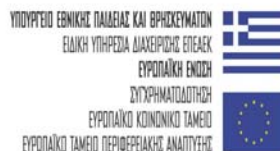




**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ  
ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ**



## **ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ II**

**Διδάσκων : ΤΑΣΟΣ ΝΤΑΓΙΟΥΚΛΑΣ, Ph.D.**

**Εξάμηνο : Δ'**

|                          |   |                                                                |
|--------------------------|---|----------------------------------------------------------------|
| <b>Τίτλος Έργου</b>      | : | ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ ΤΗΣ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ – ΤΕΙ                   |
| <b>Μέτρο</b>             | : | ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ (2004-2006)                                        |
| <b>Υποέργο 1</b>         | : | ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ                    |
| <b>Πακέτο Εργασίας 3</b> | : | ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ                                       |
| <b>Δράση 3.1</b>         | : | ΤΜΗΜΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ & ΔΙΚΤΥΩΝ<br>(ΑΥΤΕΠΙΣΤΑΣΙΑ) |
| <b>Πακέτο Εργασίας 3</b> | : | ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ                         |
| <b>Δράση 3.1</b>         | : | ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ 3                                    |
| <b>Δράση 3.1</b>         | : | ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΩΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ                |
| <b>Παραδοτέο</b>         | : | ΠΑΡΑΔΟΤΕΟ 3.1: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ              |
| <b>Ημερομηνία</b>        | : | ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ                                                    |
| <b>Έκδοση</b>            | : | 15/05/07                                                       |
| <b>Έκδοση</b>            | : | 1η                                                             |

**ΝΑΥΠΑΚΤΟΣ 2007**

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

|        |                                                                                |    |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.1    | Εισαγωγή.....                                                                  | 4  |
| 5.2    | Το μοντέλο ενός ψηφιακού επικοινωνιακού συστήματος .....                       | 5  |
| 5.1    | Εισαγωγή.....                                                                  | 9  |
| 5.2    | Παλμοκωδική διαμόρφωση .....                                                   | 15 |
| 5.2.1  | Κβάντιση.....                                                                  | 15 |
| 5.2.2  | Κωδικοποίηση.....                                                              | 18 |
| 5.3    | Διαμόρφωση Δέλτα.....                                                          | 21 |
| 5.4    | Η προσαρμοστική Διαμόρφωση Δέλτα .....                                         | 23 |
| 5.5    | Συστήματα TDM.....                                                             | 25 |
| 5.1    | Τύποι πληροφορίας.....                                                         | 27 |
| 5.2    | Ορισμός του μέτρου πληροφορίας του Shannon .....                               | 28 |
| 5.3    | Ιδιότητες της μέσης ποσότητας πληροφορίας .....                                | 28 |
| 5.4    | Συνδυασμένη και Αμοιβαία Πληροφορία.....                                       | 29 |
| 5.5    | Η υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας.....                                        | 29 |
| 5.6    | Αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας .....                                            | 31 |
| 5.7    | Διακριτή πηγή πληροφορίας χωρίς μνήμη.....                                     | 33 |
| 5.8    | Κωδικοποίηση πηγής.....                                                        | 36 |
| 5.9    | Αλγόριθμοι κωδικοποίησης.....                                                  | 37 |
| 5.9.1  | Ο Αλγόριθμος Fano .....                                                        | 38 |
| 5.9.2  | Ο Αλγόριθμος Κωδικοποίησης του Shannon .....                                   | 39 |
| 5.9.3  | Αλγόριθμος Κωδικοποίησης κατά Huffman .....                                    | 41 |
| 5.10   | Διακριτές πηγές πληροφορίας με μνήμη.....                                      | 42 |
| 5.10.1 | Εντροπία των πηγών Markoff.....                                                | 43 |
| 5.11   | Διακριτά κανάλια επικοινωνίας.....                                             | 46 |
| 5.1    | Βασικοί Ορισμοί.....                                                           | 50 |
| 5.2    | Το πρόβλημα της κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης.....                        | 51 |
| 5.3    | Κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων .....                                             | 52 |
| 5.4    | Κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων.....                                               | 54 |
| 5.5    | Γραμμικές Κώδικες.....                                                         | 55 |
| 5.6    | Μαθηματικό Υπόβαθρο .....                                                      | 55 |
| 5.7    | Εύρεση μιας βάση του δυϊκού κώδικα $C^\perp$ .....                             | 57 |
| 5.8    | Γεννήτορες Πίνακες και Κωδικοποίηση.....                                       | 58 |
| 5.9    | Πίνακας Ελέγχου ισοτιμίας και αποκωδικοποίηση .....                            | 60 |
| 5.10   | Αποκωδικοποίηση με τη βοήθεια των συνομάδων.....                               | 63 |
| 5.11   | Κώδικας Hamming .....                                                          | 67 |
| 5.12   | Κυκλικοί Κώδικες.....                                                          | 68 |
| 5.1    | Ψηφιακή Κωδικοποίηση Μετάδοσης .....                                           | 73 |
| 5.1.1  | Μονοπολική κωδικοποίηση με μη επαναφορά στο μηδέν (NRZ).....                   | 73 |
| 5.1.2  | Μονοπολική κωδικοποίηση με επαναφορά στο μηδέν (RZ).....                       | 74 |
| 5.1.3  | Διπολική κωδικοποίηση με μη επαναφορά στο μηδέν .....                          | 74 |
| 5.1.4  | Διπολική με επαναφορά στο μηδέν κωδικοποίηση .....                             | 75 |
| 5.1.5  | Αντίστροφη εναλλασσόμενου σημείου με επαναφορά στο μηδέν<br>κωδικοποίηση ..... | 75 |

|       |                                                 |    |
|-------|-------------------------------------------------|----|
| 5.1.6 | Κωδικοποίηση Manchester .....                   | 76 |
| 5.1.7 | Επιλογή του κατάλληλου τύπου κωδικοποίησης..... | 76 |
| 5.1.8 | Κωδικοποίηση με περισσότερες τιμές .....        | 78 |
| 5.1.9 | Ρυθμός μετάδοσης - Ρυθμός λαθών .....           | 79 |
| 5.2   | Επικοινωνία Βασικής Ζώνης .....                 | 79 |
| 5.3   | Ψηφιακές διαμορφώσεις αναλογικού φέροντος ..... | 82 |
| 5.3.1 | Διαμόρφωση ASK .....                            | 82 |
| 5.3.2 | Διαμόρφωση FSK δύο καταστάσεων .....            | 84 |
| 5.3.3 | Διαμόρφωση PSK .....                            | 86 |
| 5.3.4 | Αποδιαμόρφωση .....                             | 89 |

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

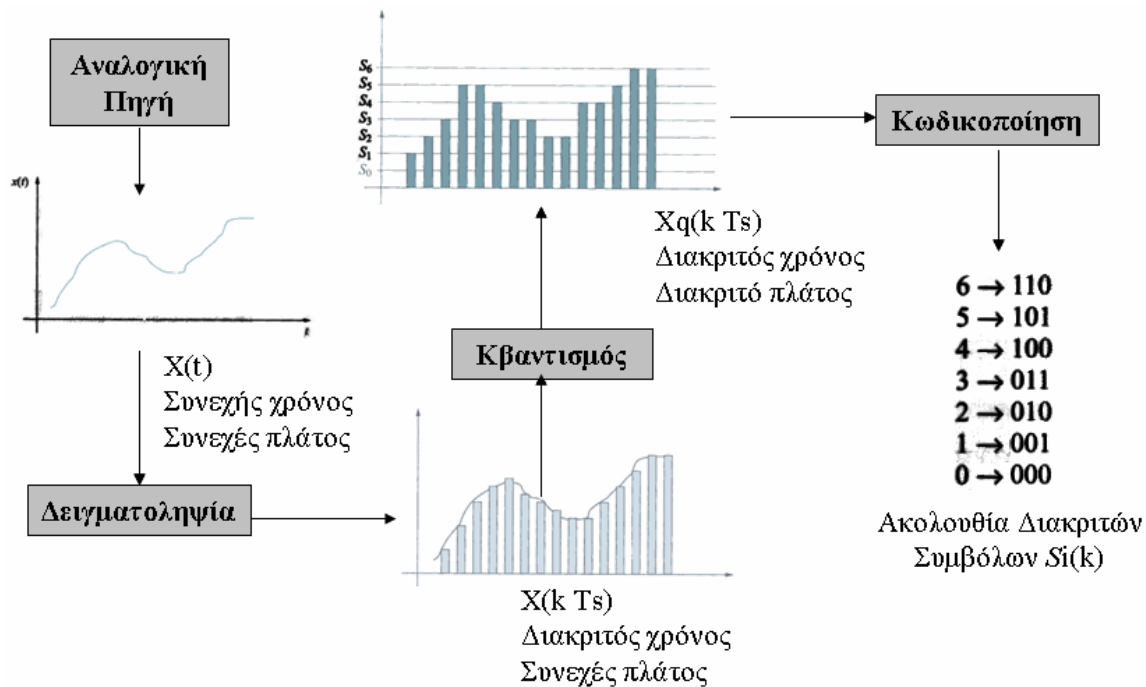
## *Σκοπός του Κεφαλαίου*

*Στο κεφάλαιο ξεκινά μια σύντομη περιγραφή για το αντικείμενο του μαθήματος, των ψηφιακών επικοινωνιακών συστημάτων, επικεντρώνοντας την προσοχή μας στα λειτουργικά τους χαρακτηριστικά.*

### **5.1 Εισαγωγή**

Τα πλεονεκτήματα των ψηφιακών συστημάτων επικοινωνιών προϋποθέτουν την μετατροπή της αναλογικής πηγής της πληροφορίας σε ψηφιακή. Τα περισσότερα σήματα διακριτού χρόνου προέρχονται από τη δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου, όπως είναι τα σήματα φωνής και ήχου, τα δεδομένα από συσκευές Radar.

Η μετατροπή του αναλογικού σήματος σε ψηφιακό διενεργείται από τη συσκευή ADC (Analog to Digital Converter). Η συσκευή ADC αποτελείται από ένα κύκλωμα δειγματοληψίας, από ένα κβαντιστή και από ένα κωδικοποιητή. Ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι πολύ σημαντικός παράγοντας στο σύστημα ψηφιοποίησης μιας αναλογικής πηγής. Ο κβαντιστής αντιστοιχεί κάθε δείγμα του σήματος με μια τιμή τάσης από ένα σύνολο προκαθορισμένων τιμών. Ο κωδικοποιητής αντιστοιχεί κάθε κβαντισμένο δείγμα του αναλογικού σήματος με ένα στοιχείο από ένα πεπερασμένο διακριτό σύνολο (σύμβολο). Η διαδικασία μετατροπής του αναλογικού σήματος σε ψηφιακό φαίνεται στο Σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 1. 1: Μετατροπή του αναλογικού σήματος σε ψηφιακό**

Η συσκευή DAC (Digital to Analog Converter), εκτελεί την αντίστροφη λειτουργία από αυτή του ADC, μετατροπή του ψηφιακού σήματος σε αναλογικό. Η συσκευή DAC αποτελείται από ένα αποκωδικοποιητή και από ένα κύκλωμα επανάκτησης του αρχικού αναλογικού σήματος. Ο αποκωδικοποιητής μετατρέπει την ακολουθία των λαμβανομένων ψηφιακών συμβόλων στις αντιστοιχιζόμενες κβαντισμένες τιμές του σήματος. Χρησιμοποιώντας τα κβαντισμένα δείγματα, το κύκλωμα επανάκτησης κατασκευάζει μια προσέγγιση του αρχικού αναλογικού σήματος.

## 5.2 Το μοντέλο ενός ψηφιακού επικοινωνιακού συστήματος

Αυτή η ενότητα περιγράφει τα βασικά στοιχεία ενός ψηφιακού συστήματος επικοινωνίας. Το γενικό μοντέλο ενός τέτοιου συστήματος φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 1. 2: Γενικό Διάγραμμα ενός Ψηφιακού Επικοινωνιακού Συστήματος**

Η ψηφιακή πηγή χρησιμοποιεί ένα πεπερασμένο πλήθος από σύμβολα για την αναπαράσταση της πληροφορίας. Η βασική λειτουργία του κωδικοποιητή της πηγής είναι η μετατροπή μιας ακολουθίας συμβόλων σε ακολουθία δυαδικών ψηφίων (bits).

Για παράδειγμα, ένας απλός τρόπος κωδικοποίησης ψηφιακής πηγής είναι η αντιστοίχιση του κάθε συμβόλου με μια ακολουθία bits σταθερού μήκους. Δύο παράμετροι λαμβάνονται υπόψη κατά την υιοθέτηση ενός σχήματος κωδικοποίησης μιας ψηφιακής πηγής: η συχνότητα εμφάνισης των διακεκριμένων συμβόλων σε ένα μήνυμα προς μετάδοση και η αυτοσυσχέτιση δύο διαδοχικών εμφανιζόμενων συμβόλων.

Στην συνέχεια η ακολουθία των bits κρυπτογραφείται για λόγους ασφαλείας, έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η εθελουσία μυστικότητα της επικοινωνίας. Αυτό επιτυγχάνεται προσθέτοντας δύο επιπλέον χαρακτηριστικά στη μεταβιβαζόμενη πληροφορία: την εξουσιοδότηση προσπέλασης και ανάγνωσης και την απόδειξη γνησιότητας.

Σε αντίθεση με τη λειτουργία κωδικοποίησης της πηγής, ο έλεγχος των σφαλμάτων προσθέτει bits στην ακολουθία, τα οποία δεν έχουν καμία πληροφοριακή

αξία. Τα bits αυτά βοηθούν στον έλεγχο ορθότητας και σε μερικές περιπτώσεις στην αποσφαλμάτωση της λαμβανόμενης πληροφορίας. Αυτά τα σφάλματα παρουσιάζονται κατά την μετάδοση της πληροφορίας σε ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι και οφείλονται συνήθως σε εσωτερικό θόρυβο από τα ηλεκτρονικά κυκλώματα του επικοινωνιακού συστήματος και σε εξωγενή θόρυβο (π.χ. βιομηχανικές παρεμβολές από κινητήρες, πομπούς κτλ, ηλιακό-κοσμικό θόρυβο). Στο σύστημα του παραλήπτη διενεργείται ο έλεγχος των σφαλμάτων. Ανάλογα με το χρησιμοποιούμενο μηχανισμό ελέγχου και το πλήθος των bits, το σύστημα θα μπορεί να εκτελέσει την πρώτη, τις δύο πρώτες ή και τις τρεις παρακάτω λειτουργίες

- Να αναγνωρίσει κάποιες καθορισμένες μορφές και συνδυασμούς σφαλμάτων
- Να εντοπίσει τα εσφαλμένα bits
- Να διορθώσει τα σφάλματα μετάδοσης

Η Συσκευή διαμόρφωσης-αποδιαμόρφωσης (modem, Modulator-DEModulator) μετατρέπει την εισερχόμενη ψηφιακή ακολουθία σε ηλεκτρικό σήμα κατάλληλο να διαδοθεί από ένα προκαθορισμένο φυσικό μέσο μετάδοσης.

Τα συνηθισμένα μέσα μετάδοσης που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση των καναλιών επικοινωνίας είναι τα ακόλουθα:

- **Χάλκινα σύρματα:** Συνήθως απαντώνται σε μορφή ζεύγους συρμάτων, τα οποία είναι μονωμένα, ώστε να μην υπάρχει επαφή μεταξύ τους, και συνεστραμμένα το ένα γύρω από το άλλο, για μείωση του θορύβου από διάφορες παρεμβολές. Χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο στο τηλεφωνικό δίκτυο, το οποίο περιορίζει το εύρος ζώνης συχνοτήτων στην περιοχή 300Hz-3.1kHz, αν και με χρήση της τεχνολογίας DSL το εύρος ζώνης μπορεί να φτάσει τα 6MHz. Χάλκινα σύρματα χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο στην διασύνδεση H/Y σε τοπικά δίκτυα. Το μειονέκτημά τους είναι η μεγάλη ευαισθησία τους σε εξωτερικές H/M παρεμβολές, το οποίο όμως αντισταθμίζεται από το πολύ χαμηλό τους κόστος.
- **Ομοαξονικό καλώδιο:** Έχει ισχυρή θωράκιση από H/M παρεμβολές και κατά συνέπεια μεγάλο εύρος φάσματος, μέχρι και 1GHz. Οι πιο συνηθισμένες χρήσεις του

είναι στη διανομή του σήματος της καλωδιακής τηλεόρασης και (παλαιότερα) στη σύνδεση H/Y σε τοπικό δίκτυο Ethernet.

- **Οπτικές ίνες:** Τα πλεονεκτήματα των οπτικών ινών είναι πολύ σημαντικά και η χρήση τους περιορίζεται μόνο από το αυξημένο τους κόστος. Η μετάδοση πραγματοποιείται με δέσμες φωτός και για το λόγο αυτό είναι απρόσβλητες από H/M παρεμβολές. Επίσης το εύρος φάσματός τους είναι πολύ μεγάλο, της τάξης των 10<sup>13</sup>Hz, ενώ και η πρώτη ύλη τους (άμμος) είναι ανεξάντλητη.
- **Ελεύθερος χώρος:** Στις ασύρματες επικοινωνίες το μέσο μετάδοσης είναι ο αέρας ή το κενό και η επικοινωνία πραγματοποιείται με εκπομπή H/M κυμάτων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι οι ραδιοφωνικές εκπομπές AM ή FM και η εκπομπή τηλεοπτικών σταθμών, όπου το εύρος ζώνης είναι 20kHz, 200kHz και 6MHz αντίστοιχα. Άλλες εφαρμογές της ασύρματης μετάδοσης είναι οι δορυφορικές εκπομπές (στα 4-6GHz), οι μικροκυματικές ζεύξεις (συχνότητες μεγαλύτερες από 3GHz) και η κινητή τηλεφωνία (στα 900MHz ή τα 1.8GHz στο GSM). Οι περιοχές συχνοτήτων για τη μετάδοση συγκεκριμένων σημάτων καθορίζονται από τοπικούς ή διεθνείς οργανισμούς με χορήγηση ειδικής άδειας.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΟ

## Σκοπός του Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές αρχές για τη μετατροπή του ψηφιακού σήματος. Η μετατροπή αυτό ονομάζεται ψηφιακή παλμική διαμόρφωση. Δύο είναι οι κύριες τεχνικές παλμικής διαμόρφωσης που θα μελετήσουμε: Τη διαμόρφωση PCM και την διαμόρφωση Δέλτα

### 5.1 Εισαγωγή

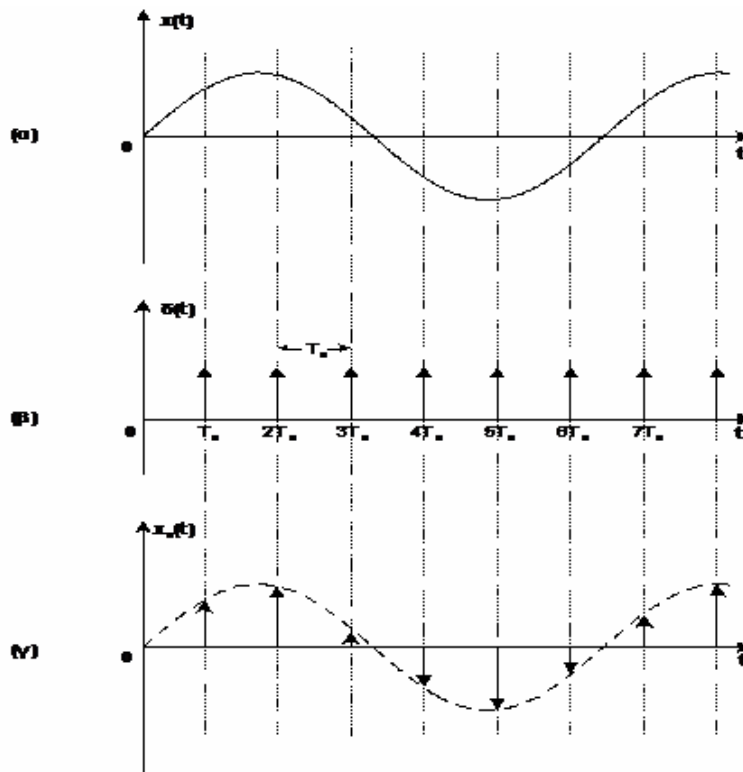
Τα περισσότερα σήματα διακριτού χρόνου προέρχονται από τη δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου, όπως είναι τα σήματα φωνής και ήχου, τα δεδομένα από συσκευές Radar. Η ψηφιακή μετάδοση αναλογικών σημάτων είναι δυνατή χάρη στο θεώρημα της δειγματοληψίας.

#### Θεώρημα Δειγματοληψίας

Ένα συνεχές σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης  $x(t)$ , με μέγιστη συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$ , μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από τα δείγματα του  $x(nT)$ , εάν αυτά λαμβάνονται περιοδικά και η περίοδος δειγματοληψίας ικανοποιεί τη σχέση  $T \leq \frac{1}{2f_s}$

**Η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας ονομάζεται και διάστημα ή περίοδος Nyquist.**

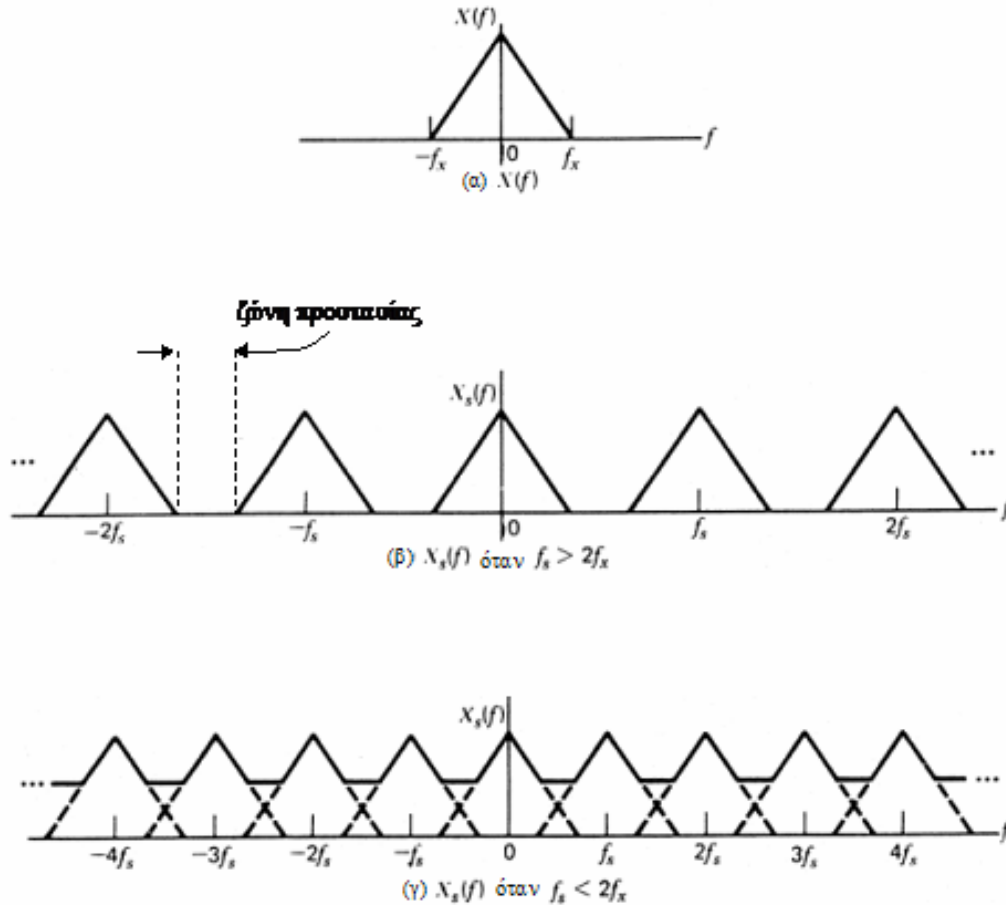
Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει την πράξη της δειγματοληψίας στο πεδίο του χρόνου. Θεωρούμε ότι το σήμα περιορισμένης ζώνης  $x(t)$  και τη σειρά στιγμιαίων παλμών  $\delta(t)$ . Οι παλμοί αυτοί έχουν απειροστό εύρος  $dt$  και εμφανίζονται περιοδικά κάθε  $T_s$  δευτερόλεπτα. Το διακριτό σήμα  $x(nT)$  προκύπτει από την ιδανική δειγματοληψία του αρχικού σήματος.



**Σχήμα 2. 1: Η πράξη της δειγματοληψίας στο πεδίο του χρόνου**

Το Σχήμα 2.2 απεικονίζει την πράξη της δειγματοληψίας στο πεδίο της συχνότητας. Ας θεωρήσουμε το φάσμα  $X(f)$  του αρχικού σήματος έχει τη μορφή του σχήματος 2.2α. Εάν το σήμα δειγματοληπτηθεί με ρυθμό μεγαλύτερο από  $2f_x$ , τότε το φάσμα του σήματος  $x_s(t)$  αποτελείται από περιοδικές επαναλήψεις του  $X(f)$ . Το φάσμα του σήματος  $x_s(t)$  συμβολίζεται ως  $X_s(f)$ . Το αρχικό φάσμα  $X(f)$  μπορεί να ανακτηθεί με την απλή διέλευση του σήματος  $x_s(t)$  από ένα βαθυπερατό φίλτρο  $[-f_x, f_x]$ .

Εάν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι μικρότερος από  $2f_x$ , τότε παρατηρείται επικάλυψη των ολισθημένων συνιστωσών του  $X(f)$ . Από το φάσμα της δειγματοληψίας δεν μπορούμε πλέον να ανακτήσουμε το φάσμα του αρχικού σήματος.



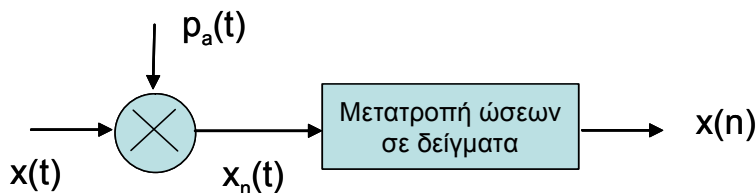
**Σχήμα 2. 2: Η πράξη της δειγματοληψίας στο πεδίο των συχνοτήτων**

Ένας απλός τρόπος που δείχνει τη διεργασία της δειγματοληψίας φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Το σήμα συνεχούς χρόνου πολλαπλασιάζεται με ακολουθία

ώσεων  $(p_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s))$  με σκοπό να σχηματιστεί το σήμα δειγματοληψίας

$(x_s(n) = x(t)p_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s))$ . Στη συνέχεια το σήμα δειγματοληψίας

μετατρέπεται σε σήμα διακριτού χρόνου αντιστοιχίζοντας τις μοναδιαίες ώσεις που απέχουν χρονικά μεταξύ τους κατά το διάστημα  $T_s$ , σε μιας ακολουθία  $x(n)$  όπου οι τιμές των δειγμάτων έχουν σαν δείκτη της ακέραια μεταβλητή  $n$ :  $x(n) = x(nT_s)$



**Σχήμα 2. 3: Φυσική Δειγματοληψία**

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι δυνατή η ανάκτηση του αρχικού σήματος αν χρησιμοποιηθεί συχνότητα δειγματοληψίας μικρότερη από συχνότητα Nyquist. Το θεώρημα της δειγματοληψίας διέλευσης ζώνης αναφέρει ότι αν ένα ζωνοπερατό σήμα  $x(t)$  έχει ένα φάσμα εύρους ζώνης συχνοτήτων  $\omega_B = 2\pi f_B$  και ανώτερο όριο συχνοτήτων  $\omega_u = 2\pi f_u$ , τότε το σήμα  $x(t)$  μπορεί να ανακτηθεί από το  $x_s(t)$  με φιλτράρισμα διέλευσης ζώνης αν  $f_s = \frac{2f_u}{k}$  όπου  $k$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν ξεπερνά τον λόγο  $\frac{f_u}{f_B}$ . Όλοι οι μεγαλύτεροι ρυθμοί δειγματοληψίας δεν είναι απαραίτητα χρησιμοποιήσιμοι εκτός και αν ξεπερνούν την  $2f_u$ .

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

2.1 Δίνεται το σήμα  $x(t) = 10 \cos 4000\pi t \cos 8000\pi t$

(α) Ποιο είναι ο ελάχιστος ρυθμός δειγματοληψίας

(β) Να επαναληφθεί το παραπάνω με βάση το θεώρημα δειγματοληψίας ζώνης διέλευσης

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2.1**

(α)  $x(t) = 4 \cos 2000\pi t \cos 8000\pi t = 2 \cos 10000\pi t + 5 \cos 6000\pi t \Rightarrow f_{\max} = 5000 \text{ Hz} \Rightarrow$

Ρυθμός Nyquist  $f_s = 2f_m = 10000 \text{ Hz}$

(β) Επειδή  $\frac{f_u}{f_B} = \frac{5}{2} = 2.5 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow f_s = \frac{2f_u}{k} = 5000 \text{ Hz}$

2.2 Αν ο ρυθμός Nyquist για το σήμα  $X_a(t)$  είναι  $f_s$ , ποιος είναι ο ρυθμός Nyquist για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα που σχηματίζονται από το  $X_a(t)$

$dX_a(t) / dt$

(α)  $X_a(2t)$

(β)  $X_a^2(t)$

(γ)  $X_a(t) \cos(2\pi f_0 t)$

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2.2**

a)  $Y_a(t) = dX_a(t) / dt \Rightarrow Y_{a\_Fourier}(j\omega) = j\omega X_{a\_Fourier}(j\omega)$ . Κατά συνέπεια εφόσον  $X_{a\_Fourier}(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > \omega_0$  ως σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης (θεώρημα Nyquist) θα είναι και  $Y_{a\_Fourier}(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > \omega_0$ . Άρα η συχνότητα Nyquist  $\Rightarrow$  διπλάσιου της μέγιστης συχνότητας του σήματος, παραμένει αμετάβλητη κατά την παραγωγή.

b) Το σήμα  $X_a(2t)$  παράγεται από το  $X_a(t)$  με συμπίεση του άξονα του χρόνου κατά ένα συντελεστή 2. Αυτό έχει αποτέλεσμα την επέκταση του άξονα συχνοτήτων κατά ένα συντελεστή πάλι 2. Αυτό γίνεται εντελώς φανερό αν θεωρήσετε το σήμα  $z(t) = \cos(2\pi f t) \Rightarrow z(2t) = \cos(2\pi [2f] t)$ . Επιπλέον είναι  $Y_a(t) = X_a(2t) \Rightarrow Y_{a\_Fourier}(j\omega) = (1/2) X_{a\_Fourier}(j\omega/2)$ . Κατά συνέπεια εφόσον  $X_{a\_Fourier}(j\omega/2) = 0$  για  $|\omega/2| > \omega_0$  ως σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης (θεώρημα Nyquist) θα είναι και  $Y_{a\_Fourier}(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > 2\omega_0$ . Άρα η συχνότητα Nyquist για το  $Y_a(t)$  είναι διπλάσια αυτής του  $X_a(t)$

c) Αν  $Y_a(t) = X_a^2(t) = X_a(t) X_a(t)$  τότε  $Y_{a\_Fourier}(j\omega) = 1/(2\pi) X_{a\_Fourier}(j\omega) * X_{a\_Fourier}(j\omega)$ , όπου  $*$  η πράξη της συνέλιξης γνωστή από τα τυπολόγια Fourier.

$$\text{Δηλ.} \quad Y_{a\_Fourier}(j\omega) = 1/(2\pi) \int_{z=-\infty}^{+\infty} X_{a\_Fourier}(jz) X_{a\_Fourier}(j(\omega-z)) dz$$

Δεδομένου τώρα ότι ισχύει  $X_{a\_Fourier}(j\omega) = 0$  για  $|\omega| > \omega_0$  ως σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης (θεώρημα Nyquist) θα είναι :  $X_{a\_Fourier}(jz) = 0$  για  $|z| > \omega_0$  και  $X_{a\_Fourier}(j(\omega-z)) = 0$  για  $|\omega-z| > \omega_0$ . Κατά συνέπεια πρέπει  $Y_{a\_Fourier}(j\omega) = 0$  με  $|z| > \omega_0$  και  $|\omega-z| > \omega_0$ . Δεδομένου ότι  $|\omega-z| \geq |\omega| - |z| \Rightarrow$  Αν  $|\omega| - |z| \geq \omega_0$  τότε ξασφαλίζεται ότι  $|\omega-z| > \omega_0$  και επομένως το αρχικό σύστημα ανισώσεων θα ικανοποιείται πλήρως αν αντικατασταθεί από το  $|\omega| - |z| \geq \omega_0$  και  $|z| > \omega_0$ . Από το νέο σύστημα ανισώσεων προκύπτει:  $|\omega| \geq |z| + \omega_0 \Rightarrow |\omega| > 2\omega_0$ . Το αποτέλεσμα είναι σαφές:  $Y_{a\_Fourier}(j\omega) = 0$

με  $|w| > 2 w_0$ . Άρα η μέγιστη συχνότητα του σήματος διπλασιάζεται και άρα και η αντίστοιχη συχνότητα Nyquist

d) Η διαμόρφωση σήματος με τον όρο  $\cos(2\pi f_0 t)$  σημαίνει μετατόπιση του φάσματος του σήματος κατά  $f_0$  προς τα δεξιά και τα αριστερά. Συνεπώς η συχνότητα Nyquist θα είναι  $f_s + 2 f_0$

2.3 Ένα σήμα συνεχούς χρόνου  $y(t)$  πρόκειται να περάσει μέσα από ένα φίλτρο με σκοπό να απομακρυνθούν συνιστώσες συχνότητας στην περιοχή των  $5\text{KHz} \leq f \leq 10\text{KHz}$ . Η διαδικασία του φιλτραρίσματος πρόκειται να πραγματοποιηθεί με τη δειγματοληψία του σήματος  $y(t)$ , το φιλτράρισμα του σήματος που προκύπτει μετά τη δειγματοληψία και με την ανακατασκευή ενός αναλογικού σήματος με τη χρήση ενός μετατροπέα DAC. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή συχνότητα δειγματοληψίας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να αποφύγουμε την επικάλυψη και τον ελάχιστο ρυθμό, να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του ιδανικού ψηφιακού φίλτρου το οποίο θα απομακρύνει τις ζητούμενες συχνότητες από το  $y(t)$

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2.3**

Η μέγιστη συχνότητα του  $y(t) \Rightarrow 20\text{KHz} \Rightarrow f_s = 40\text{KHz}$

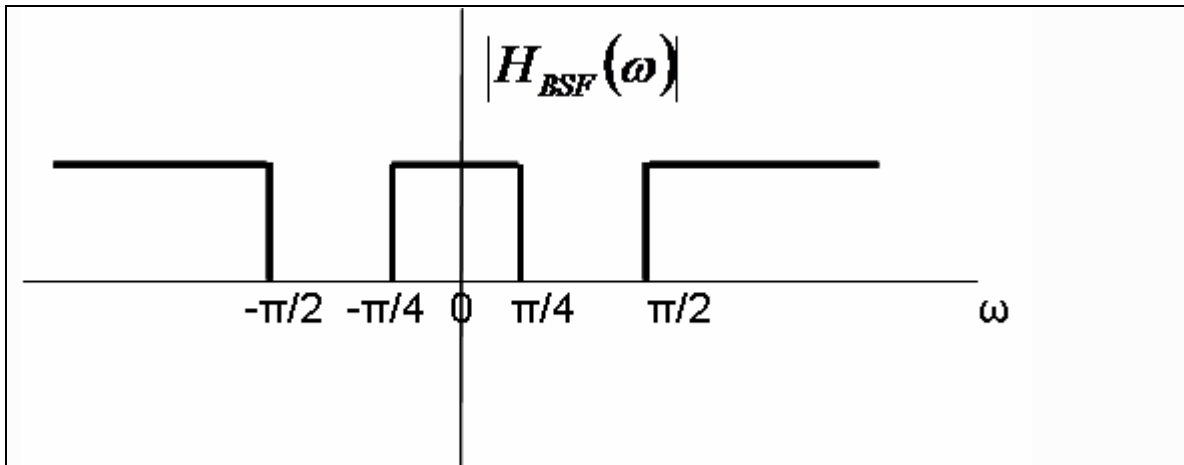
Η σχέση που συνδέει τη συνεχή συχνότητα  $\Omega$  με τη διακριτή συχνότητα  $\omega$  είναι η εξής

$$\omega = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

Επομένως η διακριτή περιοχή συχνοτήτων θα ισούται με

$$2\pi \frac{5}{40} \leq \omega \leq 2\pi \frac{10}{40} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$$

Το ζητούμενο ζωνοφρακτικό φίλτρο έχει την ακόλουθη απόκριση συχνότητας



2.4 Να υπολογισθεί η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος  $x(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$

#### ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2.4

Ο Μετασχηματισμός Fourier ενός τετραγωνικού παλμού μήκους  $[-a, a]$  είναι ο ακόλουθος  $X(f) = 2a \frac{\sin af}{af}$ . Από την δυϊκότητα του μετασχηματισμού Fourier

προκύπτει το ακόλουθο:  $\mathfrak{F}\left[\frac{2}{t} \sin at\right] = 2\pi \rho_a(-f) \Rightarrow \mathfrak{F}\left[\frac{2}{\pi t} \sin at\right] = \rho_a(f)$ .

Άρα ο ρυθμός Nyquist ισούται με  $2a$

## 5.2 Παλμοκωδική διαμόρφωση

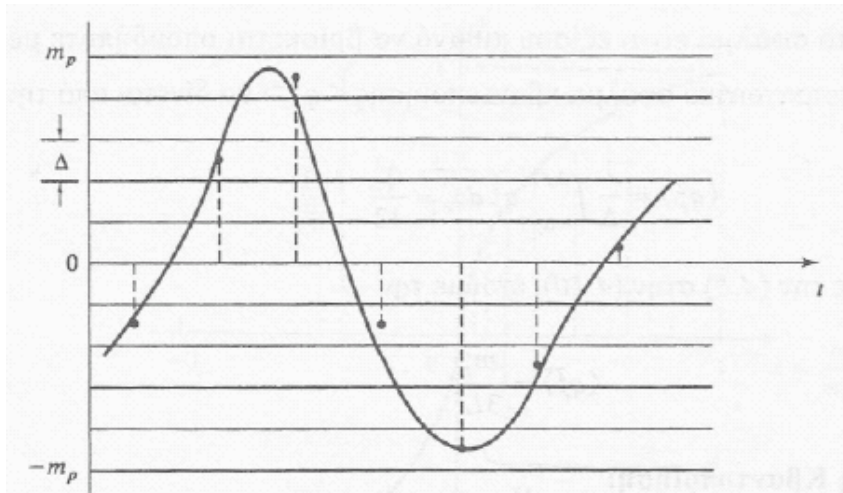
Η παλμοκωδική διαμόρφωση αποτελεί μια από τις πιο βασικές τεχνικές μετατροπής του αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Αποτελείται από δύο βασικές λειτουργίες: την κβάντιση και τη κωδικοποίηση.

### 5.2.1 Κβάντιση

Ας θεωρήσουμε ένα σήμα περιορισμένου εύρου ζώνης  $x(t)$ . Εφαρμόζοντας την πράξη της δειγματοληψίας λαμβάνουμε το διακριτό σήμα  $x_s(t) = x(nT)$   $n = 1, 2, \dots$ . Κατά την κβάντιση του σήματος οι τιμές  $x_s(nT_s)$  μετατρέπονται σε μία από τις  $Q$

επιτρεπόμενες τιμές  $m_1, m_2, \dots, m_q$  δημιουργώντας την ακολουθία παλμών  $x_a(nT_s)$ , όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί. Το πεδίο τιμών του αρχικού σήματος έχει διαιρεθεί σε επτά ζώνες και σε κάθε ζώνη αντιστοιχείται μια τιμή (π.χ. το δείγμα του σήματος που λαμβάνουμε την 6<sup>η</sup> περίοδο δειγματοληψίας βρίσκεται στην ζώνη  $(x_5, x_6]$ . Η τιμή του δείγματος μετατρέπεται σε  $x_q(6T_s) = m_6$ , εισάγοντας ένα **σφάλμα κβάντισης**  $x_q(6T_s) - m_6$ .

Γενικά υπάρχουν δύο μέθοδοι κβάντισης: η ομοιόμορφη κβάντιση και η ανομοιόμορφη κβάντιση. Στην ομοιόμορφη κβάντιση, το πεδίο τιμών του αρχικού σήματος διαμοιράζεται σε διαστήματα ίσου εύρους τα οποία ονομάζουμε και ζώνες κβάντισης. Όταν η τιμή του σήματος είναι εντός των ορίων μιας ζώνης κβάντισης τότε ως κβαντισμένη τιμή του λαμβάνουμε το μέσο του αντίστοιχου διαστήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



**Σχήμα 2. 4: Ομοιόμορφη κβάντιση**

Αν  $a$  και  $b$  είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του σήματος  $x(t)$ ,  $Q$  το πλήθος των ζωνών κβάντισης, τότε το εύρος της ζώνης ομοιόμορφης κβάντισης  $\Delta$  θα ισούται με  $\Delta = \frac{b-a}{Q}$ . Όσο μεγαλύτερες είναι οι στάθμες κβάντισης, τόσο μικρότερο είναι το



σφάλμα κβάντισης. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα κβαντισμού δίνεται από τη σχέση:

$$E[(x(t) - x_q(t))^2] = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Η ομοιόμορφη κβάντιση δεν είναι σε όλες τις περιπτώσεις αποτελεσματική (π.χ. στα σήματα ομιλίας εμφανίζονται συνήθως σήματα μικρού πλάτους και σπανιότερα σήματα μεγάλου πλάτους. Με τη χρήση της ομοιόμορφης κβάντισης ευνοούνται τα δείγματα μεγάλου πλάτους. Για την αντιμετώπιση αυτού του φαινομένου χρησιμοποιείται η ανομοιόμορφη κβάντιση. Το πεδίο τιμών του αρχικού σήματος διαμοιράζεται σε διαστήματα μεταβλητού εύρους. Τα ακραία σημεία των ζωνών κβάντισης και η αντίστοιχη στάθμη εξόδου του κβαντιστή επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η επίδραση του θορύβου κβάντισης. Στην πράξη η ανομοιόμορφη κβάντιση υλοποιείται συμπιέζοντας αρχικά το σήμα και κατόπιν χρησιμοποιείται ομοιόμορφη κβάντιση. Η συμπίεση ουσιαστικά είναι η εφαρμογή ενός μη γραμμικού μετασχηματισμού:  $y(t)=g(x(t))$ , ο οποίος μετατρέπει το σήμα εισόδου  $x(t)$  σε ένα άλλο σήμα  $y(t)$ , το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανομημένο. Στη συνέχεια, το σήμα  $y(t)$  κβαντίζεται ομοιόμορφα και μεταδίδεται. Στον παραλήπτη κόμβο χρησιμοποιείται μια αντίστροφη διάταξη που ονομάζεται αποσυμπίεσης.

Πολύ συχνά οι συμπίεστές-αποσυμπίεστές χρησιμοποιούν λογαριθμική συμπίεση με τέτοιο τρόπο ώστε οι στάθμες να πυκνώνουν στην αρχή και να αραιώνουν όλο και περισσότερο προς την κορυφή των τιμών του σήματος  $x(t)$ . Συγκεκριμένα, δύο είναι οι νόμοι λογαριθμικής που χρησιμοποιούνται: ο νόμος συμπίεσης  $\mu$  με εφαρμογή σε Αμερική και Ιαπωνία και ο νόμος συμπίεσης  $A$  με εφαρμογή στην Ευρώπη. Οι τιμές που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση των νόμων συμπίεσης είναι  $\mu=255$  και  $A=87.6$ . Αυτοί οι νόμοι καθορίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$|y| = \frac{\log\left(1 + \mu \left| \frac{x}{x_{\max}} \right| \right)}{\log(1 + \mu)}$$

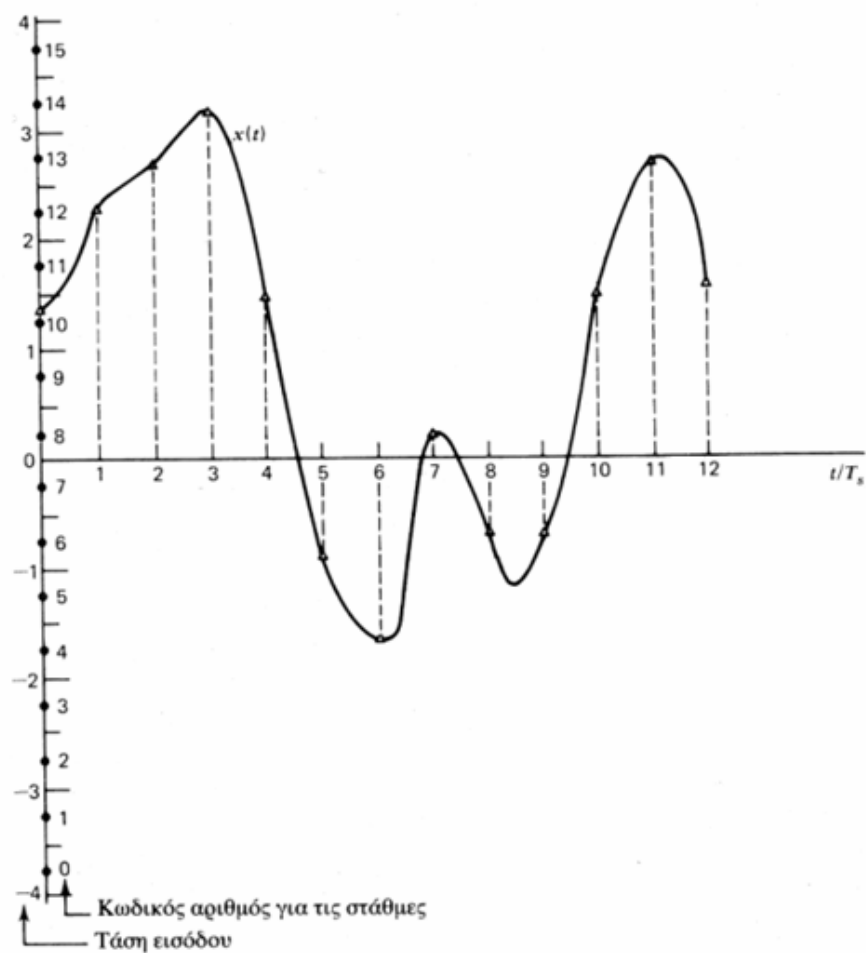
$$|y| = \begin{cases} \frac{A \left| \frac{x}{x_{\max}} \right|}{1 + \log A}, & 0 \leq \left| \frac{x}{x_{\max}} \right| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \log \left( A \left| \frac{x}{x_{\max}} \right| \right)}{1 + \log A}, & \frac{1}{A} \leq \left| \frac{x}{x_{\max}} \right| \leq 1 \end{cases}$$

### 5.2.2 Κωδικοποίηση

Στη φάση αυτή κάθε κβαντισμένη φάση αναπαριστάται με ένα κωδικό αριθμό. Έτσι αυτό που μεταδίδεται δεν είναι η ίδια η στάθμη, αλλά ο αντίστοιχος κωδικός αριθμός. Επειδή στην παλμοκωδική διαμόρφωση μεταδίδονται πλήθος ψηφίων για κάθε δείγμα του αναλογικού σήματος, το εύρος ζώνης του σήματος PCM είναι μεγαλύτερο από το εύρος ζώνης του αναλογικού σήματος. Συγκεκριμένα, εάν  $L$  είναι το πλήθος των σταθμών κβάντισης, τότε το κάθε δείγμα αντιστοιχίζεται σε  $\log_2 L$  ψηφία. Αν  $f_s$  είναι η συχνότητα δειγματοληψίας τότε ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας θα ισούται με  $f_s \log_2 L$ . Επειδή στα δυαδικά συστήματα τα κανάλια βασικής ζώνης μπορούν να μεταφέρουν μέχρι 2 bits/sec, το απαιτούμενο εύρος ζώνης του συστήματος PCM εκφράζεται από τον τύπο

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L$$

Ακολουθεί ένα παράδειγμα στο οποίο απεικονίζονται τα χαρακτηριστικά της παλμοκωδικής διαμόρφωσης



| Αριθμός Δείγματος | $x_s(t)$ | $x_q(t)$ | Αριθμός Στάθμης | Δυαδική Τιμή Στάθμης |
|-------------------|----------|----------|-----------------|----------------------|
| 0                 | 1.3      | 1.25     | 10              | 1010                 |
| 1                 | 2.3      | 2.25     | 12              | 1100                 |
| 2                 | 2.7      | 2.75     | 13              | 1101                 |
| 3                 | 3.2      | 3.25     | 14              | 1110                 |
| 4                 | 1.45     | 1.25     | 10              | 1010                 |
| 5                 | -0.9     | -0.75    | 6               | 0110                 |
| 6                 | -1.7     | -1.75    | 4               | 0100                 |
| 7                 | 0.3      | 0.25     | 8               | 1000                 |
| 8                 | 0.7      | 0.75     | 9               | 1001                 |

|    |     |      |    |      |
|----|-----|------|----|------|
| 9  | 0.7 | 0.75 | 9  | 1001 |
| 10 | 1.6 | 1.75 | 11 | 1011 |
| 11 | 2.8 | 2.75 | 13 | 1101 |
| 12 | 1.7 | 1.75 | 11 | 1011 |

**Σχήμα 2. 5: Παράδειγμα Παλμοκωδικής Διαμόρφωσης**

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

2.5 Ένα CD εγγράφει σήματα ήχου ψηφιακά χρησιμοποιώντας PCM. Υποθέστε ότι το εύρος χώνης είναι 15 KHz. Αν θεωρήσουμε ότι το σήμα είναι το τετράγωνο ημιτόνου μέγιστου πλάτους 1 Volt, ότι τα δείγματα της δειγματοληψίας υφίστανται κβάντιση  $L=65536$  επιπέδων και μετά κωδικοποιούνται σε δυαδική μορφή και ότι τέλος η συχνότητα δειγματοληψίας υπερβαίνει κατά 14 KHz την ελάχιστη απαιτούμενη, τότε να ευρεθεί το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης για την μετάδοση του κωδικοποιούμενου σήματος.

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2.5**

Nyquist  $f_s = 30000$  samples /sec

$\Delta = 1/2^{16} = 2^{-16}$  Volt αφού, λόγω τετράγωνου ημιτόνου το πλάτος του προκύπτοντος συνημιτόνου είναι  $1/2$ , άρα το διάστημα είναι  $1/2 - (-1/2) = 1$ . Δεν είναι απαραίτητο βέβαια να υπολογιστεί το  $\Delta$  και επομένως η πληροφορία για το πλάτος του σήματος είναι περιττή. Εδώ μας δίνεται καθαρά το  $L=65536 = 2^{16}$ . Προφανώς, πραγματική  $f_s = 44$  KHz  
 $\Rightarrow$  Bandwidth =  $16 \times 44000 / 2 = 704000 / 2 = 352$  KHz

2.6 Δίνεται το συνεχές σήμα  $x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12000\pi t$

- (i) Ποια είναι η συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist για αυτό το σήμα;
- (ii) Υποθέστε ότι δειγματοληπτούμε το σήμα χρησιμοποιώντας συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s=5000$ Hz. Ποιο είναι το διακριτό σήμα που παίρνουμε μετά τη δειγματοληψία;

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2.6**

(i) Οι συχνότητες που υπάρχουν στο συνεχές σήμα είναι  $f_1=1000\text{Hz}$ ,  $f_2=3000\text{Hz}$ ,  $f_3=6000\text{Hz}$ . Επομένως η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι  $f_{\max}=6000\text{Hz}$ . Βάσει του θεωρήματος δειγματοληψίας του Nyquist, η συχνότητα δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι  $f_s \geq 2 f_{\max} = 12000\text{Hz}$ . Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist είναι  $f_s = 12000\text{Hz}$ .

(ii) Μια που επιλέγεται  $f_s = 5000\text{Hz}$ , η μέγιστη συχνότητα που μπορεί να αναπαρασταθεί μοναδικά από το δειγματοληπτημένο σήμα είναι η  $f = f_s / 2 = 2500\text{Hz}$ . Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα δείγματα παίρνονται σε χρονικά διαστήματα  $t=nT_s=n/ f_s = n/5000$ , το διακριτό σήμα που παίρνουμε είναι:

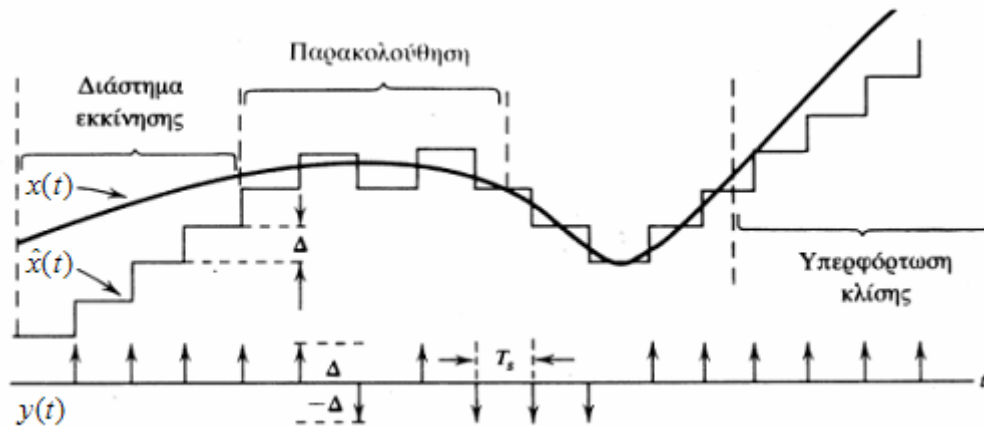
$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT_s) = 3 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n + 5 \sin 2\pi\left(\frac{3}{5}\right)n + 10 \cos 2\pi\left(\frac{6}{5}\right)n = \\ &= 3 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n + 5 \sin 2\pi\left(1 - \frac{2}{5}\right)n + 10 \cos 2\pi\left(1 + \frac{1}{5}\right)n = \\ &= 3 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n + 5 \sin 2\pi\left(-\frac{2}{5}\right)n + 10 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n = \\ &= 13 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n - 5 \sin 2\pi\left(\frac{2}{5}\right)n \end{aligned}$$

### 5.3 Διαμόρφωση Δέλτα

Η βασική ιδέα της Διαμόρφωσης Δέλτα είναι η ακόλουθη: για κάθε δείγμα ενός σήματος στέλνουμε πληροφορία σχετικά με τη μεταβολή της στάθμης του. Συγκεκριμένα, για κάθε δείγμα του σήματος στέλνεται ένα bit που υποδηλώνει αν το συγκεκριμένο δείγμα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το προηγούμενο του. Στον παραλήπτη κόμβο το εξαγόμενο σήμα αυξομειώνεται βηματικά κατά ένα προκαθορισμένο διάστημα  $\Delta$ , ανάλογα με την τιμή του σήματος εισόδου στον αποδιαμορφωτή.

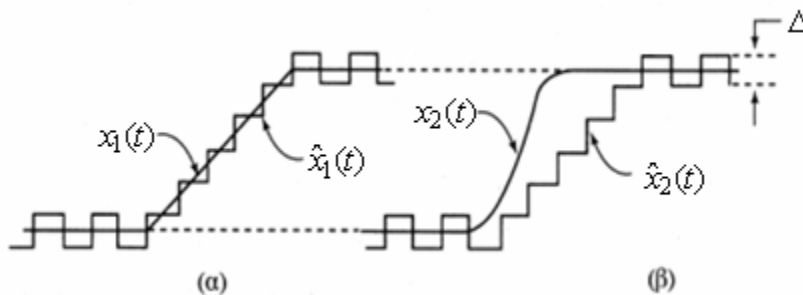
Η διαμόρφωση Δέλτα απαιτεί μικρότερους ρυθμούς μετάδοσης από την παλμοκωδική διαμόρφωση για την μεταφορά ενός αναλογικού σήματος. Επίσης, επειδή ο αλγόριθμος Δέλτα είναι εξαιρετικά απλός, τα κυκλώματα που απαιτούνται για τη διαμόρφωση, μετάδοση και αποδιαμόρφωση είναι λιγότερο πολύπλοκα από αυτά της

παλμοκωδικής διαμόρφωσης. Κατά τη διάρκεια των διαστημάτων παρακολούθησης η έξοδος εμφανίζει μεταβολές που δεν υπάρχουν στο αρχικό αναλογικό σήμα (Σχήμα 2.6)



**Σχήμα 2.6: Παράδειγμα της Διαμόρφωσης Δέλτα**

Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα που συναντάμε στην διαμόρφωση Δέλτα είναι η παραμόρφωση κλίσης. Όταν το αναλογικό σήμα μεταβάλλεται γρηγορότερα από ότι μπορεί να παρακολουθήσει ο διαμορφωτής Δέλτα, τότε η προσέγγιση του αρχικού σήματος δεν είναι ικανοποιητική. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται υπερφόρτωση κλίσης. Η υπερφόρτωση κλίσης εξαρτάται μόνο από την κλίση του σήματος. Το πρόβλημα της υπερφόρτωσης κλίσης φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

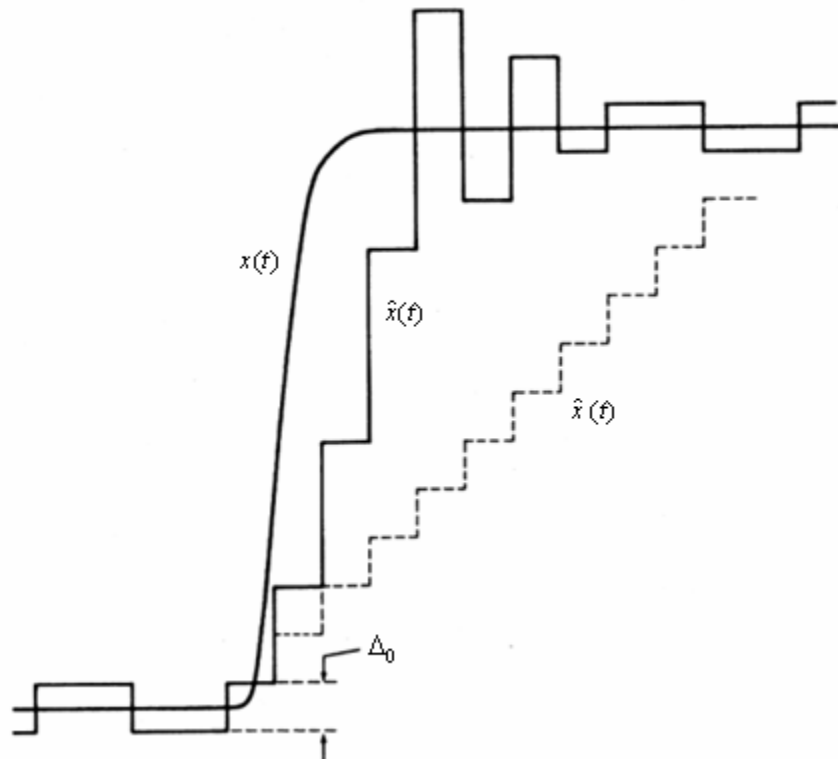


**Σχήμα 2. 7: Το πρόβλημα της υπερφόρτωσης κλίσης**

Η υπερφόρτωση κλίσης δεν εξαρτάται από το πλάτος του σήματος αλλά από την κλίση του.

## 5.4 Η προσαρμοστική Διαμόρφωση Δέλτα

Για να αντιμετωπιστεί η παραμόρφωση λόγω υπερφόρτωσης κλίσης, χρησιμοποιείται μια παραλλαγή της διαμόρφωσης Δέλτα, η οποία ονομάζεται προσαρμοστική διαμόρφωση Δέλτα (Adaptive Delta Modulation-ADM). Στην διαμόρφωση ADM, το πλάτος του βήματος δεν είναι σταθερό, αλλά αυξάνεται στα σημεία όπου το αρχικό αναλογικό σήμα παρουσιάζει μεγάλη κλίση. Ο διαμορφωτής ADM διατηρεί σταθερό το βήμα μεταβολής όταν στην μεταδιδόμενη δυαδική παλμοσειρά υπάρχουν συχνές εναλλαγές από 0 και 1, γεγονός που υποδηλώνει την ικανοποιητική προσέγγιση του σήματος. Αν όμως εμφανιστούν συνεχόμενα 0 ή 1, τότε αυτό σημαίνει ότι έχει υπάρξει μεγάλη μεταβολή στο αρχικό σήμα. Σε αυτή τη περίπτωση ο διαμορφωτής ADM αυξάνει απότομα το βήμα μεταβολής μέχρις ότου να προσεγγιστεί ικανοποιητικά το αρχικό σήμα. Στη συνέχεια, το βήμα μεταβολής μειώνεται προσπαθώντας έτσι να διατηρηθεί σε χαμηλά επίπεδα ο βηματικός θόρυβος.



Σχήμα 2.8: Παράδειγμα Προσαρμοστικής Διαμόρφωσης Δέλτα

## **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

2.7. Ένα ημιτονοειδές σήμα  $m(t) = 2 \sin(300\pi t + \pi/5)$  δειγματοληπτείται με ρυθμό 1500 δείγματα / sec. Να ευρεθεί το ελάχιστο βήμα  $\Delta$  που απαιτείται σε διαμόρφωση Δέλτα για να αποφευχθεί υπερφόρτωση κλίσης.

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2.7**

$$f_s = 1500 \text{ δείγματα / sec} \Rightarrow T_s = 1/1500$$

$$|dm(t)/dt| = 2(300\pi) \cos(300\pi t + \pi/5) \Rightarrow |dm(t)/dt|_{\max} = 2(300\pi)$$

$$\text{Για να αποφευχθεί overload, } \Delta_{\min} = T_s |dm(t)/dt|_{\max} = 2\pi/5$$

2.8 Πέντε σήματα που το καθένα έχει εύρος ζώνης συχνοτήτων 1 KHz πρόκειται να μεταδοθούν μέσω δυαδικού PCM με TDM. Το μέγιστο ανεκτό σφάλμα του πλάτους δειγματοληψίας είναι το 0.5% του μέγιστου πλάτους του σήματος. Η δειγματοληψία των σημάτων πραγματοποιείται με ρυθμό κατά 20% τουλάχιστον μεγαλύτερο από αυτόν του Nyquist. Λόγοι συγχρονισμού κλπ. απαιτούν την προσθήκη 0.5% επιπρόσθετα bits. Να προσδιοριστεί η ελάχιστη ταχύτητα μετάδοσης δεδομένων και το ελάχιστο εύρος ζώνης για την μετάδοση TDM

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2.8**

Έστω  $L$  το πλήθος των σταθμών κβάντισης,  $m_p$  το μέγιστο πλάτος ενός σήματος (ανάλογα και για τα υπόλοιπα 4 σήματα από τα 5),  $q_e$  το σφάλμα κβάντισης και  $\Delta$  το εύρος της ζώνης της ομοιόμορφης κβάντισης.

Τότε αφού τα όρια του σήματος είναι  $-m_p \leq x(t) \leq m_p \Rightarrow \Delta = 2 m_p/L$ . Δεδομένου ότι η τιμή του σήματος  $x(t)$  όταν ευρίσκεται εντός μίας συγκεκριμένης στάθμης κβάντισης κβαντίζεται στην τιμή  $x_q(t)$  που αντιστοιχεί στο μέσο του αντίστοιχου διαστήματος  $\Delta$ , αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα κβάντισης  $q_e$  μεταβάλλεται τυχαία εντός του διαστήματος  $-\Delta/2 \leq q_e \leq \Delta/2$ . Άρα το μέγιστο ανεκτό σφάλμα του πλάτους δειγματοληψίας που δεν είναι τίποτε άλλο από το μέγιστο σφάλμα κβάντισης είναι  $(q_e)_{\max} = \Delta/2 = m_p/L$  (λόγω της (1)) και λόγω της εκφώνησης πρέπει  $(q_e)_{\max} = \Delta/2 = m_p/L \leq 0.005$  πλάτος



mp => L >= 200 και άρα L = 256 = 28. Αριθμός απαιτούμενων bits λοιπόν κανονικά = 8.

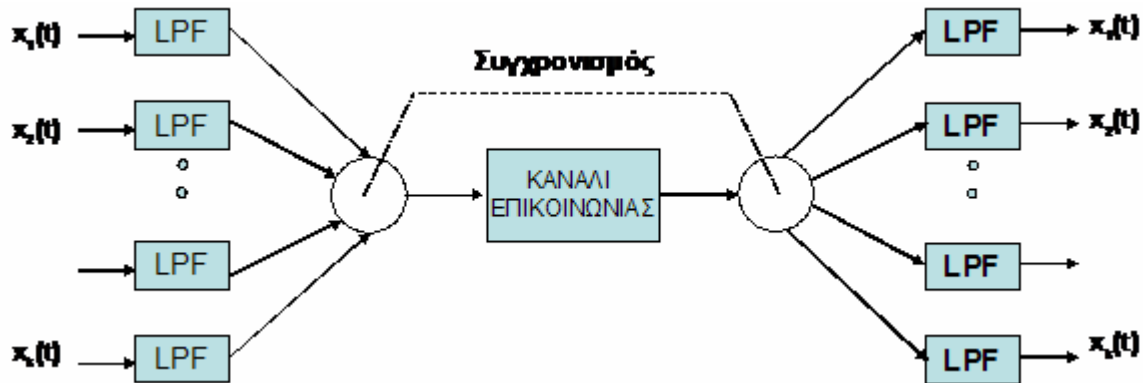
Τώρα για την Δειγματοληψία ισχύουν:  $f_{\text{Nyquist}} = 2 \times 1000 \text{ Hz} = 2000 \text{ Hz}$ . Αλλά αφού  $f_s = 120\% \times f_{\text{Nyquist}} \Rightarrow f_s = 1.2 \times 2000 = 2400 \text{ δείγματα /sec} \Rightarrow$  Συνολικός αριθμός δειγμάτων για TDM =  $5 \times (2400) = 12000 \text{ δείγματα /sec}$ . Αφού όμως απαιτούνται 0.5% πρόσθετα bits από τα 8 που απαιτούνται κανονικά =>  $(8 + 0.005 \times 8) \times 12000 \text{ bits/sec} = 96.48 \text{ kbits/sec}$  είναι η ελάχιστη ταχύτητα μετάδοσης που απαιτείται, ενώ το εύρος ζώνης που απαιτείται =  $(8 + 0.5\% \times 8) \times 12000 / 2 = 48.29 \text{ KHz}$

## 5.5 Συστήματα TDM

Η πολύπλεξη διαίρεσης χρόνου (Time Division Multiplexing-TDM) είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση πολλών αναλογικών σημάτων σε ένα κανάλι επικοινωνίας, διαιρώντας το χρονικό πλαίσιο του καναλιού σε 'χρονοθυρίδες'.

Τα συστήματα TDM χρησιμοποιούνται σε μεγάλη κλίμακα στην τηλεφωνία, στην τηλεμετρία και στην επεξεργασία πληροφοριών. Τα συστήματα TDM επιτρέπουν την ταυτόχρονη μετάδοση πολλών διαφορετικών σημάτων μέσα από ένα κανάλι. Το Σχήμα 2.9 χρησιμοποιεί τη λειτουργία των συστημάτων TDM. Κάθε σήμα πληροφορίας το οποίο θα χρησιμοποιήσει το σύστημα TDM, οριοθετείται πρώτα σε εύρος ζώνης συχνοτήτων. Αυτό γίνεται με τη χρήση ενός βαθυπερατού φίλτρου (BPF) το οποίο απομακρύνει όλες τις συχνότητες που δεν είναι σημαντικές για την επαρκή αναπαράσταση του σήματος. Στη συνέχεια, η έξοδος του βαθυπερατού φίλτρου διασυνδέονται σε μεταγωγικό διακόπτη ο οποίος είναι ένα ηλεκτρονικό επιλογικό κύκλωμα. Κάθε σήμα δειγματοληπτείται με ρυθμό Nyquist ή μεγαλύτερο. Τα δείγματα πολυπλέκονται και στο κανάλι μεταδίδεται ένας σύνθετος παλμός που αποτελείται από όλους τους διαλεγμένους παλμούς. Τα δείγματα από γειτονικά μηνύματα εισόδου απέχουν χρονικά μεταξύ τους κατά  $T_s/N$ , όπου N είναι ο αριθμός των καναλιών εισόδου. Ένα σύνολο από N παλμούς ονομάζεται πλαίσιο. Αν όλα τα σήματα μηνύματα έχουν ίσα εύρη ζώνη συχνοτήτων, τότε τα δείγματα μεταδίδονται σε σειρά. Σε περίπτωση που τα

δείγματα έχουν άνισα εύρη ζώνης συχνοτήτων, τότε τα περισσότερα δείγματα ανά μονάδα χρόνου πρέπει να μεταδοθούν από κάθε σήμα ευρείας ζώνης. Για να συμβεί αυτό, τα εύρη ζώνης των σημάτων θα πρέπει να έχουν αρμονική σχέση.



**Σχήμα 2.9: Διάγραμμα συστήματος πολύπλεξης TDM**

Στο Σχήμα 2.9 φαίνεται η πολύπλεξη διαίρεσης χρόνου σημάτων. Στην πλευρά λήψης του καναλιού, το σύνθετο μήνυμα αποπολυπλέκεται με χρήση δεύτερου μεταγωγικού διακόπτη, η έξοδος του οποίου κατανέμεται στο κατάλληλο βαθυπερατό φίλτρο για αποδιαμόρφωση. Η σωστή λειτουργία του συστήματος αυτού στηρίζεται στον σωστό συγχρονισμό μεταξύ των δύο μεταγωγικών διακοπών. Ο συγχρονισμός είναι ίσως το πιο κρίσιμο σημείο του TDM. Υπάρχουν δύο στάθμες συγχρονισμού στο TDM ο συγχρονισμός πλαισίου και ο συγχρονισμός δείγματος. Ο συγχρονισμός πλαισίου είναι αναγκαίος για να αναγνωρίζουμε πότε αρχίζει κάθε ομάδα δειγμάτων και ο συγχρονισμός λέξης είναι αναγκαίος για να διαχωρίζονται κατάλληλα τα δείγματα μέσα σε κάθε πλαίσιο.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:

## ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

### *Σκοπός του Κεφαλαίου*

*Ο Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να γνωρίσουμε την εξέλιξη της Θεωρίας της Πληροφορίας και η χρήση της στον Αποτελεσματικό Σχεδιασμό Κωδίκων Ψηφιακών Καναλιών.*

### 5.1 Τύποι πληροφορίας

Στα θέματα που απασχολούν τη Θεωρία της Πληροφορίας συγκαταλέγονται η ποσότητα της συντακτικής πληροφορίας (ή αλλιώς ονομάζεται εντροπία) και οι μονάδες μέτρησης αυτής. Αυτά είναι η ροή πληροφορίας σε κανάλια και τα θεμελιώδη όρια της πληροφορίας που είναι δυνατόν να μεταδοθούν, δηλαδή η χωρητικότητα του καναλιού, που αποτελεί το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης.

Η Θεωρία της Πληροφορίας αναφέρεται στην συντακτική πληροφορία, δηλαδή η πληροφορία εξαρτάται από την πιθανότητα εμφάνισης των μηνυμάτων και τη σχέση μεταξύ τους και όχι από τη σημασία τους.

#### ***Ποσότητα Πληροφορίας***

Η ποσότητα της πληροφορίας ορίζεται ως ο δεκαδικός λογάριθμος του πλήθους των διαφορετικών λέξεων που μπορούν να σχηματιστούν από ένα δεδομένο πλήθος συμβόλων. Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν μηνύματα μήκους  $k$  συμβόλων, από ένα αλφάβητο με  $N$  σύμβολα, η **ποσότητα πληροφορίας** είναι ίση με  $H(N^k) = \log(N^k) = k \log N$

Χρησιμοποιώντας τη βάση του λογαρίθμου του 2, η μονάδα της ποσότητας πληροφορίας καλείται bit (binary unit). Αν τώρα εξετάσουμε, ως παράδειγμα το

σχηματισμό μηνυμάτων μήκους ενός συμβόλου από ένα αλφάβητο αποτελούμενο από δύο σύμβολα, τότε η ποσότητα πληροφορίας ισούται με  $H(N^1) = \log_2(N) = \log_2 2 = 1$

## 5.2 Ορισμός του μέτρου πληροφορίας του Shannon

### *Μέση Ποσότητα Πληροφορίας ή Μέσο Πληροφοριακό Περιεχόμενο*

Αν  $Y$  είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με δειγματοχώρο  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  και συνάρτηση πιθανότητα μάζας  $p(y_i)$ , τότε η μέση ποσότητα πληροφορίας  $H(Y)$  ισούται

$$\text{με } H(Y) = -\sum_{i=1}^n p(y_i) \log p(y_i)$$

Η μέση ποσότητα πληροφορίας ονομάζεται *εντροπία*

### *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ*

3.1 Να υπολογισθεί η μέση ποσότητα πληροφορίας από την ρίψη δύο ζαριών. Να υποθέσετε ότι αποτελέσματα (4,2) και (2,4) είναι διαφορετικά.

#### *Απάντηση 3.1*

Η μέση ποσότητα πληροφορίας της ρίψης δύο ζαριών είναι η ακόλουθη

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{36} p_i \log p_i = -36 \frac{1}{36} \log \frac{1}{36} = \log 36 = 5.17 \text{ bits}$$

## 5.3 Ιδιότητες της μέσης ποσότητας πληροφορίας

Οι ιδιότητες της μέσης ποσότητας πληροφορίας είναι οι ακόλουθες:

1. Η μέση ποσότητα πληροφορίας είναι συνεχής στο  $p$ .
2. Η μέση πληροφορία είναι  $H(Y)$  είναι συμμετρική, δηλαδή διάταξη των πιθανοτήτων δεν την επηρεάζει.
3. Η εντροπία  $H(Y)$  παίρνει την μέγιστη τιμή όταν όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

4. Η εντροπία είναι προσθετική. Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται στην περίπτωση κατά την οποία δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  συνδυάζονται

## 5.4 Συνδυασμένη και Αμοιβαία Πληροφορία

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την ποσότητα πληροφορίας ενός συνδυασμού δύο τυχαίων μεταβλητών. Ένα τυχαίο πείραμα  $(X,Y)$  έχει ως δυνατά αποτελέσματα όλους τους συνδυασμούς των αποτελεσμάτων  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  και  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Η κατανομή πιθανοτήτων δίνεται από την παρακάτω σχέση  $P = \{p(x_1, y_1), p(x_1, y_2), \dots, p(x_1, y_m), \dots, p(x_n, y_1), p(x_n, y_2), \dots, p(x_n, y_m)\}$

### *Συνδυασμένη Ποσότητα Πληροφορίας*

Αν  $(X,Y)$  είναι ένα τυχαίο πείραμα με δισδιάστατο δειγματοχώρο και κατανομή πιθανοτήτων  $P$ , τότε η συνδυασμένη πληροφορία  $H(X,Y)$  ορίζεται ως εξής:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$

## 5.5 Η υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας

Μας ενδιαφέρει αρκετές φορές να υπολογίσουμε την ποσότητα πληροφορίας μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$ , όταν δίνεται το αποτέλεσμα μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής  $Y$ . Αυτό ονομάζεται υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας της  $X$  ως προς το  $Y$ .

### *Η υπό συνθήκη ποσότητα Πληροφορίας*

Η μέση υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας του τυχαίου πειράματος  $X$ , με δεδομένο το αποτέλεσμα του πειράματος  $Y$  δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i / y_j)$$

### **Συνδυασμένη Ποσότητα Πληροφορίας**

Αν  $(X,Y)$  είναι ένα τυχαίο πείραμα με δισδιάστατο δειγματοχώρο και κατανομή πιθανοτήτων  $P$ , τότε η συνδυασμένη πληροφορία  $H(X,Y)$  ορίζεται ως

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$

### **Πρόταση**

Για δύο τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  ισχύει η παρακάτω σχέση

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$$

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

3.2 Δίνονται οι τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$ , με δύο δυνατά αποτελέσματα η κάθε μία. Οι δισδιάστατες πιθανότητες δίνονται ως ακολούθως:

$$p(x_1, y_1) = \frac{1}{8}, p(x_1, y_2) = \frac{1}{8}, p(x_2, y_1) = \frac{1}{2}, p(x_2, y_2) = \frac{1}{4}.$$

1. Ποια ποσότητα πληροφορίας λαμβάνουμε όταν μας γνωστοποιείται το αποτέλεσμα της τυχαίας μεταβλητής  $X$ ; Ποιά όταν μας γνωστοποιείται το αποτέλεσμα της  $Y$
2. Ποια είναι η ποσότητα πληροφορίας που λαμβάνουμε όταν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα της συνδυασμένης διαδικασίας  $(X,Y)$
3. Ποια ποσότητα πληροφορίας λαμβάνουμε όταν μας γνωστοποιείται το αποτέλεσμα της  $Y$  αν γνωρίζουμε το  $X$ ;

### **Απάντηση 3.2**

Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες  $p(x_1)$ ,  $p(x_2)$ ,  $p(y_1)$  και  $p(y_2)$

$$p(x_1) = \sum_{j=1}^2 p(x_1, y_j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \quad p(x_2) = \sum_{j=1}^2 p(x_2, y_j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^2 p(x_i, y_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}, \quad p(y_2) = \sum_{i=1}^2 p(x_i, y_2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$1. H(X) = -\sum_{i=1}^2 p_i \log p_i = 0.813 \text{ bits}, \quad H(Y) = -\sum_{i=1}^2 p_i \log p_i = 0.956 \text{ bits}$$

$$2. H(X, Y) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) = 1.75 \text{ bits}$$

$$3. H(Y/X) = H(X, Y) - H(X) = 0.935 \text{ bits}$$

$$4. H(X/Y) = H(X, Y) - H(Y) = 1.75 - 0.95 = 0.8 \text{ bits}$$

## 5.6 Αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας

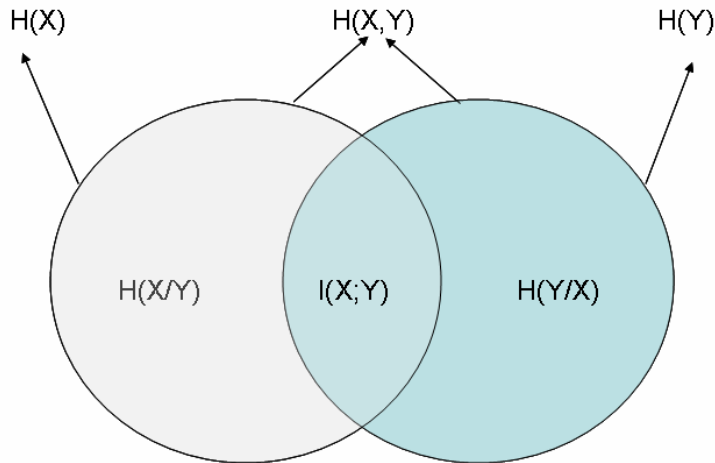
Είναι ένα μέτρο της ποσότητας πληροφορίας που μια τυχαία μεταβλητή που περιέχει για μια άλλη τυχαία μεταβλητή περιέχει για μια άλλη τυχαία μεταβλητή ή ένα μέτρο εξάρτησης μεταξύ των δύο.

### *Η αμοιβαία ποσότητα Πληροφορίας*

Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας δύο τυχαίων μεταβλητών ορίζεται ως εξής

$$I(X; Y) = H(X) - H(Y/X) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)}$$

Το Σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζει τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων μέτρων πληροφορίας.



### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.3 Θεωρούμε ένα ψηφιακό επικοινωνιακό κανάλι που χρησιμοποιεί ως εισόδους και εξόδους τα σύμβολα ‘0’ και ‘1’. Δίνονται οι τυχαίες οι παρακάτω πιθανότητες:

$p(x_1) = \frac{1}{2}, p(y_1 / x_1) = \frac{3}{4}, p(y_1 / x_2) = \frac{1}{4}$  όπου τα  $x_1, y_1$  ναφέρονται στο σύμβολο ‘0’ και τα  $x_2, y_2$  στα σύμβολα ‘1’.

1. Ποια ποσότητα πληροφορίας λαμβάνουμε όταν μας γνωστοποιείται ποιο σύμβολο έχει ληφθεί στην έξοδο όταν γνωρίζουμε ότι στην είσοδο έχει σταλεί το ‘1’.
2. Ποια ποσότητα πληροφορίας λαμβάνουμε όταν μας γνωστοποιείται ποιο σύμβολο έχει ληφθεί στην έξοδο όταν γνωρίζουμε ποιο σύμβολο έχει σταλεί στην είσοδο.
3. Ποια ποσότητα πληροφορίας λαμβάνουμε αν μας γνωστοποιείται ποιο σύμβολο έχει σταλεί στην είσοδο και ποιο σύμβολο έχει ληφθεί στην έξοδο
4. Ποια ποσότητα πληροφορίας λαμβάνουμε αν μας γνωστοποιείται ποιο σύμβολο έχει σταλεί στην είσοδο όταν γνωρίζουμε ποιο σύμβολο έχει ληφθεί στην έξοδο

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3.3

Υπολογίζουμε τις συνδυασμένες πιθανότητες

$$p(y_2 / x_1) = \frac{1}{4}, p(y_2 / x_2) = \frac{3}{4}$$



$$p(x_1, y_2) = p(y_2 / x_1)p(x_1) = \frac{1}{8}, \quad p(x_2, y_1) = p(y_1 / x_2)p(x_2) = \frac{1}{8}$$

$$p(x_1, y_1) = p(y_1 / x_1)p(x_1) = \frac{3}{8}, \quad p(x_2, y_2) = p(y_2 / x_2)p(x_2) = \frac{3}{8}$$

$$1. H(Y / x_2) = -\sum_{k=1}^2 p(y_k / x_2) \log p(y_k / x_2) = 0.81 \text{ bits}$$

$$2. H(Y / X) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 p(x_i, y_j) \log p(y_j / x_i) = 0.91 \text{ bits}$$

$$3. H(X, Y) = H(X) + H(Y/X) = 1 + 0.91 = 1.91 \text{ bits}$$

$$4. H(X/Y) = H(X, Y) - H(Y) = 1.91 - 0.96 = 0.95 \text{ bits}$$

## 5.7 Διακριτή πηγή πληροφορίας χωρίς μνήμη

Με τον όρο διακριτή πηγή πληροφορίας εννοούμε μια πηγή πληροφορίας που παράγει ακολουθίες συμβόλων. Το σύνολο των συμβόλων ονομάζεται αλφάβητο πηγής. Μια ομάδα διαδοχικών συμβόλων ονομάζεται μήνυμα ή λέξη.

Θεωρούμε ότι η πιθανότητα επιλογής ενός συμβόλου κατά τη δημιουργία ενός μηνύματος είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τις επιλογές των προηγούμενων συμβόλων. Σε αυτή την περίπτωση η διακριτή πηγή ονομάζεται διακριτή πηγή πληροφορίας χωρίς μνήμη. Έστω  $s_1, s_2, \dots, s_n$  το πλήθος των  $n$  συμβόλων του αλφάβητου  $S$ . Το πλήθος των μηνυμάτων  $q$  συμβολίζονται με  $m_1, m_2, \dots, m_q$ . Αν κάθε μήνυμα αποτελείται από 1 σύμβολα, το πλήθος των δυνατών μηνυμάτων είναι ίσο με  $n^l$ .

Η μέση ποσότητα πληροφορίας (ή το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ή εντροπία) των συμβόλων που δημιουργούνται από μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη με αλφάβητο  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  όπου  $n$  το πλήθος των συμβόλων του αλφάβητου και  $p_i$ , η πιθανότητα επιλογής του συμβόλου  $s_i$ :

$$H(S) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \text{ bits/symbol}$$

Η μέγιστη εντροπία των συμβόλων της πηγής επιτυγχάνεται όταν οι πιθανότητες επιλογής τους είναι ίσες

$$\max H(S) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n \text{ bits/symbol}$$

Ο πλεονασμός της διακριτής πηγής ορίζεται από την παρακάτω σχέση

$$red = 1 - \frac{H(S)}{\max H(S)}$$

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο μηνυμάτων της πηγής κατά ανάλογο τρόπο.  $M = \{m1, m2, \dots, mq\}$  είναι το σύνολο των δυνατών μηνυμάτων,  $q$  το πλήθος των δυνατών μηνυμάτων ( $q = n^l$ ) και  $P = \{p(m1), p(m2), \dots, p(mq)\}$ , η κατανομή πιθανοτήτων

$$H(M) = -\sum_{i=1}^q p(mi) \log p(mi) \text{ bits/message}$$

Επίσης ισχύει και η ακόλουθη σχέση  $H(M) = qH(S)$

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

3.4 Μια πηγή πληροφορίας παράγει σύμβολα, τα οποία ανήκουν στο αλφάβητο  $S = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta\}$ . Οι πιθανότητες των συμβόλων αυτών είναι  $1/32, 1/16, 1/8, 1/8, 1/8, 1/2$  και  $1/32$ , αντίστοιχα. Θεωρώντας την πηγή χωρίς μνήμη, ζητείται να προσδιορίσετε ή να υπολογίσετε

1. Το σύμβολο της πηγής με το πιο χαμηλό πληροφορικό περιεχόμενο.
2. Τα σύμβολα της πηγής με το πιο υψηλό πληροφορικό περιεχόμενο.
3. Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής,
4. Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο σύμβολα.
5. Τον πλεονασμό της πηγής, και,

6. Το μέσο ρυθμό πληροφορίας της πηγής για ρυθμό 12500 συμβόλων /sec.

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3.4**

1. Το πληροφορικό περιεχόμενο ενός συμβόλου 'x' δίνεται από τον αρνητικό λογάριθμο της πιθανότητας παραγωγής του.

Επομένως, το σύμβολο με την πιο υψηλή πιθανότητα παραγωγής έχει το πιο χαμηλό πληροφορικό περιεχόμενο. Στην προκειμένη περίπτωση, για το σύμβολο 'ζ' έχουμε  $H(\zeta) = -\log(1/2) = 1$  bits.

2. Το σύμβολο με την πιο μικρή πιθανότητα παραγωγής έχει το πιο υψηλό πληροφορικό περιεχόμενο. Στην προκειμένη περίπτωση, τα σύμβολα 'α' και 'η' έχουν την πιο χαμηλή πιθανότητα παραγωγής, η οποία είναι ίση με 1/32, δηλαδή  $H(\alpha) = H(\eta) = -\log(1/32) = 5$  bits.

3. Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής υπολογίζεται με τη βοήθεια της ακόλουθης σχέσης

$$\begin{aligned} H(S) &= -\sum_{i=1}^7 p_i \log p_i \\ &= -\frac{1}{32} \log \frac{1}{32} - \frac{1}{16} \log \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{32} \log \frac{1}{32} \\ &= (35/16) = 2,1875 \text{ bits/symbol.} \end{aligned}$$

4. Για τον υπολογισμό του μέσου πληροφορικού περιεχομένου των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από 2 σύμβολα, αφού η πηγή είναι χωρίς μνήμη, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τη μέση ποσότητα πληροφορίας συμβόλων με το πλήθος των συμβόλων από τα οποία αποτελούνται τα μηνύματα. Δηλαδή,  $H(M) = 2 H(S) = 4,375$  bits.

5.  $\text{red} = 1 - H(S)/\max H(S) = 1 - H(S)/\log 7 = 1 - (2,1875/2,8) = 1 - 0,781 = 0,2186$ .

6.  $R = rH(S) = 12500 \times (2,1875) = 27343,75$  bits/sec.

## 5.8 Κωδικοποίηση πηγής

Η κωδικοποίηση πηγής είναι η διαδικασία μετατροπής των ακολουθιών συμβόλων που παράγει η πηγή σε ακολουθίες συμβόλων κώδικα (δυαδική ακολουθία), ώστε να αφαιρείται ο πλεονασμός και να προκύπτει συμπιεσμένη μορφή αναπαράστασης των μηνυμάτων.

Τα διαφορετικά κωδικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή των δυαδικών ακολουθιών απαρτίζουν το κωδικό αλφάβητο. Κώδικας είναι το σύνολο των κωδικών λέξεων και η αντιστοίχισή τους με τα σύμβολα της πηγής.

Αν όλες οι κωδικές λέξεις είναι διαφορετικές, ο κώδικας ονομάζεται ως μη ιδιάζων. Αν και οι δυνατές ακολουθίες κωδικών λέξεων είναι διαφορετικές, ο κώδικας είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος. Αν ένας μοναδικός αποκωδικοποιήσιμος κώδικας επιτρέπει την άμεση αποκωδικοποίηση κάθε συμβόλου μόλις λαμβάνεται στον προορισμό, τότε χαρακτηρίζεται ως άμεσος κώδικας.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.5 Θεωρώντας για την πηγή του Θέματος 2 τους ακόλουθους κώδικες I, II, III και IV:

|   | I  | II | III  | IV   |
|---|----|----|------|------|
| φ | 0  | 00 | 1    | 1    |
| χ | 10 | 01 | 10   | 01   |
| ψ | 01 | 10 | 100  | 001  |
| ω | 1  | 11 | 1000 | 0001 |

Ζητείται να εξετάσετε αν οι κώδικες I, II, III και IV είναι

1.non- singular;

2.μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι

3.άμεσοι;

**Απάντηση 3.5**

1. Όλοι οι κώδικες είναι μη ιδιάζοντες , αφού ο καθένας αποτελείται από διαφορετικές κωδικές λέξεις.
2. Όλοι οι κώδικές είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι εκτό του I. Σε σχέση με τον κώδικα I, παρατηρούμε ότι η ακολουθία κωδικών λέξεων 1001 θα μπορούσε να προκύψει από διάφορες ακολουθίες συμβόλων όπως ‘χψ’ ή ‘χφω’ κλπ.
3. Μόνο οι κώδικες II και IV είναι άμεσοι. Στην περίπτωση του κώδικα I, αν ο δέκτης λάβει το ‘0’ δεν θα ξέρει αν είναι η πρώτη κωδική λέξη ή το 1ο κωδικό σύμβολο της 3ης κωδικής λέξης κοκ. Σχετικά με τον κώδικα III, όταν ο δέκτης λάβει τα ‘10’ δεν μπορεί ξέρει αν είναι η 2η κωδική λέξη ή τα 2 πρώτα σύμβολα της 3ης κωδικής λέξης κοκ.

Για κάθε άμεσο κώδικα με πλήθος συμβόλων  $q$  και μήκος κωδικών λέξεων  $l_i$ , όπου  $i=1,2,...,n$  και  $n$  το πλήθος των συμβόλων της πηγής, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα  $\sum_{i=1}^n q^{l_i} = 1$ . Εάν υπάρχει ένα σύνολο κωδικών λέξεων που ικανοποιούν την προηγούμενη ανισότητα, τότε υπάρχει ένας άμεσος κώδικας με κωδικές λέξεις που έχουν αυτά τα μήκη.

Η επίδοση του κώδικα ορίζεται ως ο λόγος του μέσου πληροφοριακού περιεχομένου των συμβόλων της πηγής προς το γινόμενο του μέσου μήκους των κωδικών λέξεων με το λογάριθμο του πλήθους των κωδικών συμβόλων.

$$a = \frac{H(C)}{\left( \sum_{i=1}^n p_i l_i \right) \log q}$$

## 5.9 Αλγόριθμοι κωδικοποίησης

Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι κωδικοποίησης για την εύρεση αποδοτικών κωδίκων. Σε αυτούς συγκαταλέγονται οι αλγόριθμοι κωδικοποίησης του Fano, του Shannon και του Huffman. Οι αλγόριθμοι αυτοί περιγράφονται στις ακόλουθες παραγράφους.

### 5.9.1 Ο Αλγόριθμος Fano

Ο αλγόριθμος Fano αποτελείται από τα παρακάτω βήματα.

1. Τα σύμβολα της πηγής διατάσσονται σε κατά φθίνουσα τάξη με βάση την πιθανότητα εμφάνισης.
2. Στη συνέχεια, τα σύμβολα χωρίζονται σε τόσες ομάδες όσα και τα κωδικά σύμβολα κατά τέτοιον τρόπο ώστε να προκύπτουν (αν αυτό είναι εφικτό), ίσες αθροιστικές πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων. Στην περίπτωση δυαδικού κώδικα, τα  $n$  σύμβολα της πηγής χωρίζονται σε 2 ομάδες, επιλέγοντας το  $k$  έτσι ώστε η παρακάτω διαφορά των αθροιστικών πιθανοτήτων εμφάνισης των συμβόλων να ελαχιστοποιείται: 
$$\left| \sum_{i=1}^k p_i - \sum_{i=k+1}^n p_i \right|$$
3. Για κάθε ομάδα συμβόλων της πηγής, επιλέγεται ένα από τα κωδικά σύμβολα ως το πρώτο των κωδικών λέξεων που θα προκύψουν.
4. Για κάθε ομάδα συμβόλων της πηγής επαναλαμβάνονται τα βήματα 2 και 3 έως ότου η κάθε ομάδα αποτελείται από μόνο ένα σύμβολο. Σε κάθε επανάληψη του βήματος 3, επιλέγεται ένα ακόμα κωδικό σύμβολο για το σχηματισμό των κωδικών λέξεων.

#### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

3.6 Μια πηγή παράγει 8 διαφορετικά σύμβολα, τα A, B, Γ, Δ, E, Z, H και Θ, με πιθανότητες 1/8, 1/4, 1/16, 1/32, 1/4, 1/32, 1/8 και 1/8, αντίστοιχα. Ζητούνται τα ακόλουθα: Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Fano, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

#### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3.7**

Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

Τα σύμβολα της πηγής αφού διαταχθούν σε τάξη φθίνουσας πιθανότητας χωρίζονται σε δύο ομάδες με το δυνατόν ίσες αθροιστικές πιθανότητες (δείτε τον πίνακα). Τα δύο πρώτα σύμβολα περιλαμβάνονται στην 1η ομάδα και τα υπόλοιπα στη 2η ομάδα.

Επιλέγουμε το ‘0’ ως το πρώτο κωδικό σύμβολο των κωδικών λέξεων της 1ης ομάδας και το ‘1’ για τις κωδικές λέξεις της 2ης ομάδας. Η πρώτη ομάδα χωρίζεται σε 2 υποομάδες με ένα σύμβολο η καθεμία. Επιλέγουμε και πάλι το ‘0’ για την 1η υποομάδα και το ‘1’ για τη 2. Έτσι καταλήγουμε στις κωδικές λέξεις των δύο πρώτων συμβόλων του πίνακα, τις ‘00’ και ‘01’. Κατά τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε και σε σχέση με τη δεύτερη ομάδα, την οποία χωρίζουμε σε δύο υποομάδες, εκ των οποίων η 1η περιλαμβάνει το 3ο και το 4ο σύμβολο του πίνακα και η άλλη όλα τα υπόλοιπα σύμβολα. Έτσι, καταλήγουμε στις ζητούμενες κωδικές λέξεις (δείτε τον πίνακα).

| Σύμβολα      | Πιθανότητες | Κώδικας       |
|--------------|-------------|---------------|
| $B=S_1$      | 1/4         | 00 (11)       |
| $E=S_2$      | 1/4         | 01 (10)       |
| $A=S_3$      | 1/8         | 100 (011)     |
| $H=S_4$      | 1/8         | 101 (010)     |
| $\Theta=S_5$ | 1/8         | 110 (001)     |
| $\Gamma=S_6$ | 1/16        | 1110 (0001)   |
| $\Delta=S_7$ | 1/32        | 11110 (00001) |
| $Z=S_8$      | 1/32        | 11111 (00000) |

### 5.9.2 Ο Αλγόριθμος Κωδικοποίησης του Shannon

Τα βήματα του αλγόριθμου Shannon είναι τα ακόλουθα:

1. Τα σύμβολα της πηγής διατάσσονται σε κατά φθίνουσα τάξη με βάση την πιθανότητα εμφάνισης.
2. Για κάθε σύμβολο  $S_j$ , του οποίου η πιθανότητα εμφάνισης είναι  $p(S_j)$ , υπολογίζεται η αθροιστική πιθανότητα  $P_i$ , με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$P_i = \sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)$$

3. Το πλήθος των κωδικών συμβόλων της λέξης η οποία αναπαριστά το σύμβολο της πηγής  $S_i$  είναι ίσο με το ακέραιο αριθμό  $l_i$ , που ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα

$$\log \frac{1}{p(S_i)} \leq l_i \leq 1 + \log \frac{1}{p(S_i)}.$$

4. Η κωδική λέξη  $c_i$  του συμβόλου της πηγής είναι το δυαδικό ανάπτυγμα του κλάσματος  $P_i$  (μόνο τα πρώτα του αναπτύγματος λαμβάνονται υπόψη).

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.7 Μια πηγή παράγει 8 διαφορετικά σύμβολα, τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ, με πιθανότητες 1/8, 1/4, 1/16, 1/32, 1/4, 1/32, 1/8 και 1/8, αντίστοιχα. Ζητούνται τα ακόλουθα: Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Shannon, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3.7

| Σύμβολα<br>Πηγής | Πιθανότητες<br>Συμβόλων | $P_i$         | Μήκος<br>$l_i$ | Ανάπτυγμα<br>του $P_i$ | Κωδικές<br>Λέξεις |
|------------------|-------------------------|---------------|----------------|------------------------|-------------------|
| $B=S_1$          | 1/4                     | $P_1 = 0$     | $l_1 = 2$      | .00000                 | 00                |
| $E=S_2$          | 1/4                     | $P_2 = 1/4$   | $l_2 = 2$      | .01000                 | 01                |
| $A=S_3$          | 1/8                     | $P_3 = 1/2$   | $l_3 = 3$      | .10000                 | 100               |
| $H=S_4$          | 1/8                     | $P_4 = 5/8$   | $l_4 = 3$      | .10100                 | 101               |
| $\Theta=S_5$     | 1/8                     | $P_5 = 6/8$   | $l_5 = 3$      | .11000                 | 110               |
| $\Gamma=S_6$     | 1/16                    | $P_6 = 7/8$   | $l_6 = 4$      | .11100                 | 1110              |
| $\Delta=S_7$     | 1/32                    | $P_7 = 15/16$ | $l_7 = 5$      | .11110                 | 11110             |
| $Z=S_8$          | 1/32                    | $P_8 = 31/32$ | $l_8 = 5$      | .11111                 | 11111             |



### 5.9.3 Αλγόριθμος Κωδικοποίησης κατά Huffman

Ο αλγόριθμος κατά Huffman είναι ο ακόλουθος:

1. Τα σύμβολα της πηγής διατάσσονται κατά φθίνουσα πιθανότητα εκπομπής
2. Τα δύο τελευταία σύμβολα της πηγής με μικρότερη πιθανότητα παραγωγής ενώνονται σε ένα. Η πιθανότητα του συμβόλου είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των δύο συμβόλων.
3. Τα βήματα 1 και 2 επαναλαμβάνονται έως ότου το αλφάβητο της πηγής αποτελείται από δύο σύμβολα. Σε αυτά τα σύμβολα αποδίδονται το 0 και 1.
4. Τα ψηφία '0' και '1' αποδίδονται στη θέση του ενός και του άλλου συμβόλου αντίστοιχα, τα οποία στο βήμα 2 συγχωνεύτηκαν σε ένα
5. Οι κωδικές λέξεις των συμβόλων σχηματίζονται από όλα τα ψηφία '0' και '1' που σχετίζονται με αυτά τα σύμβολα (από το τέλος προς την αρχή).

#### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

3.8 Μια πηγή παράγει 8 διαφορετικά σύμβολα, τα A, B, Γ, Δ, E, Z, H και Θ, με πιθανότητες  $1/8$ ,  $1/4$ ,  $1/16$ ,  $1/32$ ,  $1/4$ ,  $1/32$ ,  $1/8$  και  $1/8$ , αντίστοιχα. Ζητούνται τα ακόλουθα: Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Huffman, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

#### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3.8**

| Σύμβολα      |          |          |         |         |         |         |         | Κώδικας |
|--------------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $B=S_1$      | 1/4      | 1/4      | 1/4     |         | 1/4     | 1/2     | 1/2     | 10      |
| $E=S_2$      | 1/4      | 1/4      | 1/4     |         | 1/4     | 1/4 (0) | 1/2 (1) | 11      |
| $A=S_3$      | 1/8      | 1/8      | 1/8     | 1/4     | 1/4     | 1/4 (1) |         | 010     |
| $H=S_4$      | 1/8      | 1/8      | 1/8     | 1/8 (0) | 1/4 (1) |         |         | 011     |
| $\Theta=S_5$ | 1/8      | 1/8      | 1/8 (0) | 1/8 (1) |         |         |         | 000     |
| $\Gamma=S_6$ | 1/16     | 1/16 (0) | 1/8 (1) |         |         |         |         | 0010    |
| $\Delta=S_7$ | 1/32 (0) | 1/16 (1) |         |         |         |         |         | 00100   |
| $Z=S_8$      | 1/32 (1) |          |         |         |         |         |         | 00111   |

## 5.10 Διακριτές πηγές πληροφορίας με μνήμη

Στην προηγούμενη Ενότητα γνωρίσαμε πηγές χωρίς μνήμη. Στην πραγματικότητα, όλες οι πηγές πληροφορίας παράγουν ακολουθίες συμβόλων που είναι στατιστικά εξαρτημένες. Η εξάρτηση αυτή μπορεί να υφίσταται για ένα περιορισμένο αριθμό συμβόλων. Έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν Μαρκοβιανές αλυσίδες ως στατιστικά υποδείγματα για τις πηγές πληροφορίας.

Μια τυχαία διαδικασία είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Γενικά, μπορεί να υφίσταται οποιαδήποτε εξάρτηση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών της ακολουθίας. Μια τυχαία διαδικασία  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  χαρακτηρίζεται ως διαδικασία Markoff

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1} | Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_1 = y_1) = P(Y_{n+1} = y_{n+1} | Y_n = y_n)$$

### **Ορισμός**

Η διαδικασία Markoff χαρακτηρίζεται ως χρονικά αμετάβλητη αν η υπό συνθήκη πιθανότητα  $P(Y_{n+1} = b | Y_n = a)$  δεν εξαρτάται από το n, για  $n=1,2,\dots$

Μια αμετάβλητη στο χρόνο Μαρκοβιανή αλυσίδα περιγράφεται πλήρως από την αρχική της κατάσταση και τον πίνακα των πιθανοτήτων μετάβασης  $P = [P_{ij}]$ , όπου  $P_{ij} = P\{Y_{n+1} = j | Y_n = i\}$  και i, j οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών οι οποίες ανήκουν στο σύνολο των δυνατών καταστάσεων  $\{1,2,\dots,m\}$ . Ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης καλείται και πίνακας μετάβασης. Η πιθανότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας να βρίσκεται τη χρονική στιγμή n στην κατάσταση i συμβολίζεται με  $p_i(n)$ . Αν ισχύει  $p_i(n) = p_i(n+1) = \pi_i$ , τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα χαρακτηρίζεται ως στατική. Για μια στατική Μαρκοβιανή αλυσίδα ισχύει η σχέση  $\pi P = \pi$

#### **5.10.1 Εντροπία των πηγών Markoff**

Η εντροπία της πηγής ορίζεται ως ο μέσος όρος της εντροπίας των συμβόλων που εκπέμπονται από κάθε κατάσταση.

##### **Εντροπία της πηγής Markoff**

Η εντροπία των συμβόλων που εκπέμπονται από την κατάσταση i, δίνεται από την

παρακάτω σχέση: 
$$H(K_i) = - \sum_{j=1}^m P_{ij} \log P_{ij} \text{ bits/symbol}$$

Η εντροπία της πηγής, που είναι ο μέσος όρος της εντροπίας των καταστάσεων δίνεται

από την σχέση 
$$H(S) = - \sum_{i=1}^m p_i H(K_i) = - \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^m P_{ij} \log P_{ij} \text{ bits/symbol}$$

Η μέση ποσότητα πληροφορίας μηνυμάτων της πηγής συμβολίζει την πιθανότητα εκπομπής του μηνύματος m:  $H(M) = -\sum_i p(m_i) \log p(m_i)$

Το μέτρο του πλεονασμού εξάρτησης δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$red = 1 - \frac{H_{\text{με μνήμη}}(S)}{H_{\text{χωρίς μνήμη}}(S)}$$

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο του ολικού πλεονασμού, το οποίο αναφέρεται στην εντροπία της πηγής με μνήμη σε σύγκριση με τη μέγιστη δυνατή εντροπία της πηγής χωρίς μνήμη:  $red_{ολ} = 1 - \frac{H_{\text{με μνήμη}}(S)}{\max H_{\text{χωρίς μνήμη}}(S)} = 1 - \frac{H_{\text{με μνήμη}}(S)}{\log q}$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.9 Μια πηγή Markoff εκπέμπει τα σύμβολα  $\chi$ ,  $\psi$  και  $\omega$ . Η πηγή χαρακτηρίζεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης (Μαρκοβιανή αλυσίδα πρώτης τάξης):

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να υπολογιστούν

1. Η εντροπία της πηγής.
2. Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο μηνυμάτων αποτελούμενων από δύο σύμβολα.
3. Ο πλεονασμός, ο πλεονασμός εξάρτησης και ο ολικός πλεονασμός της διακριτής πηγής.

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3.9

1. Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων παραγωγής των  $\chi$ ,  $\psi$  και  $\omega$  καταστρώνουμε και επιλύουμε σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Θεωρώντας  $\pi_1 = p(\chi)$ ,  $\pi_2 = p(\psi)$  και  $\pi_3 = p(\omega)$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
 (1) \pi_1 &= \pi_1 P(\chi/\chi) + \pi_2 P(\chi/\psi) + \pi_3 P(\chi/\omega) = \pi_1 (0,5) + \pi_2 (0) + \pi_3 (0,5), \\
 (2) \pi_2 &= \pi_1 P(\psi/\chi) + \pi_2 P(\psi/\psi) + \pi_3 P(\psi/\omega) = \pi_1 (0) + \pi_2 (0,5) + \pi_3 (0,25), \\
 (3) \pi_3 &= \pi_1 P(\omega/\chi) + \pi_2 P(\omega/\psi) + \pi_3 P(\omega/\omega) = \pi_1 (0,5) + \pi_2 (0,5) + \pi_3 (0,25), \\
 (4) \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1.
 \end{aligned}$$

Από την (1) λαμβάνουμε  $0,5\pi_1 = 0,5\pi_3$  και επομένως  $\pi_1 = \pi_3$  και από τη (2)  $0,5\pi_2 = 0,25\pi_3$  και επομένως  $2\pi_2 = \pi_3$ . Η (3) δεν μας προσφέρει κάτι. Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα αυτά στην (4) λαμβάνουμε  $\pi_3 + 0,5\pi_3 + \pi_3 = 1$ , δηλαδή  $\pi_3 = 0,4$  και επομένως  $\pi_1 = 0,4$  και  $\pi_2 = 0,2$ .

Η εντροπία των συμβόλων που εκπέμπεται από κάθε κατάσταση δίνεται κατωτέρω:

$$H(K_1) = -0,5 \log 0,5 - 0 - 0,5 \log 0,5 = 1$$

$$H(K_2) = -0 - 0,5 \log 0,5 - 0,5 \log 0,5 = 1$$

$$H(K_3) = -0,5 \log 0,5 - 0,25 \log 0,25 - 0,25 \log 0,25 = 1,5$$

Για να υπολογίσουμε την εντροπία της πηγής αρκεί να υπολογίσουμε τη μέση τιμή των ανωτέρω, λαμβάνοντας υπόψη και τη βαρύτητα καθεμιάς κατάστασης (δηλαδή την πιθανότητά της):

$$H(S) = 0,4 \times 1 + 0,2 \times 1 + 0,4 \times 1,5 = 1,2 \text{ bits/symbol.}$$

2. Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες όλων των δυνατών μηνυμάτων μήκους δύο συμβόλων. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας του μηνύματος  $(\chi, \chi)$ , η οποία είναι συνδυασμένη πιθανότητα, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την πιθανότητα  $p(\chi)$  με την πιθανότητα  $P(\psi/\chi)$ , δηλαδή  $p(m_1) = p(\chi, \chi) = \pi_1 P_{11} = \pi_1 P(\chi/\chi) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$ . Κατά τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και τις πιθανότητες των υπόλοιπων 8 μηνυμάτων. Έτσι λοιπόν λαμβάνουμε:

$$p(m_1) = p(\chi, \chi) = \pi_1 P_{11} = \pi_1 P(\chi/\chi) = 0,2,$$

$$p(m_2) = p(\chi, \psi) = \pi_1 P_{12} = \pi_1 P(\psi/\chi) = 0,$$

$$p(m_3) = p(\chi, \omega) = \pi_1 P_{13} = \pi_1 P(\omega/\chi) = 0,2,$$

$$\begin{aligned}
p(m4) &= p(\psi, \chi) = \pi_2 P_{21} = \pi_2 P(\chi/\psi) = 0, \\
p(m5) &= p(\psi, \psi) = \pi_2 P_{22} = \pi_2 P(\psi/\psi) = 0,1, \\
p(m6) &= p(\psi, \omega) = \pi_2 P_{23} = \pi_2 P(\omega/\psi) = 0,1, \\
p(m7) &= p(\omega, \chi) = \pi_3 P_{31} = \pi_3 P(\chi/\omega) = 0,2, \\
p(m8) &= p(\omega, \psi) = \pi_3 P_{32} = \pi_3 P(\psi/\omega) = 0,1, \\
p(m9) &= p(\omega, \omega) = \pi_3 P_{33} = \pi_3 P(\omega/\omega) = 0,1.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$H(M) = -p(m1)\log p(m1) - p(m2)\log p(m2) - \dots - p(m9)\log p(m9) = 2,72 \text{ bits/message}$$

Για τον υπολογισμό του πλεονασμού, του πλεονασμού εξάρτησης και του ολικού πλεονασμού, υπολογίζουμε πρώτα την εντροπία πηγής χωρίς μνήμη.

$$H_{\text{χωρίς μνήμη}}(S) = -0,4\log 0,4 - 0,2\log 0,2 - 0,4\log 0,4 = 1,52 \text{ bits/symbol}$$

Η μέγιστη εντροπία της πηγής χωρίς μνήμη είναι  $\log 3 = 1,585 \text{ bits}$ , αφού έχουμε 3 σύμβολα.

Επομένως,

$$\begin{aligned}
red &= 1 - (1,52/1,585) = 0,0041, \\
red_{\xi} &= 1 - (1,2/1,52) = 0,210 \text{ και} \\
red_{\omega} &= 1 - (1,2/1,585) = 0,243.
\end{aligned}$$

## 5.11 Διακριτά κανάλια επικοινωνίας

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ότι η πηγή παράγει πληροφορία σε μορφή που δεν είναι κατάλληλη για την άμεση μετάδοση της μέσω του καναλιού. Ωστόσο η πληροφορία, κατά τη διάδοση της, δια μέσου ενός καναλιού να αλλοιωθεί εξαιτίας του θορύβου. Ένα διακριτό κανάλι περιγράφεται πλήρως από ένα σύνολο πιθανοτήτων  $p_i$  και

$p_{ij}$ , όπου  $p_i$  είναι η πιθανότητα να έχουμε στην είσοδο του καναλιού το  $i$ -οστό σύμβολο του κωδικού αλφαβήτου και  $p_{ij}$  η πιθανότητα το  $i$ -οστό σύμβολο στην είσοδο να ληφθεί στην έξοδο σαν  $j$ -οστό σύμβολο. Η υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας  $H(X/Y)$  καλείται και αβεβαιότητα και εκφράζει το πόσο αβέβαιοι είμαστε ως προς το σύμβολο της εισόδου  $x$  αν στην έξοδο έχει ληφθεί το  $y$ . Η υπό συνθήκη εντροπία είναι ένα μέτρο της μέσης αβεβαιότητας ως προς  $X$ , όταν είναι γνωστό το  $Y$ . Επίσης το  $H(Y/X)$  μπορεί να οριστεί ως η μέση αβεβαιότητα ως προς το  $y$  αν το  $x$  είναι γνωστό, η οποία οφείλεται στην επενέργεια του θορύβου.

Από την άλλη πλευρά, η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού μπορεί να θεωρηθεί ως η αβεβαιότητα ως προς το σύμβολο  $x$  πριν από τη λήψη του  $y$ , μειωμένη κατά την αβεβαιότητα που παραμένει ως προς  $x$  μετά τη λήψη  $y$  και με δεδομένο το  $y$ . Οι πιθανότητες  $p_{ij}, p(y_j / x_i), p(x_i / y_j)$  αντιπροσωπεύουν την επίδραση του θορύβου στο κανάλι επικοινωνίας και είναι αυτές ακριβώς που το χαρακτηρίζουν. Οι πιθανότητες αυτές σχηματίζουν τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης του καναλιού που ονομάζεται και πίνακα μετάβασης του καναλιού.

Η χωρητικότητα ενός διακριτού ενθόρυβου καναλιού χωρίς μνήμη δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y/X)\} = \max_{p(x)} \{H(X) - H(X/Y)\}$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.10 Δίνεται ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Στην είσοδο του καναλιού εμφανίζονται τα σύμβολα  $x_i$ ,  $i=1, 2$ , με πιθανότητα εμφάνισης του  $x_1$ ,  $p(x_1)=a$ . Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα  $y_j$ ,  $j=1, 2, 3$ , όπου οι πιθανότητες μετάβασης  $p_{ij}=p(y_j/x_i)$  περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα μετάβασης του καναλιού.

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

1. Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων εξόδου,  $H(Y)$ .
2. Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα  $H(Y/X)$ .

3. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3.10**

Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες λήψης των κωδικών συμβόλων  $y_j$ ,  $j=1, 2$  και 3. Είναι

$$p(y_1) = p(y_1, x_1) + p(y_1, x_2) = p(x_1) p(y_1/x_1) + p(x_2) p(y_1/x_2) = a(0,6) + (1-a)(0,2) = 0,4a + 0,2.$$

Κατά ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε

$$p(y_2) = p(y_2, x_1) + p(y_2, x_2) = p(x_1) p(y_2/x_1) + p(x_2) p(y_2/x_2) = 0,2a + 0,6(1-a) = -0,4a + 0,6,$$

$$p(y_3) = p(y_3, x_1) + p(y_3, x_2) = p(x_1) p(y_3/x_1) + p(x_2) p(y_3/x_2) = a(0,2) + (1-a)(0,2) = 0,2.$$

Από τις πιθανότητες αυτές, των οποίων το άθροισμα είναι 1, υπολογίζουμε τη μέση πληροφορία της εξόδου του καναλιού.

$$\begin{aligned} H(Y) &= -p(y_1) \log p(y_1) - p(y_2) \log p(y_2) - p(y_3) \log p(y_3) = \\ &= -(0,4a + 0,2) \log(0,4a + 0,2) - (-0,4a + 0,6) \log(-0,4a + 0,6) - (0,2) \log(0,2) \\ &= 0,464 - (0,4a + 0,2) \log(0,4a + 0,2) - (-0,4a + 0,6) \log(-0,4a + 0,6). \end{aligned}$$

Πρώτα υπολογίζουμε τις συνδυασμένες πιθανότητες των συμβόλων εισόδου και εξόδου του καναλιού (δείτε και το ερώτημα 1).

$$\text{Είναι } p(x_1, y_1) = p(y_1, x_1) = p(x_1) p(y_1/x_1) = 0,6a,$$

$$p(x_1, y_2) = p(y_2, x_1) = p(x_1) p(y_2/x_1) = 0,2a,$$

$$p(x_1, y_3) = p(y_3, x_1) = p(x_1) p(y_3/x_1) = 0,2a,$$

$$p(x_2, y_1) = p(y_1, x_2) = p(x_2) p(y_1/x_2) = 0,2(1-a),$$

$$p(x_2, y_2) = p(y_2, x_2) = p(x_2) p(y_2/x_2) = 0,6(1-a),$$

$$p(x_2, y_3) = p(y_3, x_2) = p(x_2) p(y_3/x_2) = 0,2(1-a).$$

Τώρα υπολογίζουμε την αβεβαιότητα του καναλιού

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -p(x_1, y_1) \log p(y_1/x_1) - p(x_1, y_2) \log p(y_2/x_1) - p(x_1, y_3) \log p(y_3/x_1) - p(x_1, y_4) \log \\ & p(y_4/x_1) - p(x_2, y_1) \log p(y_1/x_2) - p(x_2, y_2) \log p(y_2/x_2) - p(x_2, y_3) \log p(y_3/x_2) - \\ & p(x_2, y_4) \log p(y_4/x_2) = \\ & -0,6a \log 0,6 - 0,2a \log 0,2 - 0,2a \log 0,2 - 0,2(1-a) \log 0,2 - 0,6(1-a) \log 0,6 - 0,2(1-a) \log 0,2 = \\ & -0,6 \log 0,6 - 0,2 \log 0,2 - 0,2 \log 0,2 = 0,442 + 0,464 + 0,464 = 1,37. \end{aligned}$$



Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας του καναλιού θα πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της εισόδου, για τις οποίες μεγιστοποιείται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού, δηλαδή την τιμή α. Είναι

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x)} I(X; Y) = \max_{p(x)} [H(Y) - H(Y/X)] \\ &= \max_{p(x)} [0,464 - (0,4a + 0,2) \log(0,4a + 0,2) - (-0,4a + 0,6) \log(-0,4a + 0,6) - 1,37] \\ &= \max_{p(x)} [- (0,4a + 0,2) \log(0,4a + 0,2) - (-0,4a + 0,6) \log(-0,4a + 0,6) - 0,906] \end{aligned}$$

Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται όπως γνωρίζουμε για την τιμή του α που μηδενίζει την πρώτη της παράγωγο. Επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{dI(X; Y)}{da} &= [- (0,4a + 0,2) \log(0,4a + 0,2) - (-0,4a + 0,6) \log(-0,4a + 0,6) - 0,906]' \\ &= -[(0,4a + 0,2)' \log(0,4a + 0,2) + (0,4a + 0,2)(\log(0,4a + 0,2))'] \\ &\quad - [(-0,4a + 0,6)' \log(-0,4a + 0,6) + (-0,4a + 0,6)(\log(-0,4a + 0,6))'] \\ &= -\left[ (0,4) \log(0,4a + 0,2) + (0,4a + 0,2)(0,4) \frac{\log e}{(0,4a + 0,2)} \right] \\ &\quad - \left[ (-0,4) \log(-0,4a + 0,6) + (-0,4a + 0,6)(-0,4) \frac{1}{-0,4a + 0,6} \log e \right] \\ &= -(0,4) \log(0,4a + 0,2) - (-0,4) \log(-0,4a + 0,6) \\ &= -0,4 [\log(0,4a + 0,2) - \log(-0,4a + 0,6)] = -0,4 \log \frac{0,4a + 0,2}{-0,4a + 0,6} = 0 \Rightarrow \\ \log \frac{0,4a + 0,2}{-0,4a + 0,6} = 0 &\Rightarrow \left( \frac{0,4a + 0,2}{-0,4a + 0,6} \right) = 2^0 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Θέτοντας ανωτέρω την τιμή αυτή του α, λαμβάνουμε τη χωρητικότητα του καναλιού C=0,15 bits/symbol.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:

## ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

### *Σκοπός του Κεφαλαίου*

*Ο Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να περιγραφούν μέθοδοι κωδικοποίησης ελέγχου και διόρθωσης σφαλμάτων.*

### 5.1 Βασικοί Ορισμοί

Ένας κώδικας ονομάζεται ισομήκης αν όλες οι κωδικές λέξεις έχουν το ίδιο μήκος (ή κώδικες μπλοκ). Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσουν μόνο τέτοιοι κώδικες.

Σχετικά με το κανάλι κάνουμε δύο παραδοχές καθοριστικές για την ανάπτυξη της θεωρίας κωδικοποίησης. Μια κωδική λέξη μήκους  $n$  δυαδικών ψηφίων, που εισέρχεται στο κανάλι, λαμβάνεται στην έξοδο του ως λέξη μήκους  $n$  δυαδικών ψηφίων. Η δεύτερη παραδοχή αναφέρεται στο ότι τα σφάλματα, δηλαδή ο θόρυβος εμφανίζονται διασκορπισμένα κατά τυχαίο τρόπο και όχι σε καταγισμούς.

Ο ρυθμός πληροφορίας ενός κώδικα είναι το ποσοστό της κωδικής λέξης που μεταφέρει το μήνυμα. Ο ρυθμός πληροφορίας ενός δυαδικού κώδικα  $C$  μήκους  $n$  ισούται

$$\text{με } \frac{1}{n} \log C$$

#### ***Βάρος***

Βάρος Hamming ή απλά βάρος  $w_t(x)$ , μιας λέξης  $x$ , μήκους  $n$  ψηφίων ονομάζεται το πλήθος των ψηφίων της λέξης, τα οποία είναι ίση με το '1'. Το βάρος παίρνει τιμές από 0 μέχρι  $n$

### **Απόσταση**

Απόσταση Hamming ή απλά απόσταση,  $d(x,y)$  μεταξύ δύο λέξεων  $x$  και  $y$  του ίδιου μήκους  $n$  ονομάζεται το πλήθος των θέσεων, στις οποίες οι δύο λέξεις εμφανίζουν ασυμφωνία δυαδικού ψηφίου. Η απόσταση παίρνει τιμές από 0 έως  $n$ .

### **Πρόσθεση και Πολλαπλασιασμός**

Μεταξύ των δυαδικών λέξεων ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

$$0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0$$

$$0 \cdot 0=0, 0 \cdot 1=0, 1 \cdot 0=0, 1 \cdot 1=1$$

## **5.2 Το πρόβλημα της κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης**

Τα δύο βασικά προβλήματα που απασχολούν τη Θεωρία Πληροφορίας είναι η κωδικοποίηση και η αποκωδικοποίηση της ψηφιακής πληροφορίας. Η κωδικοποίηση αφορά στον προσδιορισμό ενός κώδικα που θα χρησιμοποιηθεί για την αποστολή των μηνυμάτων. Θα πρέπει να επιλεγεί ένας ακέραιος  $k$ , το μήκος κάθε δυαδικής λέξης που αντιστοιχεί σε ένα μήνυμα. Το μήκος των λέξεων επιλέγεται κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα:  $2^k \geq M$ , όπου  $M$  είναι το πλήθος των δυνατών μηνυμάτων. Στην συνέχεια, επιλέγεται το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που θα προστεθούν σε κάθε λέξη (πλεονασμός) έτσι ώστε να μπορεί να ανιχνεύεται ή και να διορθώνεται το επειθυμητό πλήθος σφαλμάτων. Έτσι προκύπτουν οι κωδικές λέξεις που αντιστοιχούν στα δυνατά μηνύματα, μήκους  $n$  ψηφίων, εκ των οποίων τα  $n-k$  bits είναι ο πλεονασμός.

Αναφορά με το δεύτερο πρόβλημα, την αποκωδικοποίηση, αν ο παραλήπτης λάβει μια λέξη  $y$ , μήκους  $n$  ψηφίων, η οποία είναι κωδική λέξη, τότε εξάγει το αντίστοιχο μήνυμα. Αν όμως η λέξη  $y$ , δεν είναι κωδική λέξη, ο παραλήπτης μπορεί να χρησιμοποιήσει μια διαδικασία, η οποία ονομάζεται αποκωδικοποίηση μέγιστης πιθανότητας, για την επιλογή της κωδικής λέξης που μεταδόθηκε. Η διαδικασία αυτή αποτελείται από δύο εκδοχές:

1. **Πλήρης Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας (ΠΑΜΠ):** Αν υπάρχει μόνο μια κωδική λέξη  $x$ , η οποία εμφανίζει τη μικρότερη απόσταση από τη λέξη  $y$ , σε σύγκριση με τις αποστάσεις όλων των άλλων κωδικών λέξεων από τη λέξη  $y$ , τότε ο αποδέκτης αποκωδικοποιεί την  $y$  ως  $x$ . Αν όμως υπάρχουν περισσότερες κωδικές λέξεις που εμφανίζουν την ίδια απόσταση από τη λέξη  $y$ , τότε ο αποδέκτης αποκωδικοποιεί αυθαίρετα τη ληφθείσα λέξη ως μια από αυτές τις κωδικές λέξεις.
2. **Ατελής Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας (ΑΑΜΠ):** Αν υπάρχει μια μοναδική κωδική λέξη  $x$ , πλησιέστερη στην λέξη  $y$ , τότε ο αποδέκτης αποκωδικοποιεί την  $y$  ως  $x$ . Αν όμως υπάρχουν περισσότερες κωδικές λέξεις με την ίδια απόσταση  $y$ , τότε ο παραλήπτης ζητά από τον αποστολέα επανάληψη της μετάδοσης.

### 5.3 Κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων

#### *Πρότυπο Σφάλματος*

Το άθροισμα της κωδικής λέξης  $x$  που μεταδόθηκε με τη λέξη  $y$  που ελήφθη στον αποδέκτη, δηλαδή  $e=x+y$ , ονομάζεται πρότυπο σφάλματος

### **Απόσταση Κώδικα**

Η απόσταση ενός κώδικα  $C$  είναι η μικρότερη από τις αποστάσεις όλων των δυνατών ζευγών κωδικών λέξεων του κώδικα. Επειδή  $d(x,y)=wt(x,y)$ , η απόσταση του κώδικα  $C$  είναι ίση με την ελάχιστη τιμή του βάρους  $wt(x,y)$

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.1 Θεωρούμε τον κώδικα  $C=\{0000,1010,1111\}$ . Η κωδική λέξη 1010 μεταδόθηκε τρεις φορές και ο δέκτης έλαβε με τη σειρά τις λέξεις 0100, 1001 και 1010. Ζητούνται τα αντίστοιχα πρότυπα σφάλματος καθώς και η απόσταση του κώδικα  $C$ .

#### **Απάντηση 4.1**

Τα αντίστοιχα πρότυπα σφάλματος είναι  $1010+0100=1110$ ,  $1010+1001=0011$  και  $1010+1010=0000$ . Η απόσταση του κώδικα είναι ίση με  $d(0000,1010)=2$ ,  $d(1010,1111)=2$ ,  $d(0000,1111)=4 \Rightarrow$  Απόσταση Κώδικα  $C=2$

### **Θεώρημα**

Ένας κώδικας  $C$  απόστασης  $d$  ανιχνεύει όλα τα μη μηδενικά πρότυπα σφάλματος βάρους μικρότερου ή ίσου του  $d-1$ . Επίσης, υπάρχει τουλάχιστον ένα πρότυπο σφάλματος βάρους  $d$  που δεν ανιχνεύει ο κώδικας  $C$ .

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.2 Να θεωρήσετε τον κώδικα  $C=\{0000,1010,1111\}$ . Η κωδική λέξη 1010 μεταδόθηκε τρεις φορές και ο δέκτης έλαβε με τη σειρά τις λέξεις 0100, 1001 και 1010. Ζητούνται τα αντίστοιχα πρότυπα σφάλματος καθώς και η απόσταση του κώδικα  $C$ .

#### **Απάντηση 4.2**

Η απόσταση του κώδικα ισούται με 2. Με βάση το παραπάνω θεώρημα ο κώδικας ανιχνεύει όλα τα πρότυπα σφάλματος βάρους 1, δηλαδή τα πρότυπα σφάλματος 0001, 0010, 0100 και 1000. Επίσης ανιχνεύει και άλλα πρότυπα σφάλματος μεγαλύτερου βάρους όπως τα 1100, 0011 και 0111. Όμως δεν ανιχνεύει τουλάχιστον ένα πρότυπο σφάλματος βάρους 2 (π.χ. 0101)

## 5.4 Κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων

### **Θεώρημα**

Ένας κώδικας  $C$  απόστασης  $d$  διορθώνει όλα τα πρότυπα σφάλματος βάρους μικρότερου ή ίσου με  $\left\lfloor \frac{(d-1)}{2} \right\rfloor$ . Επίσης υπάρχει τουλάχιστον ένα πρότυπο σφάλματος βάρους  $1 + \left\lfloor \frac{(d-1)}{2} \right\rfloor$  που δεν διορθώνει ο κώδικας  $C$ .

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.3 Να θεωρήσετε τον κώδικα  $C = \{00000, 01111, 10001, 11110\}$ . Να βρείτε ένα πρότυπο σφάλματος που δεν διορθώνει ο κώδικας, όπου  $d$  η απόσταση του κώδικα.

### **Απάντηση 4.3**

Η απόσταση του κώδικα ισούται με 2. Αν θεωρήσουμε το πρότυπο σφάλματος 10000 βάρους 1. Αυτό το πρότυπο σφάλματος δεν διορθώνεται από τον κώδικα αφού κατά τη μετάδοση της κωδικής λέξης 10001 λαμβάνεται η λέξη 00001. Η λέξη αυτή απέχει εξίσου από τις κωδικές λέξεις 10001 και 00000.

## 5.5 Γραμμικές Κώδικες

Ένας κώδικας  $C$  ονομάζεται γραμμικός αν  $\forall x, y \in C$ , τότε  $(x + y) \in C$ . Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των γραμμικών κωδίκων είναι ότι η απόσταση του κώδικα είναι ίση με το ελάχιστο των βαρών των μη μηδενικών κωδικών λέξεων. Τα πλεονεκτήματα είναι τα ακόλουθα:

- Η κωδικοποίηση ενός γραμμικού κώδικα είναι πιο απλή και έχει μικρότερες αποθηκευτικές απαιτήσεις
- Για γραμμικούς κώδικες υπάρχει μια πιο απλή διαδικασία πλήρους ή ατελούς αποκωδικοποίησης μέγιστης πιθανότητας
- Η περιγραφή των συνόλων των προτύπων σφάλματος που ανιχνεύει ή διορθώνει ένας κώδικας είναι πιο εύκολη στην περίπτωση των γραμμικών απ' ό,τι στη γενική περίπτωση.

## 5.6 Μαθηματικό Υπόβαθρο

Σύμφωνα με τον ορισμό ενός διανυσματικού χώρου  $K^n$ , αυτός απαρτίζεται από τις βαθμωτές ποσότητες 0 και 1 και το σύνολο των διανυσμάτων μήκους  $n$ , καθώς και από τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού βαθμωτών ποσοτήτων. Δύο σημαντικοί υποχώροι του διανυσματικού χώρου  $K^n$  είναι το γραμμικό ανάπτυγμα ενός υποσυνόλου του  $S$  και το ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $S^\perp$ . Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων ενός συνόλου  $S$  ονομάζεται γραμμικό ανάπτυγμα και συμβολίζεται με  $\langle S \rangle$ . Έχειδειχθεί ότι για κάθε υποσύνολο  $S$  ενός διανυσματικού χώρου  $K^n$ , το γραμμικό του ανάπτυγμα  $\langle S \rangle$  είναι υποχώρος του  $K^n$ . Για αυτό το λόγο το  $\langle S \rangle$  ονομάζεται και γραμμικός κώδικας. Ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων  $S$  είναι μία βάση για τον διανυσματικό υποχώρο  $\langle S \rangle$ .

Το πλήθος των διανυσμάτων (λέξεων) μιας βάσης ενός διανυσματικού χώρου ονομάζεται διάσταση του διανυσματικού χώρου. Αν η διάσταση ενός γραμμικού κώδικα  $C$  είναι  $k$  και μια βάση του είναι το σύνολο  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , τότε οποιαδήποτε λέξη

$c \in C$  μπορεί να γραφεί ως εξής  $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$  για κάποια μοναδική επιλογή των ψηφίων. Οι δυνατοί συνδυασμοί όλων των και επομένως είναι οι κωδικές λέξεις του  $C$ .

Δύο πίνακες είναι ισοδύναμοι ως προς τις γραμμές, αν ο ένας μπορεί να ληφθεί από τον άλλο με μια σειρά των παρακάτω στοιχειωδών πράξεων γραμμών (η ανταλλαγή δύο γραμμών και η αντικατάσταση μιας γραμμής από το άθροισμα του εαυτού της με κάποια άλλη). Ένας πίνακας βρίσκεται σε μορφή Κλιμακωτής Διάταξης Γραμμών (ΚΔΓ) αν όλες οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται στο κάτω μέρος και το πρώτο ψηφίο '1' (οδηγός) μιας γραμμής είναι σε στήλη πιο δεξιά σε σχέση με το πρώτο '1' (οδηγό) της προηγούμενης γραμμής. Αν επιπλέον, σε κάθε στήλη οδηγό του πίνακα δεν περιέχονται άλλα ψηφία '1', αλλά μόνο ψηφία '0', τότε ο πίνακας είναι σε μορφή Περιορισμένης Κλιμακωτής Διάταξης Γραμμών (ΠΚΔΓ). Η μεταφορά ενός πίνακα, σε μορφή ΚΔΓ ή ΠΚΔΓ είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, γιατί οι μη μηδενικές γραμμές απαρτίζουν ένα μέγιστης διάστασης γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του  $C$

#### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.4 Δίνεται ο κώδικας  $C=\{0000,1110,0111,1001\}$ , του οποίου οι λέξεις αποτελούν τις γραμμές του πίνακα  $P$ . Να μετασχηματίσετε το πίνακα  $P$  σε μορφή ΚΔΓ και ΠΚΔΓ.

#### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4.4**

(α) ΚΔΓ

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(β) ΠΚΔΓ



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως για να βρούμε μια βάση του κώδικα  $C$  αρκεί να μεταφέρουμε σε μορφή ΚΔΓ ή ΠΚΔΓ όλες τις λέξεις του συνόλου  $S$ . Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσαμε να βρούμε και μια βάση του δυϊκού κώδικα

## 5.7 Εύρεση μιας βάση του δυϊκού κώδικα $C^\perp$

Η διαδικασία εύρεσης μιας βάσης του δυϊκού κώδικα  $C^\perp$  είναι η ακόλουθη:

- Σχηματισμός του πίνακα  $P$ , του οποίου οι γραμμές είναι οι λέξεις του  $S$  και μεταφορά του  $P$  σε μορφή ΠΚΔΓ
- Σχηματισμός του Πίνακα  $G$ , ο οποίος αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του πίνακα  $P$  σε μορφή ΠΚΔΓ και αποτελεί μια βάση του  $C^\perp$ . Ο πίνακας  $G$  είναι διάστασης  $l \times m$
- Σχηματισμός του πίνακα  $M$ , ο οποίος αποτελείται μόνον από εκείνες τις στήλες του πίνακα  $G$  που δεν είναι οδηγοί, δηλαδή από τις στήλες που δεν περιέχουν οδηγούς '1'. Η διάσταση του Πίνακα  $M$  είναι  $l \times (m - l)$
- Σχηματισμός του Πίνακα  $H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}$ , διάστασης  $m \times (m - l)$ , από τον πίνακα  $M$  και τον ταυτοτικό πίνακα  $I$ . Στις πρώτες  $l$  γραμμές του  $H$  τοποθετούνται με τη σειρά οι γραμμές του  $M$ . Στις υπόλοιπες γραμμές τοποθετούνται οι γραμμές του ταυτοτικού πίνακα  $I$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

4.5 Δίνεται το σύνολο  $S = \{1101, 10110, 01011, 11010\}$  και ο κώδικας  $C = \langle S \rangle$ . Ζητείται μια βάση του  $C^\perp$

#### ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4.5

(α) Σχηματίζουμε τον πίνακα P, ο οποίος έχει ως γραμμές τις λέξεις του S. Τον πίνακα P μεταφέρουμε στη μορφή ΠΚΔΓ ως ακολούθως

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας G είναι διαστάσεων 3x5, σχηματίζεται από τις μη μηδενικές γραμμές του P σε μορφή ΠΚΔΓ και ο πίνακας M, 3x2. Από το M και τον Πίνακα I, παίρνουμε το πίνακα H, διαστάσεων 5x2.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, μια βάση του δυϊκού κώδικα  $C^\perp$  είναι το σύνολο: {01110, 11101}

## 5.8 Γεννήτορες Πίνακες και Κωδικοποίηση

Κάθε πίνακας, του οποίου οι γραμμές αποτελούν μια βάση του κώδικα C, ονομάζεται γεννήτορας πίνακας για τον C. Το πλήθος των γραμμών του γεννήτορα πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του C, δηλαδή το πλήθος των λέξεων που απαρτίζουν μια βάση του. Αν η διάσταση ενός κώδικα C συμβολίζεται με k, το μήκος των κωδικών λέξεων είναι n και η απόστασή του d, τότε χαρακτηρίζουμε τον C και ως (n, k, d) γραμμικό κώδικα.

Αν  $G$  είναι ένας γεννήτορας πίνακας για έναν κώδικα  $C$ , τότε κάθε πίνακας ισοδύναμος του  $G$ , ως προς τις γραμμές, είναι γεννήτορας πίνακας για τον  $C$ . Για την εύρεση, βεβαίως, ενός γεννήτορα πίνακα για κάποιον κώδικα  $C$ , αρκεί να βρούμε μια βάση του. Οι μη μηδενικές λέξεις του πίνακα σε μορφή ΠΚΔΓ, που σχηματίζεται από τις λέξεις του  $C$  (ή του  $S$ , όπου  $C = \langle S \rangle$ ), αποτελούν μια βάση του  $C$ .

Ένας γεννήτορας πίνακας  $G$  για ένα γραμμικό κώδικα  $(n, k, d)$ ,  $C$ , μπορεί να αξιοποιηθεί για την κωδικοποίηση λέξεων (μηνυμάτων)  $u$  μήκους  $k$  ψηφίων ως εξής:

$$c = uG = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{bmatrix} = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_k g_k = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

όπου  $u = [a_1 \ a_2 \dots \ a_k]$  η λέξη (διάνυσμα – γραμμή) του μηνύματος και  $c = [b_1 \ b_2 \dots \ b_n]$  η κωδική λέξη (διάνυσμα – γραμμή) μήκους  $n$  ψηφίων. Το αποτέλεσμα  $c$  είναι κωδική λέξη του  $C$ , αφού το γινόμενο  $uG$  είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του  $G$ , που σχηματίζεται από τις λέξεις  $g_i$  που απαρτίζουν μια βάση του κώδικα  $C$ .

#### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.5 Θεωρούμε ένα γραμμικό κώδικα  $(5,3,d)$  καθώς και τα σύμβολα  $A,B,\Delta,E,Z$  στα οποία έχουμε αποδώσει αντίστοιχα τις κωδικές λέξεις, '001', '011', '101', '110', '111'. Αν θεωρήσουμε το γεννήτορα πίνακα  $G$ , να κωδικοποιήσετε τα παραπάνω μηνύματα

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Απάντηση Παραδείγματος 4.5**

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.(10001) + 0.(01011) + 1.(00111) = 00111 \\
B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.(10001) + 1.(01011) + 1.(00111) = 01100 \\
\Delta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1.(10001) + 0.(01011) + 1.(00111) = 10110 \\
E &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1.(10001) + 1.(01011) + 0.(00111) = 11010 \\
Z &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1.(10001) + 1.(01011) + 1.(00111) = 11101
\end{aligned}$$

## 5.9 Πίνακας Ελέγχου ισοτιμίας και αποκωδικοποίηση

Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας σχετίζεται με ένα γραμμικό κώδικα  $C$  και συνδέεται με το γεννήτορα πίνακα. Ο πίνακας αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποκωδικοποίηση κωδικοποιημένων μηνυμάτων. Όπως είδαμε στην Παράγραφο 1.7, μπορούμε να προσδιορίσουμε έναν πίνακα  $H$ , του οποίου οι στήλες είναι οι λέξεις μιας βάσης του δυϊκού κώδικα  $C^\perp$ . Ένας τέτοιος πίνακας  $H$ , του οποίου οι στήλες σχηματίζουν μια βάση του δυϊκού κώδικα  $C^\perp$ , ονομάζεται πίνακας ελέγχου ισοτιμίας του κώδικα  $C$ .

Αν η διάσταση του  $C$  είναι  $k$ , τότε η διάσταση του  $C^\perp$  είναι  $n - k$  και επομένως και το πλήθος των στηλών του πίνακα ισοτιμίας  $H$ , ενώ το πλήθος των γραμμών του είναι  $n$ , αφού το άθροισμα των διαστάσεων των κωδικών  $C$  και  $C^\perp$  είναι  $n$ , δηλαδή ίσο με το μήκος των κωδικών λέξεων του κώδικα  $C$ .

Ο γεννήτορας πίνακας  $G$  και ο πίνακας ισοτιμίας  $H$  ενός κώδικα  $C$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι ως προς τις γραμμές και τις στήλες, αντίστοιχα, αφού είναι βάσεις των κωδίκων  $C$  και  $C^\perp$ . Το άθροισμα του πλήθους των γραμμών του  $G$  και των στηλών του  $H$  είναι ίσο με το πλήθος των στηλών του  $G$  και ίσο με το πλήθος των γραμμών του  $H$ , τα οποία είναι ίσα με το μήκος των λέξεων του κώδικα  $C$ . Τέλος, το γινόμενο των πινάκων  $G$  και  $H$  ισούται με  $0$ , δηλαδή  $G \cdot H = 0$ .

Ένας γεννήτορας πίνακας  $G$ ,  $(k \times n)$ , του οποίου οι πρώτες  $k$  στήλες σχηματίζουν τον πίνακα ταυτότητας  $I$   $(k \times k)$ , δηλαδή  $G = [I, M]$ , λέγεται ότι βρίσκεται σε τυπική μορφή. Ο κώδικας  $C$ , ο οποίος έχει σε τυπική μορφή, χαρακτηρίζεται συστηματικός κώδικας. Οι συστηματικοί κώδικες εμφανίζουν ένα σημαντικό πλεονέκτημα κατά τη διάρκεια της αποκωδικοποίησης. Κάθε κωδική λέξη  $c$  ενός κώδικα  $C$ , μήκους  $n$  και διάστασης  $k$ , είναι ίση με  $u \cdot G$  για μία μόνο λέξη. Αν θεωρήσουμε ότι ο παραλήπτης είναι σε θέση να συμπεράνει, με τη βοήθεια της ΑΜΠ, τη μετάδοση της κωδικής λέξης  $c$ , τότε ο δέκτης μπορεί να ανακτήσει το μήνυμα  $u$  από το ληθέν μήνυμα  $c$ . Αυτό οφείλεται ότι το μήνυμα  $u$  αποτελείται από τα πρώτα  $k$  ψηφία του  $c$ . Για το λόγο αυτό τα πρώτα  $k$  ψηφία των κωδικών λέξεων ονομάζονται ψηφία πληροφορίας, και τα υπόλοιπα  $n-k$  πλεονασμός ή ψηφία ελέγχου ισοτιμίας.

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.6 Δίνεται ένα γεννήτορας πίνακας  $G$  και ζητείται η κωδικοποίηση των μηνυμάτων  $a=0000$ ,  $b=0101$  και  $h=1111$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ποια είναι τα ψηφία πληροφορίας και ποια τα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας κάθε μιας από τις αντίστοιχες κωδικές λέξεις

#### **Απάντηση Παραδείγματος 4.6**

Αν  $a=0000$ ,  $a.G=0000000 \Rightarrow$  ψηφία πληροφορίας=0000, πλεονασμός=000. Αντίστοιχα,  $b=0101$ ,  $b.G=0101101$ , ψηφία πληροφορίας=0101, πλεονασμός=101. Κατά τον ίδιο τρόπο  $h=1111$ ,  $h.G=1111111$ , ψηφία πληροφορίας=1111, πλεονασμός=111

Το κύριο ερώτημα είναι το πως θα συμπεράνει ο δέκτης τη μετάδοση κάποιας κωδικής λέξης  $c$ , όταν λάβει μια λέξη  $y$ , η οποία δεν ανήκει στον κώδικα  $C$ . Μια συνομάδα του  $C$  προσδιορίζεται από τη λέξη  $x$  και συμβολίζεται σαν  $C+x$ . Ορίζεται σαν το σύνολο όλων των λέξεων της μορφής  $c+x$ , όπου  $c \in C$ .

#### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.7 Να βρεθούν οι συνομάδες του κώδικα  $C=\{000,111\}$

#### **Απάντηση Παραδείγματος 4.7**

Για  $x=001$ , έχουμε  $C+001=\{001,110\}$ , για  $x=010$ , έχουμε  $C+010=\{010,101\}$ ,  $C+100=\{100,011\}$ ,  $C+011=\{011,100\}$ ,  $C+101=\{101,010\}$ ,  $C+110=\{110,001\}$ ,  $C+111=\{111,000\}$

Αν  $C$  είναι ένας συστηματικός γραμμικός κώδικας μήκους  $n$  και  $x$  και  $y$  δύο λέξεις επίσης μήκους  $n$  ψηφίων, τότε τα κύρια χαρακτηριστικά των συνομάδων είναι τα ακόλουθα:

- Κάθε λέξη  $x$  περιέχεται στη συνομάδα  $C + x$ .
- Αν το άθροισμα  $x + y$  περιέχεται στον κώδικα  $C$ , τότε οι  $x$  και  $y$  περιέχονται στην ίδια συνομάδα. Αν το άθροισμα  $x + y$  δεν περιέχεται στον κώδικα  $C$ , τότε οι  $x$  και  $y$  περιέχονται σε διαφορετικές συνομάδες.
- Αν μια λέξη  $x$  περιέχεται στη συνομάδα  $C + y$ , τότε ισχύει  $C + x = C + y$ , δηλαδή κάθε λέξη της συνομάδας την προσδιορίζει.
- Κάθε λέξη  $x$  περιέχεται μόνο σε μία συνομάδα του  $C$ , δηλαδή δύο συνομάδες  $C + x$  και  $C + y$  είτε ταυτίζονται είτε δεν έχουν κανένα στοιχείο κοινό.

- Το πλήθος των λέξεων σε μια συνομάδα είναι ίσο με το πλήθος των λέξεων του κώδικα  $C$ , δηλαδή  $|C + x| = |C|$ .
- Το πλήθος των διαφορετικών συνομάδων του κώδικα  $C$ , διάστασης  $k$ , ισούται με  $2^{n-k}$  και κάθε συνομάδα περιέχει  $2^k$  λέξεις, όπως άλλωστε και ο κώδικας  $C$  που και αυτός αποτελεί μια συνομάδα του εαυτού του.

### 5.10 Αποκωδικοποίηση με τη βοήθεια των συνομάδων

Η διαδικασία αποκωδικοποίησης με τη βοήθεια των συνομάδων διακρίνεται στα ακόλουθα βήματα:

- Λήψη της λέξης  $y$  και υπολογισμός της συνομάδας  $C + y$ .
- Επιλογή από το δέκτη της λέξης  $\varepsilon$ , ελάχιστου βάρους, που περιέχεται στη συνομάδα  $C + y$ . Αν υπάρχουν περισσότερες λέξεις της συνομάδας  $C + y$ , οι οποίες έχουν το ελάχιστο βάρος, τότε στην περίπτωση της ΠΑΜΠ επιλέγεται αυθαίρετα μία εξ αυτών, ενώ στην περίπτωση της ΑΑΜΠ ζητείται από το μεταδότη επανάληψη της μετάδοσης.
- Υπολογισμός από το δέκτη της κωδικής λέξης  $x$  που έχει μεταδοθεί προσθέτοντας τη ληφθείσα λέξη  $y$  με το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους  $\varepsilon$ , δηλαδή  $x = y + \varepsilon$ .

#### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.7 Δίνεται ο συστηματικός κώδικας  $C = \{0000, 1010, 1101, 0111\}$  και οι τέσσερις συνομάδες του  $\{0000, 1010, 1101, 0111\}$ ,  $\{0001, 1011, 1100, 0110\}$ ,  $\{0010, 1000, 1111, 0101\}$  και  $\{0011, 1001, 1110, 0100\}$ . Θεωρούμε ότι ο δέκτης έλαβε τις λέξεις 1110 και 1111, οι οποίες δεν είναι κωδικές λέξεις. Σε ποιο συμπέρασμα οδηγείται σύμφωνα με τις ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ.

#### **Απάντηση Παραδείγματος 4.7**

Αν ο δέκτης λάβει τη λέξη 1110, τότε εντοπίζει την συνομάδα στην οποία περιέχεται (τέταρτη συνομάδα). Το μικρότερο πρότυπο βάρος είναι το 0100. Επομένως σύμφωνα με

τη διαδικασία αποκωδικοποίησης συμπεραίνει ότι μεταδόθηκε η κωδική λέξη  $1110+0100=1010$ .

Ο προηγούμενος αλγόριθμος (εύρεση συνομάδων) έχει δύο μειονεκτήματα: η αναζήτηση της συνομάδας στην οποία περιέχεται η ληφθείσα λέξη και η αναζήτηση του πρότυπου σφάλματος (λέξη με το μικρότερο βάρος στην συνομάδα). Ορίζουμε ως σύνδρομο μιας λέξης  $y$ , τη λέξη  $y \cdot H$ , όπου  $H$  είναι ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας για ένα κώδικα  $C$  μήκους  $n$  και διάστασης  $k$  και  $y$  είναι η ληφθείσα λέξη. Αν  $x, y$  και  $e$  είναι λέξεις του συνόλου  $K$ , τότε ισχύουν τα παρακάτω

- Αν και μόνο αν  $y = 0$ , τότε  $x \cdot H = 0$
- Αν και μόνο αν  $x$  και  $y$  περιέχονται στην ίδια συνομάδα, τότε  $x \cdot H = y \cdot H$ .
- Αν  $e$  είναι το πρότυπο σφάλματος σε σχέση με μια ληφθείσα λέξη  $y$ , τότε  $e \cdot H$  ισούται με το άθροισμα των γραμμών του πίνακα  $H$  που αντιστοιχούν στις θέσεις στις οποίες προκλήθηκαν σφάλματα κατά τη μετάδοση.

Αν δεν υπεισέλθουν σφάλματα κατά τη μετάδοση, η ληφθείσα λέξη  $y$  θα ανήκει στον κώδικα  $C$  και τότε  $y \cdot H = 0$ . Βέβαια, αν  $y \cdot H = 0$  τότε το  $y$  είναι κωδική λέξη και θεωρούμε ότι δεν εμφανίστηκαν σφάλματα στη μετάδοση. Ωστόσο, δεν αποκλείεται ο δέκτης να λάβει μια λέξη  $y$ , διαφορετική από τη λέξη  $x$  που έστειλε ο αποστολέας, δηλαδή να υπεισέλθουν σφάλματα που οδηγούν στη λήψη μιας διαφορετικής κωδικής όμως λέξης  $x \neq y$ .

Επειδή όλες οι λέξεις μιας συνομάδας έχουν το ίδιο σύνδρομο, το σύνδρομο μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί της συνομάδας για τον προσδιορισμό της. Έτσι, αρκεί να έχουμε από κάθε συνομάδα μόνο το σύνδρομό της και τη λέξη με το ελάχιστο βάρος για να πετύχουμε την αποκωδικοποίηση μιας ληφθείσας λέξης. Τη λέξη μιας συνομάδας με το ελάχιστο βάρος την ονομάζουμε και οδηγό της συνομάδας. Ο πίνακας που περιέχει τα



σύνδρομο και τους οδηγούς (τις λέξεις ελάχιστου βάρους) όλων των συνομάδων καλείται τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ, standard decoding array). Αν μια συνομάδα έχει περισσότερες λέξεις ελάχιστου βάρους, τότε είτε επιλέγεται μία από αυτές αυθαίρετα αν εφαρμόζεται ΠΑΜΠ είτε δεν επιλέγεται καμία αν εφαρμόζεται ΑΑΜΠ. Όταν η ληφθείσα λέξη έχει σύνδρομο συνομάδας, της οποίας δεν περιέχεται οδηγός ή λέξη ελάχιστου βάρους στην ΤΔΑ, τότε ζητείται επανάληψη της μετάδοσης.

Η διαδικασία αποκωδικοποίησης που βασίζεται στην ΤΔΑ διακρίνεται στα ακόλουθα βήματα:

1. Λήψη της λέξης  $y$  και υπολογισμός του συνδρόμου  $y \cdot H$ .
2. Εύρεση από την ΤΔΑ του οδηγού  $\varepsilon$  που αντιστοιχεί στη συνομάδα με σύνδρομο  $y \cdot H$ . Αν δεν υπάρχει αντίστοιχος οδηγός της συνομάδας, τότε ζητείται αναμετάδοση.
3. Υπολογισμός από το δέκτη της κωδικής λέξης  $x$  που μεταδόθηκε, προσθέτοντας τη ληφθείσα λέξη  $y$  με τον οδηγό της συνομάδας (το πρότυπο σφάλματος)  $\varepsilon$ , δηλαδή  $x = y + \varepsilon$ .

#### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.8 Δίνεται ένα σύνολο  $S = \{1100011, 1010000, 1001011, 0100101, 0001101\}$  και ο κώδικας  $C$ , ο οποίος αποτελεί το ανάπτυγμά του, δηλαδή  $C = \langle S \rangle$ .

1. Ζητείται ένας γεννήτορας πίνακας του  $C$ .
2. Ζητούνται οι παράμετροι  $(n, k, d)$  του κώδικα  $C$ , δηλαδή το μήκος των κωδικών λέξεων, η διάσταση του κώδικα και η απόστασή του.
3. Ζητείται μια βάση του  $C^\perp$ .
4. Να κωδικοποιηθούν τα μηνύματα  $A = \langle 0011 \rangle$ ,  $B = \langle 1001 \rangle$ ,  $\Gamma = \langle 1011 \rangle$  και  $\Delta = \langle 1111 \rangle$ .
5. Να διακρίνετε τις κωδικές λέξεις '1101110' και '0011011,' στα ψηφία μηνύματος και τα αντίστοιχα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας.

6. Ζητείται το πλήθος των συνομάδων του κώδικα C, καθώς και ο προσδιορισμός της συνομάδας C+1111011.

**Απάντηση Παραδείγματος 4.8**

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας προκύπτει, από τον 1ο στον 2ο πίνακα ως εξής (όπου α η 1η γραμμή του 1ου πίνακα, β η 2η γραμμή, γ η 3η γραμμή, δ η 4η και ε η 5η γραμμή του 1ου πίνακα): η 1η γραμμή του 2ου πίνακα είναι (α+δ), η 2η γραμμή είναι η (δ), η 3η γραμμή είναι η (β+γ), η 4η γραμμή είναι η (ε) και η 5η γραμμή είναι η (α). Η 1η γραμμή του 3ου πίνακα είναι η (α+δ), η 2η είναι η (δ), η 3η είναι η (β+γ)+(ε), η 4η είναι η (ε) και η τελευταία είναι η (α+δ)+δ+α που είναι η 0000000. Επομένως, ο γεννήτορας πίνακας αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του 3ου πίνακα.

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. (7,4,2)

$$H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

- 3.

Επομένως, μια βάση του  $C^\perp$  είναι το σύνολο {1111100, 1010010, 0101101}.

4. A.G=[0011].G=0011011,  
B.G=[1001].G=1001011,

$\Gamma.G=[1011].G=1011101,$

$\Delta.G=[1111].G=1111000.$

5. Η κωδική λέξη '1101110' διακρίνεται στα πρώτα  $k=4$  ψηφία πληροφορίας '1101' και τα υπόλοιπα  $n-k=d=3$  ψηφία ελέγχου ισοτιμίας '110'. Η κωδική λέξη '0011011' αποτελείται από τα ψηφία πληροφορίας '0011' και τα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας '011'. Οι συνομάδες είναι 8 ( $2^{(7-4)}$ ) Πρώτα πρέπει να προσδιορίσουμε τον κώδικα C, ο οποίος αποτελεί το ανάπτυγμα του συνόλου S, δηλαδή  $C=<S>$ .

$C=\{0000000, 1000110, 0100101, 1100011, 0010110, 1010000, 0110011, 1110101, 0001101, 1001011, 0101000, 1101110, 0011011, 1011101, 0111110, 1111000\}.$

Προσθέτοντας (xor) σε κάθε κωδική λέξη τη λέξη '1111011' λαμβάνουμε τη ζητούμενη συνομάδα.

$C+1111011=\{1111011, 0111101, 1011110, 0011000, 1101101, 0101011, 1001000, 0001110, 1110110, 0110000, 1010011, 0010101, 1100000, 0100110, 1000101, 0000011\}$

## 5.11 Κώδικας Hamming

Ένας γραμμικός κώδικας C μήκους n και περιττής απόστασης  $d=2t+1$ , χαρακτηρίζεται τέλειος αν ισχύει η σχέση αναφορικά με το πλήθος των κωδικών

$$\text{λέξεων : } |C| = \frac{2^n}{\left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{t} \right)}$$

### *Κώδικας Hamming*

Ένας κώδικας μήκους  $n=2^r-1$  ( $r \geq 2$ ) και πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H, ο οποίος απαρτίζεται από όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r, ονομάζεται κώδικας Hamming

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

4.9 Να σχεδιάσετε ένα κώδικα Hamming για  $r=3$ .

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4.9

Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας ενός κώδικα Hamming μήκους 7 θα μπορούσε να είναι ο ακόλουθος

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \text{ Από τον πίνακα } H \text{ μπορούμε, ακολουθώντας με αντίστροφη σειρά τα}$$

βήματα της διαδικασίας σχηματισμού του  $H$  από το γεννήτορα πίνακα  $G$  με μορφή ΠΚΔΓ, να σχηματίσουμε ένα γεννήτορα πίνακα  $G$  του κώδικα.

## 5.12 Κυκλικοί Κώδικες

Ένας γραμμικός κώδικας  $C$  καλείται κυκλικός, αν η κυκλική μετατόπιση κάθε κωδικής λέξης είναι και αυτή κωδική λέξη.

Αναφορικά με τη συνάρτηση κυκλικής μετατόπισης  $k(\cdot)$ , ισχύουν τα ακόλουθα:  $k(x+y) = k(x) + k(y)$  και  $k(ax) = ak(x)$ . Η λέξη  $x$  που απαρτίζει μαζί με τις  $(n-1)$  κυκλικές της μετατοπίσεις το  $S$ , γραμμικό ανάπτυγμα του οποίου είναι ο κώδικας  $C$ , ονομάζεται γεννήτορας του κυκλικού κώδικα  $C$ . Κάθε κώδικας μπορεί να έχει πολλούς γεννήτορες.

Αρχικά θα πρέπει να σκεφτόμαστε οποιαδήποτε ακολουθία  $n$  bits ως ένα πολυώνυμο  $n-1$  βαθμού. Ο συντελεστής του κάθε όρου του πολυωνύμου λαμβάνει την τιμή του αντίστοιχου bit της ακολουθίας. Για παράδειγμα, η ακολουθία 1001110101

αντιστοιχεί τον πολυώνυμο:  $M(x) = x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ . Τόσο στον αποστολέα κόμβο όσο και στον παραλήπτη είναι γνωστή εκ των προτέρων μια ειδική ακολουθία, η οποία ονομάζεται πολυώνυμο γεννήτορας και συμβολίζεται  $G(x)$ . Ο αλγόριθμος CRC συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα

#### *Αποστολέας Κόμβος*

1. Πολλαπλασιασμός του  $M(x)$  με το συντελεστή  $x^k$ , όπου  $k$  είναι ο βαθμός του προκαθορισμένου πολυωνύμου  $G(x)$ . Αυτό ουσιαστικά αντιστοιχεί σε αύξηση του μήκους των δεδομένων κατά  $k$  bits με αριστερή ολίσθηση κατά  $k$  των αρχικών bits και ταυτόχρονη πλήρωση των κενών θέσεων με μηδενικά.
2. Διαίρεσε το  $M(x)x^k$  με το  $G(x)$ . Από αυτή τη διαίρεση προκύπτει το πηλίκο  $Q(x)$  και το υπόλοιπο  $R(x)$
3. Σύνθεση του μηνύματος  $T(x)$ , το οποίο θα αποστείλει προς το δίκτυο το ακόλουθο μήνυμα:  $T(x) = M(x)x^k + R(x)$

#### *Αποστολέας Κόμβος*

1. Διαίρεση του μηνύματος  $Z(x)$  με το  $G(x)$ . Από αυτή τη διαίρεση προκύπτουν το πηλίκο  $Q(x)$  και το πηλίκο  $R'(x) = 0$ . Εάν  $R'(x) = 0$ , τότε δεν υπάρχει σφάλμα μεταφοράς

Αν θεωρήσουμε ότι στη μεταφερόμενη ακολουθία  $Z(x)$  προστίθεται θόρυβος  $E(x)$ , τότε ο παραλήπτης θα λάβει την ακολουθία  $Z(x) = T(x) + E(x)$ . Κανείς δεν μπορεί να αποκλείσει την περίπτωση, η μορφή του θορύβου να είναι τέτοια έτσι ώστε η λαμβανόμενη ακολουθία να διαιρείται ακριβώς από το πολυώνυμο γεννήτορας. Σε αυτή τη περίπτωση όμως ο παραλήπτης θα βγάλει το (λανθασμένο) συμπέρασμα ότι η ληφθείσα ακολουθία δεν υπάρχουν σφάλμα μεταφοράς. Η επιλογή του πολυωνύμου είναι κρίσιμος παράγοντας στον έλεγχο κυκλικού πλεονασμού. Τα κριτήρια επιλογής του πολυωνύμου είναι σύνθετα και σύνθετα. Στην πράξη έχουν επικρατήσει να χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα του ακόλουθου πίνακα.

| Διακριτικός Τίτλος | G(x)                                                                                                          |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| CRC-8              | $x^8 + x^2 + x + 1$                                                                                           |
| CRC-10             | $x^{10} + x^9 + x^5 + x^4 + x + 1$                                                                            |
| CRC-ITU-T          | $x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$                                                                                   |
| CRC-32             | $x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ |

Σε γενικές γραμμές, μπορεί να αποδειχθεί ότι οι κώδικες CRC μήκους k bits έχουν τις ακόλουθες δυνατότητες εντοπισμού σφαλμάτων μεταφοράς

1. Όλα τα σφάλματα μονού bit, αρκεί οι όροι  $x^k$  και  $x^0$  να έχουν μη μηδενικούς συντελεστές
2. Όλα τα σφάλματα διπλού bit, αρκεί το πολυώνυμο να περιέχει τρεις τουλάχιστον όρους
3. Όλα τα σφάλματα περιττού πλήθους αρκεί το πολυώνυμο να περιέχει τον όρο  $(x+1)$
4. Όλα τα σφάλματα σε δέσμη bits με μήκος μικρότερο από k bits, όπου ως δέσμη ονομάζουμε ένα πλήθος από διαδοχικά bits. Επίσης, εντοπίζονται τα περισσότερα από τα σφάλματα μεταφοράς σε δέσμες με μήκος μεγαλύτερο από k bits.

#### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

4.10 Έστω ότι θέλετε να μεταφέρετε τα δεδομένα 1101001101001110101 και θέλετε να τα προστατέψετε από τα σφάλματα μεταφοράς εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο CRC με πολυώνυμο γεννήτορα το CRC-10.

(α) Ποιό το μήνυμα που θα αποστείλετε στο δίκτυο;

(β) Εάν αλλοιωθούν κατά την μεταφορά το δεύτερο, το τέταρτο και το ενδέκτο bit του μηνύματος, ποιό θα είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μηνύματος με το πολυώνυμο γεννήτορα στον παραλήπτη; Τι παρατηρείτε;

#### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4.10**

(α)  $M(x)=1101001101001110101$ , πολυώνυμο γεννήτορας  $CRC-10=11000110011$  το οποίο είναι βαθμού  $\kappa=10$  οπότε  $M(x) x^{\kappa}= 110100110100111010100000000000$ .  
Διαιρούμε με το πολυώνυμο γεννήτορα και έχουμε:

```

1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
-----
0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1
      1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
      -----
      0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1
        1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
        -----
        0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0
          1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
          -----
          0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0
            1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
            -----
            0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0
              1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
              -----
              0 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0
                1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
                -----
                0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0
                  1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
                  -----
                  0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0
                    1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
                    -----
                    0 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1
                      1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1
                      -----
                      0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0

```

Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι  $R(x)=10100010$ . Το μήνυμα που τελικά αποστέλλεται στο δίκτυο είναι

$T(x)= M(x)x^{\kappa}+ R(x)= 11010011010011101010010100010$ .

β) Εάν υπάρξει αλλοίωση κατά τη μεταφορά στο δεύτερο, τέταρτο και ενδέκατο bit του μηνύματος στη διαίρεση του λανθασμένου T(x)´ θα βρούμε το παρακάτω υπόλοιπο:

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0
 \end{array}$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι **R(x)=11110110**, διαφορετικό από το 0, άρα υπάρχει σφάλμα κατά τη μεταφορά.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ

## *Σκοπός του Κεφαλαίου*

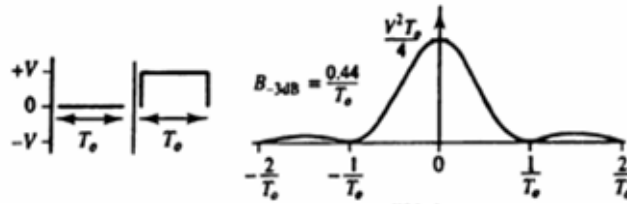
*Ο Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να περιγραφούν οι βασικότερες τεχνικές μετάδοσης και διαμόρφωσης ενός ψηφιακού σήματος που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση ψηφιακής πληροφορίας μέσα από κανάλια ζώνης διέλευσης.*

### **5.1 Ψηφιακή Κωδικοποίηση Μετάδοσης**

Υπάρχει μεγάλη ποικιλία στη μορφή των τετραγωνικών κυματομορφών-παλμών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετάδοση ψηφιακής πληροφορίας. Η επιλογή του κατάλληλου ζευγαριού παλμών για την αναπαράσταση των δυαδικών ψηφίων 0 και 1 ορίζει ένα τύπο κωδικοποίησης της ψηφιακής πληροφορίας, ο οποίος συχνά συναντάται στην βιβλιογραφία σαν ‘ψηφιακός κώδικας μετάδοσης’

#### **5.1.1 Μονοπολική κωδικοποίηση με μη επαναφορά στο μηδέν (NRZ).**

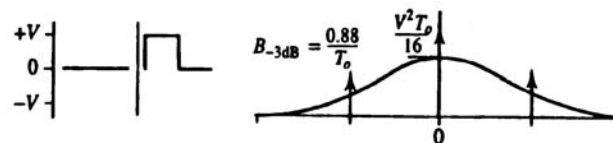
Για το σύμβολο 1 αποστέλλεται παλμός σταθερής τάσης, για το σύμβολο 0 δεν αποστέλλεται παλμός. Για την αναγνώριση καταστάσεων 0, 1 στο δέκτη γίνεται δειγματοληψία τις χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν στο μέσο της διάρκειας κάθε συμβόλου δηλ. ο δέκτης είναι συγχρονισμένος με τον πομπό. Για την εκτίμηση, αν ένα σύμβολο είναι 0, ή 1, δεδομένου ότι τα σήματα παραμορφώνονται κατά τη μετάδοση, χρησιμοποιείται κατώφλι απόφασης στο μέσο του πλάτους των παλμών. Αν η τιμή στο δέκτη είναι μεταξύ 0 και 0.5, το σύμβολο θεωρείται 0, αν είναι μεταξύ 0.5 και 1.0, θεωρείται 1 (Σχήμα 5.1).



Σχήμα 5. 1: Μονοπολική μη επαναφορά στο μηδέν κωδικοποίηση

### 5.1.2 Μονοπολική κωδικοποίηση με επαναφορά στο μηδέν (RZ)

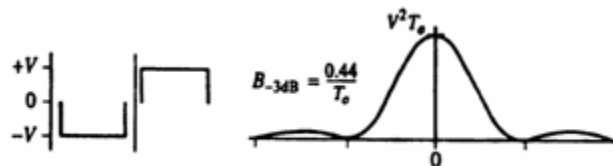
Στην κωδικοποίηση unipolar RZ, το δυαδικό ψηφίο 1 αναπαρίσταται με τη μετάδοση ενός θετικού παλμού ο οποίος επιστρέφει στη μηδενική στάθμη πριν από το τέλος της διάρκειας του ψηφίου, ενώ το δυαδικό ψηφίο 0 αναπαρίσταται με την απουσία παλμού.



Σχήμα 5.2: Πολική επαναφορά στο μηδέν κωδικοποίηση

### 5.1.3 Διπολική κωδικοποίηση με μη επαναφορά στο μηδέν

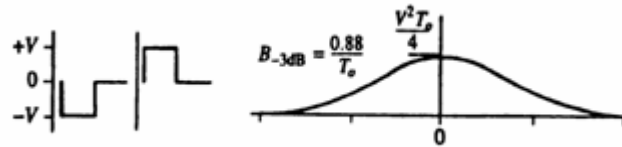
Στην κωδικοποίηση bipolar NRZ, τα δυαδικά ψηφία αναπαρίσταται με διαμετρικά αντίθετους παλμούς, το πλάτος των οποίων παραμένει σταθερό σε όλη τη διάρκεια του ψηφίου. Στο δυαδικό ψηφίο 1, αντιστοιχεί ο θετικός παλμός, ενώ στο δυαδικό ψηφίο 0, ο αρνητικός παλμός (Σχήμα 5.3).



Σχήμα 5.3: Διπολική με μη επαναφορά στο μηδέν κωδικοποίηση

#### 5.1.4 Διπολική με επαναφορά στο μηδέν κωδικοποίηση

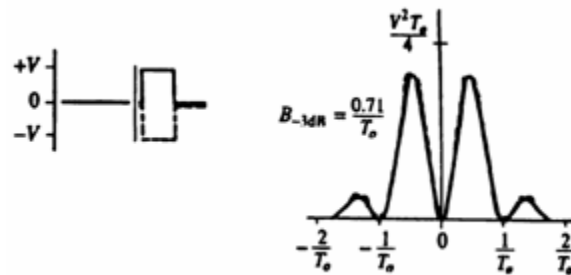
Στην κωδικοποίηση bipolar RZ, για τα σύμβολα 1 και 0 χρησιμοποιούνται παλμοί με εναλλακτικά θετική και αρνητική πολικότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 5.4: Διπολική με επαναφορά στο μηδέν κωδικοποίηση

#### 5.1.5 Αντίστροφη εναλλασσόμενου σημείου με επαναφορά στο μηδέν κωδικοποίηση

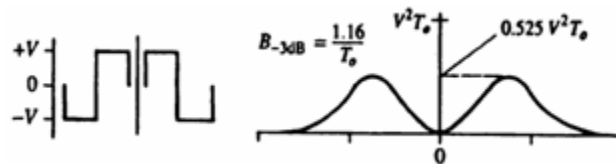
Στην κωδικοποίηση Alternate Mark Inversion Return to Zero (AMI-RZ), το δυαδικό ψηφίο 0 αναπαρίσταται με θετικούς και αρνητικούς παλμούς, οι οποίοι μεταδίδονται κατά εναλλαγή. Οι θετικοί και αρνητικοί παλμοί του ψηφίου 1 έχουν το ίδιο πλάτος και επιστρέφουν στη μηδενική στάθμη πριν από το τέλος της διάρκειας του ψηφίου.



Σχήμα 5.5: Αντίστροφη εναλλασσόμενου σημείου με επαναφορά στο μηδέν κωδικοποίηση

### 5.1.6 Κωδικοποίηση Manchester

Στην κωδικοποίηση Manchester, ο χρόνος μετάδοσης του κάθε ψηφίου χωρίζεται σε δύο ίσα διαστήματα. Για το δυαδικό ψηφίο 1, στο πρώτο μισό της διάρκειας του ψηφίου μεταδίδεται ένας θετικός πλαμός, ενώ στο δεύτερο μισό μεταδίδεται ένας αρνητικός παλμός, διαμετρικά αντίθετος.

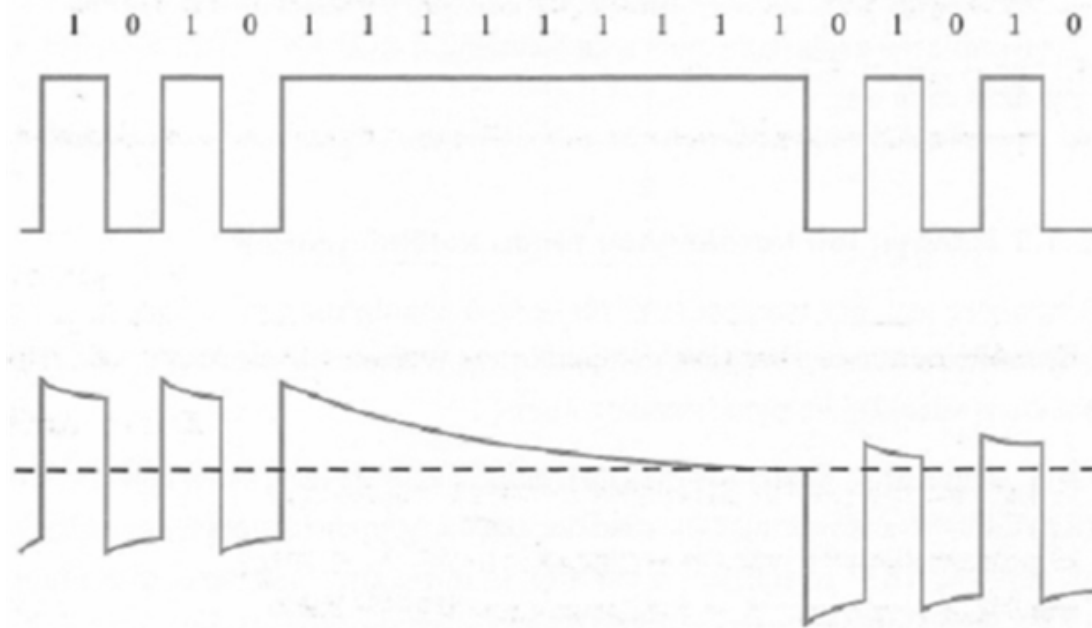


Σχήμα 5.6: Κωδικοποίηση Manchester

### 5.1.7 Επιλογή του κατάλληλου τύπου κωδικοποίησης

Στις μέρες μας, δεν υπάρχει ένας τύπος κωδικοποίησης που να έχει επικρατήσει καθολικά. Οι τεχνικές επαναφοράς στο μηδέν (RZ) έχουν το πλεονέκτημα της ευκολίας εξαγωγής του σήματος χρονισμού σε σχέση με τις τεχνικές NRZ. Τα σήματα RZ καταλαμβάνουν μεγαλύτερο εύρος ζώνης από ότι τα σήματα NRZ. Συγκεκριμένα, η διάρκεια του παλμού στα σήματα RZ είναι ίση με το μισό της διάρκειας του δυαδικού ψηφίου. Και τα δύο ειδών μονοπολικά σήματα εμφανίζουν μη μηδενική μέση τιμή, ιδιότητα που χαρακτηρίζεται με τον όρο συνιστώσα συνεχούς ή συνιστώσα DC. Αυτή η ιδιότητα είναι ορατή στο φάσμα του μονοπολικού σήματος με την ύπαρξη της κατακόρυφης στη μηδενική συχνότητα.

Στην περίπτωση που η μετάδοση των σημάτων γίνεται δια μέσω συνδέσεων και ηλεκτρικών διατάξεων, υπάρχει παραμόρφωση των μεταδοδιδόμενων παλμών. Αυτή η παραμόρφωση έχει τη μορφή της εκθετικής εξασθένησης του πλάτους του παλμού (Σχήμα 5.7).



**Σχήμα 5. 7: Παράδειγμα της παραμόρφωσης σήματος παλμού**

Συνοψίζοντας, η επιλογή του κατάλληλου ζευγαριού παλμών για την αναπαράσταση των δυαδικών ψηφίων 0 και 1 βασίζεται σε ένα ή περισσότερα από τα ακόλουθα κριτήρια:

4. Το εύρος ζώνης συχνοτήτων που καταλαμβάνει
5. Την ύπαρξη ή την απουσία DC συνιστώσας
6. Την ευκολία εξαγωγής του σήματος χρονισμού
7. Την ύπαρξη ή όχι της δυνατότητα εντοπισμού σφαλμάτων μετάδοσης
8. Την ανοχή στο θόρυβο
9. Την πολυπλοκότητα της κωδικοποίησης του κωδικοποιητή και του αποκωδικοποιητή

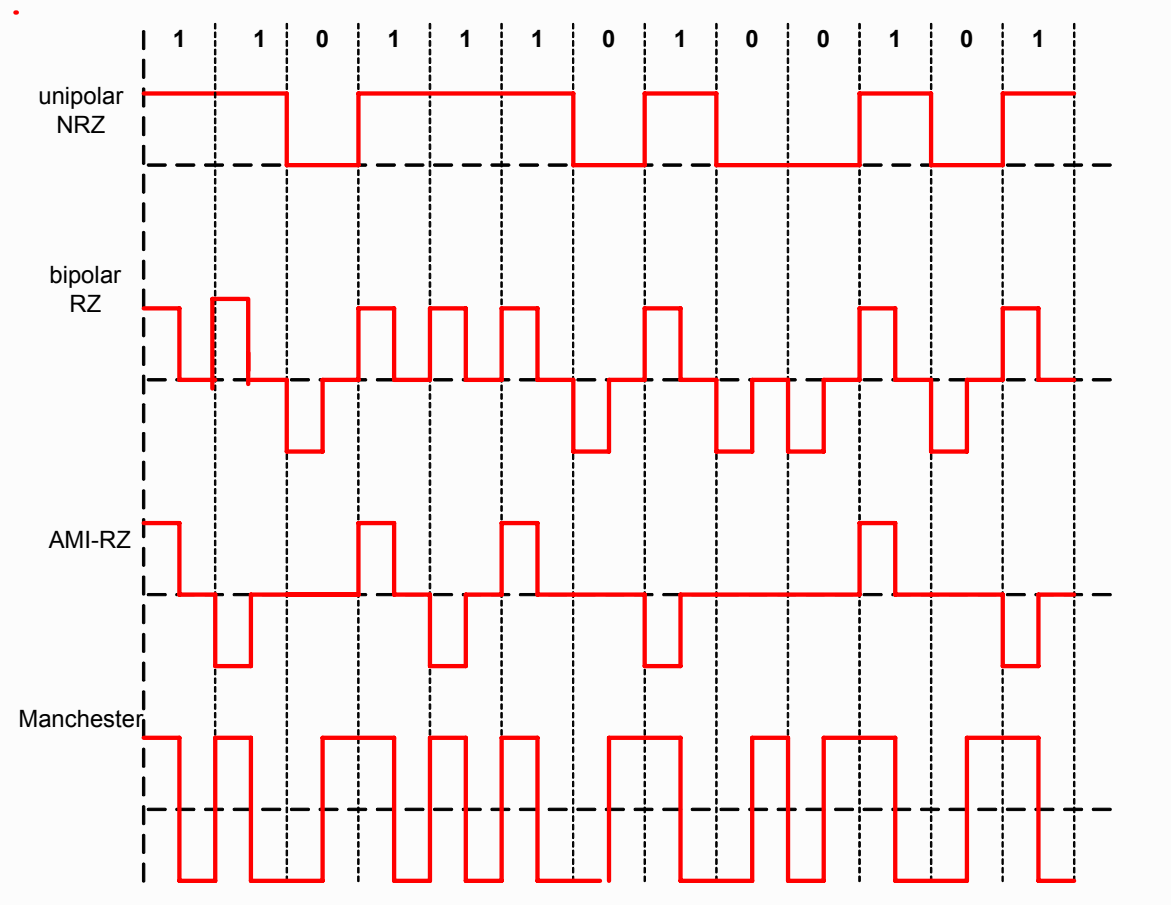
### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

5.1 Έστω ότι έχουμε τη δυαδική ακολουθία 1101110100101. Να σχεδιασθούν οι κυματομορφές για τις παρακάτω μορφοποιήσεις κωδικοποίησης

- (α) Μονοπολική μη επαναφορά στο μηδέν-NRZ
- (β) Διπολική επαναφορά στο μηδέν-RZ
- (γ) AMI RZ

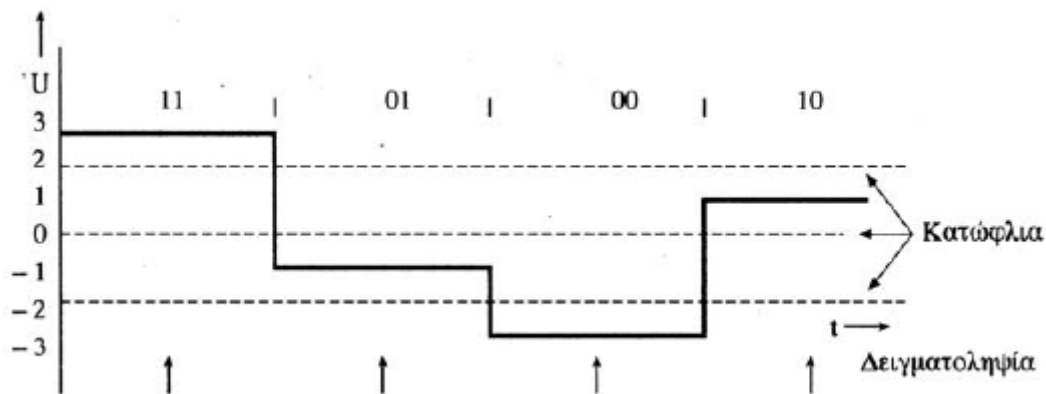
(δ) Manchester

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 5.1



### 5.1.8 Κωδικοποίηση με περισσότερες τιμές

Εκτός από τα σήματα με δύο στάθμες που αντιστοιχούν σε σύμβολα με δύο τιμές, πραγματοποιούνται σήματα με περισσότερες στάθμες για αντίστοιχες τιμές. Στην περίπτωση αυτή αποστέλλονται στη διάρκεια ενός συμβόλου περισσότερα του ενός bit και η κωδικοποίηση ονομάζεται M-αδική. Π.χ. το σχήμα 5.1 παρουσιάζει σήμα με τέσσερις στάθμες που αντιστοιχούν στις τιμές -3, -1, +1, +3. Σε κάθε σύμβολο αντιστοιχούν δύο bits.



Σχήμα 5.8: Κωδικοποίηση με τέσσερις στάθμες σήματος.

### 5.1.9 Ρυθμός μετάδοσης - Ρυθμός λαθών

Ο ρυθμός μετάδοσης  $\nu$  εκφράζεται σε μεταδιδόμενα δυαδικά ψηφία ανά δευτερόλεπτο ή bit/s. Αν τα σύμβολα του κώδικα παίρνουν δύο μόνο τιμές (0,1) ο ρυθμός bit/s είναι ίσος με το ρυθμό σύμβολα/s. Αν τα σύμβολα παίρνουν περισσότερες από δύο τιμές, όπως σε Μ-αδική κωδικοποίηση, ο ρυθμός bit/s είναι μεγαλύτερος του ρυθμού σύμβολα/s, π.χ. διπλάσιος στην κωδικοποίηση της παραγράφου παραγράφου 1.1.8. Ο ρυθμός σύμβολα/s μετριέται σε Baud (Bd).

Ο ρυθμός λαθών ορίζει το μέσο αριθμό λανθασμένων bits στο δέκτη, στο σύνολο των μεταδιδόμενων bits, π.χ. 1,5 bits κατά μέσο όρο σε  $10^7$  μεταδιδόμενα bits. Ο ρυθμός λαθών υπολογίζεται από το πηλίκο των δύο αριθμών που δίνει την πιθανότητα σφάλματος και δίνεται συνήθως ως γινόμενο, π.χ.  $1,5 \cdot 10^{-7}$ .

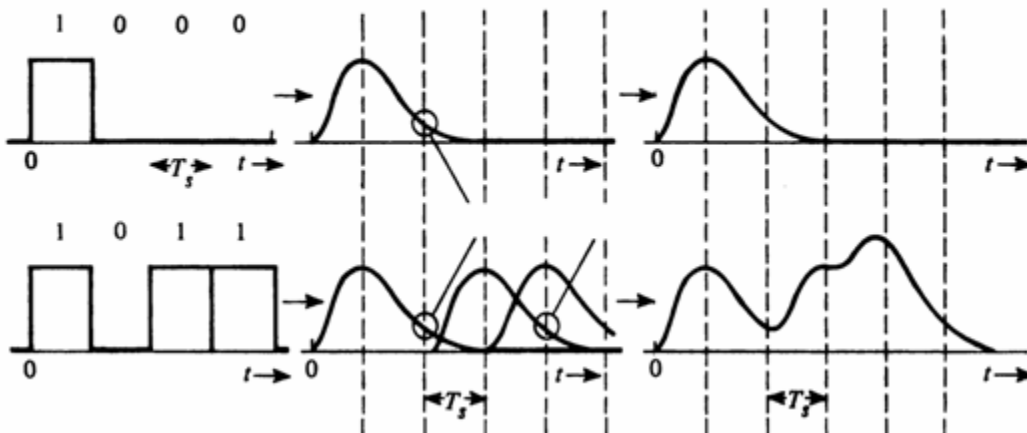
## 5.2 Επικοινωνία Βασικής Ζώνης

Αν αναλύσουμε κατά Fourier, ένα ψηφιακό σήμα, το φάσμα του αποτελείται από άπειρες συνιστώσες, το πλάτος των οποίων μειώνεται όσο αυξάνεται η συχνότητα. Η

θέση και η πυκνότητα των φασματικών συνιστωσών εξαρτάται από τη συγκεκριμένη διάταξη των δυαδικών ψηφίων του σήματος. Το φάσμα ενός ψηφιακού σήματος φράσσεται από μία περιβάλλουσα της μορφής  $|\sin c(x)|$ .

Το μέσο μετάδοσης μπορεί να περιορίσει το εύρος των συχνοτήτων που μπορούν να διέλθουν από αυτό, τότε οι υψηλές συχνότητες του ψηφιακού σήματος αποκόβονται. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την εξομάλυνση του σήματος η οποία είναι ορατή με την απομάκρυνση των κατακόρυφων παρυφών και γενικότερα με το 'άπλωμα' των παλμών .

Η εξάπλωση των παλμών κατά τη μετάδοση τους διαμέσου ενός καναλιού με πεπερασμένο εύρος συχνοτήτων προκαλεί την αλληλοκάλυψη των γειτονικών παλμών, η οποία ονομάζεται διασυμβολική παρεμβολή (intersymbol interference) και μπορεί να προκαλέσει την εμφάνιση σφαλμάτων μετάδοσης. Το πρόβλημα αυτό φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 5.9: Το Πρόβλημα της Διασυμβολικής Παρεμβολής

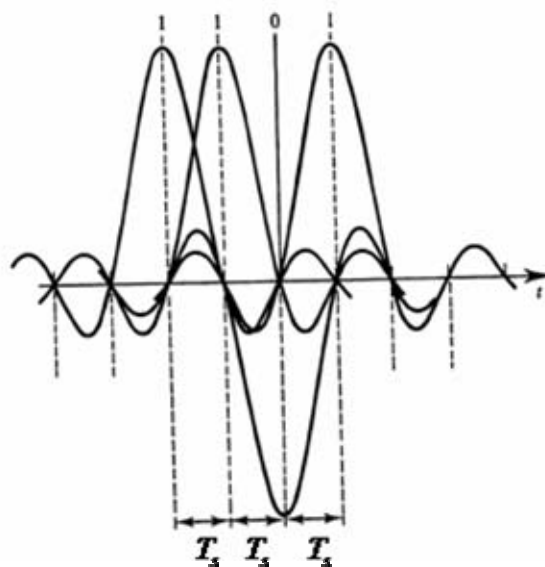


Το πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής μπορεί να αντιμετωπισθεί διαμορφώνοντας κατάλληλα τους εκπεμπόμενους παλμούς. Ένας τέτοιος παλμός είναι ο

$$h(t) = \frac{1}{T_s} \frac{\sin(\frac{\pi t}{T_s})}{\frac{\pi t}{T_s}} = \frac{1}{T_s} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

παλμός sinc, ο οποίος ορίζεται από τη σχέση:

Ο παλμός sinc δημιουργείται εάν περάσουμε ένα κρουστικό παλμό από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο. Μια σημαντική ιδιότητα της  $h(t)$  είναι ότι διέρχεται από το σημείο 0 για όλες τις χρονικές στιγμές που είναι πολλαπλάσιες του  $T_s$ . Κατά συνέπεια, εάν οι παλμοί μορφοποιηθούν σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση, τότε δεν παρατηρείται το φαινόμενο της διασυμβολικής παρεμβολής καθώς απέχουν μεταξύ τους χρονικές αποστάσεις ίσες με ακέραια πολλαπλάσια του  $T_s$ .



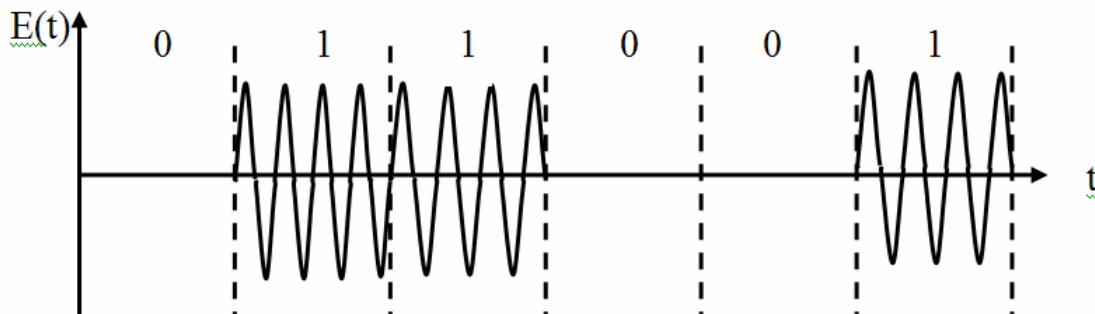
**Σχήμα 5.10: Αντιμετώπιση του προβλήματος της Διασυμβολικής Παρεμβολής**

### 5.3 Ψηφιακές διαμορφώσεις αναλογικού φέροντος

Στις ψηφιακές διαμορφώσεις αναλογικού φέροντος το φέρον είναι ημιτονικό σήμα  $M(t)$  και το σήμα διαμόρφωσης είναι ψηφιακή πληροφορία δυαδική (δύο καταστάσεων '0', '1') ή K-αδική (K διαφορετικών καταστάσεων, που αντιπροσωπεύονται από ομάδες – κώδικες των  $\log_2 K$  bits). Κάποια παράμετρος (το πλάτος, η συχνότητα ή η φάση) του διαμορφωμένου φέροντος  $E(t)$  μεταβάλλεται στο ρυθμό της πληροφορίας.

#### 5.3.1 Διαμόρφωση ASK

Πρόκειται για διαμόρφωση πλάτους (Amplitude Shift Keying). Οι K διακριτές καταστάσεις της πληροφορίας αντιπροσωπεύονται από διαφορετικές τιμές πλάτους του φέροντος σήματος. Στην περίπτωση που  $K=2$  (δυαδικές καταστάσεις) έχουμε την διαμόρφωση OOK (On-Off Keying), που φαίνεται στη γραφική παράσταση του σχήματος που ακολουθεί.



Σχήμα 5.11: Διαμόρφωση OOK/ASK

Το διαμορφωμένο σήμα  $E(t)$  δίνεται από την έκφραση:

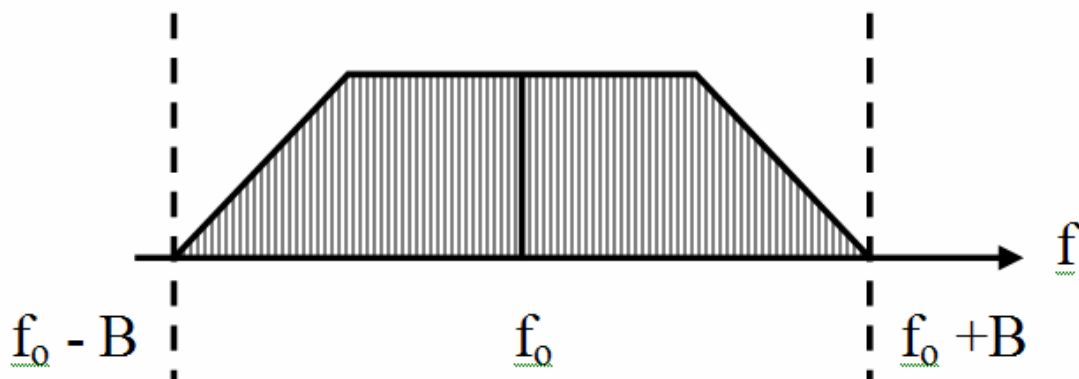
$$E(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

με  $a(t) = 0$  ή  $1$ .

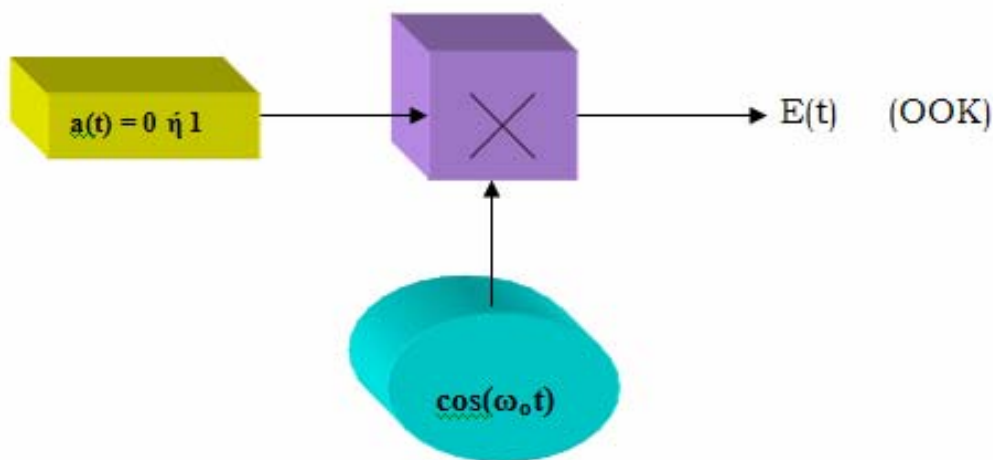
Η σχέση θυμίζει την πολλαπλασιαστική διαμόρφωση DSB, που γνωρίσαμε στις αναλογικές διαμορφώσεις. Το φάσμα περιλαμβάνει θεωρητικά δύο πλάγιες ζώνες

άπειρου εύρους (ένα καθαρό δυαδικό σήμα έχει άπειρο φασματικό εύρος) και φασματική συνιστώσα του φέροντος που οφείλεται στη συνεχή συνιστώσα του διαμορφώνοντος σήματος (Σχήμα 5.11).

Στην πράξη, αν  $R_s (= R)$  ο επιθυμητός ρυθμός εναλλαγής της πληροφορίας σε bits/sec,  $B$  η φασματική ζώνη του ψηφιακού σήματος, τότε:  $B = 0.8 \cdot R$ . Το εύρος του φάσματος μετά τη διαμόρφωση είναι :  $B_{ολ} = 2B = 2 \cdot 0.8 \cdot R = 1.6 \cdot R$ . Το γενικό διάγραμμα διαμορφωτή OOK φαίνεται στο σχήμα Σχήμα 5.12.



Σχήμα 5. 12: Φάσμα σήματος OOK



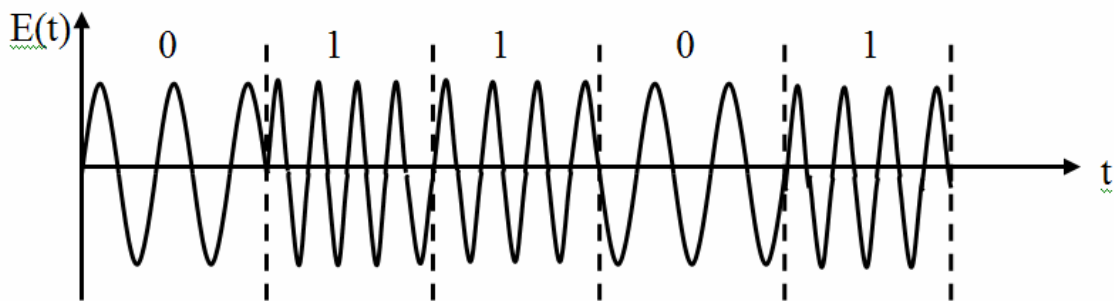
Σχήμα 5. 13 :Γενικό διάγραμμα διαμορφωτή OOK

### 5.3.2 Διαμόρφωση FSK δύο καταστάσεων

Πρόκειται για διαμόρφωση συχνότητας (Frequency Shift Keying) όπου η συχνότητα του φέροντος για τις δύο δυαδικές καταστάσεις '0' και '1' παίρνει δύο διακριτές διαφορετικές τιμές:

Για στάθμη '0' :  $f = f_0 - \Delta f$

Για στάθμη '1' :  $f = f_0 + \Delta f$



Σχήμα 5.14: Διαμόρφωση FSK

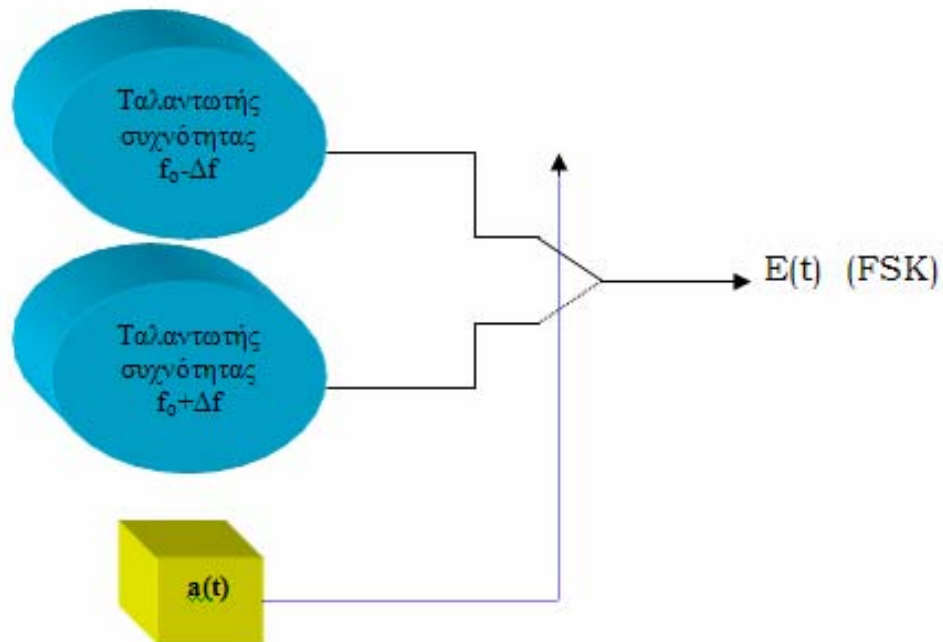
Η χρονική εικόνα του σήματος φαίνεται στο σχήμα 5.13 και η μαθηματική έκφραση δίνεται από τη σχέση:

$$E(t) = E_0 \cos \{ 2\pi f_0 t + 2\pi [a(t)\Delta f]t \}$$

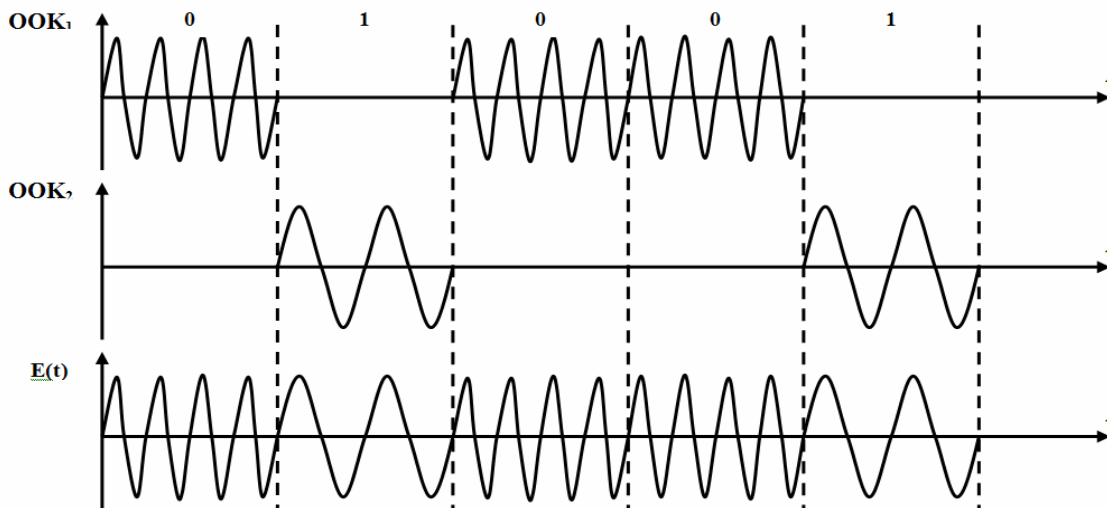
όπου  $a(t) = 1$  ή  $-1$ .

Η FSK αντιστοιχεί στη διαμόρφωση FM.

Ο γενικός τελεστής διαμόρφωσης FSK φαίνεται στο σχήμα 5.14. Το σήμα FSK προκύπτει από το συνδυασμό δύο ανεξάρτητων ταλαντωτών με συχνότητες  $f_0 - \Delta f$  και  $f_0 + \Delta f$  διαμορφωμένων με OOK. Ο μηχανισμός δημιουργίας του FSK σήματος φαίνεται στο σχήμα 5.16 και δικαιολογεί την ύπαρξη ενδεχομένως ασυνεχειών στη φάση του σήματος κατά την εναλλαγή των καταστάσεων.



Σχήμα 5. 15: Γενικό διάγραμμα διαμορφωτή FSK

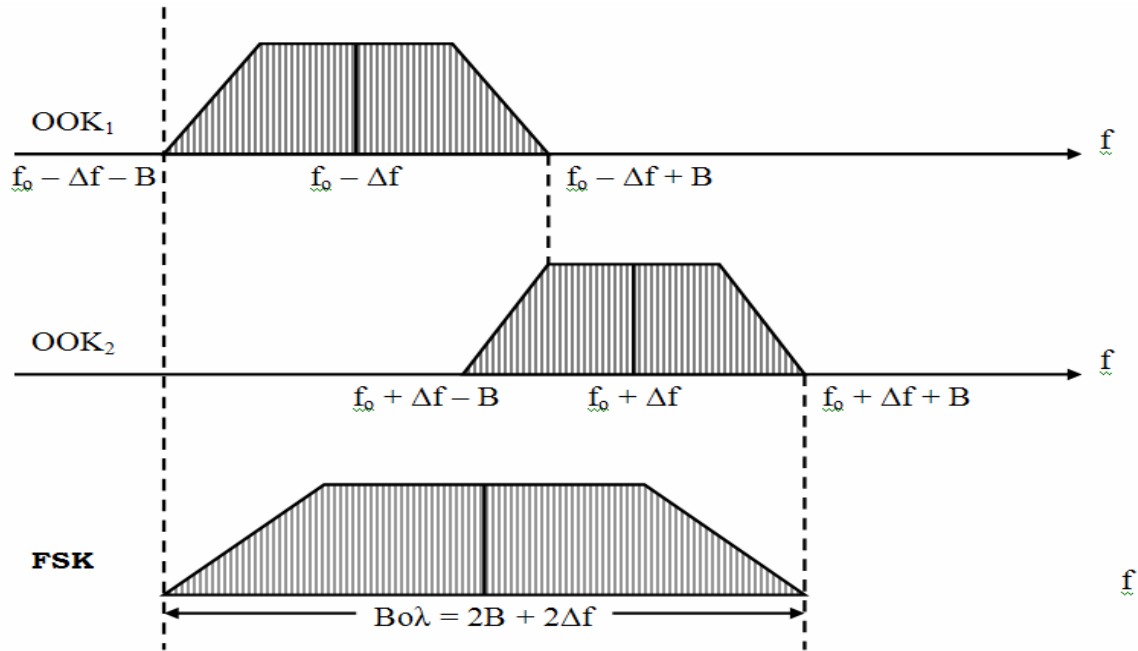


Σχήμα 5. 16: Μηχανισμός δημιουργίας του σήματος FSK

Από τον τρόπο σύνθεσης του σήματος FSK (σχήμα 5.15) μπορεί να εκτιμηθεί εύκολα το φάσμα και το εύρος της φασματικής ζώνης. Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 5.17, απ' όπου φαίνεται ότι μετά τη διαμόρφωση έχουμε:

$$B_{ολ} = 2*B + 2*\Delta f$$

$$B = 0.8*R_s \text{ (} R_s = R \text{ σε bits/sec)}$$



Σχήμα 5. 17: Το φάσμα στη διαμόρφωση FSK

### 5.3.3 Διαμόρφωση PSK

Στη διαμόρφωση PSK (Phase Shift Keying) οι  $K$  διακριτές καταστάσεις της πληροφορίας επηρεάζουν την αρχική φάση του φέροντος σήματος. Η μαθηματική έκφραση του διαμορφωμένου φέροντος δίνεται από τη σχέση:

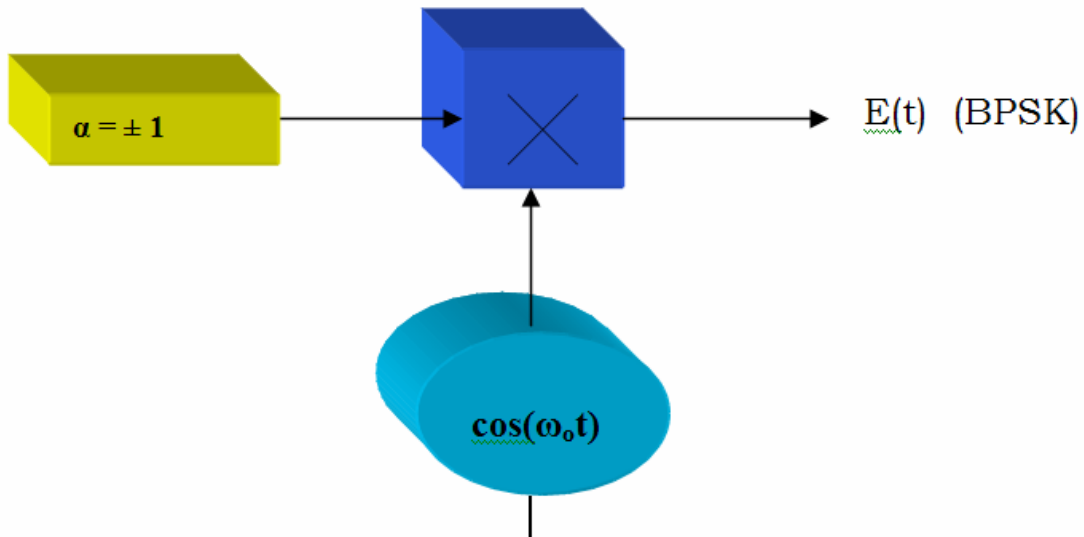
$$E(t) = E_0 \cos[\omega_0 t + \phi_0 + a(t) \cdot 2\pi/K]$$

όπου  $a(t) \in \{0, 1, 2, \dots, K-1\}$  και  $\phi_0$  η αρχική φάση του σήματος

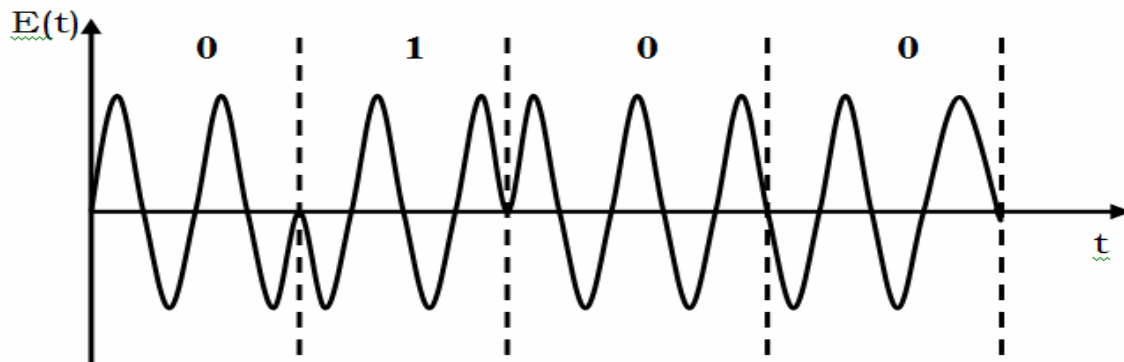
**Διαμόρφωση BPSK:** Στην περίπτωση που  $K = 2$ , (η διαμόρφωση αναφέρεται ως BPSK (Binary Phase Shift Keying) και  $a(t) = 0$  ή  $1$ . Άρα:

$$= E(t) = E_0 \cos[\omega_0 t + a(t)\pi] = \pm E_0 \cos(\omega_0 t)$$

Η BPSK μπορεί να θεωρηθεί ως διαμόρφωση DSBsc με σήμα διαμόρφωσης  $a = \pm 1$ . Ο γενικός τελεστής διαμόρφωσης BPSK δίνεται στο σχήμα 5.18 και η χρονική εικόνα του σήματος αποδίδεται στο σχήμα 5.19



Σχήμα 5. 18: Διάγραμμα διαμορφωτή BPSK

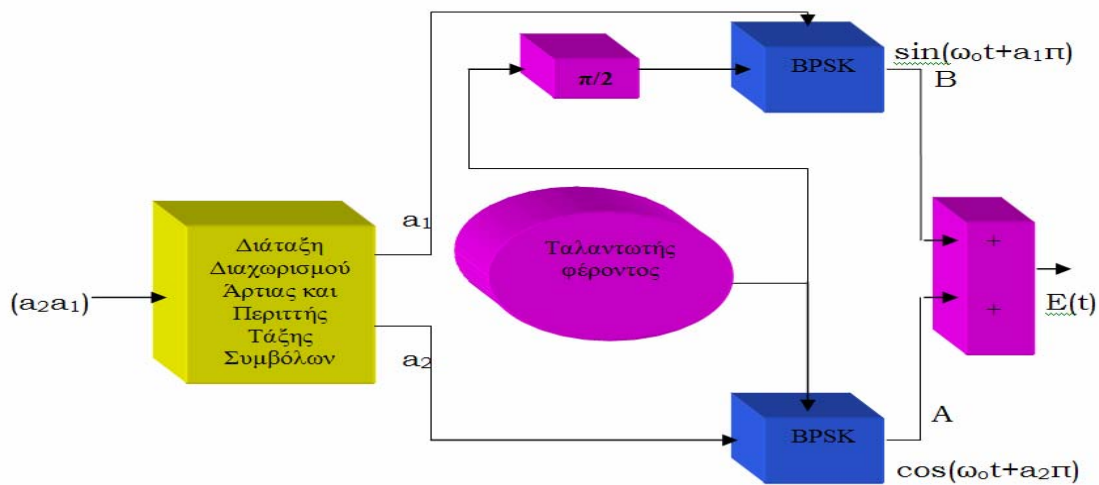


Σχήμα 5. 19: Εικόνα του σήματος BPSK

Η φασματική εικόνα είναι η ίδια με την περίπτωση της OOK, με τη διαφορά ότι στην περίπτωση της BPSK δεν υπάρχει φασματική συνιστώσα του φέροντος (στη συχνότητα  $f_0$ ).

**Διαμόρφωση QPSK:** Στην περίπτωση που  $K = 4$ , η διαμόρφωση PSK αναφέρεται ως QPSK ( Quadrature Phase Shift Keying). Πρόκειται για διαμόρφωση φάσης τεσσάρων διακριτών καταστάσεων που αντιστοιχούν (όπως φαίνεται στον πίνακα του σχήματος 9.2.9) σε πληροφορία που κωδικοποιείται από ένα ζευγάρι δυαδικών στοιχείων: '00', '01', '10', '11'.

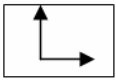
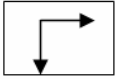
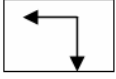
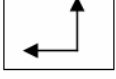
Στο σχήμα 5.11 δίνεται το γενικό διάγραμμα ενός διαμορφωτή QPSK, που αποτελείται από δύο διαμορφωτές BPSK οι οποίοι εργάζονται με ορθογώνια φέροντα (παρουσιάζουν διαφορά φάσης  $\pi/2$ ).



**Σχήμα 5. 20: Γενικό διάγραμμα διαμορφωτή QPSK.**

Τα σήματα των δύο διαμορφωτών αθροίζονται στην έξοδο. Το διανυσματικό αποτέλεσμα (διαμόρφωση QPSK) εμφανίζεται στο σχήμα 5.21.



| $a_2 a_1$ | Σημείο Α                 | Σημείο Β                 | Διαν. Αποτέλεσμα                                                                   |
|-----------|--------------------------|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 0 0       | $\cos(\omega_0 t)$       | $\sin(\omega_0 t)$       |  |
| 0 1       | $\cos(\omega_0 t)$       | $\sin(\omega_0 t + \pi)$ |  |
| 1 1       | $\cos(\omega_0 t + \pi)$ | $\sin(\omega_0 t + \pi)$ |  |
| 1 0       | $\cos(\omega_0 t + \pi)$ | $\sin(\omega_0 t)$       |  |

Σχήμα 9.2.9: Σύνθεση του σήματος QPSK

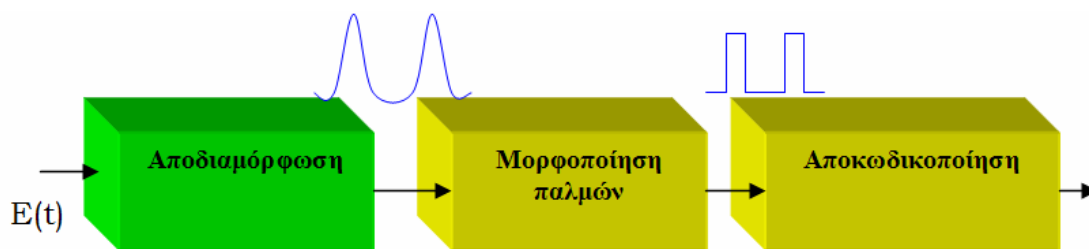
Η μαθηματική έκφραση του διαμορφωμένου σήματος που προκύπτει είναι:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \pi/4 + a\pi/2), \quad (16)$$

όπου  $a = 0, 1, 2, 3$ .

### 5.3.4 Αποδιαμόρφωση

Η αποδιαμόρφωση των σημάτων OOK, FSK και PSK στο δέκτη γίνεται με τη χρήση σύμφωνου (σύγχρονου) αποδιαμορφωτή. Στην έξοδο του αποδιαμορφωτή συνήθως οι παλμοί (η ψηφιακή πληροφορία) εμφανίζονται παραμορφωμένοι, λόγω του περιορισμού που υπέστη το φάσμα τους στο τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Γι' αυτό πάντοτε μετά την αποδιαμόρφωση ακολουθεί στάδιο επαναμορφοποίησης των παλμών (σχήμα 9.2.10).



Σχήμα 9.2.10: Μορφοποίηση των παλμών μετά την αποδιαμόρφωση

Υπάρχουν πολλά είδη ψηφιακών διαμορφώσεων ημιτονικού φέροντος που δε θα μελετηθούν εδώ. Η σύγκριση των διαφόρων μεθοδολογιών δεν είναι πάντοτε εύκολη υπόθεση. Το ζητούμενο στις ψηφιακές τηλεπικοινωνίες είναι να επιτευχθεί όσο το δυνατόν μεγαλύτερος ρυθμός πληροφορίας ανά μονάδα χρόνου (μεγάλος όγκος πληροφορίας), με το μικρότερο δυνατό εύρος φάσματος και τη μικρότερη ισχύ φέροντος σήματος. Για τούτο βασική παράμετρος που χαρακτηρίζει τις ψηφιακές διαμορφώσεις και δίνει ένα μέτρο σύγκρισης μεταξύ τους είναι η φασματική αποτελεσματικότητα  $\eta$ . Ορίζεται από τη σχέση:

$$\eta = R/B_{\text{ολ}}, \quad (17)$$

όπου  $R$  ο ρυθμός μετάδοσης (το bit rate σε bits/sec) και  $B_{\text{ολ}}$  η ολική φασματική ζώνη στο τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Το μέγεθος  $\eta$  εξαρτάται από τον τρόπο κωδικοποίησης του ψηφιακού σήματος και το είδος της διαμόρφωσης που θα επιλεγεί. Μετρίεται σε bits/sec/Hz.

Με βάση τα παραπάνω, είναι προφανές ότι η διαμόρφωση PSK είναι πιο αποτελεσματική από την FSK και την OOK. Διερευνώντας τις τρεις διαμορφώσεις OOK, FSK και PSK σχετικά με τις επιδόσεις τους στο θόρυβο αποδεικνύεται ότι η διαμόρφωση PSK είναι καλύτερη. Για το ίδιο ποσοστό σφάλματος δυαδικών στοιχείων στην έξοδο (bit error rate) η PSK απαιτεί μισή ισχύ σήματος στην είσοδο του δέκτη. Η αναλυτική μελέτη των επιδόσεων των ψηφιακών διαμορφώσεων σε σχέση με το θόρυβο ξεφεύγει από το πλαίσιο αυτού του μαθήματος.

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

5.2 Σε διαμόρφωση OOK η ολική φασματική ζώνη του φέροντος δεν πρέπει να ξεπεράσει τα 100 kHz. Να προσδιοριστεί ο μέγιστος ρυθμός δυαδικών συμβόλων σε bits/sec που μπορούμε να έχουμε.

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ 5.2**

Στην περίπτωση της OOK ισχύει:  $B_{ολ} = 1,6R$ , όπου  $R$  ο ρυθμός bits/sec. Έτσι,  $R = 100000/1,6 = 62500$  bits/sec.

### **ΑΣΚΗΣΗ 5.3**

Σε δεδομένη εφαρμογή με διαμόρφωση FSK χρησιμοποιούνται ταλαντωτές με συχνότητες  $f_1 = 1800$  Hz (που αντιπροσωπεύει το δυαδικό στοιχείο '1') και  $f_2 = 1200$  Hz (που αντιπροσωπεύει το δυαδικό στοιχείο '0'). Ο ρυθμός μετάδοσης στο κανάλι είναι 1200 bauds. Να προσδιοριστεί το φασματικό εύρος του σήματος στο τηλεπικοινωνιακό κανάλι.

### **ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 5.3**

Για την FSK είδαμε ότι σχύει το ακόλουθο:  $B_{ολ} = 2B + 2\Delta f$ .

$B = 0,8R_s = 0,8R = 0,8 \cdot 1200 = 960$  Hz και  $2\Delta f = f_1 - f_2 = 600$  Hz.

Άρα,  $B_{ολ} = 2 \cdot 960 + 600 = 2520$  Hz.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Εισαγωγή στις Επικοινωνίες, Γ. Κοκκινάκης,
- [2] Taub, Schilling, Αρχές Τηλεπικοινωνιακών Συστημάτων, Εκδ. Τζιόλα.
- [3] Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα, Γ. Κοκκινάκης
- [4] Haykin, S., Communications Systems, Wiley.
- [5] Μπίλλης Ε.Χ., Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα
- [6] Sam K. Sanmugam, Ψηφιακά Και Αναλογικά Συστήματα Επικοινωνίας, (Μετ. Γ. Πνευματικός)
- [7] Proakis, J., And Salehi, M., Communication Systems Engineering, Prentice Hall
- [8] Sklar, B., Digital Communications, Prentice Hall
- [9] Bateman A., Digital Communications, Addison-Wesley.