Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

# Στοιχεία «Θεωρίας Πληροφορίας»

## Διάλεξη 02: Κωδικοποίηση Πηγής

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Αναπληρωτής Καθηγητής

# Ατζέντα

1. Αλγόριθμοι κωδικοποίησης πηγής
   - Αλγόριθμος Fano
   - Αλγόριθμος Shannon
   - Αλγόριθμος Huffman
2. Διακριτές πηγές πληροφορίας με μνήμη
   - Εντροπία των πηγών Markoff
   - Διακριτά κανάλια επικοινωνίας

# Κωδικοποίηση Πηγής

- **Κωδικοποίηση πηγής** είναι η διαδικασία μετατροπής των ακολουθιών συμβόλων που παράγει η πηγή σε **ακολουθίες συμβόλων κώδικα** (δυαδική ακολουθία), ώστε να αφαιρείται ο πλεονασμός και να προκύπτει συμπιεσμένη μορφή αναπαράστασης των μηνυμάτων.
- Τα διαφορετικά κωδικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή των δυαδικών ακολουθιών απαρτίζουν το **κωδικό αλφάβητο**.
- **Κώδικας** είναι το σύνολο των κωδικών λέξεων και η αντιστοίχιση τους με τα σύμβολα της πηγής.
- Αν όλες οι κωδικές λέξεις είναι διαφορετικές, ο κώδικας ονομάζεται ως **μη ιδιάζων**.
- Αν και οι δυνατές ακολουθίες κωδικών λέξεων είναι διαφορετικές, ο κώδικας είναι **μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος**.
- Αν ένας μοναδικός αποκωδικοποιήσιμος κώδικας επιτρέπει την άμεση αποκωδικοποίηση κάθε συμβόλου μόλις λαμβάνεται στον προορισμό, τότε χαρακτηρίζεται ως **άμεσος κώδικας**.

# Κωδικοποίηση Πηγής

Για κάθε άμεσο κώδικα με πλήθος συμβόλων $q$ και μήκος κωδικών λέξεων $l^i$, όπου $i = 1,2, \dots n$ και $n$ το πλήθος των συμβόλων της πηγής, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\sum_{i=1}^{n} q^{l_i} = 1$$

Εάν υπάρχει ένα σύνολο κωδικών λέξεων που ικανοποιούν την ανισότητα, τότε υπάρχει ένας άμεσος κώδικας με κωδικές λέξεις που έχουν αυτά τα μήκη.

Η **επίδοση του κώδικα** ορίζεται ως ο λόγος του μέσου πληροφοριακού περιεχομένου των συμβόλων της πηγής προς το γινόμενο του μέσου μήκους των κωδικών λέξεων με το λογάριθμο του πλήθους των κωδικών συμβόλων, δηλ.:

$$\alpha = \frac{\mathrm{H(C)}}{(\sum_{i=1}^{n} p_i \; l_i) \log q}$$

# Άσκηση 1

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω κώδικες I, II, III και IV είναι:

(α) Μη-ιδιάζοντες,

(β) Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι

(γ) Άμεσοι;

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| **φ** | 0 | 00 | 1 | 1 |
| **χ** | 10 | 01 | 10 | 01 |
| **ψ** | 01 | 10 | 100 | 001 |
| **ω** | 1 | 11 | 1000 | 0001 |

<u>Απάντηση</u>: (α) Όλοι οι κώδικες είναι μη ιδιάζοντες , αφού ο καθένας αποτελείται από διαφορετικές κωδικές λέξεις.

(β) Όλοι οι κώδικες είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι εκτός του I. Για τον κώδικα I παρατηρούμε ότι η ακολουθία κωδικών λέξεων 1001 θα μπορούσε να προκύψει από διάφορες ακολουθίες συμβόλων όπως ‘χψ’ ή ‘χφω’ κλπ.

(γ) Μόνο οι κώδικες II και IV είναι άμεσοι. Στην περίπτωση του κώδικα I, αν ο δέκτης λάβει το ‘0’ δεν θα ξέρει αν είναι η πρώτη κωδική λέξη ή το 1ο κωδικό σύμβολο της $3^{ης}$ κωδικής λέξης κοκ. Σχετικά με τον κώδικα III, όταν ο δέκτης λάβει τα ‘10’ δεν μπορεί ξέρει αν είναι η 2η κωδική λέξη ή τα 2 πρώτα σύμβολα της 3ης κωδικής λέξης κοκ.

# Αλγόριθμος Κωδικοποίησης Fano

<u>Βήματα Υλοποίησης</u>:

1. Τα σύμβολα της πηγής διατάσσονται σε κατά **φθίνουσα τάξη** με βάση την πιθανότητα εμφάνισης.
2. Κατόπιν, τα σύμβολα χωρίζονται σε τόσες ομάδες όσα και τα κωδικά σύμβολα, κατά τρόπο ώστε να προκύπτουν (αν αυτό είναι εφικτό) **ίσες αθροιστικές πιθανότητες** εμφάνισης των συμβόλων. Στην περίπτωση δυαδικού κώδικα, τα $n$ σύμβολα της πηγής χωρίζονται σε 2 ομάδες, επιλέγοντας το $k$ έτσι ώστε η διαφορά $\left|\sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=k+1}^{n} p_i\right|$ των αθροιστικών πιθανοτήτων εμφάνισης των συμβόλων, να **ελαχιστοποιείται**.
3. Για κάθε ομάδα συμβόλων της πηγής, επιλέγεται ένα από τα κωδικά σύμβολα ως το πρώτο των κωδικών λέξεων που θα προκύψουν.
4. Για κάθε ομάδα συμβόλων της πηγής επαναλαμβάνονται τα βήματα 2 και 3 έως ότου η κάθε ομάδα αποτελείται από μόνο ένα σύμβολο. Σε κάθε επανάληψη του βήματος 3, επιλέγεται ένα ακόμα κωδικό σύμβολο για το σχηματισμό των κωδικών λέξεων.

# Άσκηση 2

Μια πηγή παράγει 8 διαφορετικά σύμβολα, τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ, με πιθανότητες 1/8, 1/4, 1/16, 1/32, 1/4, 1/32, 1/8 και 1/8, αντίστοιχα. Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Fano, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

**Απάντηση**: Τα σύμβολα της πηγής διατάσσονται σε φθίνουσα πιθανότητα και χωρίζονται σε δύο ομάδες με το δυνατόν ίσες αθροιστικές πιθανότητες. Τα δύο πρώτα σύμβολα ανήκουν στην 1η ομάδα και τα υπόλοιπα στην 2η. Επιλέγουμε το '0' ως το πρώτο κωδικό σύμβολο των κωδικών λέξεων της 1ης ομάδας και το '1' για τις κωδικές λέξεις της 2ης ομάδας. Η πρώτη ομάδα χωρίζεται σε 2 υποομάδες με ένα σύμβολο η καθεμία. Επιλέγουμε και πάλι το '0' για την 1η υποομάδα και το '1' για τη 2. Έτσι καταλήγουμε στις κωδικές λέξεις των δύο πρώτων συμβόλων του πίνακα, τις '00' και '01'. Κατά τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε και σε σχέση με τη δεύτερη ομάδα, την οποία χωρίζουμε σε δύο υποομάδες, εκ των οποίων η 1η περιλαμβάνει το 3ο και το 4ο σύμβολο του πίνακα και η άλλη όλα τα υπόλοιπα σύμβολα.

| Σύμβολα | Πιθανότητες | Κώδικας |
|---|---|---|
| $B=S_1$ | 1/4 | 00 (11) |
| $E=S_2$ | 1/4 | 01 (10) |
| $A=S_3$ | 1/8 | 100 (011) |
| $H=S_4$ | 1/8 | 101 (010) |
| $\Theta=S_5$ | 1/8 | 110 (001) |
| $\Gamma=S_6$ | 1/16 | 1110 (0001) |
| $\Delta=S_7$ | 1/32 | 11110 (00001) |
| $Z=S_8$ | 1/32 | 11111 (00000) |

# Αλγόριθμος Κωδικοποίησης Shannon

<u>Βήματα Υλοποίησης</u>:

1. Τα σύμβολα της πηγής διατάσσονται σε κατά φθίνουσα τάξη με βάση την πιθανότητα εμφάνισης.
2. Για κάθε σύμβολο $S_j$, του οποίου η πιθανότητα εμφάνισης είναι $p(S_j)$, υπολογίζεται η αθροιστική πιθανότητα $P_i$, από τη σχέση: $P_i = \sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)$
3. Το πλήθος των κωδικών συμβόλων της λέξης που αναπαριστά το σύμβολο της πηγής $S_i$ είναι ίσο με το ακέραιο αριθμό $l_i$, που ικανοποιεί την ανισότητα $\log\frac{1}{p(S_i)} \leq l_i \leq 1 + \log\frac{1}{p(S_i)}$
4. Η κωδική λέξη $c_i$ του συμβόλου της πηγής είναι το δυαδικό ανάπτυγμα του κλάσματος $P_i$ (μόνο τα πρώτα του αναπτύγματος λαμβάνονται υπόψη).

# Άσκηση 3

Μια πηγή παράγει 8 διαφορετικά σύμβολα, τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ, με πιθανότητες 1/8, 1/4, 1/16, 1/32, 1/4, 1/32, 1/8 και 1/8, αντίστοιχα. Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Shannon, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

**Απάντηση**:

| Σύμβολα Πηγής | Πιθανότητες Συμβόλων | $P_i$ | Μήκος $l_i$ | Ανάπτυγμα του $P_i$ | Κωδικές Λέξεις |
|---|---|---|---|---|---|
| $B=S_1$ | 1/4 | $P_1 = 0$ | $l_1 = 2$ | .00000 | 00 |
| $E=S_2$ | 1/4 | $P_2 = 1/4$ | $l_2 = 2$ | .01000 | 01 |
| $A=S_3$ | 1/8 | $P_3 = 1/2$ | $l_3 = 3$ | .10000 | 100 |
| $H=S_4$ | 1/8 | $P_4 = 5/8$ | $l_4 = 3$ | .10100 | 101 |
| $\Theta=S_5$ | 1/8 | $P_5 = 6/8$ | $l_5 = 3$ | .11000 | 110 |
| $\Gamma=S_6$ | 1/16 | $P_6 = 7/8$ | $l_6 = 4$ | .11100 | 1110 |
| $\Delta=S_7$ | 1/32 | $P_7 = 15/16$ | $l_7 = 5$ | .11110 | 11110 |
| $Z=S_8$ | 1/32 | $P_8 = 31/32$ | $l_8 = 5$ | .11111 | 11111 |

# Αλγόριθμος Κωδικοποίησης Huffman

**Βήματα Υλοποίησης κωδικοποίησης HUFFMAN**:

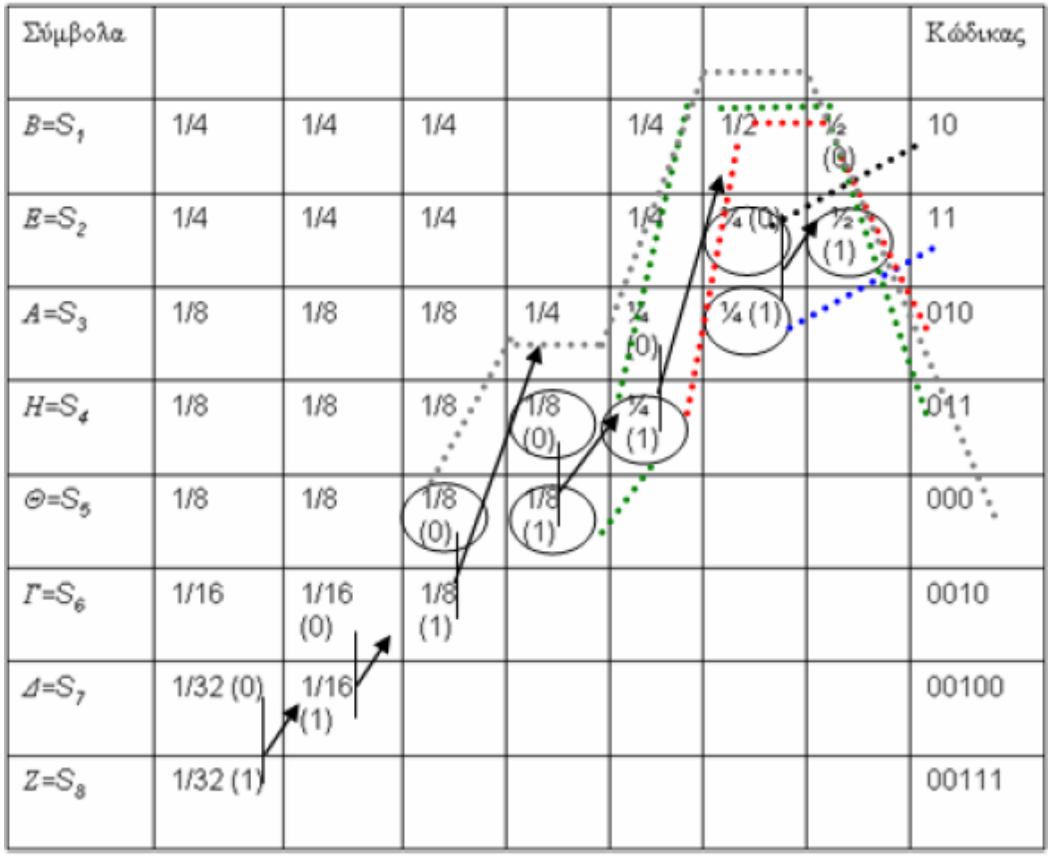
1. Τα σύμβολα της πηγής διατάσσονται κατά φθίνουσα πιθανότητα εκπομπής
2. Τα δύο τελευταία σύμβολα της πηγής με μικρότερη πιθανότητα παραγωγής ενώνονται σε ένα. Η πιθανότητα του συμβόλου είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των δύο συμβόλων.
3. Τα βήματα 1 και 2 επαναλαμβάνονται έως ότου το αλφάβητο της πηγής αποτελείται από δύο σύμβολα. Σε αυτά τα σύμβολα αποδίδονται το 0 και 1.
4. Τα ψηφία '0' και '1' αποδίδονται στη θέση του ενός και του άλλου συμβόλου αντίστοιχα, τα οποία στο βήμα 2 συγχωνεύτηκαν σε ένα.
5. Οι κωδικές λέξεις των συμβόλων σχηματίζονται από όλα τα ψηφία '0' και '1' που σχετίζονται με αυτά τα σύμβολα (από το τέλος προς την αρχή).

Πηγή: D. Huffman, *A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes*

# Άσκηση 4

Μια πηγή παράγει 8 διαφορετικά σύμβολα, τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ, με πιθανότητες 1/8, 1/4, 1/16, 1/32, 1/4, 1/32, 1/8 και 1/8, αντίστοιχα. Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Huffman, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

**Απάντηση**:



# Άσκηση 5

Δίδεται διακριτή πηγή που παράγει 7 διαφορετικά σύμβολα, *Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η* , με πιθανότητες, αντίστοιχα: {0,2, 0,15, 0,1, 0,3, 0,06, 0,15, 0,04} και ζητείται:

1. Να σχεδιασθεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Huffman.
2. Να σχεδιασθεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Fano.
3. Να συγκριθούν οι κώδικες που προκύπτουν στα ερωτήματα 1 και 2 ως προς την επίδοσή τους.

<u>Απάντηση</u>:

1. Κώδικας Huffman με δύο κωδικά σύμβολα:

| **Σύμβολα** | | | | | | | **Κώδικας** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Δ** | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,6 (0) | **00** |
| **Α** | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3 (0) | 0,4 (1) | **10** |
| **Β** | 0,15 | 0,15 | 0,2 | 0,2 (0) | 0,3 (1) | | **010** |
| **Ζ** | 0,15 | 0,15 | 0,15 (0) | 0,2 (1) | | | **011** |
| **Γ** | 0,1 | 0,1 (0) | 0,15 (1) | | | | **110** |
| **Ε** | 0,06 (0) | 0,1 (1) | | | | | **1110** |
| **Η** | 0,04 (1) | | | | | | **1111** |

# Άσκηση 5 (συνέχεια)

2. Τα σύμβολα της πηγής κατατάσσονται σε τάξη φθίνουσας πιθανότητας (δείτε τον παρακάτω πίνακα). Χωρίζονται σε ομάδες και υποομάδες ως ακολούθως:

Τα δύο πρώτα σύμβολα περιλαμβάνονται στην 1η ομάδα και τα υπόλοιπα στη $2^{η}$ ομάδα. Επιλέγουμε το '0' ως το πρώτο κωδικό σύμβολο των κωδικών λέξεων της $1^{ης}$ ομάδας και το '1' για τις κωδικές λέξεις της $2^{ης}$ ομάδας. Η πρώτη ομάδα χωρίζεται σε 2 υποομάδες με ένα σύμβολο η πρώτη και ένα η δεύτερη. Επιλέγουμε και πάλι το '0' για την $1^{η}$ υποομάδα και το '1' για τη 2. Έτσι καταλήγουμε στην κωδική λέξη του Γ, η οποία είναι η '00' κοκ.

Κώδικας Fano

| Σύμβολα | Πιθανότητες | Κώδικας |
|---|---|---|
| **Δ** | 0,3 | **00** |
| **Α** | 0,2 | **01** |
| **Β** | 0,15 | **100** |
| **Ζ** | 0,15 | **101** |
| **Γ** | 0,1 | **110** |
| **Ε** | 0,06 (0) | **1110** |
| **Η** | 0,04 (1) | **1111** |

# Άσκηση 5 (συνέχεια)

3. Για τον υπολογισμό της απόδοσης των κωδίκων, υπολογίζουμε την εντροπία της πηγής:

$$H(S) = \sum_{i=1}^{7} p_i \, log \, p_i =$$

$$= \frac{3}{10}\log\frac{3}{10} + 2\frac{15}{100}\log\frac{15}{100} + \frac{2}{10}\log\frac{2}{10} + \frac{1}{10}\log\frac{1}{10} + \frac{6}{100}\log\frac{6}{100} + \frac{4}{100} \; log \frac{4}{100}$$

$$= 2{,}568 \; bits/symbol$$

Υπολογίζουμε το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων για κάθε περίπτωση.

**Δυαδικός κώδικας Huffman** $\sum_{i=1}^{7} p_i \; l_i = 2x0{,}5 + 3x0{,}4 + 4x0{,}1 = 2{,}6$

Η απόδοση είναι : $a = \frac{H(s)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i) \; log 2} = \frac{2{,}568}{2{,}6} = 0{,}98771$

**Δυαδικός κώδικας Fano** $\sum_{i=1}^{7} p_i \; l_i = 2x0{,}5 + 3x0{,}4 + 4x0{,}1 = 2{,}6$

Η απόδοση είναι: $a = \frac{H(s)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i) \; log 2} = \frac{2{,}568}{2{,}6} = 0{,}98771$

Παρατηρούμε ότι οι δυαδικοί κώδικες είναι σχεδόν άριστοι.

# Άσκηση 6

1. Να βρείτε τον κώδικα Shannon για την κατανομή πιθανοτήτων τεσσάρων συμβόλων $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right\}$ καθώς και το μέσο μήκος του.
2. Να βρείτε **όλα** τα δυνατά μήκη κωδικών λέξεων που μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman για την ίδια κατανομή πιθανοτήτων του ερωτήματος (1). Τί παρατηρείτε σχετικά με τα μήκη των κωδικών λέξεων που αντιστοιχούν σε κάθε σύμβολο σε σχέση με τον κώδικα Shannon; Ποιός κώδικας είναι βέλτιστος;

**Απάντηση**:

1. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο κωδικοποίησης Shannon και παρατηρώντας ότι οι πιθανότητες είναι ήδη ταξινομημένες σε φθίνουσα ακολουθία έχουμε τον παρακάτω πίνακα

| $p_i$ | $F_i$ | $l_i$ | Κώδικας |
|---|---|---|---|
| **1/3** | 0 | 2 | 00 |
| **1/3** | 1/3 | 2 | 01 |
| **1/4** | 2/3 | 2 | 10 |
| **1/12** | 11/12 | 4 | 1110 |

Το μέσο μήκος του κώδικα Shannon είναι $E[l]=2,1667$ bits

# Άσκηση 6 (συνέχεια)

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι ο κώδικας Shannon που κατασκευάσαμε δεν είναι βέλτιστος, δεδομένου ότι μπορούμε να συντομεύσουμε την τελευταία κωδική λέξη σε 11 χωρίς να χαθεί η αμεσότητα του κώδικα.

Αποδεικνύεται ότι ο κώδικας {00, 01, 10, 11} είναι ένας από τους πιθανούς κώδικες Huffman ο οποίος προκύπτει συνδυάζοντας πρώτα το 3ο και το 4ο ενδεχόμενο σε ένα ενδεχόμενο πιθανότητας 1/3 και στη συνέχεια συνδυάζοντας το 1ο και 2ο ενδεχόμενο σε ένα ενδεχόμενο πιθανότητας 2/3. Το μέσο μήκος του κώδικα είναι $E[I_1]=2$ bits

Όπως γνωρίζουμε δεν είναι μοναδικός ο βέλτιστος κώδικας που προκύπτει από Huffman. Έτσι εάν το ενδεχόμενο που προκύπτει από το συνδυασμό του 3ου και 4ου ενδεχομένου συνδυαστεί στη συνέχεια με το 1ο ή το 2ο ενδεχόμενο, προκύπτει κώδικας Huffman με μήκη (1,2,3,3).

Το μέσο μήκος και σε αυτή την περίπτωση είναι $E[I_1]=1x(1/3) + 2x(1/3) + 3x(1/4+1/12) = 2$ bits, που είναι αναμενόμενο λόγω του ότι έχει προκύψει από χρήση του αλγορίθμου Huffman.

Παρατηρούμε ότι τα μήκη του κώδικα Huffman δεν είναι πάντα μοναδικά. Επίσης είναι δυνατόν επιμέρους μήκη που έχουν προκύψει από τον κώδικα Shannon να είναι μικρότερα από αντίστοιχα επιμέρους μήκη που έχουν προκύψει από Huffman. Π.χ. το μήκος του κώδικα Shannon που αντιστοιχεί στο 3ο ενδεχόμενο είναι μικρότερο από το αντίστοιχο μήκος του δεύτερου κώδικα Huffman. Ωστόσο το μέσο μήκος του κώδικα Huffman δεν υπερβαίνει σε καμία περίπτωση το μέσο μήκος του κώδικα Shannon.

Τέλος η εντροπία της τ.μ. ισούται με 1.7637 bits. Παρατηρούμε ότι τόσο ο κώδικας Huffman όσο και ο κώδικας Shannon επιτυγχάνουν συμπίεση το πολύ 1 bit μακριά από την εντροπία.

# Διακριτές πηγές πληροφορίας με μνήμη

Στην πραγματικότητα, όλες οι πηγές πληροφορίας παράγουν ακολουθίες συμβόλων που είναι στατιστικά εξαρτημένες. Η εξάρτηση αυτή μπορεί να υφίσταται για ένα περιορισμένο αριθμό συμβόλων. Έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν Μαρκοβιανές αλυσίδες ως στατιστικά υποδείγματα για τις πηγές πληροφορίας.

Μια τυχαία διαδικασία είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $Y1, Y2, \dots, Yn$. Γενικά, μπορεί να υφίσταται οποιαδήποτε εξάρτηση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών της ακολουθίας.

Μια τυχαία διαδικασία $Y1, Y2, \dots, Yn$ χαρακτηρίζεται ως **διαδικασία Markoff**:

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1} | Y_n = y_n,\ Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_1 = y_1) = P(Y_{n+1} = y_{n+1} | Y_n = y_n)$$

Η διαδικασία Markoff χαρακτηρίζεται ως **χρονικά αμετάβλητη** αν η υπό συνθήκη πιθανότητα $P(Y_{n+1} = b | Y_n = a)$ δεν εξαρτάται από το $n$, για $n = 1,2, \dots$

# Διακριτές πηγές πληροφορίας με μνήμη

- Μια αμετάβλητη στο χρόνο Μαρκοβιανή αλυσίδα περιγράφεται πλήρως από την **αρχική της κατάσταση** και τον πίνακα των **πιθανοτήτων μετάβασης** $P = \left|P_{ij}\right|$, όπου $P_{ij} = P\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\}$ και $i, j$ οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών οι οποίες ανήκουν στο σύνολο των δυνατών καταστάσεων $\{1,2, \dots, m\}$.
- Ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης καλείται και **πίνακας μετάβασης**.
- Η πιθανότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας να βρίσκεται τη χρονική στιγμή $n$ στην κατάσταση $i$ συμβολίζεται με $p_i(n)$.
- Αν ισχύει $p_i(n) = p_i(n+1) = \pi_i$, τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα χαρακτηρίζεται ως **στατική**.
- Για μια στατική Μαρκοβιανή αλυσίδα ισχύει η σχέση $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$

# Εντροπία πηγών Markoff

Η εντροπία των συμβόλων που εκπέμπονται από την κατάσταση i:

$$H(K_i) = -\sum_{j=1}^{m} P_{ij} \log P_{ij} \quad bits/symbol$$

Η εντροπία πηγής είναι ο μέσος όρος της εντροπίας των καταστάσεων:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \, H(K_i) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \log P_{ij} \quad bits/symbol$$

Η μέση ποσότητα πληροφορίας μηνυμάτων της πηγής συμβολίζει την πιθανότητα εκπομπής του μηνύματος m:

$$H(M) = -\sum_{i}^{m} p(m_i) \log p(m_i)$$

# Εντροπία πηγών Markoff

Το μέτρο του πλεονασμού εξάρτησης είναι:

$$red = 1 - \frac{H_{\text{με μνήμη}}(S)}{H_{\text{χωρίς μνήμη}}(\text{S})}$$

Το μέτρο του ολικού πλεονασμού (αναφέρεται στην εντροπία της πηγής σε σύγκριση με την μέγιστη δυνατή εντροπία της πηγής χωρίς μνήμη), είναι:

$$red_{o\lambda} = 1 - \frac{H_{\text{με μνήμη}}(S)}{maxH_{\text{χωρίς μνήμη}}(\text{S})} = 1 - \frac{H_{\text{με μνήμη}}(S)}{\log q}$$

# Άσκηση 7

Θεωρούμε διακριτή πηγή με μνήμη, τεσσάρων καταστάσεων Α, Β, Γ και Δ, η οποία παριστάνεται με στατική αλυσίδα Markoff 1ης τάξης. Ο πίνακας μετάβασης της πηγής αυτής είναι ο ακόλουθος:

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν τα εξής:

1. Οι πιθανότητες των καταστάσεων π(Α), π(Β), π(Γ) και π(Δ).
2. Την τιμή του $a$ για την οποία προκύπτει η μέγιστη εντροπία της πηγής.
3. Να προτείνετε βέλτιστο τρόπο κωδικοποίησης της πηγής, χωρίς να λάβετε υπόψη τη μνήμη της πηγής.
4. Λαμβάνοντας υπόψη τη μνήμη της πηγής και για α=1/2, να προτείνετε αποτελεσματικό τρόπο κωδικοποίησης.

# Άσκηση 7 (συνέχεια)

**Απάντηση:**

1. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η πηγή είναι στατική, καταστρώνουμε το σύστημα που απορρέει από τη σχέση $\pi P = \pi$. Είναι:

$$\pi[\pi(\text{A})\ \pi(\text{B})\ \pi(\Gamma)\ \pi(\Delta)]\begin{bmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} = [\pi(\text{A})\ \pi(\text{B})\ \pi(\Gamma)\ \pi(\Delta)]$$

και εξ αυτής:

$$(1-\alpha)\pi(\text{A}) + \alpha\pi(\Delta) = \pi(\text{A}) \Rightarrow \pi(\text{A}) = \pi(\Delta)$$

$$(1-\alpha)\pi(\text{B}) + \alpha\pi(\text{A}) = \pi(\text{B}) \Rightarrow \pi(\text{B}) = \pi(\text{A})$$

$$(1-\alpha)\pi(\Gamma) + \alpha\pi(\text{B}) = \pi(\Gamma) \Rightarrow \pi(\Gamma) = \pi(\text{B})$$

$$(1-\alpha)\pi(\Delta) + \alpha\pi(\text{A}) = \pi(\Delta) \Rightarrow \pi(\Delta) = \pi(\text{A})$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων κατάστασης της πηγής είναι 1, βρίσκουμε ότι: $\pi(A) = \pi(B) = \pi(\Gamma) = \pi(\Delta) = 1/4$

# Άσκηση 7 (συνέχεια)

2. Η εντροπία των συμβόλων που εκπέμπεται από όλες τις καταστάσεις της πηγής δίνεται από $-(1-\alpha)\log(1-a) - a\log a$, η οποία παίρνει τη μέγιστη τιμή για ισοπίθανα ενδεχόμενα, δηλαδή στην περίπτωσή μας για $(1-a) = a = \frac{1}{2}$.

Επομένως, η μέγιστη εντροπία Markoff προκύπτει για $a = 1/2$. Στην περίπτωση αυτή, η εντροπία της πηγής Markoff είναι ίση με 1 $bit\ /\ symbol$.

3. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Huffman, λαμβάνουμε για τα 4 ισοπίθανα σύμβολα, Α, Β, Γ και Δ, τον κώδικα (00, 01, 10, 11).

# Άσκηση 7 (συνέχεια)

4. Αφού η πηγή είναι μαρκοβιανή αλυσίδα πρώτης τάξης, η μνήμη της πηγής έχει βάθος 1 και επομένως για την αποτελεσματική κωδικοποίησή της, αρκεί να λάβουμε υπόψη το σύμβολο που εκπέμφθηκε τελευταίο. Αυτό γίνεται και με την κωδικοποίηση μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο σύμβολα.

Προκύπτει ο ακόλουθος κώδικας (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111) για τα μηνύματα ($m_1 =$ 'ΑΑ', $m_2 =$ 'ΑΒ', $m_3 =$ 'ΒΒ', $m_4 =$ 'ΒΓ', $m_5 =$ 'ΓΓ', $m_6 =$ 'ΓΔ', $m_7 =$ 'ΔΔ', $m_8 =$ 'ΔΑ'), με αντίστοιχες πιθανότητες (1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8).

Πιο αποτελεσματικός κώδικας μπορεί να προκύψει αν ορίσουμε διαφορετικό κώδικα για κάθε κατάσταση της πηγής. Επειδή από κάθε κατάσταση μπορούν να παραχθούν μόνο δύο σύμβολα, αρκεί η κωδικοποίηση καθενός από τα δύο αυτά σύμβολα με 1 bit, το '0' ή το '1', το οποίο οδηγεί σε μέσο μήκος κώδικα ίσο με 1 bit. Έτσι, παρατηρούμε ότι η κωδικοποίηση αυτή οδηγεί σε αποδοτικότερο κώδικα, σε σύγκριση με τον προηγούμενο κώδικα μηνυμάτων της πηγής μήκους δύο συμβόλων.

# Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

- Η πληροφορία, κατά τη διάδοση της μέσου ενός καναλιού, μπορεί να αλλοιωθεί εξαιτίας του θορύβου.
- Ένα διακριτό κανάλι περιγράφεται πλήρως από ένα σύνολο πιθανοτήτων $p_i$ και $p_{ij}$, όπου $p_i$ είναι η πιθανότητα να έχουμε στην είσοδο του καναλιού το $i$-οστό σύμβολο του κωδικού αλφαβήτου και $p_{ij}$ η πιθανότητα το $i$-οστό σύμβολο στην είσοδο να ληφθεί στην έξοδο σαν $j$-οστό σύμβολο.
- Η υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας H(X/Y) καλείται και **αβεβαιότητα** και εκφράζει το πόσο αβέβαιοι είμαστε ως προς το σύμβολο της εισόδου $x$ αν στην έξοδο έχει ληφθεί το $y$. Η υπό συνθήκη εντροπία είναι ένα μέτρο της μέσης αβεβαιότητας ως προς X, όταν είναι γνωστό το Y.
- Το H(Y/X) μπορεί να ορισθεί ως η μέση αβεβαιότητα ως προς το $y$ αν το $x$ είναι γνωστό, η οποία οφείλεται στην επενέργεια του θορύβου.

# Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

- Η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού μπορεί να θεωρηθεί ως η αβεβαιότητα ως προς το σύμβολο $x$ πριν από τη λήψη του $y$, μειωμένη κατά την αβεβαιότητα που παραμένει ως προς $x$ μετά τη λήψη $y$ και με δεδομένο το $y$.

- Οι πιθανότητες $p_{ij}$ $p(y_j/x_i)$, $p(x_i/y_j)$ αντιπροσωπεύουν την επίδραση του θορύβου στο κανάλι επικοινωνίας και είναι αυτές ακριβώς που το χαρακτηρίζουν. Οι πιθανότητες αυτές σχηματίζουν τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης του καναλιού που ονομάζεται και **πίνακας μετάβασης του καναλιού**.
- Η **χωρητικότητα $C$** ενός διακριτού ενθόρυβου καναλιού χωρίς μνήμη, δίνεται από τη σχέση:

$$C = max_{p(x)} I\,(X;Y) = max_{p(x)}\{H(Y) - H(Y/X)\} = max_{p(x)}\{H(X) - H(X/Y)\}$$