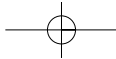
όπου h_{l_1, l_2} είναι η απόκριση του συστήματος στη δισδιάστατη κρουστική που βρίσκεται στη θέση (l_1, l_2) .

7.1.2 Αμεταβλητότητα στην ολίσθηση

Ένα φίλτρο καλείται *αμετάβλητο στην ολίσθηση* (shift invariant) αν συγκεκριμένη μετατόπιση του σήματος εισόδου προκαλεί την ίδια μετατόπιση στο σήμα της εξόδου. Έτσι, αν

$$y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)] \quad (7.6)$$





για αμετάβλητο στην ολίσθηση φίλτρο ισχύει

$$T[x(n_1 - l_1, n_2 - l_2)] = y(n_1 - l_1, n_2 - l_2) \tag{7.7}$$

Η αμεταβλητότητα στην ολίσθηση και η γραμμικότητα ενός φίλτρου είναι ιδιότητες ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Δεδομένου ότι η αμεταβλητότητα στην ολίσθηση συνεπάγεται

$h_{l_1 l_2}(n_1, n_2) = h(n_1 - l_1, n_2 - l_2)$, για ένα γραμμικό φίλτρο που έχει και τις δύο ιδιότητες η σχέση (7.5) γράφεται ως

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} x(l_1, l_2) h(n_1 - l_1, n_2 - l_2) \tag{7.8}$$

Η σχέση (7.8) περιγράφει τη δισδιάστατη συνέλιξη (two-dimensional convolution). Καθορίζει ότι το σήμα εξόδου $y(n_1, n_2)$ μπορεί να βρεθεί, αν η κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ του δισδιάστατου ψηφιακού φίλτρου μετατοπιστεί κατάλληλα $h(n_1 - l_1, n_2 - l_2)$ και πολλαπλασιαστεί κάθε φορά με το αντίστοιχο δείγμα του σήματος $x(l_1, l_2)$. Στο τέλος αθροίζουμε όλα τα γινόμενα για να λάβουμε το $y(n_1, n_2)$. Η σχέση (7.8) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} h(l_1, l_2) x(n_1 - l_1, n_2 - l_2) \tag{7.9}$$

Η δισδιάστατη συνέλιξη θα συμβολίζεται στο εξής με διπλό *:

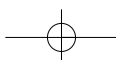
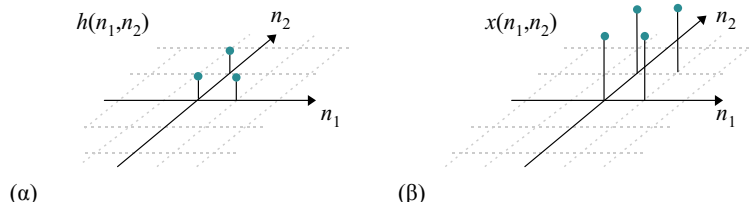
$$y = x ** h \text{ ή } y = h ** x \tag{7.10}$$

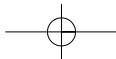
Παράδειγμα 7.1

Η κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ δισδιάστατου ψηφιακού φίλτρου έχει όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.2α, με όλους τους συντελεστές ίσους με 1/3. Να βρεθεί το σήμα εξόδου $y(n_1, n_2)$ αν για το σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$ έχουμε $x(0,0) = x(1,0) = x(0,1) = x(1,1) = 1$ και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις (n_1, n_2) (Σχήμα 7.2β).

Σχήμα 7.2

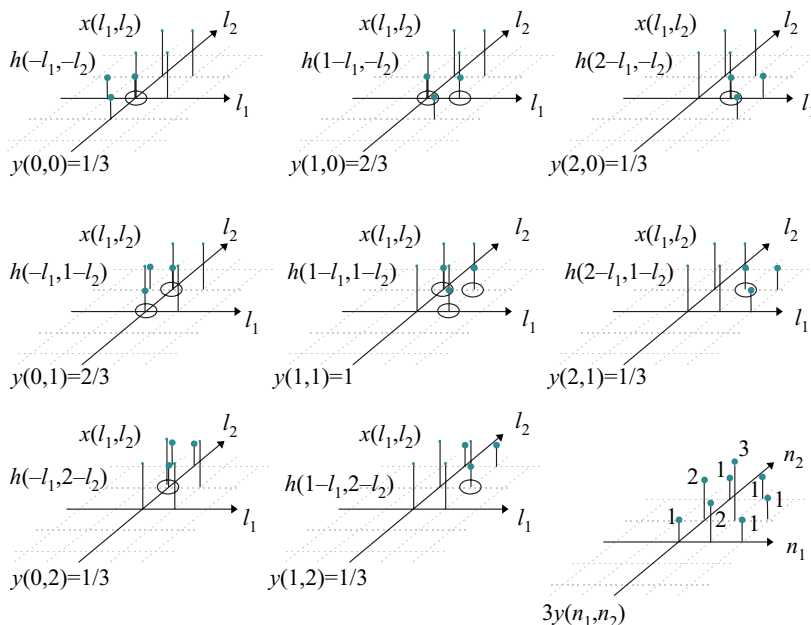
α) Η κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ του φίλτρου του Παραδείγματος 7.1 και β) το σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$.





Λύση

Για να υπολογίσουμε το σήμα εξόδου θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (7.8). Σύμφωνα με αυτή, η έξοδος μπορεί να σχηματιστεί αν λάβουμε αντίγραφα της $h(l_1, l_2)$ μετατοπισμένα κατάλληλα σε θέσεις (n_1, n_2) όπου υπάρχουν κοινές θέσεις με τους όρους του σήματος εισόδου $x(l_1, l_2)$. Το άθροισμα των γινομένων των όρων με τις κοινές θέσεις θα δώσει τους όρους της σήματος εξόδου $y(n_1, n_2)$. Η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.3.



Σχήμα 7.3

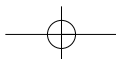
Υπολογισμός της εξόδου $y(n_1, n_2)$ με υλοποίηση της συνέλιξης που περιγράφεται από τη σχέση (7.8). Μόνο το γινόμενο των όρων $x(l_1, l_2)$ και $h(l_1, l_2)$ που συμπίπτουν και είναι σημειωμένοι με κύκλο, συνεισφέρουν στον τελικό σχηματισμό της $y(n_1, n_2)$.

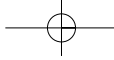
Παράδειγμα 7.2

Ψηφιακό φίλτρο δύο διαστάσεων έχει κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ τέτοια, ώστε $h(0,0) = 0,5$, $h(1,0) = h(-1,0) = h(0,1) = h(0,-1) = 0,125$ και 0 οπουδήποτε αλλού. Να σχεδιαστεί η κρουστική απόκριση και να βρεθεί το σήμα εξόδου $y(n_1, n_2)$ αν το σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$ είναι $x(0,0) = 1$, $x(-1,0) = x(1,0) = 0,5$.

Λύση

Η κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ του φίλτρου αλλά και το σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$ δίνονται στο Σχήμα 7.4. Για να υπολογίσουμε το σήμα εξόδου $y(n_1, n_2)$ θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (7.8). Σύμφωνα με αυτή η έξοδος $y(n_1, n_2)$ μπορεί να σχηματιστεί αν

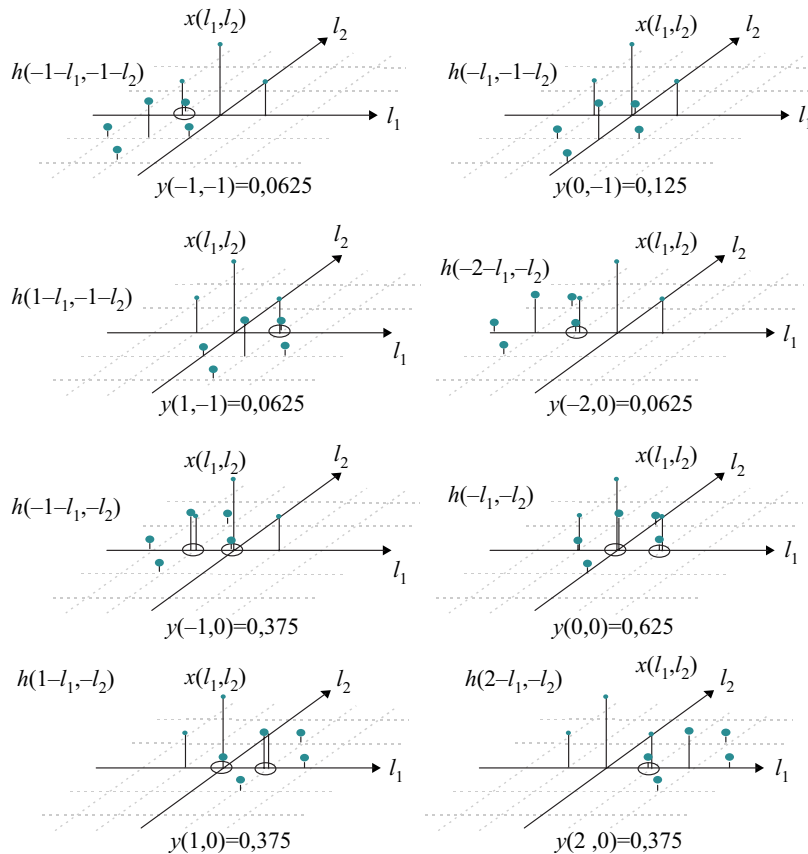
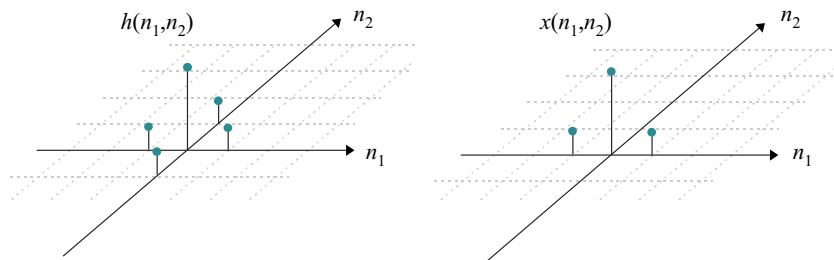


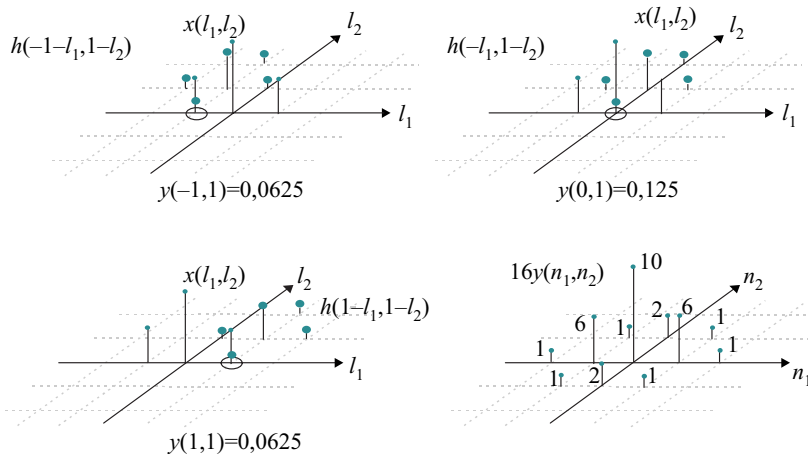
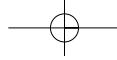


λάβουμε αντίγραφα της $h(n_1, n_2)$ σε θέσεις (n_1, n_2) όπου το σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$ είναι μη μηδενικό. Τα αντίγραφα αυτά θα πολλαπλασιαστούν με την αντίστοιχη τιμή του σήματος και τα αποτελέσματα θα προστεθούν. Η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.5.

Σχήμα 7.4

Η κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ του φίλτρου του παραδείγματος 7.2 και το σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$





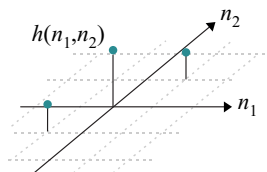
Σχήμα 7.5

Υπολογισμός της εξόδου $y(n_1, n_2)$ με υλοποίηση της συνέλιξης που περιγράφεται από τη σχέση (7.8).

Δραστηριότητα 7.1

Να σχεδιάσετε την κρουστική απόκριση δισδιάστατου ψηφιακού φίλτρου όταν αυτή έχει τρεις όρους και είναι συμμετρική γύρω από τη θέση $(n_1, n_2) = (0, 0)$.

Η κρουστική απόκριση θα είναι συμμετρική με τον έναν όρο να βρίσκεται στη θέση $(n_1, n_2) = (0, 0)$ και τους άλλους δύο εκατέρωθεν αυτού και ίσους μεταξύ τους. Με τρεις μόνο όρους η συμμετρική κρουστική απόκριση μπορεί να έχει διάφορες μορφές (συνολικά 4). Μία από αυτές δίνεται στο Σχήμα 7.6.

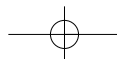


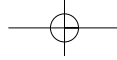
Σχήμα 7.6

Συμμετρική δισδιάστατη κρουστική απόκριση με τρεις όρους.

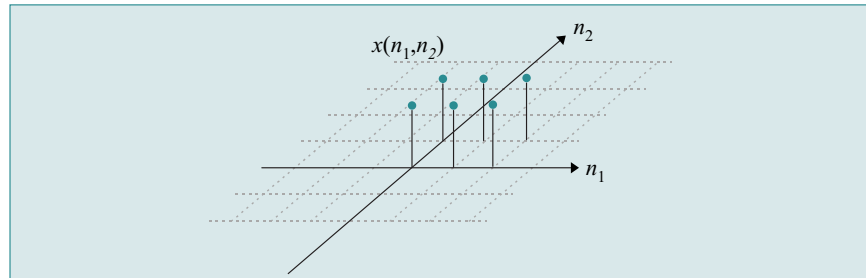
Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 7.1

Θέλουμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y(n_1, n_2)$ δισδιάστατου ψηφιακού φίλτρου με κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ τέτοια, ώστε $h(0, 0) = 0,5$, $h(0, 1) = h(0, -1) = 0,25$ και 0 οπουδήποτε αλλού. Σύμφωνα με τη σχέση (7.9) το σήμα εισόδου που φαίνεται στο Σχήμα 7.7 πρέπει να υποστεί 5, 10, 15 ή 20 μετατοπίσεις πριν από την τελική άθροιση των γινομένων;





Σχήμα 7.7
Το σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$ για την Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 7.1.



Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή γνωρίσαμε τα γραμμικά, αμετάβλητα στην ολίσθηση δισδιάστατα ψηφιακά φίλτρα. Ο τρόπος δράσης των φίλτρων αυτών καθορίζεται από τη δισδιάστατη κρουστική τους απόκριση. Πιο συγκεκριμένα, το σήμα εξόδου υπολογίζεται ως η δισδιάστατη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης και του σήματος εισόδου. Η δισδιάστατη συνέλιξη είναι αποτέλεσμα της γραμμικότητας και της αμεταβλητότητας των φίλτρων στην ολίσθηση.

7.2 Χαρακτηριστικά των δισδιάστατων ψηφιακών συστημάτων

7.2.1 Τρόποι σύνδεσης των δισδιάστατων ψηφιακών φίλτρων

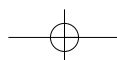
Η πράξη της δισδιάστατης συνέλιξης έχει σημαντικές ιδιότητες οι οποίες είναι χρήσιμες στην ανάλυση των δισδιάστατων, γραμμικών αμετάβλητων στην ολίσθηση συστημάτων. Έτσι, αν δύο συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h(n_1, n_2)$ και $g(n_1, n_2)$ είναι συνδεδεμένα σε σειρά (cascade), όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.8, τότε η τελική έξοδος $y(n_1, n_2)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$, το ενδιάμεσο σήμα $w(n_1, n_2)$ και το γεγονός ότι κάθε ένα φίλτρο υλοποιεί δισδιάστατη συνέλιξη:

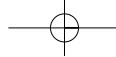
$$\begin{aligned} w &= x ** h \\ y &= w ** g = (x ** h) ** g \end{aligned} \quad (7.11)$$

Δεδομένου ότι για τη δισδιάστατη συνέλιξη ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, η σχέση (7.11) μπορεί να γραφεί

$$y = x ** (h ** g) = x ** h_{\text{σος}} \quad (7.12)$$

Από τη σχέση 7.12 προκύπτει ότι τα δύο σε σειρά φίλτρα ισοδυναμούν με ένα τρίτο που έχει κρουστική απόκριση αυτή που προκύπτει από τη συνέλιξη των επιμέρους

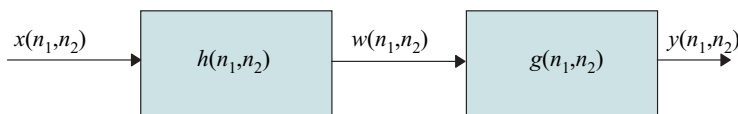




κρουστικών αποκρίσεων. Επίσης, δεδομένου ότι για τη δισδιάστατη συνέλιξη ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα

$$h ** g = g ** h,$$

η συνολική συμπεριφορά του δισδιάστατου φίλτρου δεν αλλάζει αν εφαρμοστεί στο σήμα $x(n_1, n_2)$ πρώτα το φίλτρο g και μετά το h .



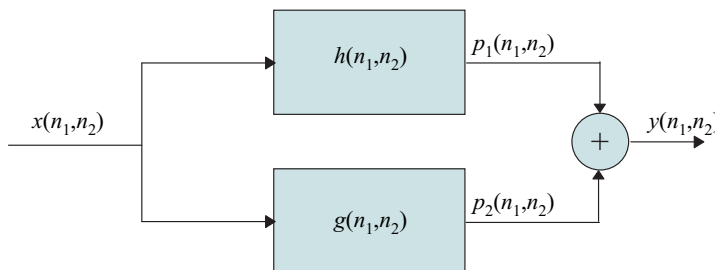
Σχήμα 7.8

Δισδιάστατα γραμμικά φίλτρα συνδεδεμένα σε σειρά. Η κρουστική απόκριση του συνδυασμού προκύπτει από τη δισδιάστατη συνέλιξη $h ** g$. Η αλλαγή της σειράς των δύο φίλτρων δίνει θεωρητικά το ίδιο πάντα αποτέλεσμα.

Στην περίπτωση που έχουμε παράλληλη συνδεσμολογία δύο δισδιάστατων, γραμμικών αμετάβλητων στην ολίσθηση ψηφιακών φίλτρων, όπως στο Σχήμα 7.9, η έξοδος $y(n_1, n_2)$ δίνεται ως

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= p_1(n_1, n_2) + p_2(n_1, n_2) = \\ &= x ** h + x ** g = \\ &= x ** (h + g) = \\ &= x ** h_{\text{σοδ}} \end{aligned} \tag{7.13}$$

Η σχέση (7.13) δηλώνει ότι, αν δύο δισδιάστατα, γραμμικά και αμετάβλητα στην ολίσθηση ψηφιακά συστήματα συνδεθούν παράλληλα, ισοδυναμούν με ένα τρίτο που έχει κρουστική απόκριση το άθροισμα των επιμέρους κρουστικών αποκρίσεων.

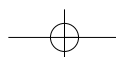


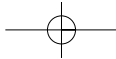
Σχήμα 7.9

Το παράλληλο σύστημα, δισδιάστατων, γραμμικών και αμετάβλητων στην ολίσθηση ψηφιακών φίλτρων ισοδυναμεί με φίλτρο που έχει κρουστική απόκριση $h_{\text{σοδ}}(n_1, n_2) = h(n_1, n_2) + g(n_1, n_2)$.

Παράδειγμα 7.3

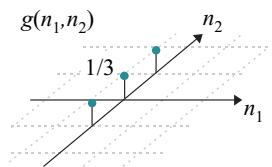
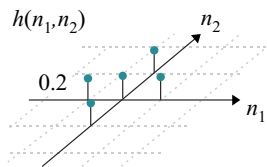
Για δύο δισδιάστατα, γραμμικά, αμετάβλητα στην ολίσθηση φίλτρα οι κρουστικές αποκρίσεις $h(n_1, n_2)$ και $g(n_1, n_2)$ έχουν όπως παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.10. Να σχεδιαστεί η κρουστική απόκριση του φίλτρου που προκύπτει αν τα φίλτρα αυτά συνδεθούν α) σε σειρά και β) παράλληλα.





Σχήμα 7.10

Κρουστικές αποκρίσεις δισδιάστατων, γραμμικών, αμετάβλητων στην ολίσηση ψηφιακών φίλτρων.



Λύση

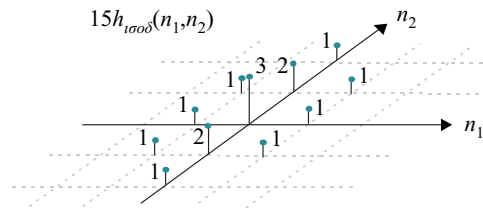
Στην περίπτωση σύνδεσης σε σειρά η κρουστική απόκριση του συνολικού φίλτρου δίνεται από τη συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων του Σχήματος 7.10:

$$h_{ισοδ} = h^{**}g$$

Για να κάνουμε αυτόν τον υπολογισμό θα μετατοπίσουμε την $h(n_1, n_2)$ σε όλες εκείνες τις θέσεις που έχει με την $g(n_1, n_2)$ σύμπτωση κάποιων όρων. Η διαδικασία είναι παρόμοια με τη συνέλιξη που περιγράφεται στο Σχήμα 7.5. Το τελικό αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 7.11.

Σχήμα 7.11

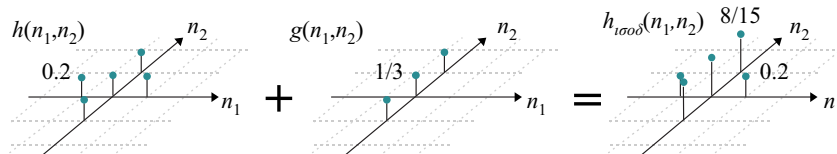
Η κρουστική απόκριση του εν σειρά συνδυασμού των φίλτρων h και g προκύπτει από τη συνέλιξη των δύο κρουστικών αποκρίσεων.



Σχήμα 7.12

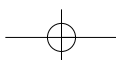
Η κρουστική απόκριση του παράλληλου συνδυασμού των φίλτρων h και g προκύπτει από την απλή άθροιση των δύο κρουστικών αποκρίσεων.

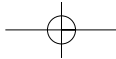
Στην περίπτωση της σύνδεσης των δύο φίλτρων παράλληλα, η ισοδύναμη κρουστική απόκριση προκύπτει από την απλή άθροιση των δύο επιμέρους κρουστικών αποκρίσεων σύμφωνα με τη σχέση (7.13) και φαίνεται στο Σχήμα 7.12.



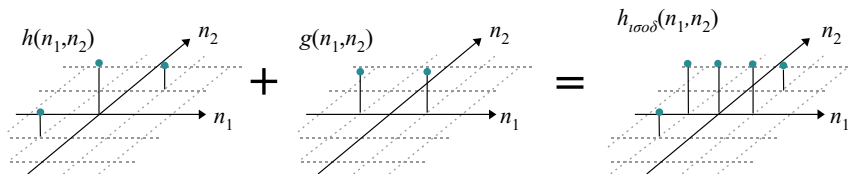
Δραστηριότητα 7.2

Ποια είναι η κρουστική απόκριση $h_{ισοδ}$ δισδιάστατου γραμμικού φίλτρου που προκύπτει από τον παράλληλο συνδυασμό του δισδιάστατου φίλτρου της Δραστηριότητας 7.1, με δισδιάστατο φίλτρο που έχει κρουστική απόκριση $g(n_1, n_2) = 0,5[\delta(n_1-1, n_2) + \delta(n_1 + 1, n_2)]$;





Η ισοδύναμη κρουστική απόκριση θα προκύψει από την πρόσθεση των δύο κρουστικών αποκρίσεων όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.13. Στο σχήμα αυτό δίνεται η συμμετρική $h(n_1, n_2)$ της Δραστηριότητας 7.1, η $g(n_1, n_2)$ και η $h_{ισοδ}(n_1, n_2)$.

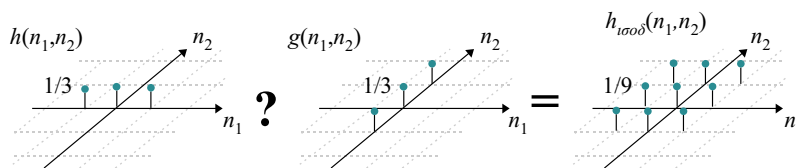


Σχήμα 7.13

Η κρουστική απόκριση του παράλληλου συνδυασμού των φίλτρων h και g προκύπτει από την απλή άθροιση των δύο κρουστικών αποκρίσεων.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 7.2

Στο Σχήμα 7.14 δίνονται οι κρουστικές αποκρίσεις $h(n_1, n_2)$ και $g(n_1, n_2)$ δύο φίλτρων. Η $h_{ισοδ}(n_1, n_2)$, που δίνεται δίπλα προκύπτει από τον παράλληλο ή τον εν σειρά συνδυασμό τους;



Σχήμα 7.14

Κρουστικές αποκρίσεις δισδιάστατων γραμμικών αμετάβλητων στην ολίσθηση ψηφιακών φίλτρων.

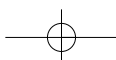
7.2.2 Διαχωρίσιμα δισδιάστατα ψηφιακά συστήματα

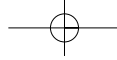
Ένα διαχωρίσιμο (separable) δισδιάστατο σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ τέτοια ώστε να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο μονοδιάστατων ακολουθιών:

$$h(n_1, n_2) = h_1(n_1) \cdot h_2(n_2) \tag{7.14}$$

Στην περίπτωση αυτή η έξοδος $y(n_1, n_2)$ του συστήματος για είσοδο $x(n_1, n_2)$ μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} x(n_1 - l_1, n_2 - l_2) h_1(l_1) h_2(l_2) \\ &= \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} h_1(l_1) \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} x(n_1 - l_1, n_2 - l_2) h_2(l_2) \end{aligned} \tag{7.15}$$





Το γινόμενο στο δεύτερο άθροισμα της τελευταίας σχέσης αντιπροσωπεύει ένα δισδιάστατο πίνακα αριθμών. Εάν θέσουμε

$$f(n_1, n_2) = \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2 - l_2)h_2(l_2) \quad (7.16)$$

η σχέση (7.15) γίνεται

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} h_1(l_1)f(n_1 - l_1, n_2) \quad (7.17)$$

Η διαδικασία αυτή δηλώνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα την ακολουθία $f(n_1, n_2)$ πραγματοποιώντας μονοδιάστατη συνέλιξη στις στήλες του πίνακα $x(n_1, n_2)$ ($n_1 =$ σταθερό). Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις μονοδιάστατες συνέλιξεις στις γραμμές της $f(n_1, n_2)$ ($n_2 =$ σταθερό) σύμφωνα με τη σχέση (7.17).

Παράδειγμα 7.4

Να αποδειχθεί ότι η κρουστική απόκριση που περιγράφεται από τη σχέση

$$h(n_1, n_2) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{5}\right) & |n_1| \leq 5, |n_2| \leq 5 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (7.18)$$

αντιστοιχεί σε διαχωρίσιμο δισδιάστατο σύστημα.

Λύση

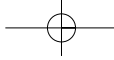
Η δισδιάστατη κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ μπορεί να γραφεί ως

$$h(n_1, n_2) = \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{5}\right) = \exp\left(-\frac{n_1^2}{5}\right)\exp\left(-\frac{n_2^2}{5}\right) = h_1(n_1)h_2(n_2) \quad (7.19)$$

δηλαδή, ως γινόμενο δύο μονοδιάστατων κρουστικών αποκρίσεων. Επομένως, είναι διαχωρίσιμη.

7.2.3 Ευσταθή δισδιάστατα συστήματα

Όπως και στην περίπτωση των μονοδιάστατων φίλτρων, τα δισδιάστατα συστήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι μόνο τα ευσταθή. Ένα τέτοιο φίλτρο δίνει πεπερασμένη έξοδο για κάθε πεπερασμένη σε πλάτος είσοδο. Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ευσταθές ένα δισδιάστατο, γραμμικό, αμετάβλητο στην ολίσηση ψηφιακό φίλτρο είναι η ακόλουθη:



$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |h(n_1, n_2)| = \alpha < \infty \quad (7.20)$$

όπου η $h(n_1, n_2)$ είναι η κρουστική απόκριση του φίλτρου.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 7.3

Η κρουστική απόκριση που δίνεται στο Παράδειγμα 7.4 αντιστοιχεί σε ευσταθές ή ασταθές δισδιάστατο φίλτρο και γιατί;

7.3 Απόκριση στη συχνότητα των δισδιάστατων ψηφιακών συστημάτων

Στις προηγούμενες παραγράφους εξηγήσαμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η έξοδος $y(n_1, n_2)$ ενός δισδιάστατου ψηφιακού συστήματος. Προς τούτο είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθεί η πράξη της δισδιάστατης συνέλιξης μεταξύ του σήματος εισόδου $x(n_1, n_2)$ και της κρουστικής απόκρισης $h(n_1, n_2)$ του συστήματος. Στην ουσία η κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ καθορίζει πλήρως την απόκριση του συστήματος για κάθε (n_1, n_2) . Στη συνέχεια θα δείξουμε τον τρόπο που η συνάρτηση $h(n_1, n_2)$ καθορίζει τη συμπεριφορά του φίλτρου στις χωρικές συχνότητες ω_1 και ω_2 , επομένως θα επηρεάζει και το φάσμα του σήματος εισόδου (όπως αυτό το γνωρίσαμε στην Ενότητα 6.4).

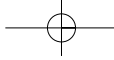
Για να προχωρήσουμε στην ανάλυση της συμπεριφοράς του δισδιάστατου συστήματος στη συχνότητα θα χρησιμοποιήσουμε το σήμα

$$x(n_1, n_2) = e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2}$$

Το σήμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα μιγαδικό δισδιάστατο ημιτονοειδές με ω_1 και ω_2 πραγματικούς αριθμούς που αντιστοιχούν στις χωρικές συχνότητες ω_1 και ω_2 αντίστοιχα. Η έξοδος $y(n_1, n_2)$ σύμφωνα με τη σχέση της συνέλιξης (7.9) έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1(n_1-r_1) + j\omega_2(n_2-r_2)} h(r_1, r_2) \\ &= e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_1 r_1 - j\omega_2 r_2} h(r_1, r_2) \\ &= e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} H(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (7.21)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι το σήμα εξόδου $y(n_1, n_2)$ αποτελείται από τις ίδιες



συχρότητες με το σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$, αλλά το πλάτος τους και η φάση τους έχουν υποστεί την επίδραση της συνάρτησης $H(\omega_1, \omega_2)$. Η συνάρτηση αυτή, όπως και στην περίπτωση των μονοδιάστατων σημάτων του Κεφαλαίου 3, καλείται «απόκριση συχνότητας του φίλτρου» και προφανώς ισούται με:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_1 r_1 - j\omega_2 r_2} h(r_1, r_2) \quad (7.22)$$

Το μέτρο $|H(\omega_1, \omega_2)|$ της συνάρτησης καθορίζει το πώς θα επηρεαστούν οι συχνότητες του σήματος από το δισδιάστατο σύστημα. Για τις συχνότητες (ω_1, ω_2) όπου $|H(\omega_1, \omega_2)| \rightarrow 0$, οι αντίστοιχες συχνότητες του σήματος εισόδου αποκόπτονται. Ουσιαστικά η σχέση (7.22) δηλώνει ότι η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι ο δισδιάστατος διακριτός μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Η απόκριση συχνότητας $H(\omega_1, \omega_2)$ είναι περιοδική συνάρτηση των συχνοτήτων ω_1 και ω_2 με περίοδο 2π :

$$\begin{aligned} H(\omega_1 + 2\pi, \omega_2) &= H(\omega_1, \omega_2) \\ H(\omega_1, \omega_2 + 2\pi) &= H(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (7.23)$$

Η περιοδικότητα της απόκρισης των ψηφιακών συστημάτων είναι αναμενόμενη λόγω της ψηφιακής φύσης αυτών. Ίδια συμπεριφορά έχει και το φάσμα των δισδιάστατων ψηφιακών σημάτων (Ενότητα 6.4). Ανάλογη δε συμπεριφορά παρουσιάζουν και τα μονοδιάστατα ψηφιακά σήματα και συστήματα (Κεφάλαια 1 έως 3).

Παράδειγμα 7.5

Να υπολογιστεί το μέτρο της απόκρισης στη συχνότητα του δισδιάστατου ψηφιακού συστήματος με κρουστική απόκριση

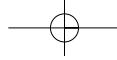
$$h(n_1, n_2) = \delta(n_1 + 1, n_2) + \delta(n_1 - 1, n_2) + \delta(n_1, n_2)$$

Λύση

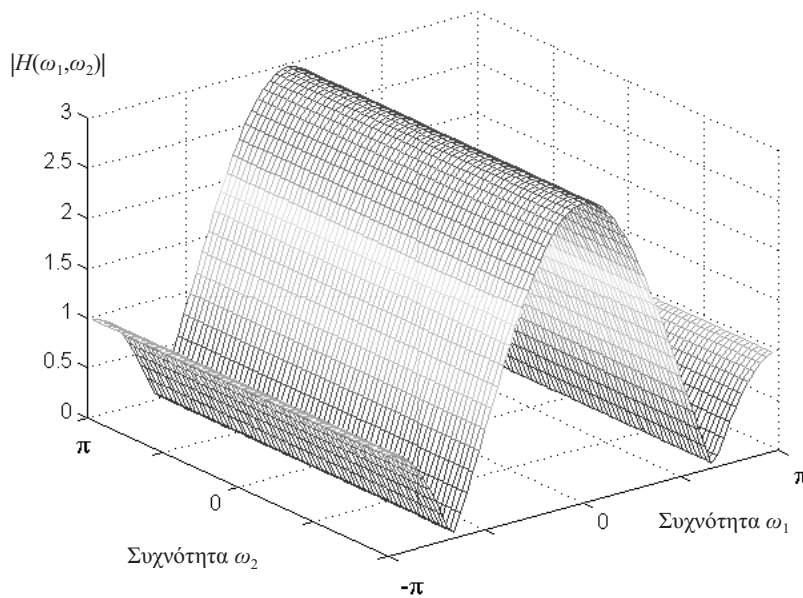
Δεδομένου ότι η κρουστική απόκριση έχει μόνο τρεις όρους ίσους με τη μονάδα στις θέσεις (n_1, n_2) : $(-1, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 0)$, η σχέση (7.22) γράφεται

$$\begin{aligned} H(\omega_1, \omega_2) &= e^0 + e^{+j\omega_1} + e^{-j\omega_1} = \\ &= 1 + 2\cos(\omega_1) \end{aligned} \quad (7.24)$$

Η απόκριση συχνότητας που περιγράφεται από τη σχέση (7.24) είναι πραγματική,



επομένως δεν αλλάζει τη φάση των αρμονικών συνιστωσών του σήματος, μεταβάλλεται δε μόνο στην κατεύθυνση της ω_1 . Χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό σχεδίασης (λ.χ. MATLAB), μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση $|H(\omega_1, \omega_2)|$ έχει τη μορφή που δείχνεται στο Σχήμα 7.15.



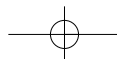
Σχήμα 7.15

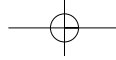
Η μορφή της συνάρτησης $|H(\omega_1, \omega_2)| = |1 + 2\cos(\omega_1)|$, όπως έχει ληφθεί με το MATLAB.

Δραστηριότητα 7.3

Να υπολογιστεί το μέτρο της απόκρισης στη συχνότητα δισδιάστατου ψηφιακού φίλτρου μέσης τιμής της επιλογής σας.

Ένα φίλτρο μέσης τιμής υπολογίζει τη μέση τιμή ορισμένων δειγμάτων του σήματος εισόδου $x(n_1, n_2)$ που βρίσκονται γύρω από τη θέση (n_1, n_2) , και δίνει το αποτέλεσμα στο δείγμα του σήματος εξόδου $y(n_1, n_2)$ που βρίσκεται στην αντίστοιχη θέση. Επειδή η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται, καθώς μετακινούμαστε σε όλες τις θέσεις (n_1, n_2) , το φίλτρο καλείται και *φίλτρο του κινούμενου μέσου*. Πρόκειται για ένα βαθυ-





περατό φίλτρο του οποίου οι συχνότητες αποκοπής εξαρτώνται από το πλήθος των δειγμάτων που θα ληφθούν από το σήμα εισόδου. Ως βαθυπερατό φίλτρο, αποκόπτει τις υψηλές συχνότητες, «λειαίνει» (smooths) το θόρυβο, αλλά προκαλεί θόλωση (blurring) στις ακμές των εικόνων.

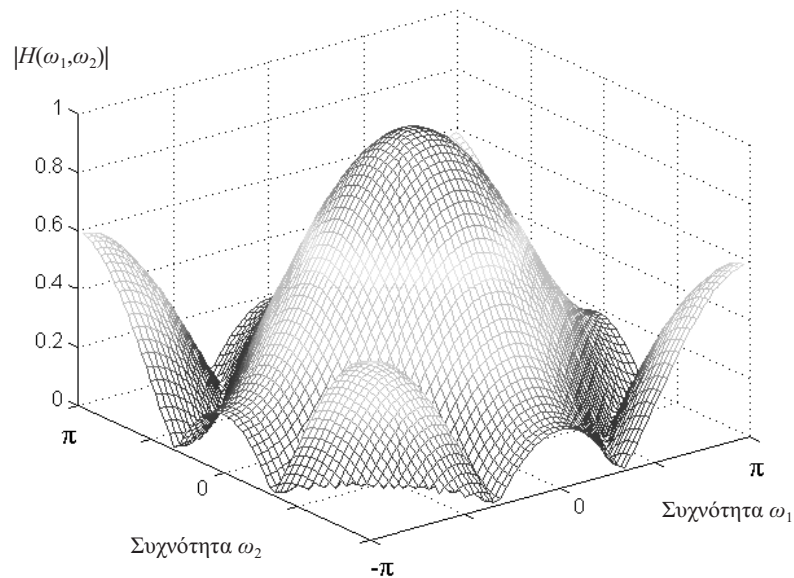
Ένα απλό φίλτρο μέσης τιμής είναι αυτό που περιγράφηκε στο Παράδειγμα 7.5. Σ' αυτό κάθε τιμή του σήματος εξόδου $y(n_1, n_2)$ υπολογίζεται από τρεις τιμές του σήματος εισόδου, αυτές για τις οποίες η κρουστική απόκριση του φίλτρου $h(n_1, n_2)$ είναι μη μηδενική. Ένα άλλο φίλτρο μέσης τιμής είναι αυτό του οποίου η κρουστική απόκριση έχει ως εξής:

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{5} [\delta(n_1, n_2) + \delta(n_1 - 1, n_2) + \delta(n_1 + 1, n_2) + \delta(n_1, n_2 - 1) + \delta(n_1, n_2 + 1)]$$

Κάθε δείγμα του σήματος εξόδου υπολογίζεται από τη μέση τιμή των πέντε δειγμάτων του σήματος εισόδου $x(n_1, n_2)$, $x(n_1 - 1, n_2)$, $x(n_1 + 1, n_2)$, $x(n_1, n_2 - 1)$ και $x(n_1, n_2 + 1)$. Σύμφωνα με την εξίσωση (7.22) το μέτρο της απόκρισης συχνότητας $H(\omega_1, \omega_2)$ έχει ως εξής:

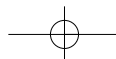
$$\begin{aligned} H(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{5} [e^0 + e^{j\omega_1} + e^{-j\omega_1} + e^{j\omega_2} + e^{-j\omega_2}] = \\ &= \frac{1}{5} [1 + 2\cos\omega_1 + 2\cos\omega_2] \end{aligned} \quad (7.25)$$

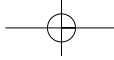
Δεδομένου ότι η τελευταία ποσότητα είναι πραγματική το μέτρο της είναι η απόλυτη τιμή της, η οποία γραφικά έχει όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.16.



Σχήμα 7.16

Η μορφή της συνάρτησης $|H(\omega_1, \omega_2)| = |0,2[1 + 2\cos(\omega_1) + 2\cos(\omega_2)]|$ όπως έχει ληφθεί με το MATLAB.





Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 7.4

Είδαμε στα προηγούμενα ότι είναι δυνατό η απόκριση συχνότητας του δισδιάστατου φίλτρου να είναι πραγματική. Στην περίπτωση αυτή το φίλτρο δεν αλλοιώνει τη φάση των αρμονικών του σήματος (φίλτρο μηδενικής φάσης). Ποιο από τα επόμενα χαρακτηριστικά πρέπει, κατά τη γνώμη σας, να έχει η κρουστική απόκριση του φίλτρου για να είναι αυτό μηδενικής φάσης;

- α. Οι όροι της κρουστικής απόκρισης να είναι όλοι ίσοι.
- β. Η κρουστική απόκριση του φίλτρου να είναι συμμετρική.
- γ. Η κρουστική απόκριση να είναι διαχωρίσιμη.

Σύνοψη ενότητας

Στην ενότητα αυτή είδαμε ότι η κρουστική απόκριση ενός δισδιάστατου ψηφιακού φίλτρου καθορίζει και την απόκρισή του στη συχνότητα. Όταν η κρουστική απόκριση είναι συμμετρική, η απόκριση στη συχνότητα είναι πραγματική και δεν επηρεάζει τη φάση των συνιστωσών του σήματος. Στην περίπτωση αυτή τα φίλτρα καλούνται «φίλτρα μηδενικής φάσης» (zero phase filters).

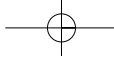
7.4 Σχεδίαση δισδιάστατων ψηφιακών φίλτρων

Η σχεδίαση των δισδιάστατων ψηφιακών φίλτρων είναι δυσκολότερη από αυτή των μονοδιάστατων. Επίσης, η υλοποίησή τους είναι πολύπλοκη γιατί στις περισσότερες περιπτώσεις οι δισδιάστατες συναρτήσεις δεν μπορούν να παραγοντοποιηθούν, έτσι ώστε να οδηγήσουν σε απλοποιημένες δομές.

Στην παρούσα ενότητα θα προσδιορίσουμε αρχικά την κρουστική απόκριση ενός δισδιάστατου ψηφιακού φίλτρου από τις επιθυμητές προδιαγραφές της απόκρισής του $H(\omega_1, \omega_2)$ στις συχνότητες ω_1 και ω_2 . Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε μία από τις μεθόδους σχεδίασης των δισδιάστατων FIR φίλτρων, αυτή των παραθύρων. Θα κλείσουμε την ενότητα με αναφορά σε εφαρμογές των δισδιάστατων ψηφιακών φίλτρων στην επεξεργασία της εικόνας.

7.4.1 Υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης από την απόκριση συχνότητας

Σύμφωνα με τη σχέση (7.22) η απόκριση συχνότητας $H(\omega_1, \omega_2)$ ενός δισδιάστατου ψηφιακού φίλτρου αποτελεί το δισδιάστατο μετασχηματισμό Fourier της κρουστι-



κής του απόκρισης $h(n_1, n_2)$. Με άλλα λόγια, η $h(n_1, n_2)$ είναι ο δισδιάστατος αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $H(\omega_1, \omega_2)$:

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} d\omega_1 d\omega_2 \quad (7.26)$$

Η ολοκλήρωση υλοποιείται σε μία περίοδο της συνάρτησης $H(\omega_1, \omega_2)$ στις κατευθύνσεις ω_1 και ω_2 .

Παράδειγμα 7.6

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου του οποίου η απόκριση συχνότητας $H(\omega_1, \omega_2)$ έχει ως εξής:

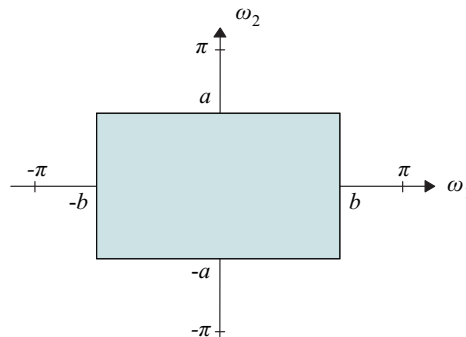
$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & |\omega_1| \leq a < \pi, |\omega_2| \leq b < \pi \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (7.27)$$

Σχήμα 7.17

Απόκριση συχνότητας ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου τετραγωνικής μορφής. Στη σκιασμένη περιοχή η $H(\omega_1, \omega_2)$ είναι 1 και έξω από αυτήν 0. Η απόκριση είναι περιοδική (περίοδος 2π) και επαναλαμβάνεται στο επίπεδο (ω_1, ω_2) προς όλες τις κατευθύνσεις.

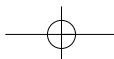
Λύση

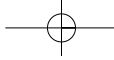
Η απόκριση στη συχνότητα του φίλτρου θα έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 7.17.



Με βάση τη σχέση (7.26) η κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ θα ισούται με:

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{j\omega_1 n_1} d\omega_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{j\omega_2 n_2} d\omega_2 \\ &= \frac{\sin(an_1)}{\pi n_1} \frac{\sin(bn_2)}{\pi n_2} \end{aligned} \quad (7.28)$$





Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$, που υπολογίστηκε, είναι διαχωρίσιμη, δεδομένου ότι μπορεί να γραφεί ως γινόμενο $h_1(n_1)h_2(n_2)$. Η μονοδιάστατη κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι της ίδιας μορφής με αυτή που συναντήσαμε στη σχεδίαση των μονοδιάστατων φίλτρων {σχέση (4.7)} και προκύπτει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που γνωρίσαμε στην Ενότητα 4.3. Η μορφή της απόκρισης συχνότητας $H(\omega_1, \omega_2)$ μπορεί να ποικίλει ανάλογα με τις απαιτήσεις του σχεδιαστή. Όταν θέλουμε το φίλτρο να παρουσιάζει κυκλική συμμετρία, δηλαδή να συμπεριφέρεται προς όλες τις κατευθύνσεις με τον ίδιο τρόπο, τότε η σκιασμένη περιοχή του Σχήματος 7.17 είναι κύκλος και η λύση για την $h(n_1, n_2)$ είναι περισσότερο πολύπλοκη.

7.4.2 Σχεδίαση δισδιάστατων FIR φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων

Τα δισδιάστατα FIR φίλτρα, σε αντίθεση με τα IIR, έχουν πεπερασμένη κρουστική απόκριση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα FIR φίλτρα να είναι πάντα ευσταθή, αφού γι' αυτά ισχύει η σχέση (7.20). Ένα άλλο επίσης σημαντικό πλεονέκτημα των δισδιάστατων FIR φίλτρων είναι ότι μπορούν να σχεδιαστούν ώστε η απόκριση συχνότητάς τους να είναι πραγματική, με αποτέλεσμα να μην προκαλούν μεταβολή στη φάση των διαφόρων συχνοτήτων του σήματος. Για το λόγο αυτό καλούνται «φίλτρα μηδενικής φάσης» και χρειάζεται προς τούτο να έχουν συμμετρική κρουστική απόκριση:

$$h(n_1, n_2) = h(-n_1, -n_2) \quad (7.29)$$

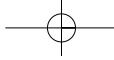
Τις πεπερασμένες αυτές κρουστικές αποκρίσεις τις πετυχαίνουμε αν αποκόψουμε την απεριόριστη σε μήκος δισδιάστατη κρουστική απόκριση που λαμβάνουμε με τον υπολογισμό της σχέσης (7.28). Η αποκοπή της αρχικής κρουστικής απόκρισης $h_D(n_1, n_2)$ που αντιστοιχεί στις ιδανικές ή επιθυμητές προδιαγραφές μπορεί να γίνει αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους της $h_D(n_1, n_2)$, έναν προς έναν, με τους όρους της δισδιάστατης διακριτής συνάρτησης $w(n_1, n_2)$ που καλείται *παράθυρο* και η οποία έχει πεπερασμένο μήκος

$$h(n_1, n_2) = h_D(n_1, n_2) \cdot w(n_1, n_2) \quad (7.30)$$

Η δισδιάστατη διακριτή συνάρτηση $w(n_1, n_2)$ έχει πεπερασμένο μήκος και πρέπει να είναι συμμετρική, σύμφωνα με τη σχέση

$$w(n_1, n_2) = w(-n_1, -n_2), \quad (7.31)$$

για να διατηρηθεί η ιδιότητα της μηδενικής φάσης στο τελικό φίλτρο. Η τελική απόκριση συχνότητας $H(\omega_1, \omega_2)$ προκύπτει από τη δισδιάστατη συνέλιξη στη συχνότη-



τα της αρχικής επιθυμητής απόκρισης $H_D(\omega_1, \omega_2)$ με το φάσμα $W(\omega_1, \omega_2)$ του παραθύρου $w(n_1, n_2)$, παρόμοια με τη μονοδιάστατη περίπτωση (Ενότητα 3/ Κεφάλαιο 4).

Η επιλογή της συνάρτησης του παραθύρου είναι καθοριστική για την τελική μορφή της απόκρισης του δισδιάστατου φίλτρου. Όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, το παράθυρο θα πρέπει να έχει κατάλληλη μορφή για να αποφεύγεται το φαινόμενο Gibbs και ο βαθμός της εξασθένισης στη ζώνη απόρριψης του φίλτρου να είναι ικανοποιητικός. Για το λόγο αυτό δεν χρησιμοποιείται το τετραγωνικό παράθυρο, το οποίο εξάλλου αντιστοιχεί στην απλή αποκοπή της αρχικής κρουστικής απόκρισης $h_D(n_1, n_2)$, και επομένως, συνδέεται άμεσα με τη δημιουργία του φαινομένου Gibbs. Μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν όλες οι συναρτήσεις παραθύρων που υπάρχουν στη βιβλιογραφία, ανάλογα κάθε φορά με τις τελικές απαιτήσεις για το φίλτρο. Ο πιο εύκολος τρόπος για να δημιουργηθεί η δισδιάστατη ψηφιακή συνάρτηση $w(n_1, n_2)$ είναι από το γινόμενο δύο μονοδιάστατων παραθύρων:

$$w(n_1, n_2) = w(n_1) \cdot w(n_2) \quad (7.32)$$

Παράδειγμα 7.7

Να σχεδιαστεί δισδιάστατο FIR φίλτρο με κρουστική απόκριση που να έχει συνολικά 11×11 όρους. Η επιθυμητή απόκριση στη συχνότητα $H_D(\omega_1, \omega_2)$ θα πρέπει να είναι:

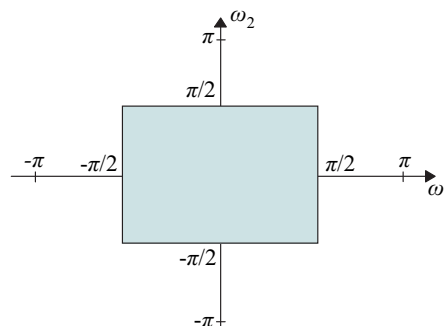
$$H_D(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & |\omega_1| \leq \pi/2, |\omega_2| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (7.33)$$

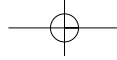
Να γίνει χρήση του μονοδιάστατου παραθύρου του Hamming.

Σχήμα 7.18 Λύση

Απόκριση συχνότητας ιδανικού βαθμπερατού φίλτρου τετραγωνικής μορφής. Στη σκιασμένη περιοχή η $H(\omega_1, \omega_2)$ είναι 1 και έξω από αυτή 0. Η απόκριση είναι περιοδική (περίοδος 2π) και επαναλαμβάνεται στο επίπεδο (ω_1, ω_2) προς όλες τις κατευθύνσεις.

Η επιθυμητή απόκριση του φίλτρου στις συχνότητες ω_1 και ω_2 , η οποία περιγράφεται από τη σχέση (7.33) έχει γραφικά όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.18.





Η ιδανική κρουστική απόκριση θα υπολογιστεί με βάση τη σχέση (7.26) ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της απόκρισης συχνότητας $H_D(\omega_1, \omega_2)$:

$$\begin{aligned}
 h_D(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{+j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2} d\omega_1 d\omega_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{+j\omega_1 n_1} d\omega_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{+j\omega_2 n_2} d\omega_2 \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\sin(\frac{\pi n_1}{2})}{\frac{\pi n_1}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi n_2}{2})}{\frac{\pi n_2}{2}} \quad (7.34)
 \end{aligned}$$

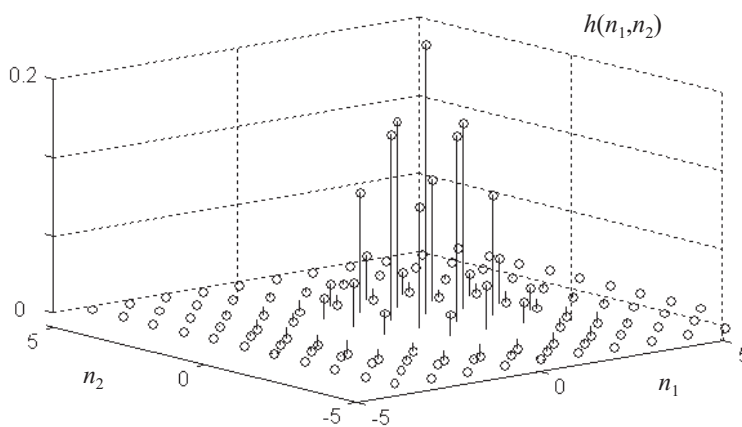
Το μονοδιάστατο παράθυρο Hamming δίνεται από τη σχέση

$$w(n) = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) \quad -N \leq n \leq N \quad (7.35)$$

Για $N = 5$ το μονοδιάστατο παράθυρο $w(n)$ έχει συνολικά 11 όρους. Έτσι, το δισδιάστατο $w(n_1, n_2)$ που θα προκύψει από τη σχέση (7.32), θα έχει συνολικά $11 \times 11 = 121$ όρους. Η τελική κρουστική απόκριση, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.19, υπολογίζεται ως

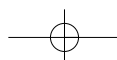
$$h(n_1, n_2) = h_D(n_1, n_2) \cdot w(n_1, n_2)$$

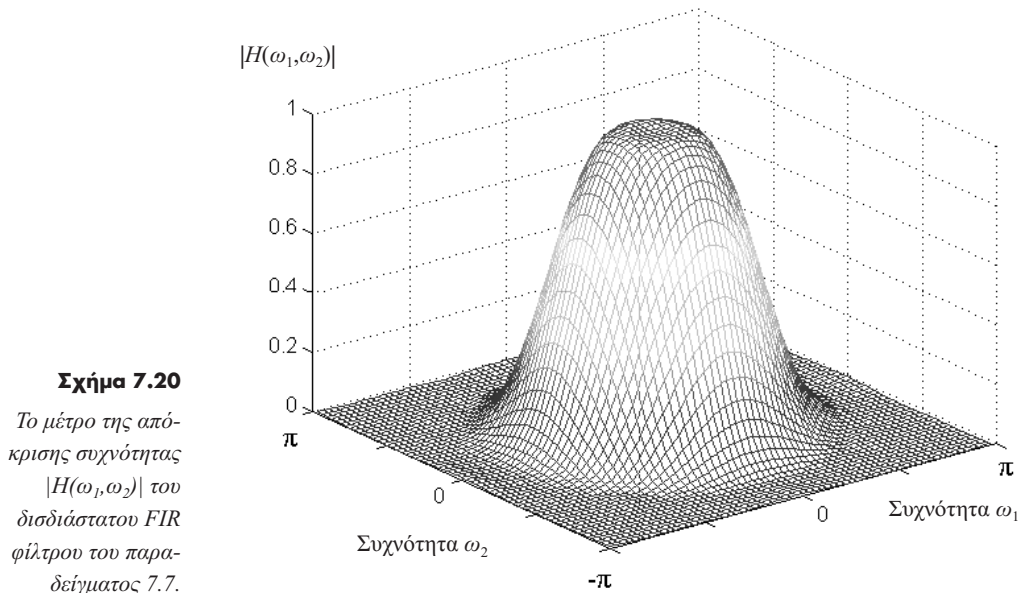
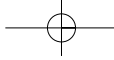
Αφού η κρουστική απόκριση είναι γνωστή, η απόκριση συχνότητας $H(\omega_1, \omega_2)$ του τελικού φίλτρου θα υπολογιστεί όπως ακριβώς στο Παράδειγμα 7.5. Η απόκριση αυτή δίνεται στο Σχήμα 7.20.



Σχήμα 7.19

Η τελική κρουστική απόκριση του δισδιάστατου FIR φίλτρου του Παραδείγματος 7.7, με $11 \times 11 = 121$ όρους.



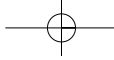
**Σχήμα 7.20**

Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας $|H(\omega_1, \omega_2)|$ του δισδιάστατου FIR φίλτρου του παραδείγματος 7.7.

7.4.3 Άλλες μέθοδοι σχεδίασης των δισδιάστατων FIR φίλτρων

Η μέθοδος σχεδίασης των δισδιάστατων FIR φίλτρων με τα παράθυρα που παρουσιάστηκε προηγούμενα, είναι η απλούστερη διαδικασία σχεδίασης που μπορεί να βρει ο αναγνώστης στη βιβλιογραφία. Με τη μέθοδο αυτή είναι δυνατό να σχεδιαστούν φίλτρα κυκλικά συμμετρικά στις συχνότητες, και όχι μόνο με ορθογώνια $H(\omega_1, \omega_2)$ όπως αυτές που μελετήθηκαν στα Παραδείγματα 7.6 και 7.7. Άλλες μέθοδοι σχεδίασης των FIR φίλτρων είναι οι ακόλουθες:

- *Μέθοδος σχεδίασης βέλτιστων δισδιάστατων FIR φίλτρων.* Η μέθοδος προτάθηκε από τον McClellan και αποδίδει δισδιάστατα FIR φίλτρα με τις καλύτερες προδιαγραφές για την $H(\omega_1, \omega_2)$, όταν το πλήθος των όρων της κρουστικής απόκρισης είναι συγκεκριμένο. Πρόκειται ουσιαστικά, για αλγόριθμο βελτιστοποίησης που αποτελεί τη δισδιάστατη έκδοση της αντίστοιχης μεθόδου για τα μονοδιάστατα FIR φίλτρα. Η μέθοδος απαιτεί υψηλή υπολογιστική ισχύ για φίλτρα μεσαίων προδιαγραφών (λ.χ., για τον προσδιορισμό κρουστικής απόκρισης με $33 \times 33 = 1089$ όρους).
- *Σχεδίαση των δισδιάστατων FIR φίλτρων χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς.* Με τη μέθοδο αυτή, την οποία επίσης πρότεινε ο McClellan, επιτυγχάνεται ο σχεδιασμός δισδιάστατων FIR φίλτρων με απόκριση συχνότητας κυκλικά συμμε-



τρική (κυρίως στις χαμηλές συχνότητες). Τα δισδιάστατα FIR φίλτρα προκύπτουν από κατάλληλο μετασχηματισμό μονοδιάστατων FIR φίλτρων. Αν τα μονοδιάστατα FIR φίλτρα είναι βέλτιστα, τότε και τα δισδιάστατα που προκύπτουν είναι κατά προσέγγιση βέλτιστα.

Ολοκληρώνοντας τη συζήτηση για τη σχεδίαση των δισδιάστατων φίλτρων θα πρέπει να αναφερθούμε για λίγο στα δισδιάστατα IIR φίλτρα. Όπως είναι γνωστό από τα κεφάλαια 4 και 5 τα μονοδιάστατα IIR φίλτρα σε σχέση με τα μονοδιάστατα FIR παρουσιάζουν τα ακόλουθα δύο μειονεκτήματα:

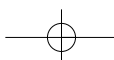
- Δεν είναι πάντα ευσταθή και γι' αυτό το λόγο χρειάζεται προσοχή στην τοποθέτηση των πόλων του φίλτρου.
- Δεν έχουν γραμμική απόκριση φάσης.

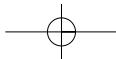
Τα ίδια ακριβώς μειονεκτήματα παρουσιάζουν και τα δισδιάστατα IIR φίλτρα. Επιπρόσθετα, οι δισδιάστατες συναρτήσεις μπορούν να ελεγχθούν ως προς την ευστάθειά τους αρκετά δύσκολα (είναι γενικά δύσκολη η παραγοντοποίηση και ο καθορισμός των πόλων), ενώ η έλλειψη γραμμικής φάσης είναι καταστροφική για την εικόνα, όπως αναφέραμε στην Ενότητα 6.4. Για τους δύο αυτούς λόγους αποφεύγεται η χρησιμοποίηση των δισδιάστατων IIR φίλτρων στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας, παρόλο που μπορούν να πετύχουν την ίδια απόκριση στη συχνότητα με λιγότερους συντελεστές.

7.4.4 Εφαρμογές των δισδιάστατων FIR φίλτρων

Οι εφαρμογές των δισδιάστατων FIR φίλτρων, κυρίως στην επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας, είναι ποικίλες δεδομένης της ιδιότητας των φίλτρων αυτών να μην αλλάζουν τη φασική σχέση των αρμονικών του σήματος. Μεταξύ των εφαρμογών αυτών μπορούμε να αναφέρουμε επιλεκτικά τις ακόλουθες:

- Εξαγωγή του θορύβου Gauss με τη βοήθεια βαθυπερατού FIR φίλτρου (βλ. Σχήμα 7.21).
- Ανίχνευση των ακμών μιας εικόνας (edge detection) με τη βοήθεια υψηπερατού FIR φίλτρου (βλ. Σχήμα 7.22).
- Χρήση των FIR φίλτρων στην αποκατάσταση της εικόνας από συστηματικά σφάλματα (image restoration) και γενικότερα στην περίπτωση επίλυσης αντίστροφων προβλημάτων.
- Χρήση των FIR φίλτρων στη διαδικασία της σύνθεσης τομών αντικειμένου από προβολικές εικόνες (αξονική τομογραφία).





Πρέπει να σημειωθεί ότι τα FIR φίλτρα ως γραμμικά συστήματα έχουν και μειονεκτήματα. Το κυριότερο από αυτά είναι η θόλωση που προκαλεί στις ακμές της εικόνας, όταν προσπαθούμε να εξάγουμε θόρυβο (βλέπε Σχήμα 7.21γ).



α



β



γ

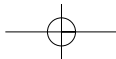
Σχήμα 7.21

α) Η αρχική εικόνα, β) η εικόνα με θόρυβο Gauss. γ) Η μείωση του θορύβου με τη βοήθεια δισδιάστατου FIR φίλτρου προκαλεί ανεπιθύμητη θόλωση των ακμών της εικόνας.



Σχήμα 7.22

Η χρήση υπερπαρατού FIR φίλτρου βοηθά στην απομόνωση και ενίσχυση των ακμών της εικόνας.

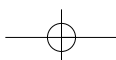
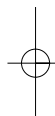


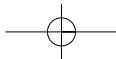
Σύνοψη ενότητας

Στην παράγραφο αυτή αναφερθήκαμε σε τρόπους σχεδίασης των δισδιάστατων FIR φίλτρων. Αναλυτικά, γνωρίσαμε τη μέθοδο σχεδίασης με τη χρήση των παραθύρων. Τα FIR φίλτρα είναι τα γραμμικά φίλτρα που χρησιμοποιούνται περισσότερο. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ιδιότητα που έχουν να μην αλλάζουν τη φασική σχέση των αρμονικών του σήματος (φίλτρα μηδενικής φάσης), αν σχεδιαστούν έτσι ώστε να παρουσιάζουν συμμετρική κρουστική απόκριση.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό γνωρίσαμε τον τρόπο που επιδρούν τα γραμμικά, αμετάβλητα στην ολίσθηση δισδιάστατα ψηφιακά φίλτρα πάνω στα δισδιάστατα σήματα. Στην ουσία οι δύο αυτές ιδιότητες, γραμμικότητα και αμεταβλητότητα στην ολίσθηση, οδηγούν στην πράξη της δισδιάστατης γραμμικής συνέλιξης. Τα φίλτρα αυτά χαρακτηρίζονται από την κρουστική τους απόκριση, που είναι μια δισδιάστατη διακριτή συνάρτηση και καθορίζει την απόκριση του φίλτρου στις χωρικές συχνότητες ω_1 και ω_2 . Τέλος, γνωρίσαμε μία από τις μεθόδους σχεδίασης των δισδιάστατων FIR φίλτρων. Τα FIR φίλτρα είναι κατάλληλα στην επεξεργασία της ψηφιακής εικόνας διότι δεν αλλάζουν τις φασικές σχέσεις των αρμονικών του φάσματος της εικόνας (φίλτρα μηδενικής φάσης), επομένως δεν καταστρέφουν τη μορφή της εικόνας.





Βιβλιογραφία κεφαλαίου

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

Ι. Πήτας, *Ψηφιακή επεξεργασία Εικόνας*, Θεσσαλονίκη 1996.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

K.R. Castleman, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1996

D.E. Dudgeon and R.M. Mersereau, *Multidimensional Digital Signal Processing*, Prentice–Hall, 1984.

A.K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1989.

R. Klette and P. Zamperoni, *Handbook of Image Processing Operators*, John Wiley and Sons, Chichester, 1996.

J.S. Lim, *Two–Dimensional Signal and Image Processing*, Prentice Hall, 1990.

MATLAB, Image Processing Toolbox, MathWorks.

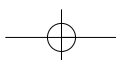
ΟΔΗΓΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗΣ

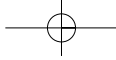
Ι. Πήτας, *Ψηφιακή επεξεργασία Εικόνας*, Θεσσαλονίκη 1996.

Έμφαση μπορεί να δοθεί στα κεφάλαια 3 και 5.

Απόδοση αγγλικών όρων στην ελληνική

Cascade	σε σειρά
Convolution	Συνέλιξη
Edge detection	Ανίχνευση ακμών
Image restoration	Αποκατάσταση της εικόνας
Linear systems	Γραμμικά συστήματα
Separable	Διαχωρίσιμος
Shift–Invariant	Αμετάβλητο στην ολίσθηση
Two–dimensional	Δισδιάστατος
Zero phase response	Απόκριση μηδενικής φάσης





Απαντήσεις Ασκήσεων Αυτοαξιολόγησης

1.1

Γνωρίζοντας, πλέον, το θεώρημα δειγματοληψίας, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε αν θα παρουσιαστεί το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας. Και αν παρουσιαστεί, τότε μπορούμε με βάση τη σχέση $F_0 = F_k - kF_s$, να υπολογίσουμε τη συχνότητα στην οποία αντιστοιχούν τα δείγματα που πήραμε. Έτσι, η συχνότητα του αναλογικού σήματος είναι $F = 100$ Hz. Για να αντιπροσωπευθεί σωστά το σήμα αυτό στον ψηφιακό χώρο πρέπει να λάβουμε δείγματά του με συχνότητα τουλάχιστον $2F = 2 \cdot 100 = 200$ Hz. Άρα, και στις δύο περιπτώσεις δε θα αποφύγουμε το φαινόμενο της χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας (φαινόμενο φασματικής επικάλυψης).

- (α) Για $F_s = 75$ Hz τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν στη δειγματοληψία του ημιτονοειδούς της βασικής περιοχής συχνοτήτων ($-F_s/2 \leq F_0 \leq F_s/2$) με συχνότητα ίση προς $F_o = F_k - kF_s = 100 - 1 \cdot 75 = 25$ Hz.
- (β) Για $F_s = 150$ Hz τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν στη δειγματοληψία του ημιτονοειδούς της βασικής περιοχής συχνοτήτων ($-F_s/2 \leq F_0 \leq F_s/2$) με συχνότητα ίση προς $F_o = F_k - kF_s = 100 - 1 \cdot 150 = -50$ Hz.

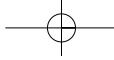
Αυτή ήταν μία εύκολη άσκηση. Αν τα καταφέρατε, σημαίνει πως έχετε κατανοήσει το φαινόμενο της χαμηλού (ανεπαρκούς) ρυθμού δειγματοληψίας. Συνεχίστε στις επόμενες ασκήσεις. Αν όχι, τότε επαναλάβετε τα Παραδείγματα 1.3 και 1.4 και ξαναπροσπαθήστε. Χρειάζεται κάποιος χρόνος μέχρι να εξοικειωθείτε με τις ιδιαιτερότητες των σημάτων που προέρχονται από δειγματοληψία.

1.2

Υπάρχουν δύο τρόποι για να λύνουμε αυτού του είδους τις ασκήσεις, δηλαδή τις ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να δώσουμε τα σήματα διακριτού χρόνου και όχι μόνο τις συχνότητές τους.

Ο πρώτος είναι αυτός κατά τον οποίο, ξεκινώντας από τον ορισμό της δειγματοληψίας, αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με nT , και εκτελούμε τις όποιες τριγωνομετρικές πράξεις.

Ο δεύτερος είναι εκείνος κατά τον οποίο υπολογίζουμε πρώτα τις συχνότητες που θα προκύψουν από τη δειγματοληψία (όπως κάναμε και στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.1), και μετά προσδιορίζουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για τα σήματα διακριτού χρόνου. Όποιον από τους τρόπους και αν επιλέξετε, θα πρέπει να βρείτε το ίδιο



αποτέλεσμα, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση είναι $x_1(n) = x_2(n) = x_3(n) = \cos(0,6\pi n)$. Ας τα πάρουμε όμως από την αρχή.

Η περίοδος δειγματοληψίας ισούται με $T = 1/F_s = 1/100 \text{ Hz} = 0,01 \text{ sec}$. Άρα, οι ακολουθίες που θα προκύψουν θα είναι οι εξής:

$$x_1(n) = \cos(60\pi n T) = \cos(0,6\pi n)$$

$$x_2(n) = \cos(140\pi n T) = \cos(1,4\pi n) = \cos[(2\pi - 0,6\pi)n] = \cos(0,6\pi n)$$

$$x_3(n) = \cos(260\pi n T) = \cos(2,6\pi n) = \cos[(2\pi + 0,6\pi)n] = \cos(0,6\pi n)$$

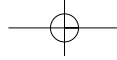
Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι η δειγματοληψία των τριών αναλογικών σημάτων, διαφορετικής συχνότητας το καθένα, οδήγησε τελικά στο ίδιο σήμα διακριτού χρόνου $\cos(0,6\pi n)$.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν εφαρμόσουμε την σχέση $F_0 = F_k - kF_s$ για καθεμιά από τις συχνότητες. Δηλαδή, η συχνότητα του σήματος $x_1(t)$ είναι $F_1 = 30 \text{ Hz}$ και, κατά συνέπεια, δε θα παρουσιαστεί το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας, αφού $F_1 < F_s/2 = 50 \text{ Hz}$. Άρα, $x_1(n) = \cos[2\pi(F_1/F_s)n] = \cos[2\pi(30/100)n] = \cos(0,6\pi n)$. Η συχνότητα του σήματος $x_2(t)$ είναι $F_2 = F_k = 70 \text{ Hz}$ και τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν στη δειγματοληψία ενός ημιτονοειδούς συχνότητας $F_0 = F_k - kF_s = 70 - 100 = -30 \text{ Hz}$. Άρα $x_2(n) = \cos[2\pi(F_2/F_s)n] = \cos[2\pi(-30/100)n] = \cos(-0,6\pi n) = \cos(0,6\pi n)$. Τέλος, η συχνότητα του σήματος $x_3(t)$ είναι $F_3 = 130 \text{ Hz}$ και τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν στη δειγματοληψία ενός ημιτονοειδούς συχνότητας $F_0 = F_k - kF_s = 130 - 100 = 30 \text{ Hz}$. Άρα $x_3(n) = x_1(n)$. Συνεπώς, και τα τρία αναλογικά $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ σήματα αντιπροσωπεύονται από τα ίδια δείγματα μετά τη δειγματοληψία τους με ρυθμό 100 Hz .

Αν και εσείς καταλήξατε στο ίδιο αποτέλεσμα, τότε προχωράτε πολύ καλά. Συνεχίστε με την επόμενη άσκηση αυτοαξιολόγησης. Αν δεν τα καταφέρατε, μελετήστε και πάλι τα Παραδείγματα 1.3 και 1.4 και ξαναπροσπαθήστε.

1.3

Στην άσκηση αυτή θα πρέπει να προσέξετε το γινόμενο του ημιτόνου με το συνημίτονο. Αυτό είναι το συνηθισμένο λάθος που γίνεται στην περίπτωση αυτή. Παρατηρήστε ότι σ' όλες τις προηγούμενες ασκήσεις είχαμε μόνο αθροίσματα (ή διαφορές) ημιτονοειδών, και εξετάζοντας κάθε όρο του αθροίσματος χωριστά, μπορούσαμε να προσδιορίσουμε τη συχνότητα του κάθε ημιτονοειδούς. Για να εκφράσουμε το γινόμενο της άσκησης αυτής ως άθροισμα ημιτονοειδών, θα χρησιμοποιήσουμε την



σχέση $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$. Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(\pi t) + 4\sin(3\pi t)\cos(2\pi t) = \sin(\pi t) + 2[\sin(3\pi t + 2\pi t) + \sin(3\pi t - 2\pi t)] = \\ &= \sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t) + 2\sin(\pi t) = 3\sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t) = 3\sin(2\pi \frac{1}{2}t) + \\ &= 2\sin(2\pi \frac{5}{2}t) \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι το αναλογικό σήμα $x(t)$ αποτελείται από δύο συχνότητες,

$$\text{την } F_1 = \frac{1}{2} \text{ kHz και την } F_2 = \frac{5}{2} \text{ kHz.}$$

Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για την F_1 είναι $2F_1 = 2(1/2) = 1$ kHz, ενώ για την F_2 είναι $2F_2 = 2(5/2) = 5$ kHz. Συνεπώς, λαμβάνοντας δείγματα του σήματος με ρυθμό 3 kHz, για την F_1 δε θα υπάρξει πρόβλημα και τα δείγματα που θα πάρουμε θα αντιστοιχούν σ' αυτή. Για το ημιτονοειδές όμως με συχνότητα F_2 , θα παρουσιαστεί πρόβλημα, εξαιτίας της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας, αφού για να το αναπαραστήσουμε σωστά θα έπρεπε να λαμβάνουμε δείγματα με συχνότητα τουλάχιστον 5 kHz. Έτσι, τα δείγματα που θα προκύψουν θα αντιστοιχούν σ' ένα ημιτονοειδές συχνότητας

$$F_0 = F_k - kF_s = \frac{5}{2} - k3 = -\frac{1}{2} \text{ kHz, όπου } F_k = F_2 = \frac{5}{2} \text{ kHz και } k = 1,$$

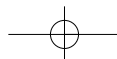
αφού η τιμή F_0 που προέκυψε ανήκει στο διάστημα $[-F_s/2, F_s/2]$. Τελικά, ως συμπέρασμα προκύπτει ότι τα δείγματα που θα πάρουμε από τη δειγματοληψία του $x(t)$,

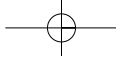
θα αντιστοιχούν σ' ένα και μόνο ημιτονοειδές συχνότητας $\frac{1}{2}$ kHz.

Επισημαίνεται ότι στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε καταλήξει αν εργαζόμασταν μόνο με τη σχέση $x(t) = 3\sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t)$, και αντικαθιστούσαμε $t = nT$, όπου $T = 1/F_s = 1/3$ msec. Επαληθεύστε το.

1.4

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακολουθία $p(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά δύο βηματικών ακολουθιών, από τις οποίες η μία είναι ολισθημένη ως προς την άλλη κατά 4 μονάδες (δείγματα). Έχουμε, δηλαδή, $p(n) = u(n) - u(n-4)$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.30. Αν πάλι δεν το σκεφτήκατε έτσι και κάνατε χρήση της μοναδιαίας κρουστικής $\delta(n)$, τότε θα καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, αλλά λίγο πιο επίπονα. Παρατηρείτε, δηλαδή, ότι $p(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$. Αλλά, με βάση τη σχέση (1.33) έχουμε





$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\delta(n-1) = u(n-1) - u(n-2)$$

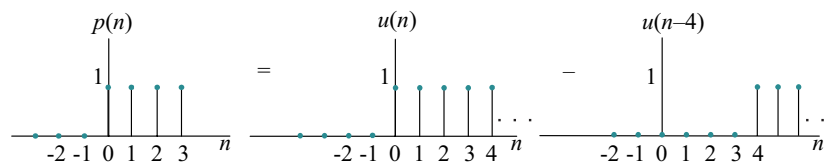
$$\delta(n-2) = u(n-2) - u(n-3)$$

$$\delta(n-3) = u(n-3) - u(n-4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα $p(n) = u(n) - u(n-4)$.

Σχήμα 1.30

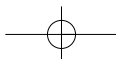
Παλμός διακριτού χρόνου ως διαφορά βηματικών ακολουθιών

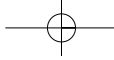


Η απάντηση αυτή είναι εύκολη για εκείνον που έχει κατανοήσει την έννοια της ολίσθησης σημάτων προς τα αριστερά (προήγηση) ή τα δεξιά (καθυστέρηση). Αν δεν τα καταφέρατε μην απογοητευτείτε. Είναι έννοιες που φαίνονται εύκολες, αλλά συχνά προκαλούν σύγχυση. Πιθανόν να μπερδευτείτε όταν σας ζητηθεί να σχεδιάσετε μία ακολουθία σαν την $u(n-4)$. Βλέποντας το μείον (-) μπροστά από το 4, συνήθως νομίζουμε ότι το σήμα βρίσκεται στα αρνητικά. Προσοχή σ' αυτό! Χρειάζεται εξοικείωση με τις έννοιες αυτές και να τις κατανοήσουμε. Το σημείο-κλειδί είναι εκεί όπου μηδενίζεται η παράσταση στην παρένθεση. Στην προκειμένη περίπτωση αυτό συμβαίνει για $n-4=0$, δηλαδή για $n=4$. Συνεπώς, η ακολουθία (το σήμα) αρχίζει από το σημείο $n=4$. Και αφού το n είναι θετικό, το σήμα θα συνεχίζει προς μεγαλύτερες τιμές, δηλαδή προς τα δεξιά. Ένα τέτοιο σήμα λέμε ότι έχει υποστεί καθυστέρηση κατά 4 μονάδες χρόνου. Το αν ένα σήμα έχει υποστεί καθυστέρηση (delay) ή προήγηση (advance) εξαρτάται από το αν αυτό βρίσκεται μετά ή πριν από το 0 (μηδέν). Ας μην ξεχνάμε ότι η μεταβλητή n συνήθως αναφέρεται στο χρόνο. Έτσι, λαμβάνοντας ως αναφορά τη χρονική στιγμή $n=0$, ό,τι συμβαίνει μετά το $n=0$ σημαίνει ότι είναι χρονικά καθυστερημένο, ενώ ό,τι συμβαίνει πριν το $n=0$ σημαίνει ότι χρονικά προηγείται.

1.5

Σ' όλες αυτές τις περιπτώσεις, βασιζόμαστε στους αντίστοιχους ορισμούς. Αν και φαίνονται τόσο εύκολοι και κατανοητοί όταν τους διαβάζουμε, εντούτοις η εφαρμογή τους μπορεί πολλές φορές να μας φέρνει κάποιες δυσκολίες. Ας εφαρμόσουμε τον ορισμό της γραμμικότητας για την άσκηση αυτή.





Για είσοδο $x_1(n)$, η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_1(n) = 3x_1(n) + 3$. Για είσοδο $x_2(n)$, η έξοδος του συστήματος θα είναι $y_2(n) = 3x_2(n) + 3$. Τέλος, για είσοδο $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, η έξοδος θα ισούται με $y_3(n) = 3x_3(n) + 3 = 3[ax_1(n) + bx_2(n)] + 3 = 3ax_1(n) + 3bx_2(n) + 3 = 3ax_1(n) + 3bx_2(n) + 3 + 3a - 3a + 3b - 3b = a[3x_1(n) + 3] + b[3x_2(n) + 3] + 3(1-a-b) = ay_1(n) + by_2(n) + 3(1-a-b) \neq ay_1(n) + by_2(n)$. Άρα, το σύστημα είναι μη γραμμικό.

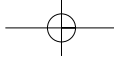
Αν καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, τότε σας αξίζουν συγχαρητήρια. Ήταν σχετικά δύσκολη η απόδειξη, αφού έπρεπε να δημιουργήσουμε τα $y_1(n)$, $y_2(n)$ στην τελική έκφραση προσθαφαιρώντας κατάλληλους όρους. Αν δεν τα καταφέρατε, μελετήστε και πάλι την έννοια της γραμμικότητας στην ενότητα 1.4 και ξαναπροσπαθήστε.

1.6

Αφού το σύστημα $y(n) = nx(n)$ έχει ένα συντελεστή χρονικά μεταβαλλόμενο, περιμένουμε αυτό να μην είναι χρονικά αμετάβλητο. Πράγματι, αν εφαρμόσουμε στην είσοδο την καθυστερημένη κατά n_0 ακολουθία $x(n-n_0)$, η έξοδος θα είναι $y_d(n) = n x(n-n_0)$. Από την άλλη πλευρά, αν καθυστερήσουμε την έξοδο $y(n)$ κατά n_0 , αντικαθιστώντας όπου n το $n-n_0$, τότε η έξοδος θα είναι $y(n-n_0) = (n-n_0)x(n-n_0) \neq y_d(n)$. Συνεπώς το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σύστημα $y(n) = x(2n)$, γιατί στην ουσία πρόκειται για ένα σύστημα υποδειγματοληψίας. Η έξοδος ενός τέτοιου συστήματος «κράταει» τα άρτια μόνο δείγματα της ακολουθίας εισόδου. Αν λοιπόν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0 δείγματα, δηλαδή αν εφαρμόσουμε στο σύστημα την $x(n-n_0)$, τότε η έξοδος θα είναι $y_d(n) = x(2n-n_0)$. Αν τώρα καθυστερήσουμε την έξοδο κατά n_0 μονάδες, γεγονός που εκφράζεται μαθηματικά με αντικατάσταση του n με το $n-n_0$, τότε η έξοδος θα ισούται με $y(n-n_0) = x\{2(n-n_0)\} = x(2n-2n_0) \neq x(2n-n_0) = y_d(n)$. Γίνεται φανερό, επομένως, ότι ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητό με το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω ότι η ακολουθία εισόδου είναι $\{x(n)\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots\}$. Τότε η ακολουθία εξόδου θα ισούται με $\{y(n)\} = \{x(2n)\} = \{x_0, x_2, x_4, x_6, \dots\}$. Καθυστερούμε την είσοδο κατά μία μονάδα ($n_0 = 1$), δηλαδή κατά ένα δείγμα, οπότε αυτή γίνεται $\{x(n-1)\} = \{0, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots\}$. Η ακολουθία εξόδου θα είναι τώρα ίση με $\{y(n)\} = \{x(2n-1)\} = \{0, x_1, x_3, x_5, \dots\}$. Παρατηρούμε, επομένως, ότι αυτή δεν ισούται με την προηγούμενη ακολουθία εξόδου η οποία έχει υποστεί καθυστέρηση κατά μία μονάδα, αλλά πρόκειται για μία εντελώς διαφορετική ακολουθία, επιβεβαιώνοντας έτσι ότι το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

Αν απαντήσατε σωστά, τότε σας αξίζουν πραγματικά συγχαρητήρια. Αν πάλι δεν



καταφέρατε να απαντήσετε σωστά, μην απογοητευτείτε. Γίνεται φανερό, για μια ακόμη φορά, ότι φαινομενικά πρόκειται για απλές έννοιες, οι οποίες όμως παρουσιάζουν αρκετή δυσκολία στην κατανόησή τους, όπως και στην κατανόηση της διαδικασίας απόδειξής τους. Δείτε ξανά τον ορισμό της χρονικής αμεταβλητότητας ενός συστήματος και επαναλάβετε την προσπάθειά σας.

1.7

Αυτή την άσκηση μπορούμε εύκολα να τη λύσουμε, αφού έχουμε ήδη αντιμετωπίσει την πιο δύσκολη περίπτωση του Παραδείγματος 1.8. Ας δούμε τη διαδικασία και πάλι, υπολογίζοντας τη συνέλιξη $y(n) = h(n)*x(n)$. Μας δίνεται ότι $h(n) = a^n u(n)$ και $x(n) = Au(n)$. Άρα

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u(m) Au(n-m) = \sum_{m=0}^n a^m A = A \sum_{m=0}^n a^m$$

ή

$$y(n) = A \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right) = \frac{A}{1-a} + \frac{Aa}{a-1} a^n = C_0 + C_1 a^n$$

όπου $n \geq 0$ και C_0, C_1 , σταθερές εξαρτώμενες από το πλάτος της εισόδου A και την παράμετρο a της μοναδιαίας κρουστικής. Για να εξοικειωθείτε με αυτού του είδους τις ασκήσεις, επαναλάβετε τους υπολογισμούς για την περίπτωση $y(n) = x(n)*h(n)$.

1.8

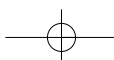
Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι για να λύσετε την άσκηση αυτή. Ο ένας είναι ο γνωστός τρόπος, που χρησιμοποιήσαμε στο Παράδειγμα 1.8 και στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.7, κατά τον οποίο υπολογίζουμε τη ζητούμενη συνέλιξη με βάση τους ορισμούς (1.39) ή (1.40), όπου $h(n) = (a^n + b^n)u(n)$ και $x(n) = Au(n)$. Ένας δεύτερος τρόπος είναι εκείνος κατά τον οποίο, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα της συνέλιξης και αξιοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης αυτοαξιολόγησης 1.7, έχουμε:

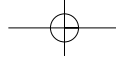
$$h(n) = (a^n + b^n)u(n) = a^n u(n) + b^n u(n) = h_1(n) + h_2(n). \text{ Επομένως}$$

$$y(n) = h(n)*x(n) = [h_1(n) + h_2(n)]*x(n) = h_1(n)*x(n) + h_2(n)*x(n).$$

Το αποτέλεσμα $h_1(n)*x(n)$ μας είναι ήδη γνωστό από την άσκηση αυτοαξιολόγησης

1.7 και ισούται με $\frac{A}{1-a} + \frac{Aa}{a-1} a^n = C_0 + C_1 a^n$. Κατ' αναλογία, το αποτέλεσμα της





συνέλιξης $h_2(n)*x(n)$ θα ισούται με $\frac{A}{1-b} + \frac{Ab}{b-1} b^n = C_2 + C_3 b^n$.

Συνεπώς, η έξοδος του συστήματος θα είναι: $y(n) = C_0 + C_1 a^n + C_2 + C_3 b^n$.

Αν υπολογίσατε το σωστό αποτέλεσμα με κάποιον από αυτούς τους τρόπους, τότε σας αξίζουν συγχαρητήρια. Αν δεν τα καταφέρατε, μελετήστε και πάλι το Παράδειγμα 1.8 και την Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.7 και ξαναπροσπαθήστε. Είναι θέμα χρόνου το να εξοικειωθείτε με τις ασκήσεις αυτού του είδους.

1.9

Είναι φανερό ότι θα πρέπει να αξιοποιήσουμε τις ιδιότητες της συνέλιξης, που γνωρίσαμε στην ενότητα 1.4, για να υπολογίσουμε την συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος. Από το Σχήμα 1.29 βλέπουμε ότι $h(n) = h_1(n) + h_2(n)*[h_3(n) + h_4(n)] = h_1(n) + h_2(n)*h_3(n) + h_2(n)*h_4(n)$. Αλλά

$$h_2(n)*h_3(n) = \left[\frac{1}{2} \delta(n) - \frac{1}{4} \delta(n-1) \right] * 2\delta(n) = \frac{1}{2} \delta(n) * 2\delta(n) - \frac{1}{4} \delta(n-1) * 2\delta(n)$$

$$= \delta(n) - \frac{1}{2} \delta(n-1)$$

$$h_2(n)*h_4(n) = \left[\frac{1}{2} \delta(n) - \frac{1}{4} \delta(n-1) \right] * \left[-2 \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \delta(n) * \left[-2 \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) \right] - \frac{1}{4} \delta(n-1) * \left[-2 \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) \right]$$

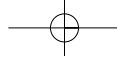
$$= - \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1) = - \left(\frac{1}{2} \right)^n [u(n) - u(n-1)]$$

$$= - \left(\frac{1}{2} \right)^n \delta(n) = -\delta(n).$$

$$\text{Άρα, } h(n) = \left[\delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1) \right] + \left[\delta(n) - \frac{1}{2} \delta(n-1) \right] + [-\delta(n)] = \delta(n)$$

Η δυσκολία σ' αυτή την άσκηση δε βρίσκεται στη χρήση των ιδιοτήτων της συνέλιξης, αλλά στον υπολογισμό της συνέλιξης ενός σήματος με την κρουστική ακολουθία. Από τον ορισμό της συνέλιξης (σχέση 1.37), μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $\delta(n)*g(n) = g(n)$, $\delta(n-m)*g(n) = g(n-m)$. Αυτό άλλωστε το είδαμε και στο Σχήμα 1.22.

Έχοντας όλα αυτά κατά νου, προσπαθήστε να λύσετε την άσκηση χρησιμοποιώντας όμως την πρώτη ισότητα για την $h(n)$, δηλαδή $h(n) = h_1(n) + h_2(n)*[h_3(n) + h_4(n)]$.



2.1

Η άσκηση αυτή είναι εύκολο να λυθεί, αν θυμηθούμε ότι $\delta(n-M) = 1$ μόνο για $n = M$, και εργαστούμε όπως στο Παράδειγμα 2.2. Έτσι, από τον ορισμό (2.1) έχουμε:

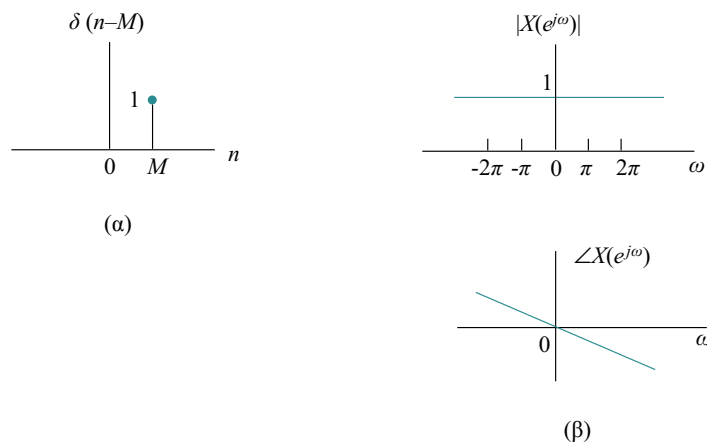
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-M)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega M}$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο της συνάρτησης που υπολογίσαμε είναι και πάλι ίσο με 1,

$$\text{αφού } |X(e^{j\omega})| = |e^{-j\omega M}| = |\cos(\omega M) - j\sin(\omega M)| = \sqrt{\cos^2(\omega M) + \sin^2(\omega M)},$$

ενώ η φάση είναι ανάλογη της συχνότητας, δηλαδή $\angle X(e^{j\omega}) = -\omega M$.

Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις δίνονται στο Σχήμα 2.15.



Σχήμα 2.15

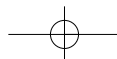
(α) Η ακολουθία $\delta(n-M)$ και (β) το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier αυτής.

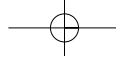
Αν καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, μπράβο σας. Αν όχι, ξαναπροσπαθήστε. Δύο είναι τα σημεία τα οποία πιθανόν δεν έχετε κατανοήσει: (α) τη μοναδιαία κρουστική $\delta(n-M)$ η οποία είναι παντού ίση με μηδέν, εκτός του σημείου $n = M$, όπου έχει την τιμή 1 (Βλ. ενότητα 1.3), και (β) τους ορισμούς τους σχετικούς με τους μιγαδικούς αριθμούς. Οι ορισμοί (2.3) έως (2.6) θα σας βοηθήσουν σ' αυτό. Δείτε τους και προσπαθήστε και πάλι να λύσετε μόνοι σας την άσκηση.

2.2

Θυμηθείτε ότι με βάση τη σχέση 1.34 ο παλμός $x(n)$ γράφεται:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = 1 \cdot [\delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)].$$

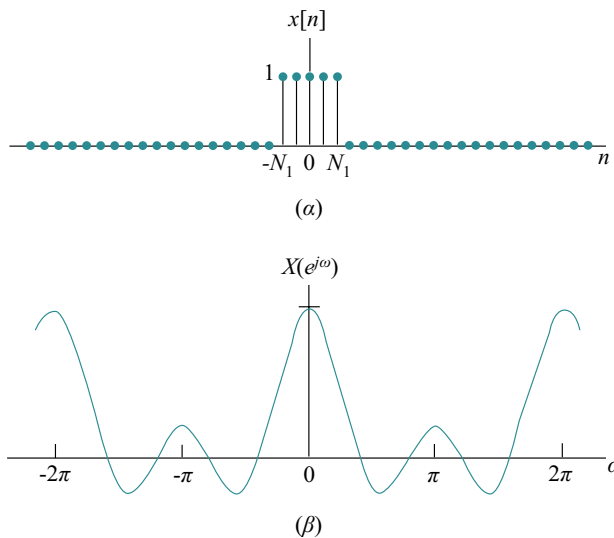




Επομένως, από τον ορισμό (2.1) του DTFT έχουμε:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 \cdot [\delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)]e^{-j\omega n} = \\ &= 1 \cdot [e^{j\omega 2} + e^{j\omega} + e^{j\omega 0} + e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2}] = 1 \cdot [1 + (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})] = \\ &= 1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) \end{aligned}$$

Οι γραφικές παραστάσεις του παλμού $x(n)$ για $N_1 = 2$ και του DTFT αυτού φαίνονται στο Σχήμα 2.16.



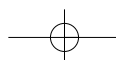
Σχήμα 2.16

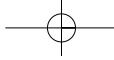
(α) Η ακολουθία $x(n)$ της άσκησης αυτοαξιολόγησης 2.2 για $N_1 = 2$ και (β) ο DTFT αυτής.

Θα μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε τον υπολογισμό του αθροίσματος γενικότερα, ως γεωμετρική πρόοδο, δηλαδή:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-2}^2 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^4 e^{-j\omega(m-2)} = e^{j\omega 2} \sum_{m=0}^4 (e^{-j\omega})^m = \\ &< \text{όπου } m = n + 2 \Rightarrow n = m - 2 > \\ &= e^{j\omega 2} \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{j\omega 2} \frac{e^{-j\omega 5/2} (e^{j\omega 5/2} - e^{-j\omega 5/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \\ &= e^{j\omega 2} e^{j\omega/2} e^{-j\omega 5/2} \frac{2j \sin(\omega 5 / 2)}{2j \sin(\omega / 2)} = \frac{\sin(5\omega / 2)}{\sin(\omega / 2)} \end{aligned}$$

Η τελευταία συνάρτηση αποτελεί ουσιαστικά τη διακριτού χρόνου περίπτωση της





συνάρτησης sinc, η οποία εμφανίζεται κατά το μετασχηματισμό Fourier του τετραγωνικού παλμού συνεχούς χρόνου. Η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο αυτών συναρτήσεων, βρίσκεται στο ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο 2π , (γεγονός που οφείλεται στη δειγματοληψία), ενώ η συνάρτηση sinc είναι μη περιοδική.

Αν καταλήξατε στη σωστή έκφραση, σας αξίζουν συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει τον ορισμό του DTFT και το χειρισμό των μιγαδικών αριθμών της μορφής $e^{j\omega}$. Αν πάλι δεν τα καταφέρατε, μην απογοητευθείτε. Επαναλάβετε την άσκηση αυτοαξιολόγησης 2.1, (αφού ίσως μελετήσετε και πάλι την ενότητα 1.3 του Κεφαλαίου 1) και ξαναπροσπαθήστε.

Τώρα που εξοικειωθήκατε με αυτού του είδους τις πράξεις, επαναλάβετε τη διαδικασία υπολογισμού του DTFT του παλμού του Σχήματος 2.16 για τη γενική περίπτωση που αυτός εκτείνεται από $-N_1$ ως N_1 . Εύκολα θα καταλήξετε στη σχέση $X(e^{j\omega}) = \sin[\omega(N_1 + 1/2)]/\sin(\omega/2)$.

2.3

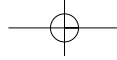
Ο υπολογισμός του DTFT της $g(n)$ γίνεται πολύ εύκολα εάν βασιστούμε στις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης στο χρόνο του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Έτσι έχουμε:

- $x(n) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ εξ ορισμού.
- $x(n-1) \xrightarrow{F} e^{-j\omega} X(e^{j\omega})$ λόγω της ιδιότητας της ολίσθησης στο χρόνο κατά $n_0 = 1$ (βλ. Πίνακα 2.2)
- $x(n) - x(n-1) \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$ λόγω των δύο προηγούμενων σχέσεων και της ιδιότητας της γραμμικότητας.

Αν απαντήσατε σωστά, τότε συγχαρητήρια. Τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης στο χρόνο θα τις συναντούμε πολύ συχνά. Αν δεν καταφέρατε να προχωρήσετε στη λύση της άσκησης, τότε χρειάζεται να επαναλάβετε τη μελέτη των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και της ολίσθησης της υποενότητας 2.1.2. Ολοκληρώστε την επανάληψη και προσπαθήστε πάλι να λύσετε αυτή την άσκηση. Τη φορά αυτή θα τα καταφέρετε εύκολα.

2.4

Η λύση αυτή δεν είναι και από τις πλέον εύκολες. Θα πρέπει να σκεφτούμε ότι, αφού η σχέση του DTFT είναι ένα άθροισμα εκθετικών όρων, θα ήταν χρήσιμο να εκφράσουμε την τριγωνομετρική συνάρτηση cos σε εκθετική μορφή, δηλαδή, $\cos\theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$. Έτσι, έχουμε:



$$\begin{aligned}
 x(n) &= Aa^n \cos(\omega_0 n + \varphi) u(n) = Aa^n \frac{e^{j(\omega_0 n + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} u(n) \\
 &= \frac{A}{2} a^n (e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi} + e^{-j\omega_0 n} e^{-j\varphi}) u(n) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} (ae^{j\omega_0})^n u(n) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} (ae^{-j\omega_0})^n u(n)
 \end{aligned}$$

Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας, καθώς και του αποτελέσματος του Παραδείγματος 2.1, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= F\{x(n)\} = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \frac{1}{1 - ae^{j\omega_0} e^{-j\omega}} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0} e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \frac{1}{1 - ae^{j(\omega - \omega_0)}} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \frac{1}{1 - ae^{-j(\omega + \omega_0)}}
 \end{aligned}$$

Όπως ήδη αναφέραμε στην αρχή της άσκησης αυτής, η λύση της δεν είναι εύκολη. Κατά συνέπεια, μην απογοητευτείτε αν δεν τα καταφέρατε. Προσπαθήστε να την κατανοήσετε και επαναλάβετε την επίλυσή της μόνοι σας πλέον. Αν πάλι είχατε από την αρχή καταφέρει να την λύσετε, τότε σας αξίζουν συγχαρητήρια. Συνεχίστε έτσι.

2.5

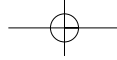
Εάν $x_1(n) \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$ και $x_2(n) \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$, τότε θέλουμε να δείξουμε ότι

$$x_1(n)x_2(n) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta. \text{ Έχουμε λοιπόν:}$$

$$\begin{aligned}
 F\{x_1(n)x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right] x_2(n) e^{-j\omega n} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) e^{-j(\omega - \theta)n} \right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta
 \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της σχέσης αντιπροσωπεύει τη συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier $X_1(e^{j\omega})$ και $X_2(e^{j\omega})$. Αυτή η σχέση αποτελεί τη διττή έκφραση της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου. Με άλλα λόγια, ο πολλαπλασιασμός δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με τη συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier αυτών. Και αντίθετα, η συνέλιξη δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου, ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό των μετασχηματισμών Fourier αυτών.

Από τη λύση αυτή θα διαπιστώσατε, για μια ακόμη φορά, ότι η απόδειξη των ιδιο-



τήτων είναι συνήθως δύσκολη. Γι' αυτό μην απογοητευθείτε αν δεν τα καταφέρατε. Μελετήστε ξανά τους ορισμούς και τις ιδιότητες της παρούσας υποενότητας και επιχειρήστε και πάλι να λύσετε την άσκηση μόνοι σας. Αν όμως είχατε καταφέρει από την πρώτη στιγμή να δώσετε τη σωστή απάντηση, τότε μπράβο σας. Δεν πρόκειται να αντιμετωπίσετε καμιά δυσκολία σε οποιαδήποτε από τις επόμενες αποδείξεις ιδιοτήτων.

2.6

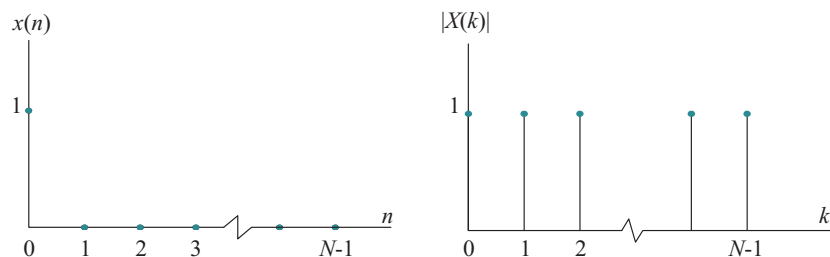
Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $x(n) = \delta(n)$. Αντικαθιστούμε στη σχέση (2.21) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n)W_N^{nk} = \delta(0)W_N^{0k} + \delta(1)W_N^{1k} + \dots + \delta(N-1)W_N^{(N-1)k} = \\ &= 1 \cdot 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1 \end{aligned}$$

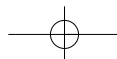
Άρα $X(k) = 1$ όπου $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Δηλαδή, όπως δείχνεται και στο Σχήμα 2.17, η μοναδιαία κρουστική δίνει συχνότητες για όλες τις τιμές του k . Με άλλα λόγια, η μοναδιαία κρουστική καλύπτει όλο το φάσμα των συχνοτήτων! Το φάσμα αυτό ονομάζεται *λευκό* (white), σε παραλληλισμό με το λευκό φως, το οποίο είναι αποτέλεσμα της σύνθεσης όλων των χρωμάτων της ίριδας σε ίσες ποσότητες. Αυτός είναι άλλωστε ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιείται για την εύρεση της απόκρισης ενός συστήματος διακριτού χρόνου, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.4. Παρατηρήστε επίσης, ότι το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε είναι ανεξάρτητο από το πλήθος των δειγμάτων N .

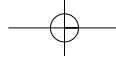
Σχήμα 2.17

Το μοναδιαίο κρουστικό δείγμα και ο DFT του



Όπως διαπιστώσατε, ο υπολογισμός αυτός ήταν εξαιρετικά απλός. Σίγουρα τα καταφέρατε. Αν πάλι αυτό δε συνέβη, τότε μελετήστε ξανά τον ορισμό του DFT καθώς και των παραγόντων στροφής W_N^{nk} . Μετά ξαναπροσπαθήστε. Πραγματικά θα δείτε ότι δεν είναι και τόσο δύσκολο να καταλήξει κανείς στο σωστό αποτέλεσμα.





2.7

Αρχίζοντας και πάλι από τον ορισμό του DFT (σχέση 2.21) έχουμε:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

Για $k=0$ προκύπτει:
$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot e^{-j0} = \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot 1 = A \sum_{n=0}^{N-1} 1 = A \cdot N$$

Για $k \neq 0$ προκύπτει:
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = A \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

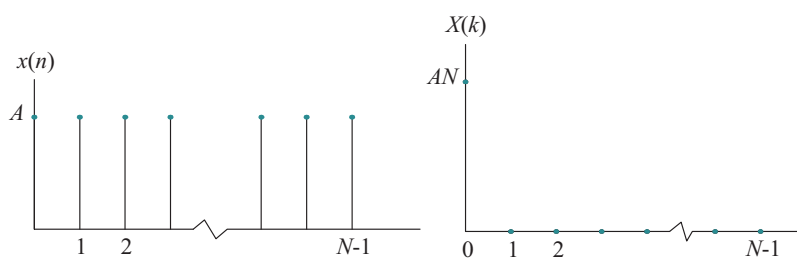
Εκφράζοντας την πεπερασμένη γεωμετρική σειρά σε κλειστή μορφή, έχουμε:

$$X(k) = A \cdot \frac{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)N}}{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}} = A \cdot \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = 0 \quad \text{για } k = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

επειδή ο αριθμητής της σχέσης είναι μηδέν, ενώ ο παρανομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Άρα, τελικά:

$$X(k) = AN\delta(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

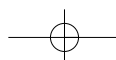
Οι γραφικές παραστάσεις της σταθερής ακολουθίας και του DFT αυτής φαίνονται στο Σχήμα 2.18. Συγκρίνοντας αυτές με εκείνες του Σχήματος 2.17, και αγνοώντας τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες, παρατηρούμε ότι αυτές είναι ίδιες, όταν εναλλάσσουμε το χρόνο με τη συχνότητα. Αυτό είναι απόρροια του διττού χαρακτήρα του μετασχηματισμού Fourier (duality property).

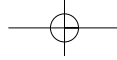


Σχήμα 2.18

Η σταθερή ακολουθία πλάτους A και ο DFT αυτής

Αν δεν καταφέρατε να λύσετε την άσκηση αυτή μην απογοητευθείτε. Δεν είναι από τις πλέον εύκολες, αφού πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις για το k και να κάνουμε τους υπολογισμούς χωριστά για καθεμιά από αυτές. Βλέπουμε και πάλι ότι η σχέση που κατεξοχήν μας χρειάζεται είναι εκείνη του υπολογισμού του αποτελέσματος μιας πεπερασμένης γεωμετρικής σειράς. Προσπαθήστε να την κατανοήσετε





και να επαναλάβετε τη λύση μόνοι σας.

2.8

Ο υπολογισμός του DFT των $x_1(n)$ και $x_2(n)$ θα μπορούσε να γίνει με απευθείας εφαρμογή της σχέσης 2.21, όπως έγινε και στην περίπτωση του Παραδείγματος 2.4 για την ακολουθία $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$, όπου βρέθηκε ότι

$$X(k) = \left\{ 2, \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, 0, \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \right\}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι $x_1(n) = x(\langle n+1 \rangle_4)$ και $x_2(n) = x(\langle n+2 \rangle_4)$. Συνεπώς ο DFT αυτών μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της ιδιότητας της κυκλικής ολίσθησης (μετατόπισης) στο χρόνο του Πίνακα 2.3 ως εξής:

$$X_1(k) = W_N^{-k} X(k) \quad \text{και} \quad X_2(k) = W_N^{-2k} X(k)$$

όπου $n_0 = -1$ και $n_0 = -2$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το μέτρο του DFT και των τριών ακολουθιών $x(n)$, $x_1(n)$, $x_2(n)$ είναι το ίδιο, όπως δείχνουμε στο Σχήμα 2.19β. Εκείνο που αλλάζει με την ολίσθηση είναι η φάση τους (Σχήμα 2.19γ).

Αν βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα, τότε μπράβο σας. Αυτό σημαίνει ότι έχετε κατανοήσει όχι μόνο τον ορισμό του DFT, αλλά και την επίδραση της ολίσθησης στο τελικό αποτέλεσμα. Αν πάλι δεν τα καταφέρατε, τότε προτείνουμε να ξαναδοκιμάσετε και με τους δύο τρόπους. Αρχίστε τη διαδικασία με βάση τον ορισμό (2.21) και συνεχίστε με βάση τον ορισμό (2.34). Ποιος από τους δύο τρόπους υπολογισμού σας φάνηκε πιο εύκολος;

2.9

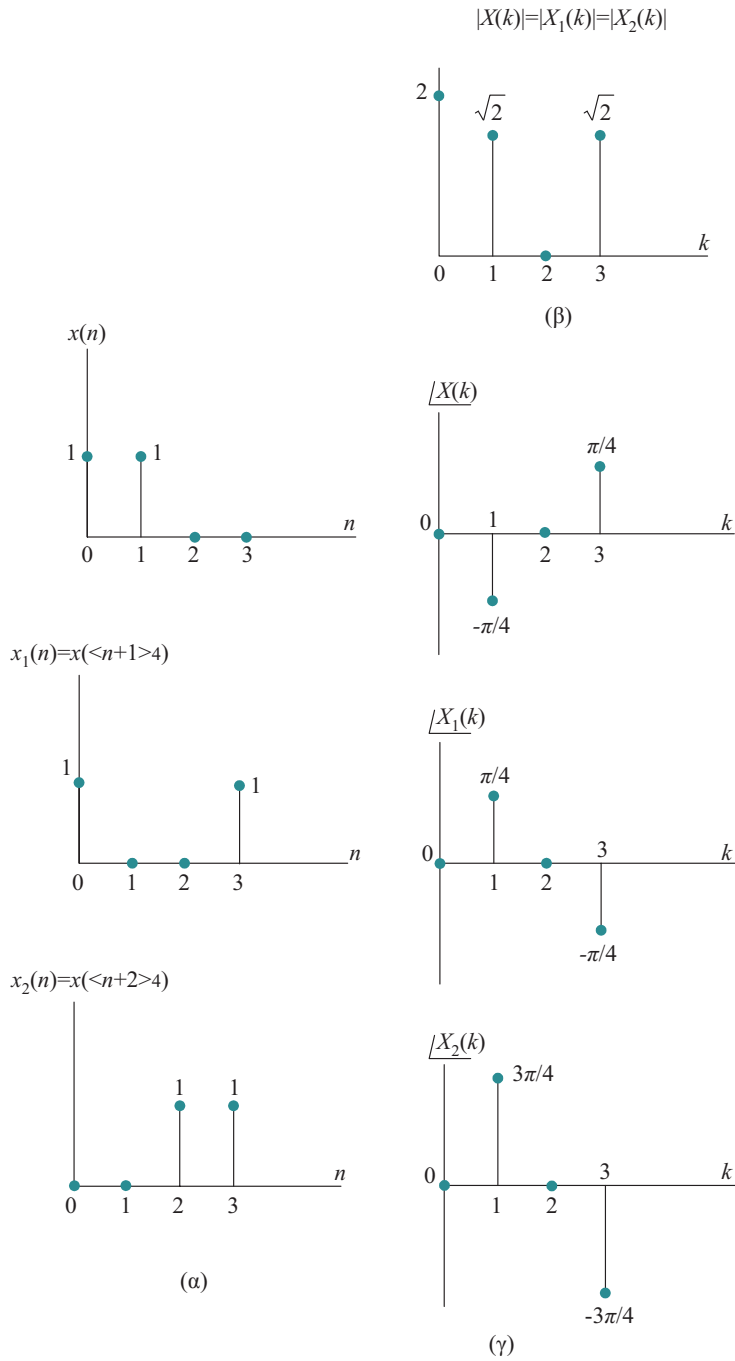
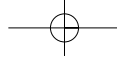
Ο DFT της $x_1(n) = \{1, 2, 3\}$ ισούται με $X_1(k) = \{6, -1,5+j0,866, -1,5-j0,866\}$.

Ο DFT της $x_2(n) = \{4, 5, 6\}$ ισούται με $X_2(k) = \{15, -1,5+j0,866, -1,5-j0,866\}$.

Ο DFT της $x_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \{31, 31, 28\}$ ισούται με $X_3(k) = \{90, 1,5-j2,598, 1,5+j2,598\}$.

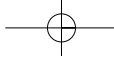
Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $X_3(k)$ ισούται με το γινόμενο των $X_1(k)$ και $X_2(k)$ στοιχείο προς στοιχείο.

Αν καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα, τότε συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει τον τρόπο υπολογισμού του DFT μίας ακολουθίας, καθώς και τη διαδικασία εκτέλεσης πράξεων σε μιγαδικούς αριθμούς. Στην αντίθετη περίπτωση, προσπαθήστε και πάλι. Θα δείτε ότι είναι θέμα εξοικείωσης με τους μιγαδικούς.



Σχήμα 2.19

Τα σήματα (α) έχουν το ίδιο μέτρο (β), αλλά διαφορετική φάση (γ)



2.10

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.21) του DFT βρίσκουμε ότι

$$X(k) = \left\{ 6, -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$\text{Επομένως } \sum_{n=0}^2 |x(n)|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$\text{και } \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 |X(k)|^2 = \frac{1}{3} \cdot (36 + 3 + 3) = \frac{1}{3} \cdot 42 = 14.$$

Συνεπώς, το θεώρημα του Parseval επαληθεύεται.

Αυτή ήταν μία εύκολη άσκηση. Σίγουρα θα καταλήξατε στο σωστό αποτέλεσμα. Αν πάλι αυτό δε συνέβη, τότε εξασκηθείτε στους υπολογισμούς με βάση τον ορισμό του DFT (2.21). Ειδικά για μικρές τιμές του N , είναι θέμα απλών πράξεων με μιγαδικούς αριθμούς.

2.11

Επιμηκύνουμε καθεμιά από τις ακολουθίες $h(n)$, $x(n)$ ώστε να αποκτήσει μήκος $N = 8$. Προκύπτουν έτσι οι ακολουθίες $h'(n) = \{1, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0\}$ και $x'(n) = \{3, 4, 5, 2, 0, 0, 0, 0\}$. Το μήκος N είναι μεγαλύτερο του μήκους της ακολουθίας που προκύπτει από τη γραμμική συνέλιξη των $h(n)$, $x(n)$. Με άλλα λόγια, $N > L + M - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$, όπου L , M , $L + M - 1$ τα μήκη των ακολουθιών $h(n)$, $x(n)$ και $y(n) = h(n) * x(n)$, αντίστοιχα.

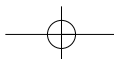
Υπολογίζουμε τον DFT των $h'(n)$, $x'(n)$ με βάση τη σχέση (2.21) και βρίσκουμε αντίστοιχα:

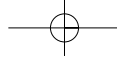
$$H(k) = \{6, 2, 41 - j4, 41, -2 - j2, -0, 41 + j1, 6, 2, -0, 41 - j1, 6, -2 + j2, 2, 41 + j4, 41\}$$

$$X(k) = \{14, 4, 41 - j9, 24, -2 - j2, 1, 6 + j0, 76, 2, 1, 6 - j0, 76, -2 + j2, 4, 41 + j9, 24\}.$$

Το γινόμενο των $H(k)$ και $X(k)$ θα μας δώσει την $Y(k)$, δηλαδή, $Y(k) = X(k)H(k) = \{84, -30, 14 - j41, 8, j8, -1, 86 + j2, 2, 4, -1, 86 - j2, 2, -j8, -30, 14 + j41, 8\}$. Για να βρούμε την $y(n)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε τον IDFT της $Y(k)$ σύμφωνα με τη σχέση (2.22), για $N = 8$, δηλαδή

$$y(n) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 Y(k) e^{j2\pi kn/8}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 7.$$





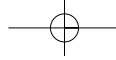
Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι: $y(n) = \{3, 10, 22, 24, 19, 6, 0, 0\}$.

Παρατηρούμε ότι τα δύο τελευταία στοιχεία της ακολουθίας $y(n)$ είναι μηδενικά, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο, αφού η γραμμική συνέλιξη των $x(n)$, $h(n)$ θα πρέπει να έχει μήκος έξι. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με εκείνο του Παραδείγματος 1.6, στο οποίο υπολογίσαμε και πάλι την ίδια γραμμική συνέλιξη, αλλά απευθείας στο πεδίο του χρόνου.

Αν καταφέρατε να λύσετε σωστά την άσκηση αυτή, τότε σας αξίζουν ειλικρινά συγχαρητήρια. Οι υπολογισμοί για μεγάλες τιμές του N είναι επίπονοι και εύκολα μπορεί να γίνουν λάθη. Στις μέρες μας, παρόμοιοι υπολογισμοί γίνονται με τη βοήθεια διαφόρων προγραμματιστικών εργαλείων, όπως για παράδειγμα, του MATLAB. Έτσι, η έμφαση δίνεται στην κατανόηση της ιδιότητας αυτής καθεαυτήν και στη διαδικασία υπολογισμού του αποτελέσματος.

2.12

- (α) Για τον απευθείας υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης δύο ακολουθιών πραγματικών αριθμών μήκους N η καθεμιά, απαιτούνται N^2 πραγματικοί πολλαπλασιασμοί (Βλ. σχέση 1.39). Το αποτέλεσμα της γραμμικής συνέλιξης θα είναι μια ακολουθία μήκους $2N-1$.
- (β) Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης μέσω του πεδίου της συχνότητας γίνεται σύμφωνα με το Σχήμα 2.11. Οι δύο ακολουθίες πρέπει να επιμηκυνθούν με την προσθήκη στοιχείων μηδενικής τιμής, ώστε να αποκτήσουν μήκος τουλάχιστον ίσο προς $2N-1$. Έστω τελικά, ότι το μήκος κάθε ακολουθίας γίνεται ίσο προς $2N$. Ο υπολογισμός του DFT μιας ακολουθίας $2N$ στοιχείων απαιτεί $(2N)^2 = 4N^2$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Σύμφωνα με το Σχήμα 2.11, απαιτείται ο υπολογισμός 2 DFT, ο πολλαπλασιασμός των $2N$ στοιχείων των DFTs που υπολογίσαμε και τέλος, 1 IDFT $2N$ σημείων. Αυτό ισοδυναμεί με 3DFTs και $2N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς, ή συνολικά με $12N^2 + 2N \approx 12N^2$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Επειδή κάθε μιγαδικός πολλαπλασιασμός χρειάζεται τέσσερις πραγματικούς πολλαπλασιασμούς για να πραγματοποιηθεί, ο συνολικός αριθμός των πραγματικών πολλαπλασιασμών γίνεται $48N^2$. Αυτός ο αριθμός είναι κατά πολύ μεγαλύτερος εκείνου που είδαμε στην περίπτωση (α) του υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης απευθείας στο πεδίο του χρόνου. Άρα, η χρήση του DFT κρίνεται ως μη συμφέρουσα.
- (γ) Ας δούμε τώρα την περίπτωση κατά την οποία, για τον υπολογισμό του DFT χρησιμοποιούμε έναν ταχύ αλγόριθμο Fourier (FFT) βάσης 2. Το πλήθος των μιγα-



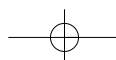
δικών πολλαπλασιασμών για μια ακολουθία $2N$ στοιχείων είναι $(2N/2) \log_2 2N = N \log_2 2N$. Για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης σύμφωνα με το Σχήμα 2.11 απαιτούνται $3N \log_2 2N + 2N$ μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί ή $12N \log_2 2N + 8N$ πραγματικοί πολλαπλασιασμοί. Καταγράφοντας το πλήθος των πραγματικών πολλαπλασιασμών για διαφορετικά N στον Πίνακα 2.6, παρατηρούμε ότι για $N > 64$ μας συμφέρει να υπολογίσουμε τη γραμμική συνέλιξη μέσω του πεδίου της συχνότητας (με χρήση του FFT) και όχι απευθείας στο πεδίο του χρόνου.

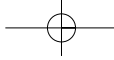
Πίνακας 2.6

Πλήθος πραγματικών πολλαπλασιασμών για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης δύο ακολουθιών N στοιχείων.

Πλήθος στοιχείων κάθε ακολουθίας	Απευθείας υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου	Υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης στο πεδίο της συχνότητας μέσω του FFT
(N)	(N^2)	$(12N \log_2 2N + 8N)$
4	16	176
8	64	448
16	256	1088
32	1024	2560
64	4096	5888
128	16384	13312
256	65536	29696
512	262144	65536
1024	1048576	143360

Αν καταφέρατε να απαντήσετε σωστά, τότε σας αξίζουν συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει τόσο τα πλεονεκτήματα της χρήσης του FFT όσο και τα σχετικά με τον υπολογισμό της συνέλιξης στο χρόνο, ή μέσω του πεδίου της συχνότητας. Αν δεν μπορούσατε να λύσετε την άσκηση αυτή, τότε μελετήστε και πάλι τις ενότητες 2.2.3 και 2.3.





3.1

Μία από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του Μ.Ζ. είναι αυτή της συνέλιξης. Ας δούμε την ευκολία που μας παρέχει υπολογίζοντας τη συνέλιξη $y(n) = h(n)*x(n)$, όπου $h(n) = \{1, 2, 3\}$ και $x(n) = \{3, 4, 5, 2\}$. Βρίσκουμε τους Μ.Ζ. των συναρτήσεων και υπολογίζουμε την $Y(z) = H(z)X(z)$. Η $y(n)$ θα προκύψει από τον αντίστροφο Μ.Ζ. της $H(z)$. Έχουμε επομένως:

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \quad X(z) = 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + 2z^{-3}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τα πολυώνυμα αυτά παίρνουμε την $Y(z)$:

$$Y(z) = 3 + 10z^{-1} + 22z^{-2} + 24z^{-3} + 19z^{-4} + 6z^{-5}$$

Η $Y(z)$ εκφράζεται ως δυναμοσειρά και συνεπώς οι συντελεστές αυτής αποτελούν στην πράξη και τα δείγματα εξόδου $y(n)$:

$$y(n) = \{3, 10, 22, 24, 19, 6\}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τα αντίστοιχα των Παραδειγμάτων 6 και 7 του Κεφαλαίου 1.

3.2

Ο υπολογισμός του Μ.Ζ. του σήματος $x(n)$, το οποίο είναι πεπερασμένης διάρκειας, μπορεί να γίνει απευθείας από τον ορισμό (3.1). Η Π.Σ. του Μ.Ζ. θα είναι όλο το επίπεδο z εκτός της τιμής $z = 0$, αφού η $x(n)$ είναι δεξιόπλευρη ακολουθία πεπερασμένου μήκους με $n \geq 0$. Αυτός ο τρόπος υπολογισμού αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. Σημειώστε μόνο ότι για $z = 1$ ο $X(z) = N$, αφού $X(z) = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)}$.

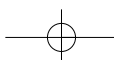
Εναλλακτικά, ο ίδιος υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει με βάση τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης. Παρατηρήστε ότι το σήμα $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός δύο μοναδιαίων βηματικών ακολουθιών άπειρου μήκους, δηλαδή $x(n) = u(n) - u(n-N)$ (Βλ. άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.1). Συνεπώς

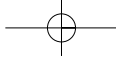
$$Z\{x(n)\} = Z\{u(n)\} - Z\{u(n-N)\}$$

$$\text{ή } X(z) = Z\{u(n)\} - z^{-N}Z\{u(n)\} = (1 - z^{-N})Z\{u(n)\} = (1 - z^{-N}) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

όπου από τον Πίνακα 3.1, χρησιμοποιήσαμε ότι $Z\{u(n)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ με Π.Σ. $|z| > 1$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η Π.Σ. του $X(z)$ είναι, όπως ήδη αναφέραμε, ολόκληρο το επίπεδο z εκτός της τιμής $z = 0$. Με άλλα λόγια, εάν ο γραμμικός συνδυασμός πολλών σημάτων έχει ως αποτέλεσμα ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας, τότε η Π.Σ.





του $M.Z.$ καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τη φύση τού πεπερασμένης διάρκειας σήματος και όχι από τις Π.Σ. των επιμέρους $M.Z.$ Αυτό ουσιαστικά είναι συνέπεια του γεγονότος ότι πόλοι απαλείφονται από αντίστοιχα μηδενικά, όπως είναι η περίπτωση του παραδείγματος.

3.3

(α) Αφού η Π.Σ. είναι το εξωτερικό ενός κύκλου, συμπεραίνουμε ότι το σήμα $x(n)$ θα είναι αιτιατό. Άρα ψάχνουμε για μια δυναμοσειρά με αρνητικές δυνάμεις τω z . Εκτελούμε λοιπόν τη συνεχή διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή και έχουμε:

$$\begin{array}{r}
 z^{-1} + 0,9 z^{-2} + 0,87 z^{-3} + \dots \\
 z^2 - 1,9z + 0,84 \quad \overline{) \quad z^{-1}} \\
 \underline{z^{-1}} \phantom{+ 0,9 z^{-2} + 0,87 z^{-3} + \dots} \\
 z^{-1,9} + 0,84z^{-1} \\
 \underline{z^{-1,9} + 0,84z^{-1}} \\
 0,9 - 0,84z^{-1} \\
 \underline{0,9 - 1,71z^{-1} + 0,756z^{-2}} \\
 0,87z^{-1} - 0,756z^{-2} \\
 \underline{0,87z^{-1} - 1,653z^{-2} + 0,7308z^{-3}} \\
 0,897z^{-2} - 0,7308 z^{-3} \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Επομένως η $X(z)$ μπορεί να εκφραστεί ως δυναμοσειρά:

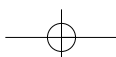
$$X(z) = z^{-1} + 0,9z^{-2} + 0,87z^{-3} + \dots$$

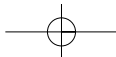
Κατά συνέπεια, μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε ότι

$$\{x(n)\} = \{0, 1, 0,9, 0,87, \dots\}$$

Περισσότερα δείγματα της $x(n)$ μπορούμε να έχουμε συνεχίζοντας τη διαίρεση. Σημειώστε ότι για τη διαδικασία της συνεχούς διαίρεσης γράψαμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της $X(z)$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του z .

(β) Στην περίπτωση αυτή η Π.Σ. του $M.Z.$ $X(z)$ ορίζεται στο εσωτερικό ενός κύκλου. Επομένως, το αντίστοιχο σήμα $x(n)$ θα είναι αντι-αιτιατό (anticausal). Άρα ψάχνουμε για μια δυναμοσειρά με θετικές δυνάμεις του z . Εκτελούμε και πάλι τη συνεχή διαίρεση, διατάσσοντας όμως την φορά αυτή αριθμητή και παρονομαστή κατά τις αύξουσες δυνάμεις του z . Έχουμε λοιπόν:





$$\begin{array}{r}
 0,84 - 1,9z + z^2 \quad \begin{array}{l} \hline -1,1905 - 1,5023z + 1,9807z^2 + \dots \\ \hline -1 + z \\ \hline -1 + 2,2619z - 1,1905z^2 \\ \hline -1,2619z + 1,1905z^2 \\ \hline -1,2619z + 2,8543z^2 - 1,5023z^3 \\ \hline -1,6638z^2 + 1,5023z^3 \\ \hline \dots \end{array}
 \end{array}$$

Άρα $X(z) = -1,1905 - 1,5023z - 1,9807z^2 + \dots$

και κατά συνέπεια $\{x(n)\} = \{\dots, -1,9807, -1,5023, \underline{-1,1905}\}$,

δηλαδή $x(-2) = -1,9807$, $x(-1) = -1,5023$, $x(0) = -1,1905$.

3.4

Η διαδικασία της ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα είναι παρόμοια εκείνης του Παραδείγματος 3.7. Αυτό που πρέπει να διερευνήσουμε εκτενέστερα εδώ είναι το θέμα της ζητούμενης ακολουθίας, αφού δεν μας δίνεται το εάν πρόκειται για αιτιατό ή μη-αιτιατό σήμα. Αρχίζουμε λοιπόν από την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα και συνεχίζουμε με τη μελέτη των Π.Σ. της $X(z)$.

$$X(z) = \frac{6 + z^{-1}}{1 - 0,25z^{-2}} = \frac{6z^2 + z}{z^2 - 0,25}$$

και επομένως

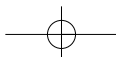
$$\frac{X(z)}{z} = \frac{6z + 1}{(z - 0,5)(z + 0,5)} = \frac{A_1}{z - 0,5} + \frac{A_2}{z + 0,5}$$

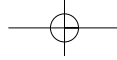
Οι πόλοι της $X(z)$ βρέθηκαν ίσοι με $p_1 = 0,5$ και $p_2 = -0,5$. Υπολογίζουμε τώρα τα A_1, A_2 .

$$A_1 = (z - 0,5) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=0,5} = \frac{6z + 1}{z + 0,5} \Big|_{z=0,5} = 4$$

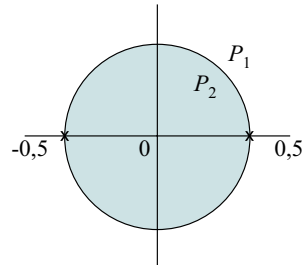
$$A_2 = (z + 0,5) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-0,5} = \frac{6z + 1}{z - 0,5} \Big|_{z=-0,5} = 2$$

Άρα, $\frac{X(z)}{z} = \frac{4}{z - 0,5} + \frac{2}{z + 0,5}$ και $X(z) = 4 \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} + 2 \frac{1}{1 + 0,5z^{-1}}$



**Σχήμα 3.12**

Περιοχές σύγκλισης στο επίπεδο- z .



Μέχρι το σημείο αυτό, πιστεύουμε πως φτάσατε σχετικά εύκολα. Αν όχι, προσπαθήστε και πάλι ακολουθώντας το Παράδειγμα 3.7. Εκείνο που ίσως δε σκεφτήκατε να κάνετε, είναι μία μικρή διερεύνηση σχετικά με τις διαφορετικές περιοχές σύγκλισης του Μ.Ζ., ώστε να προτείνετε την αντίστοιχη ακολουθία.

Οι δύο πόλοι βρίσκονται στα σημεία $\pm 0,5$ και έχουν το ίδιο μέτρο. Επομένως χωρίζουν το επίπεδο σε δύο Π.Σ. την P_1 εκτός του κύκλου $|z| = 0,5$ και την P_2 εντός του ίδιου κύκλου. Για την Π.Σ. P_1 ($|z| > 0,5$) και τα δύο μερικά κλάσματα αντιστοιχούν σε δεξιόπλευρες ακολουθίες δίνοντας:

$$x(n) = 4(0,5)^n u(n) + 2(-0,5)^n u(n).$$

Επειδή η Π.Σ. P_1 περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, το σήμα $x(n)$ θα είναι ευσταθές.

Για την Π.Σ. P_2 ($|z| < 0,5$) και τα δύο μερικά κλάσματα αντιστοιχούν σε αριστερόπλευρες ακολουθίες δίνοντας:

$$x(n) = -4(0,5)^n u(-n-1) - 2(-0,5)^n u(-n-1)$$

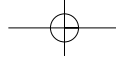
Στην περίπτωση αυτή το σήμα $x(n)$ είναι ασταθές, αφού ο μοναδιαίος κύκλος δεν περιέχεται στην Π.Σ.

3.5

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς και από αυτή μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε γεωμετρικά την απόκριση συχνότητας.

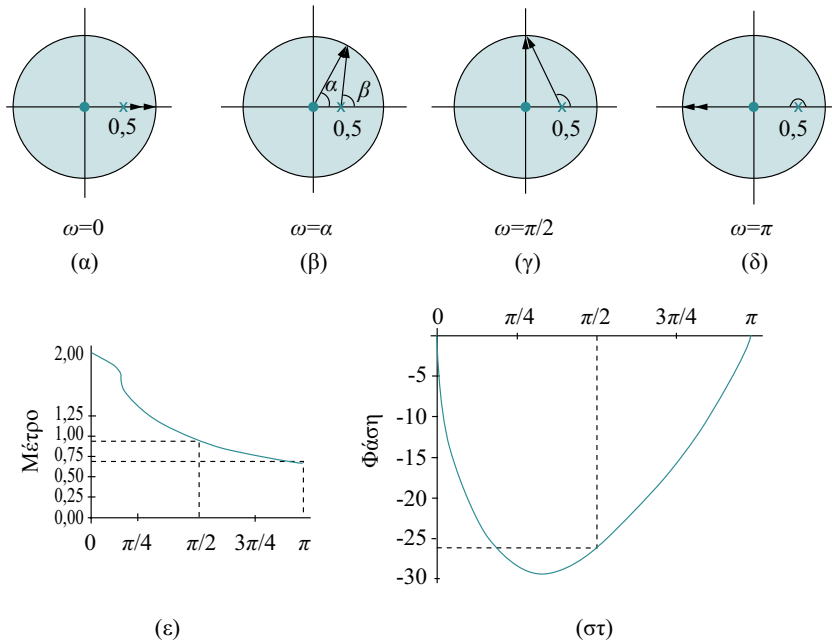
$$H(z) = Z\{h(n)\} = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \text{ με Π.Σ. } |z| > 0,5$$

Ο πόλος $z = 0,5$ προσδιορίζει και την Π.Σ. της $H(z)$, η οποία ορίζεται στο εξωτερικό του κύκλου ακτίνας $|z| = 0,5$. Ο μοναδιαίος κύκλος εμπεριέχεται στην Π.Σ. και επομένως, το σύστημα είναι ευσταθές. Η απόκριση συχνότητας μπορεί να υπολογιστεί από την $H(z)$ για $z = e^{j\omega}$. Έχουμε:



$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0,5} = \frac{Ce^{j\alpha}}{De^{j\beta}} = Ve^{j\theta}$$

όπου $V = C/D = 1/D$ και $\theta = \alpha - \beta$. Η συνάρτηση έχει ένα πόλο στο σημείο $z = 0,5$. Ο γεωμετρικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας γίνεται με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του Σχήματος 3.13α-δ. Για διαφορετικές γωνίες ω , δηλαδή για διαφορετικές συχνότητες, υπολογίζουμε το μέτρο V και την φάση θ της απόκρισης συχνότητας. Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις δίνονται από το Σχ. 3.13ε-στ. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα σύστημα το οποίο επιτρέπει στις χαμηλές συχνότητες να «περάσουν» από αυτό, ενώ εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες. Δηλαδή, πρόκειται για ένα βαθυπερατό φίλτρο.



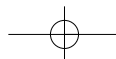
Σχήμα 3.13

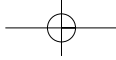
Γεωμετρικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας: (α)–(δ) διάγραμμα πόλων – μηδενικών για διαφορετικές συχνότητες, (ε)–(στ) μέτρο και φάση της απόκρισης.

3.6

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να δούμε το σύστημα από την πλευρά του Μ.Ζ. αυτού. Μόνο έτσι θα μπορέσουμε εύκολα να το αναλύσουμε και να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά του.

Από την εξίσωση διαφορών που μας δίνεται μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $H(z)$. Αναλυτικά έχουμε:





$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

$$\text{και } Z\{y(n)\} = \frac{5}{6}Z\{y(n-1)\} - \frac{1}{6}Z\{y(n-2)\} + Z\{x(n)\}$$

$$\text{ή } Y(z) = \frac{5}{6}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{6}z^{-2}Y(z) + X(z)$$

$$\text{ή } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

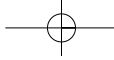
Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό έχει δύο πόλους στα σημεία $z = 1/2$ και $z = 1/3$. Στην είσοδο του συστήματος εφαρμόζεται το σήμα $x(n) = \delta(n) - (1/3)\delta(n-1)$. Ο Μ.Ζ. αυτού είναι $X(z) = 1 - (1/3)z^{-1}$. Βλέπουμε επομένως, ότι το σήμα εισόδου περιέχει ένα μηδενικό στο σημείο $z = 1/3$. Το μηδενικό αυτό εξουδετερώνει τον πόλο $z = 1/3$ του συστήματος. Δηλαδή, $Y(z) = H(z)X(z)$ ή $Y(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$.

Κατά συνέπεια, η απόκριση του συστήματος για τη συγκεκριμένη είσοδο $x(n)$ θα ισούται με $y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$.

3.7

Είδαμε ότι, γνωρίζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος, μπορούμε άμεσα να ελέγξουμε την BIBO ευστάθεια αυτού, να σχεδιάσουμε τη δομή του, που θα μας οδηγήσει τελικά στην πιο κατάλληλη υλοποίηση και να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος. Ας εξετάσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του αιτιατού συστήματος $H(z) = 1/(1 + 0,5z^{-1}) = z/(z + 0,5)$. Βλέπουμε ότι αυτή έχει ένα μηδενικό στο σημείο $z = 0$ και έναν πόλο στο σημείο $z = -0,5$. Αφού ο πόλος βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου, το σύστημα είναι ευσταθές. Από την $H(z)$ μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε με το γεωμετρικό (γραφικό) τρόπο την απόκριση συχνότητας. Τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών για τις πλέον χαρακτηριστικές περιπτώσεις, δηλαδή $\omega = 0$, $\omega = \pi/2$ και $\omega = \pi$ φαίνονται στο Σχήμα 3.14α-γ. Η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας (μέτρο και φάση) δίνεται από το Σχήμα 3.14δ-ε. Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό εξασθενίζει τις χαμηλές και «ευνοεί» τις υψηλές συχνότητες. Άρα, το σύστημα είναι ένα υπερπυκνωτικό φίλτρο.

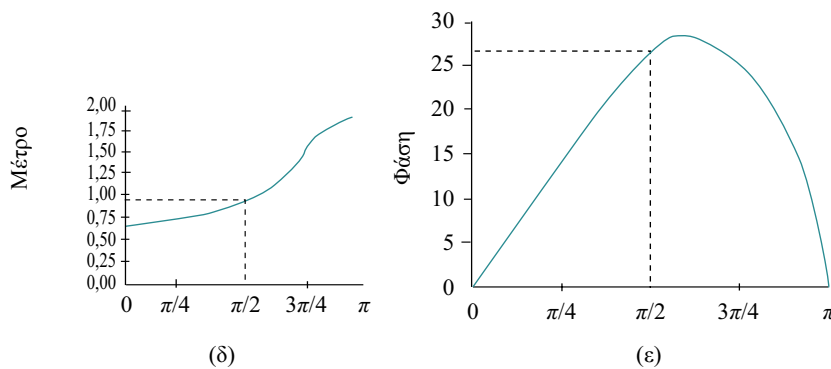
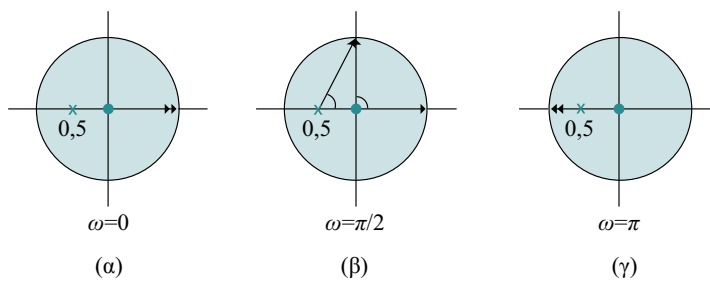
Η δομή πραγματοποίησης του συστήματος αποτελεί ουσιαστικά την άμεση απεικόνιση



νιση της εξίσωσης διαφορών αυτού (Σχήμα 3.15). Η εξίσωση διαφορών προκύπτει εύκολα από τη συνάρτηση μεταφοράς, δηλαδή:

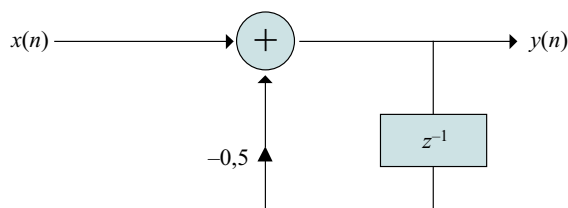
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} \Rightarrow Y(z)(1 + 0.5z^{-1}) = X(z) \Rightarrow Y(z) = X(z) - 0.5z^{-1}Y(z)$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο Μ.Ζ. και λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης, καταλήγουμε στη σχέση: $y(n] = x(n] - 0,5y(n-1]$.



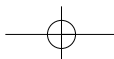
Σχήμα 3.14

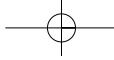
Γεωμετρικός προσδιορισμός της απόκρισης συχνότητας: (α)–(γ) διάγραμμα πόλων – μηδενικών για διαφορετικές συχνότητες, (δ)–(ε) μέτρο και φάση της απόκρισης.



Σχήμα 3.15

Δομή πραγματοποίησης συστήματος.





Αξιίζει να σημειώσουμε εδώ τα εξής:

- Το σύστημα που μόλις εξετάσαμε είναι ένα φίλτρο πρώτης τάξης. (Θυμηθείτε ότι ο βαθμός του πολωνύμου του παρανομαστή της $H(z)$ καθορίζει και την τάξη του συστήματος).
- Το φίλτρο είναι επαναληπτικό, αφού δείγματα της εξόδου ανατροφοδοτούνται στο σύστημα.
- Συγκρίνοντας την $H(z)$ του συστήματος αυτού με εκείνη της άσκησης αυτοαξιολόγησης 3.5, παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά που υπάρχει είναι στο πρόσημο του συντελεστή της z^{-1} του παρανομαστή, δηλαδή στον πόλο της συνάρτησης. Αυτή η διαφορά έχει ως συνέπεια να αλλάξει ριζικά η συμπεριφορά του συστήματος και από βαθυπερατό φίλτρο στη μία περίπτωση να γίνει υψηπερατό στην άλλη.

4.1

α. Σωστό.

β. Λάθος (5).

γ. Λάθος (Τιμή συντελεστή 0,2)

δ. Σωστό.

ε. Λάθος (Καθυστέρηση $2T_s = 1/44100 = 45,3 \text{ } \mu\text{sec}$)

Αν έχετε απαντήσει σωστά, τότε μπράβο σας! Έχετε καταλάβει τις βασικές έννοιες στα FIR φίλτρα, τα οποία με τη σειρά τους αποτελούν ουσιαστικό εργαλείο στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος.

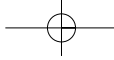
Αν έχετε μερικές από τις απαντήσεις λάθος μην απογοητευτείτε. Διαβάστε πάλι την ενότητα 4.1, δίνοντας έμφαση στην υποενότητα 4.1.1.

4.2

Η συχνότητα αποκοπής πρέπει να είναι μικρότερη από την π , αφού η περιοχή ενδιαφέροντος στα ψηφιακά φίλτρα είναι $[-\pi, \pi]$.

Αν απαντήσατε σωστά, συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει δύο πράγματα. Τον τρόπο που ενεργούν στις συχνότητες τα διάφορα φίλτρα (υψηπερατά, βαθυπερατά κτλ.), καθώς επίσης και το γεγονός ότι η απόκρισή τους στη συχνότητα είναι περιοδική με περίοδο 2π .

Στην περίπτωση που έχετε κάνει λάθος, θα πρέπει να εστιάσετε την προσοχή σας



τόσο στον τρόπο ορισμού των προδιαγραφών ενός φίλτρου (ενότητα 4.2), όσο και στο κεφάλαιο 3 ενότητα 3.4.5 όπου εξηγείται η περιοδικότητα της απόκρισης συχρότητας των ψηφιακών φίλτρων.

4.3

1. Λάθος.
2. Σωστό.
3. Λάθος.
4. Σωστό.

Αν έχετε απαντήσει σωστά μπράβο σας! Έχετε καταλάβει τον τρόπο που λειτουργούν τα παράθυρα στη διαδικασία σχεδίασης των FIR φίλτρων. Αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί με ανάλογο τρόπο τα παράθυρα λειτουργούν και σε άλλες περιπτώσεις ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (δεν αναφέρονται στο βιβλίο αυτό).

Αν έχετε απαντήσει λάθος, τότε δώστε περισσότερη προσοχή στην ενότητα 4.3 και κυρίως στο σχήμα 4.6., που περιγράφει τον τρόπο επίδρασης του φάσματος του παραθύρου στην τελική απόκριση του φίλτρου.

4.4

Σωστή απάντηση είναι η β, διότι οι μονάδες καθυστέρησης στην άμεση δομή υλοποίησης των FIR φίλτρων είναι κατά μία λιγότερες από τους πολλαπλασιαστές.

Αν απαντήσατε σωστά σημαίνει ότι κατανοήσατε τους δύο διαφορετικούς τρόπους υλοποίησης των FIR φίλτρων που περιγράφονται στην υποενότητα 4.4.1.

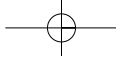
Σε αντίθετη περίπτωση δώστε περισσότερη προσοχή στο σχήμα 4.9.

4.5

Τα bits που απαιτούνται στην αναπαράσταση των συντελεστών πρέπει να είναι περισσότερα από $106/6 = 17,6$. Άρα χρειάζονται 18 bits.

Αν στην άσκηση αυτή απαντήσατε σωστά, αυτό σημαίνει ότι μπορείτε να εμβαθύνετε στην σχεδίαση των FIR φίλτρων, αφού έχετε την αίσθηση του πόσο η ακρίβεια στην αναπαράσταση των συντελεστών του φίλτρου θα επηρεάσει την απόκρισή του.

Αν δεν απαντήσατε σωστά, προσπαθήστε πάλι στην υποενότητα 4.4.2.



5.1

Με βάση τους συμβολισμούς του Σχήματος 5.1 και τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε ότι:

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) = -3 \text{ dB}, \text{ οπότε προκύπτει ότι } \varepsilon^2 = 1.$$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα -3 dB αντιστοιχούν στη συχνότητα Ω_c , για την οποία ξέρουμε ότι το μέτρο της απόκρισης ισούται με $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$F_p = 500 \text{ Hz}, \text{ οπότε } \Omega_p = 2\pi F_p = 2\pi 500 \text{ rad/sec.}$$

Σημειώστε ότι στην προκειμένη περίπτωση $\Omega_p \equiv \Omega_c$.

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) = -40 \text{ dB}, \text{ οπότε } A^2 = 10^4$$

$$F_s = 1000 \text{ Hz}, \text{ οπότε } \Omega_s = 2\pi F_s = 2\pi 1000 \text{ rad/sec.}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.6) υπολογίζουμε την τάξη του φίλτρου:

$$N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} = \frac{\log_{10} \left[\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2} \right]}{2 \log_{10}(\Omega_s / \Omega_p)} = \frac{\log_{10}(10^4 - 1)}{2 \log_{10}(2)} = 6,64$$

Άρα το φίλτρο το οποίο πληροί τις προδιαγραφές είναι έβδομης τάξης ($N = 7$).

Οι πόλοι του φίλτρου υπολογίζονται από τη σχέση (5.9)

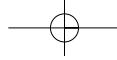
$$s_q = 1000\pi e^{j\pi/2} e^{j(2q+1)\pi/14}, \quad q = 0, 1, \dots, 6.$$

Αν έχετε υπολογίσει τη σωστή τάξη του φίλτρου Butterworth, καθώς και τους πόλους του, τότε συγχαρητήρια. Είστε σε θέση να υπολογίζετε ένα από τα βασικότερα αναλογικά φίλτρα. Ουσιαστικά, έχετε κατανοήσει τη σημασία των διαφόρων παραμέτρων, γεγονός που θα σας διευκολύνει στους υπολογισμούς για τα επόμενα αναλογικά φίλτρα.

Σε αντίθετη περίπτωση, μην απογοητευθείτε. Μελετήστε και πάλι την υποενότητα 5.1.1 και στη συνέχεια διαβάστε με προσοχή το Παράδειγμα 5.1.

5.2

Η συνάρτηση μεταφοράς του πρωτότυπου αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου, που μας δίνεται, αντιπροσωπεύει ένα φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 1 \text{ rad/s}$, δηλ. $\Omega_p = \Omega_c = 1$. Αυτό που μας ζητείται είναι να σχεδιάσουμε και πάλι ένα φίλτρο



Chebyshev τύπου I, το οποίο όμως να είναι υπερπερατό και να έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega'_p = \Omega'_s = 4 \text{ rad/s}$. Το φίλτρο αυτό προκύπτει εύκολα με αντικατάσταση της μεταβλητής s του πρωτότυπου βαθυπερατού φίλτρου με $\Omega_p \Omega'_p / s = 4/s$, όπως υπαγορεύεται από τη σχέση (5.16). Άρα η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς του υπερπερατού φίλτρου Chebyshev θα είναι:

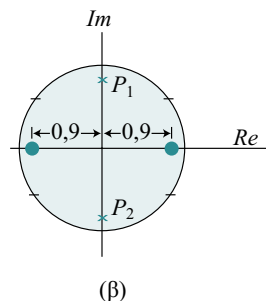
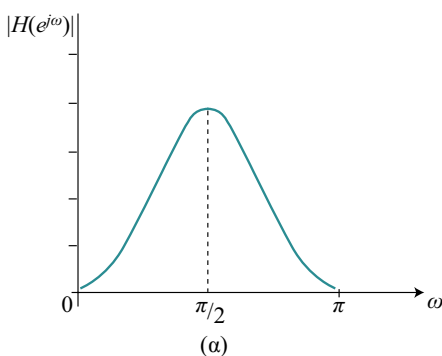
$$H_{HP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{4}{s}} = \frac{1}{s^2 + 1,098s + 1,103} \Big|_{s = \frac{4}{s}} = \frac{1}{\left(\frac{4}{s}\right)^2 + 1,098\left(\frac{4}{s}\right) + 1,103} = \frac{s^2}{1,103s^2 + 4,392s + 16}$$

Παρατηρούμε ότι το υπερπερατό φίλτρο που προέκυψε είναι ίδιας τάξης με το αρχικό βαθυπερατό φίλτρο, δηλαδή δεύτερης τάξης. Το φίλτρο αυτό παρουσιάζει ένα μηδενικό για $s = 0$. Με άλλα λόγια, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για $\Omega = 0$ η απόκριση είναι $H(j\Omega) = 0$, γεγονός που συμφωνεί με την υπερπερατή ιδιότητα του φίλτρου.

Στην περίπτωση που έχετε απαντήσει σωστά, μπράβο σας, γιατί κατανοήσατε το μηχανισμό μετασχηματισμού από τον ένα τύπο αναλογικού φίλτρου στον άλλον. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο και απαραίτητο για την όλη σχεδίαση των ψηφιακών ΠΡ φίλτρων. Αν δεν βρήκατε τη σωστή απάντηση, προσπαθήστε πάλι χρησιμοποιώντας με προσοχή τις σχέσεις (5.16) και (5.17). Προσπαθήστε επίσης να καταλάβετε το Παράδειγμα 5.2.

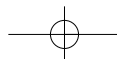
5.3

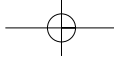
Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου πρέπει να έχει τη μορφή του Σχήματος 5.12α. Αφού η απόκριση θα πρέπει σχεδόν να μηδενίζεται για $\omega = 0$ και $\omega = \pi$, συνεπάγεται ότι στα σημεία αυτά θα πρέπει να υπάρχουν κάποια μηδενικά.



Σχήμα 5.12

(α) Επιθυμητή απόκριση του ζωνοδιαβατού ψηφιακού φίλτρου, (β) πόλοι και μηδενικά στο επίπεδο- z





Έστω ότι τα μηδενικά βρίσκονται στις θέσεις $z = 0,9$ και $z = -0,9$ (Σχήμα 5.12β). Από την άλλη πλευρά, για $\omega = \pi/2$ η απόκριση παρουσιάζει μέγιστο και άρα η συνάρτηση μεταφοράς θα πρέπει να έχει κάποιον πόλο στο σημείο αυτό. Έστω ότι ο πόλος αυτός βρίσκεται στο σημείο $z = 0,9e^{j\frac{\pi}{2}}$, δηλαδή εντός του μοναδιαίου κύκλου, ώστε το φίλτρο να είναι ευσταθές (σημείο P_1 στο Σχήμα 5.12β). Αφού ο πόλος είναι μιγαδικός, θα πρέπει να υπάρχει και ο συζυγής αυτού $z = 0,9e^{-j\frac{\pi}{2}}$ (σημείο P_2 στο Σχήμα 5.12β), ώστε οι τελικοί συντελεστές του φίλτρου που θα προκύψει, να είναι πραγματικοί. Άρα η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου θα είναι:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} = \frac{a_0z^2 + a_1z + a_2}{z^2 + b_1z + b_2} = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} = \\ &= \frac{(z - 0,9)(z + 0,9)}{(z - 0,9e^{j\pi/2})(z - 0,9e^{-j\pi/2})} = \frac{z^2 - 0,81}{z^2 + 0,81} = \frac{1 - 0,81z^{-2}}{1 + 0,81z^{-2}} \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ζητούμενοι συντελεστές του φίλτρου είναι: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -0,81$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0,81$. Η εξίσωση διαφορών του επιθυμητού φίλτρου θα ισούται με (βλ. σχέση 3.59): $y(n) = x(n) - 0,81x(n-2) - 0,81y(n-2)$.

Αν έχετε υπολογίσει σωστά το ζωνοδιαβατό ψηφιακό φίλτρο, τότε συγχαρητήρια. Έχετε κατανοήσει τη χρησιμότητα του μοναδιαίου κύκλου και του μιγαδικού επιπέδου. Αυτό θα σας φανεί χρήσιμο και στις υπόλοιπες μεθόδους σχεδίασης ψηφιακών IIR φίλτρων. Αν δεν υπολογίσατε σωστά το φίλτρο, ξαναπροσπαθήστε αφού μελετήσετε πρώτα το Παράδειγμα 3.10.

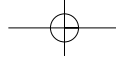
5.4

Η συνάρτηση $H(s)$ έχει τρεις διαφορετικούς πόλους $p_1 = -1$, $p_2 = -0,5 + j0,87$, $p_3 = -0,5 - j0,87$. Εκφράζουμε την $H(s)$ ως ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων:

$$H(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+0,5-j0,87} + \frac{C_3}{s+0,5+j0,87} \text{ και βρίσκουμε ότι:}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 0,6e^{-j2,6}, C_3 = 0,6e^{j2,6}$$

Υπολογίζουμε την $H(z)$ με βάση τη σχέση (5.30), αντικαθιστώντας το $s - p_\xi$ με το $1 - e^{p_\xi T} z^{-1}$, δηλαδή:



$$H(z) = \frac{C_1}{1 - e^{-T} z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - e^{(-0,5+j0,87)T} z^{-1}} + \frac{C_3}{1 - e^{(-0,5-j0,87)T} z^{-1}}$$

Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στη συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού φίλτρου:

$$H(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z}{z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}$$

$$\text{όπου } a_0 = -2e^{-0,5T} \cos(0,87T) + e^{-T} + 1,15e^{-0,5T} \cos(5\pi/6 + 0,87T)$$

$$a_1 = e^{-T} + 1,15e^{-1,5T} \cos(5\pi/6 + 0,87T)$$

$$b_1 = -e^{-T} - 2e^{-0,5T} \cos(0,87T)$$

$$b_2 = e^{-T} + 2e^{-1,5T} \cos(0,87T)$$

$$b_3 = -e^{-2T}$$

Αν έχετε βρει τη σωστή συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού φίλτρου, τότε αξίζει να συγχαρητήρια, γιατί η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής αποτελεί μία σχετικά πολύπλοκη διαδικασία μετάβασης από τον αναλογικό στον ψηφιακό χώρο.

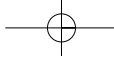
Αν δεν βρήκατε τη σωστή συνάρτηση μεταφοράς τότε προσπαθήστε πάλι. Χρειάζεται επιμονή. Θυμηθείτε ότι πρέπει πρώτα να αναπτύξετε την $H(s)$ σε μερικά κλάσματα με διαφορετικούς πόλους σύμφωνα με τη σχέση (5.26) και στη συνέχεια να κάνετε τη μετατροπή που δείχνει η σχέση (5.30). Προτείνουμε, πριν ξεκινήσετε, να μελετήσετε και πάλι το Παράδειγμα 5.4.

5.5

Θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα υπερπαρατό φίλτρο του οποίου η συχνότητα αποκοπής να είναι 30 Hz, όταν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 150 Hz. Η διαδικασία σχεδίασης, όπως και οι συχνότητες ω_c και Ω'_c είναι ίδιες με εκείνες του Παραδείγματος 5.5. Το μόνο που θα πρέπει να αλλάξει είναι ο μετασχηματισμός συχνότητας, ο οποίος στην προκειμένη περίπτωση θα είναι από βαθυπαρατό σε υπερπαρατό αναλογικό φίλτρο, όπως μας υπαγορεύει η σχέση (5.17), δηλαδή:

$$H_{HP}(s) = H_p(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_c \Omega'_c}{s}} = \frac{1 \cdot \Omega'_c}{s} = \frac{0,73}{s} = \frac{1}{\frac{0,73}{s} + 1} = \frac{s}{s + 0,73}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση το s με το $(z-1)/(z+1)$ καταλήγουμε στη



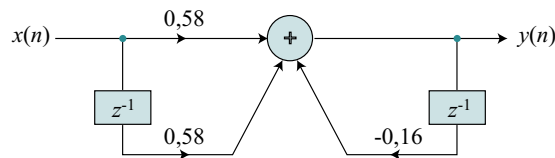
ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς του υπερπερατού ψηφιακού φίλτρου:

$$H(z) = H_{HP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1} + 0,73} = \frac{z-1}{1,73z + 0,27} = \frac{0,58(1-z^{-1})}{1+0,16z^{-1}}$$

Η εξίσωση διαφορών του φίλτρου είναι $y(n) = 0,58[x(n) - x(n-1)] - 0,16y(n-1)$. Πρόκειται και πάλι για ένα ψηφιακό φίλτρο πρώτης τάξης, όπως και το αντίστοιχο αναλογικό, στο οποίο βασίσαμε τη σχεδιάσή μας. Η δομή πραγματοποίησής του δείχνεται στο Σχήμα 5.13. Παρατηρούμε ότι η κύρια διαφορά με το βαθυπερατό φίλτρο του Σχήματος 5.9β βρίσκεται στα πρόσημα των συντελεστών του φίλτρου.

Σχήμα 5.13

Δομή πραγματοποίησης του πρώτης τάξεως υπερπερατού φίλτρου της Άσκησης Αυτοαξιολόγησης 5.5



Αν απαντήσατε σωστά στην άσκηση αυτή, σημαίνει ότι καταλάβατε την πιο διαδομένη μέθοδο σχεδίασης IIR φίλτρων. Μπράβο σας! Στην αντίθετη περίπτωση, μελετήστε ξανά το Παράδειγμα 5.5 και προσέξτε τον μετασχηματισμό που θα κάνετε αρχικά από το βαθυπερατό αναλογικό σε υπερπερατό αναλογικό φίλτρο με βάση τις σχέσεις (5.16) και (5.17).

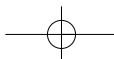
5.6

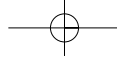
Για να σχεδιάσουμε το ζητούμενο ζωνοδιαβατό φίλτρο, ακολουθούμε τα τρία στάδια σχεδίασης της ενότητας 5.2.3:

1. Επιλέγουμε το πρωτότυπο αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο. Στην άσκηση αυτή μας ζητείται να σχεδιάσουμε ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο δεύτερης τάξης. Με βάση το δεύτερο σχόλιο της υποενότητας 5.2.3, καταλαβαίνουμε ότι το αναλογικό βαθυπερατό Butterworth φίλτρο από το οποίο θα προέλθει το ψηφιακό φίλτρο, θα πρέπει να είναι πρώτης τάξης, δηλαδή της μορφής $H_f(s) = 1/(s + 1)$.
2. Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο σε ζωνοδιαβατό με συχνότητες Ω'_l και Ω'_u στα όρια της ζώνης διέλευσης.

$$\Omega'_l = \tan(\omega_l/2) = \tan(\Omega_l T/2) = \tan(2\pi 200(1/2000)/2) = \tan(0,1\pi) = 0,32$$

$$\Omega'_u = \tan(\omega_u/2) = \tan(\Omega_u T/2) = \tan(2\pi 300(1/2000)/2) = \tan(0,15\pi) = 0,51.$$





Ο μετασχηματισμός συχνότητας στον αναλογικό χώρο από βαθυπερατό σε ζωνοδιαβατό επιτυγχάνεται με βάση τη σχέση (5.19) και μας δίνει:

$$\begin{aligned} H_{BP}(s) &= H_p(s) \Big|_{s = \Omega_c \frac{s^2 + \Omega'_l \Omega'_u}{s(\Omega'_u - \Omega'_l)}} = \frac{s^2 + 0,32 \cdot 0,51}{s(0,51 - 0,32)} = \frac{s^2 + 0,17}{s \cdot 0,19} \\ &= \frac{1}{s+1} \Big|_{s = \frac{s^2 + 0,17}{0,19s}} = \frac{1}{\left(\frac{s^2 + 0,17}{0,19s}\right) + 1} = \frac{0,19s}{s^2 + 0,19s + 0,17} \end{aligned}$$

3. Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό στη συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοδιαβατού αναλογικού φίλτρου, που μόλις υπολογίσαμε, αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση όπου s το $(z-1)/(z+1)$

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{BP}(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,19s}{s^2 + 0,19s + 0,17} \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,19 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0,19 \left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 0,17} = \\ &= \frac{0,19(z^2 - 1)}{1,36z^2 - 1,66z + 0,98} = \frac{0,14(1 - z^{-2})}{1 - 1,22z^{-1} + 0,72z^{-2}} \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών του IIR ψηφιακού φίλτρου είναι:

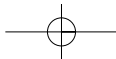
$$y(n) = 0,14[x(n) - x(n-2)] + 1,22y(n-1) - 0,72y(n-2).$$

Σας αξίζουν συγχαρητήρια αν απαντήσατε στην άσκηση αυτή. Πρόκειται για σχετικά δύσκολη άσκηση, αφού η διαδικασία απαιτεί τη μετατροπή από αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο πρώτης τάξης σε αναλογικό ζωνοδιαβατό φίλτρο δεύτερης τάξης.

Στην περίπτωση που δεν τα καταφέρατε, μην απογοητευθείτε. Καταρχήν διαβάστε και πάλι το Παράδειγμα 5.2. Στη συνέχεια, επικεντρώστε τη προσοχή σας στις σχέσεις (5.18) και (5.19) και στα σχόλια που τις συνοδεύουν. Θα διαπιστώσετε ότι σε δεύτερης τάξης ζωνοδιαβατό φίλτρο καταλήγουμε από πρώτης τάξης βαθυπερατό φίλτρο. Τα υπόλοιπα βήματα είναι τα ίδια με εκείνα που είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα. Ξαναπροσπαθήστε...

6.1

Η ασπρόμαυρη εικόνα χρειάζεται συνολικά $128 \times 128 = 16.384$ bytes μνήμης. Αντίθετα, η έγχρωμη απαιτεί 3 bytes/εικονοστοιχείο, δηλαδή συνολικά $512 \times 512 \times 3 =$



1.537.536 bytes. Το τελευταίο μέγεθος είναι 48 φορές μεγαλύτερο από το πρώτο. Επομένως, η σωστή απάντηση είναι η τρίτη.

Στην περίπτωση που έχετε υπολογίσει το σωστό αποτέλεσμα σημαίνει ότι έχετε κατανοήσει την ισοδυναμία εικονοστοιχείου και byte, καθώς επίσης το γεγονός ότι το έγχρωμο εικονοστοιχείο χρειάζεται τρία bytes για αποθήκευση. Αυτό θα σας βοηθήσει να προχωρήσετε με ευχέρεια στις πράξεις πάνω στην εικόνα.

Αν δεν υπολογίσατε το σωστό αποτέλεσμα, δώστε περισσότερη προσοχή στον τρόπο υπολογισμού του πλήθους των εικονοστοιχείων και της αντιστοιχίας τους με τον αριθμό των bytes που χρειάζονται στην ασπρόμαυρη και την έγχρωμη εικόνα. Ίσως εκεί είναι το λάθος σας.

6.2

Το σύνολο των πράξεων ισούται με το πλήθος των εικονοστοιχείων (31×31) επί το πλήθος των συντελεστών του παραθύρου (5×5). Επομένως η σωστή απάντηση είναι η δεύτερη.

Αν έχετε υπολογίσει τη σωστή απάντηση, βρίσκεστε σε πολύ καλό δρόμο, δεδομένου ότι θα κατανοήσετε χωρίς πρόβλημα τον τρόπο υλοποίησης της διδιάστατης συνέλιξης που ακολουθεί στο Κεφάλαιο 7. Πρόκειται για τοπική πράξη με καθοριστική σημασία στην επεξεργασία εικόνας.

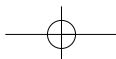
Αν δε βρήκατε την σωστή απάντηση προσπαθήστε πάλι. Δώστε προσοχή στο ότι για τον υπολογισμό κάθε εικονοστοιχείου στην εικόνα εξόδου χρειάζονται τόσες πράξεις, όσο είναι το μέγεθος του παραθύρου (ή γειτονιάς) που χρησιμοποιούμε (στην περίπτωσή μας 5×5). Ίσως το λάθος σας να είναι εκεί.

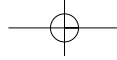
6.3

Σε μία ανεστραμμένη εικόνα η συντεταγμένη x παραμένει αμετάβλητη, αφού αφορά τη θέση του εικονοστοιχείου στον οριζόντιο άξονα. Αντίθετα, η θέση του εικονοστοιχείου στον άξονα n_2 αλλάζει και γίνεται $N + 1 - n_2$. Επομένως, ο σωστός μετασχηματισμός είναι ο τρίτος.

Αν δώσατε τη σωστή απάντηση αυτό σημαίνει ότι έχετε κατανοήσει τον τρόπο τοποθέτησης των καρτεσιανών συντεταγμένων πάνω στην εικόνα. Αυτό θα σας βοηθήσει σε δύσκολα προβλήματα μετασχηματισμών.

Αν δεν βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα, δώστε περισσότερη προσοχή στον τρόπο που μεταβάλλεται η συντεταγμένη n_2 ή y .





7.1

Καταρχήν γράφουμε πάλι τη σχέση (7.9)

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} h(l_1, l_2)x(n_1 - l_1, n_2 - l_2) \quad (7.9)$$

Το σήμα $x(l_1, l_2)$ θα μετατοπιστεί μόνο στις θέσεις (n_1, n_2) για τις οποίες οι όροι της $h(l_1, l_2)$ έχουν κοινές θέσεις με αυτό. Οι θέσεις αυτές είναι συνολικά 10.

Εάν η απάντησή σας είναι σωστή σημαίνει ότι έχετε κατανοήσει τη βασική διαδικασία της συνέλιξης και κυρίως την πράξη της ολίσθησης της μιας συνάρτησης πάνω στην άλλη.

Μην απογοητευτείτε αν το αποτέλεσμα που δώσατε είναι λάθος. Προσπαθήστε πάλι να μετατοπίσετε τη μία συνάρτηση πάνω στην άλλη και να βρείτε τις περιπτώσεις όπου έχουν κάποια επικάλυψη.

7.2

Η $h_{\text{συνδ}}(n_1, n_2)$ του Σχήματος 7.14 μπορεί να προκύψει μόνο από τη συνέλιξη των $h(n_1, n_2)$ και $g(n_1, n_2)$. Επομένως, υλοποιείται από τον εν σειρά συνδυασμό των δύο φίλτρων.

Εάν έχετε απαντήσει σωστά τότε αποδεικνύεται ότι έχετε κατανοήσει τόσο τον τρόπο συνδυασμού των φίλτρων, όσο και την πράξη της συνέλιξης. Σε αντίθετη περίπτωση ξαναδιαβάστε τον τρόπο που υπολογίζεται η κρουστική απόκριση συνδυασμού φίλτρων και προσπαθήστε πάλι δοκιμάζοντας τόσο τον παράλληλο, όσο και τον σε σειρά συνδυασμό των δύο φίλτρων.

7.3

Η κρουστική απόκριση αντιστοιχεί σε ευσταθές φίλτρο δεδομένου ότι έχει πεπερασμένο πλήθος όρων ($n_1 = n_2 = 5$). Συνεπώς ικανοποιείται η σχέση (7.20), αφού το άθροισμα των όρων αυτών θα είναι ένας πεπερασμένος αριθμός ($< \infty$).

Αν η απάντησή σας δεν είναι σωστή μην απογοητεύεστε. Πιθανόν δεν προσέξατε την παράγραφο 7.2.3.

7.4

Για να προκύψει πραγματική η $H(\omega_1, \omega_2)$ θα πρέπει οι όροι της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου να εμφανίζονται σε ζευγάρια συμμετρικά, έτσι ώστε να απαλείφει-

ται ο φανταστικός όρος των εκθετών της σχέσης (7.22). Αυτό ακριβώς έγινε στο Παράδειγμα 7.5 και τη Δραστηριότητα 7.3. Επομένως η σωστή απάντηση είναι η β.

Σωστή απάντησή σας σημαίνει ότι έχετε κατανοήσει τον τρόπο δημιουργίας φίλτρων μηδενικής φάσης. Αυτό θα σας είναι πολύ χρήσιμο δεδομένου ότι στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας χρησιμοποιούμε κυρίως φίλτρα γραμμικής φάσης.

Αν κάνατε λάθος, προσπαθήστε πάλι διαβάζοντας την προηγούμενη δραστηριότητα και την υποενότητα 4.1.1.

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

4.4

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές του φίλτρου στην περίπτωση που $N = 3$ (third-band φίλτρο). Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\omega_c = \pi/3$ και από την εξίσωση 4.7 έχουμε:

$$h_D(n) = \frac{\omega_c \sin(n\omega_c)}{\pi n\omega_c} = \frac{\omega_c = \pi/3}{\pi} \rightarrow \frac{1 \sin(n\pi/3)}{3 (n\pi/3)}$$

Η κρουστική απόκριση h_D είναι συμμετρική γύρω από το $n = 0$, έχει άπειρους όρους και κάθε τρίτος όρος είναι μηδενικός (n πολλαπλάσιο του 3).