

# Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

## Διάλεξη 8: Διαμόρφωση Γωνίας (2/2)

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς  
Επίκουρος Καθηγητής

# Ατζέντα

- Εύρος Ζώνης Συχνοτήτων Σημάτων με Διαμόρφωση Γωνίας
- Δημιουργία Σημάτων Διαμορφωμένων κατά Γωνία
- Αποδιαμόρφωση Σημάτων Διαμορφωμένων κατά Γωνία

# Εύρος Ζώνης Συχνοτήτων Σημάτων με Διαμόρφωση Γωνίας

Ημιτονοειδής Διαμόρφωση  
Αυθαίρετη Διαμόρφωση

# Εύρος Ζώνης για Ημιτονοειδή Διαμόρφωση

Το 98% της κανονικοποιημένης συνολικής ισχύος ενός ημιτονοειδούς σήματος κυκλικής συχνότητας  $\omega_m$  (γραμμικής συχνότητας  $f_m$ ), που έχει διαμορφωθεί κατά γωνία, περιέχεται σε περιοχή συχνοτήτων με εύρος  $W_B$ :

$$W_B \approx 2(\beta + 1)\omega_m \quad (\text{rad/sec})$$

$$W_B \approx 2(\beta + 1)f_m \quad (\text{Hz})$$

Για τιμή του δείκτη διαμόρφωσης  $\beta < 0.2$  θεωρούμε ότι το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα NB έχει εύρος ζώνης συχνοτήτων ίσο με  $W_B \approx 2\omega_m$  ή  $W_B \approx 2f_m$ .

# Εύρος Ζώνης για Αυθαίρετη Διαμόρφωση

Για αυθαίρετο διαμορφώνον πληροφοριακό σήμα  $m(t)$ , που είναι περιορισμένο σε ζώνη  $\omega_M$  ( $rad/sec$ ) ορίζουμε τον **λόγο απόκλισης**  $D$  ως το πηλίκο της μέγιστης απόκλισης συχνότητας προς το εύρος ζώνης συχνοτήτων της  $m(t)$ :

$$D = \frac{\Delta\omega}{\omega_M}$$

**Κανόνας Carson:** Το εύρος ζώνης συχνοτήτων  $W_B$  σε διαμόρφωση γωνίας ενός πληροφοριακού σήματος με εύρος ζώνης συχνοτήτων  $\omega_M$ , δίνεται από τη σχέση:

$$W_B \approx 2(D + 1)\omega_M \quad (rad/sec)$$

- **Διαμόρφωση Στενής Ζώνης (Narrow Band):**

Για  $D \ll 1$  το εύρος ζώνης συχνοτήτων είναι  $W_B \approx 2\omega_M$

- **Διαμόρφωση Ευρείας Ζώνης (Wide Band):**

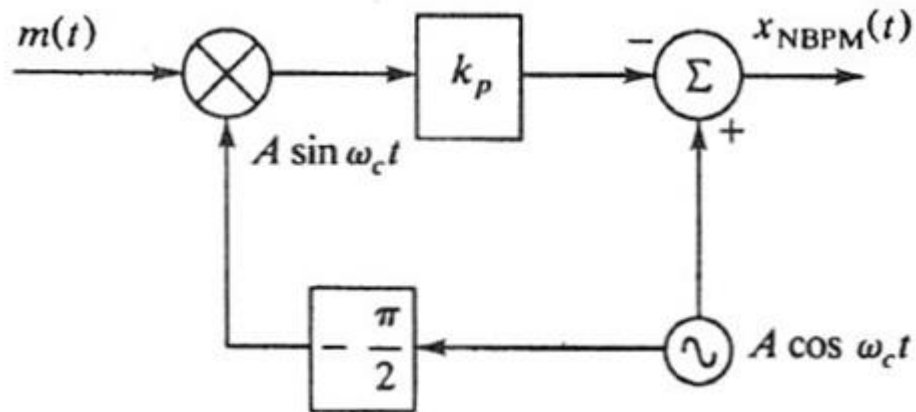
Για  $D \gg 1$  το εύρος ζώνης συχνοτήτων είναι  $W_B \approx 2D\omega_M = 2\Delta\omega$

# Δημιουργία Σημάτων Διαμορφωμένων κατά Γωνία

Σήματα Στενής Ζώνης  
Σήματα Ευρείας Ζώνης

# Διαμόρφωση Γωνίας Σημάτων Στενής Ζώνης (1/2)

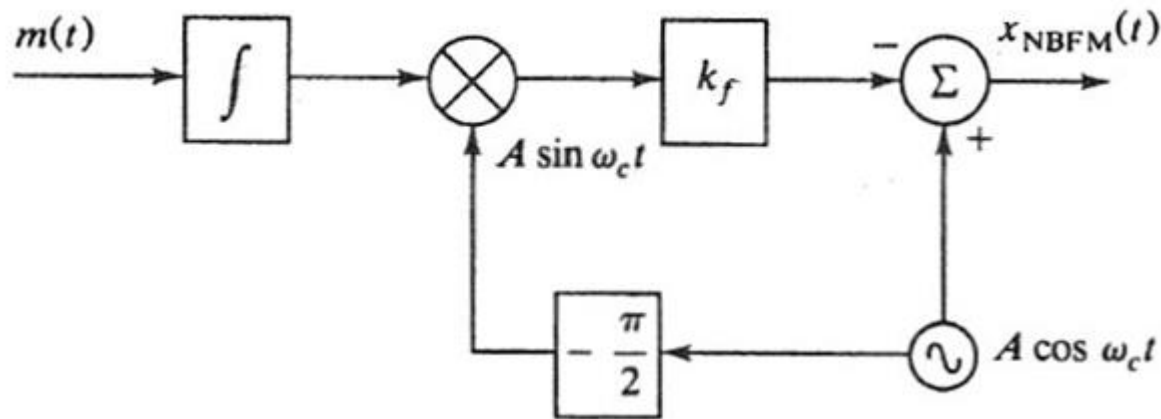
$$x_{NBPM}(t) \approx A \cos \omega_c t - A k_p m(t) \sin \omega_c t$$



Διαμορφωτής NBPM

## Διαμόρφωση Γωνίας Σημάτων Στενής Ζώνης (2/2)

$$x_{\text{NBFM}}(t) \approx A \cos \omega_c t - A \left[ \int_{-\infty}^t k_f m(\lambda) d\lambda \right] \sin \omega_c t$$

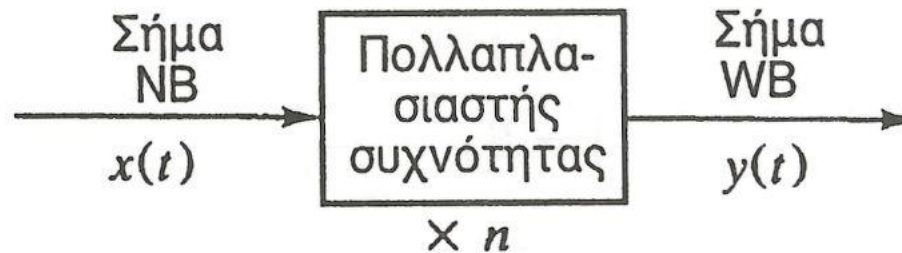


Διαμορφωτής NBFM



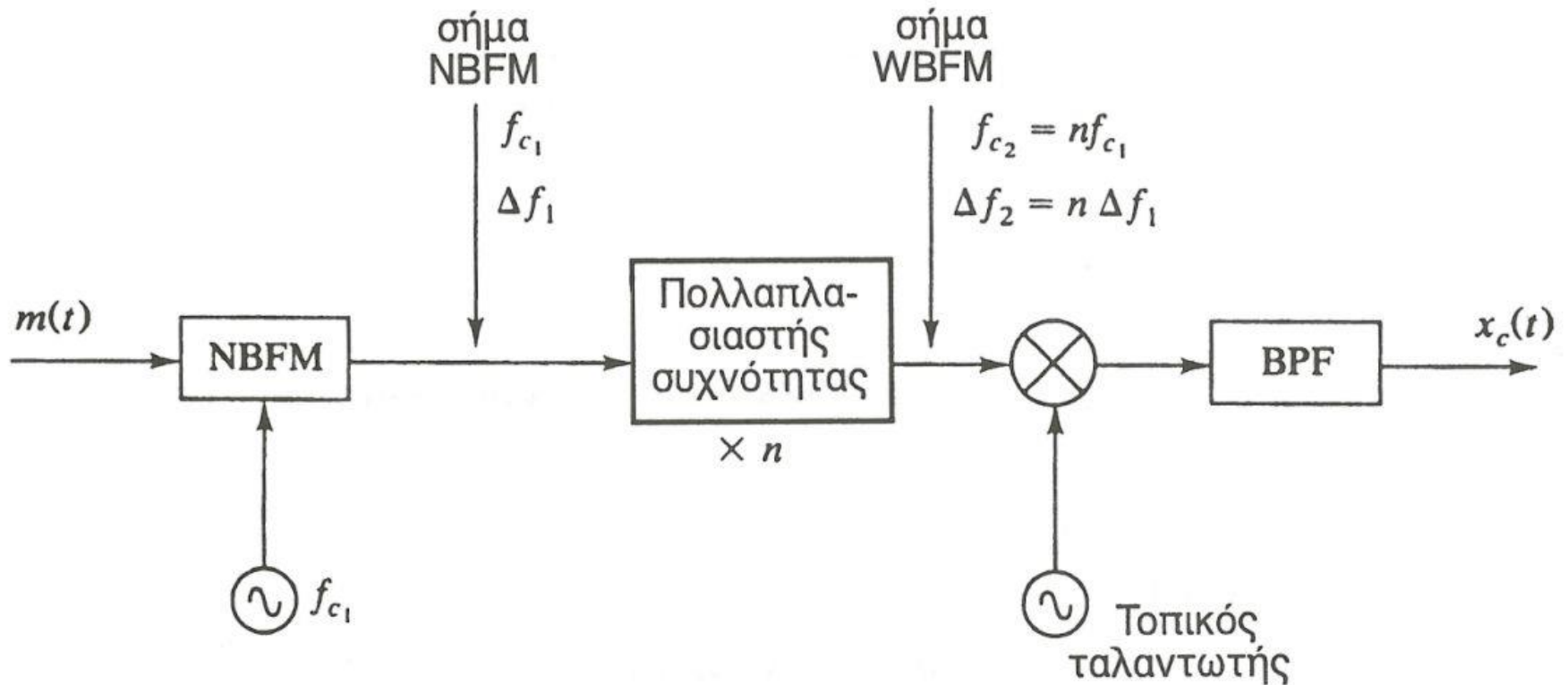
# Διαμόρφωση Γωνίας Σημάτων Ευρείας Ζώνης (1/2)

- Αρχικά παράγεται ένα κατά γωνία διαμορφωμένο σήμα στενής ζώνης (NB).
- Το NB με έναν πολλαπλασιαστή συχνότητας μετατρέπεται σε WB.



- Αν η είσοδος είναι  $x(t) = A \cos[\omega_c t + \varphi(t)]$ , η έξοδος του πολλαπλασιαστή είναι  $y(t) = A \cos[n \omega_c t + n \varphi(t)]$ .
- Ο πολλαπλασιαστής συχνότητας αυξάνει τη συχνότητα της φέρουσας σε μεγάλη τιμή που δεν είναι πρακτική. Γι' αυτό ακολουθείται η επόμενη τεχνική μετατόπισης φάσματος.

## Διαμόρφωση Γωνίας Σημάτων Ευρείας Ζώνης (2/2)

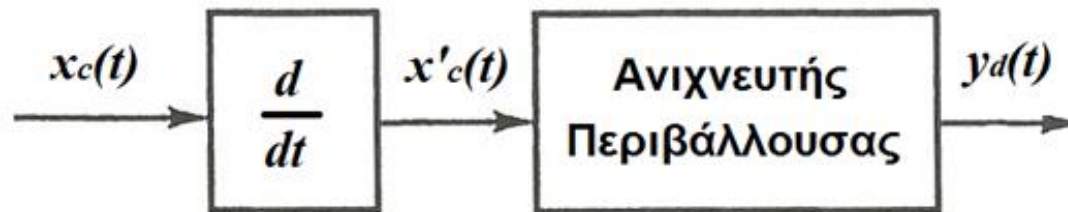


Μετατροπή NB σε WB

# Αποδιαμόρφωση Σημάτων Διαμορφωμένων κατά Γωνία

# Αποδιαμόρφωση με Διευκρινιστή Συχνότητας

Η είσοδος στον αποδιαμορφωτή είναι  $x_c(t) = A \cos[\omega_c t + \varphi(t)]$



Η έξοδος του διαφοριστή είναι:

$$x'_c(t) = -A \left[ \omega_c + \frac{d\varphi(t)}{dt} \right] \sin[\omega_c t + \varphi(t)]$$

Η έξοδος του ανιχνευτή περιβάλλουσας είναι:

$$y_d(t) = \omega_i$$

# Άσκηση 1

Ποιο είναι το εύρος ζώνης συχνοτήτων του κατά γωνία διαμορφωμένου σήματος:

$$x_c(t) = 10 \cos(2\pi 10^8 t + 200 \cos 2\pi 10^3 t)$$

Απάντηση: Η στιγμιαία συχνότητα είναι  $\omega_i = 2\pi(10^8) - 4\pi(10^5) \sin 2\pi(10^3)t$

Κι έτσι είναι  $\Delta_\omega = 4\pi(10^5)$ ,  $\omega_m = 2\pi(10^3)$ , και:

$$\beta = \frac{\Delta_\omega}{\omega_m} = \frac{4\pi(10^5)}{2\pi(10^3)} = 200$$

Στην ημιτονοειδή διαμόρφωση το εύρος ζώνης υπολογίζεται από:

$$W_B = 2(\beta + 1)\omega_m = 8.04\pi(10^5) \text{ rad/s}$$

Επειδή είναι  $\beta \gg 1$ , τότε:

$$W_B \approx 2\Delta_\omega = 8\pi(10^5) \text{ rad/s ή } f_B = 400 \text{ kHz}$$

## Άσκηση 2

Μια φέρουσα 20 MHz είναι διαμορφωμένη κατά συχνότητα από ημιτονοειδές σήμα έτσι ώστε η μέγιστη απόκλιση συχνότητας να είναι 100 kHz. Να προσδιοριστεί ο δείκτης διαμόρφωσης και το κατά προσέγγιση εύρος ζώνης συχνοτήτων του σήματος FM αν η συχνότητα του διαμορφώνοντος σήματος είναι: (α) 1 kHz, (β) 100 kHz και (γ) 500 kHz.

Απάντηση:

$$\Delta_f = 100 \text{ kHz}, \quad f_c = 20 \text{ MHz} \gg f_m$$

Για ημιτονοειδή διαμόρφωση, ισχύει:  $\beta = \Delta_f / f_m$

(α) Με  $f_m = 1 \text{ kHz}$ ,  $\beta = 100$ . Πρόκειται για σήμα NBFM και  $f_B \approx 2\Delta_f = 200 \text{ kHz}$ .

(β) Με  $f_m = 100 \text{ kHz}$ ,  $\beta = 1$ . Έτσι, το εύρος ζώνης θα είναι:

$$f_B \approx 2(\beta + 1)f_m = 400 \text{ kHz}$$

(γ) Με  $f_m = 500 \text{ kHz}$ ,  $\beta = 0.2$ .

Πρόκειται για σήμα NBFM, και  $f_B \approx 2\Delta_f = 1000 \text{ kHz} = 1 \text{ MHz}$

# Άσκηση 3

Έστω ότι έχουμε ένα κατά γωνία διαμορφωμένο σήμα  $x_c(t) = 10 \cos(\omega_c t + 3 \sin \omega_m t)$ .

Υποθέτουμε PM και  $f_m = 1 \text{ kHz}$ . Να υπολογιστεί ο δείκτης διαμόρφωσης και να βρεθεί το εύρος ζώνης συχνοτήτων όταν (α) διπλασιαστεί το  $f_m$  και (β) όταν υποδιπλασιαστεί το  $f_m$ .

Απάντηση:

$$x_{PM}(t) = A \cos[\omega_c t + k_p m(t)] = 10 \cos(\omega_c t + 3 \sin \omega_m t)$$

Έτσι έχουμε,  $m(t) = a_m \sin \omega_m t$ , και  $x_{PM}(t) = 10 \cos(\omega_c t + k_p a_m \sin \omega_m t)$

Γνωρίζουμε ότι  $\beta = k_p a_m = 3$ . Επομένως, η τιμή του  $\beta$  είναι ανεξάρτητη από το  $f_m$ .

Το εύρος ζώνης για  $f_m = 1 \text{ kHz}$  είναι:

$$f_B = 2(\beta + 1)f_m = 8 \text{ kHz}$$

Όταν διπλασιαστεί το  $f_m$ ,  $\beta = 3$ ,  $f_m = 2 \text{ kHz}$ , και  $f_B = 2(3 + 1)2 = 16 \text{ kHz}$

Όταν το  $f_m$  γίνει μισό,  $\beta = 3$ ,  $f_m = 0.5 \text{ kHz}$ , και  $f_B = 2(3 + 1)(0.5) = 4 \text{ kHz}$

# Άσκηση 4

Να επαναληφθεί η άσκηση 3 αν υποθέσουμε ότι έχουμε FM.

$$x_{FM}(t) = A \cos \left[ \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right] = 10 \cos(\omega_c t + 3 \sin \omega_m t)$$

Έτσι θα είναι  $m(t) = a_m \cos \omega_m t$  και

$$x_{FM}(t) = 10 \cos \left( \omega_c t + \frac{a_m k_f}{\omega_m} \sin \omega_m t \right)$$

Ο δείκτης διαμόρφωσης είναι:

$$\beta = \frac{a_m k_f}{\omega_m} = \frac{a_m k_f}{2\pi f_m} = \frac{a_m k_f}{2\pi(10^3)} = 3$$



## Άσκηση 4 (συνέχεια)

Βλέπουμε ότι η τιμή του  $\beta$  είναι αντίστροφα ανάλογη του  $f_m$ .

Έτσι, το εύρος ζώνης όταν  $f_m = 1 \text{ kHz}$  είναι:

$$f_B = 2(\beta + 1)f_m = 2(3 + 1)1 = 8 \text{ kHz}$$

Όταν διπλασιαστεί το  $f_m$ ,  $\beta = 3/2$ ,  $f_m = 2 \text{ kHz}$ , και

$$f_B = 2(\beta + 1)f_m = 2\left(\frac{3}{2} + 1\right)2 = 10 \text{ kHz}$$

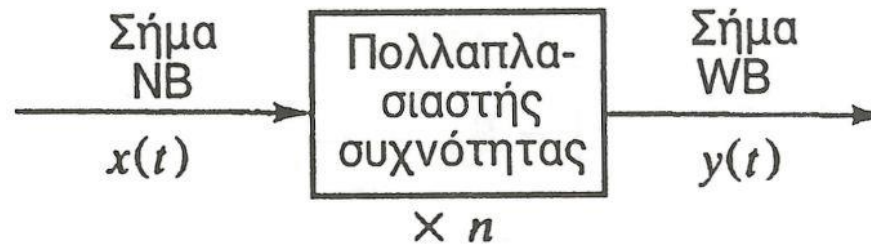
Όταν το  $f_m$  γΩνει μισό,  $\beta = 6$ ,  $f_m = 0.5 \text{ kHz}$ , και έχουμε:

$$f_B = 2(\beta + 1)f_m = 2(6 + 1)(0.5) = 7 \text{ kHz}$$

# Άσκηση 5

Έστω ότι έχουμε τον παρακάτω πολλαπλασιαστή συχνότητας και ένα σήμα NBFM:

$$x_{NBFM}(t) = A \cos(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t)$$



Με  $\beta < 0.5$  και  $f_c = 200 \text{ kHz}$ . Έστω ότι η  $f_m$  έχει περιοχή τιμών από 50 Hz μέχρι 15 kHz, και ότι η μέγιστη απόκλιση συχνότητας  $\Delta_f$  στην έξοδο είναι 75 kHz. Να βρεθεί ο πολλαπλασιασμός συχνότητας  $n$  που χρειάζεται, και η μέγιστη επιτρεπόμενη απόκλιση συχνότητας στην είσοδο.

## Άσκηση 5 (συνέχεια)

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι  $\beta = \Delta f / f_m$ . Τότε θα είναι:

$$\beta_{min} = \frac{75(10^3)}{15(10^3)} = 5 \quad \beta_{max} = \frac{75(10^3)}{50} = 1500$$

Αν είναι  $\beta_1 = 0.5$ , όπου  $\beta_1$  είναι ο  $\beta$  εισόδου, τότε ο πολλαπλασιασμός συχνότητας που χρειάζεται είναι:

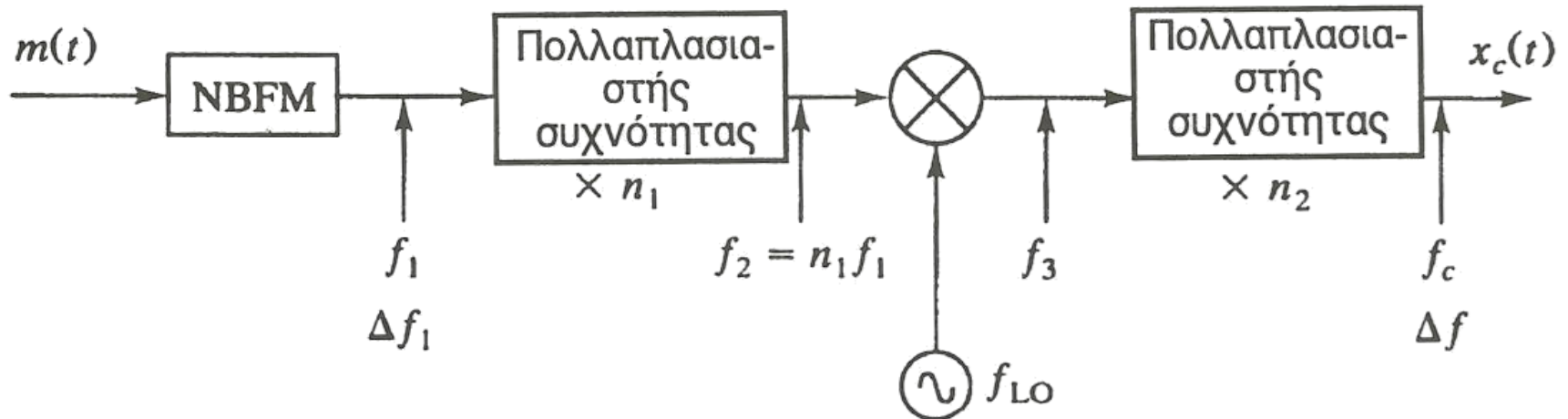
$$n = \frac{\beta_{max}}{\beta_1} = \frac{1500}{0.5} = 3000$$

Η μέγιστη επιτρεπόμενη απόκλιση συχνότητας στην είσοδο, που συμβολίζεται με  $\Delta f_1$ , είναι:

$$\Delta f_1 = \frac{\Delta f}{n} = \frac{75(10^3)}{3000} = 25Hz$$

# Άσκηση 6

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το λειτουργικό διάγραμμα ενός έμμεσου πομπού FM (Armstrong).



Να υπολογιστεί η μέγιστη απόκλιση συχνότητας  $\Delta f$  της εξόδου του πομπού FM και η συχνότητα της φέρουσας  $f_c$  αν  $f_1 = 200 \text{ kHz}$ ,  $f_{LO} = 10.8 \text{ MHz}$ ,  $\Delta f_1 = 25 \text{ Hz}$ ,  $n_1 = 64$  και  $n_2 = 48$ .

## Άσκηση 6 (συνέχεια)

Απάντηση:

$$\Delta f = (\Delta f_1)(n_1)(n_2) = (25)(64)(48)Hz = 76.8 kHz$$

$$f_2 = n_1 f_1 = (64)(200)(10^3) = 12.8(10^6)Hz = 12.8 MHz$$

$$f_3 = f_2 \pm f_{LO} = (12.8 \pm 10.8)(10^6)Hz = \begin{cases} 23.6 MHz \\ 2.0 MHz \end{cases}$$

Έτσι, όταν  $f_3 = 23.6 MHz$ , θα είναι:

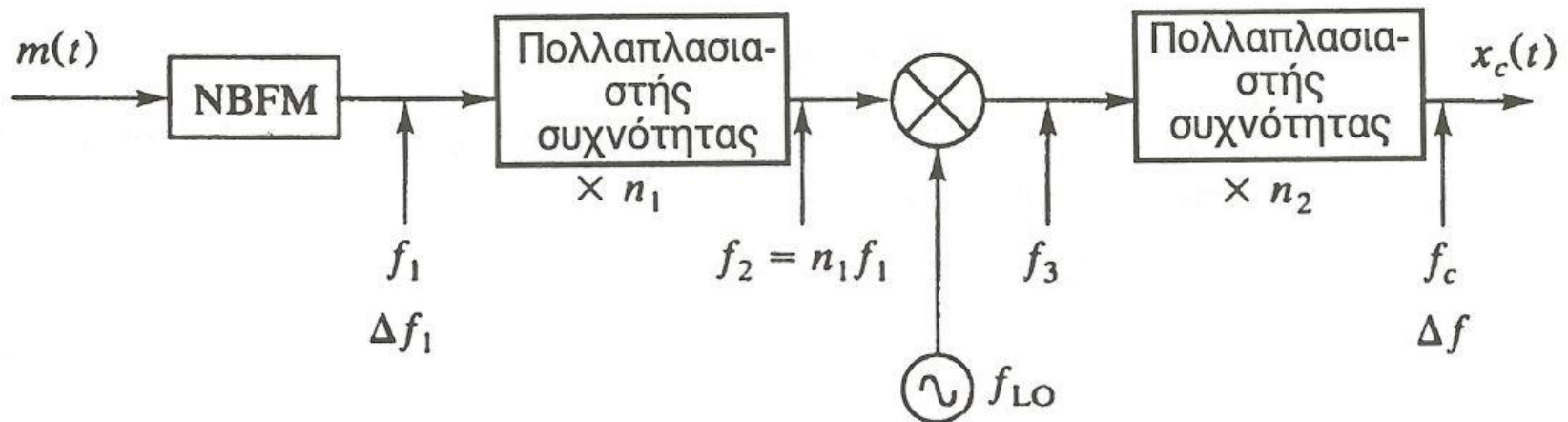
$$f_c = n_2 f_3 = (48)(23.6) = 1132.8 MHz$$

Όταν  $f_3 = 2 MHz$ , τότε:

$$f_c = n_2 f_3 = (48)(2) = 96 MHz$$

# Άσκηση 7

Στη γεννήτρια FM Armstrong του παρακάτω σήματος η συχνότητα του κρυσταλλικού ταλαντωτή είναι 200 kHz. Για να αποφύγουμε παραμόρφωση η μέγιστη απόκλιση συχνότητας περιορίζεται στο 0.2. Έστω ότι η  $f_m$  έχει περιοχή τιμών από 50 Hz μέχρι 15 kHz. Η συχνότητα της φέρουσας στην έξοδο είναι 108 MHz, και η μέγιστη απόκλιση συχνότητας 75 kHz. Να επιλεγούν οι συχνότητες του πολλαπλασιαστή και του ταλαντωτή μίξης.



## Άσκηση 7 (συνέχεια)

Απάντηση: Από το σχήμα έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta f_1 &= \beta f_m = (0.2)(50) = 10 \text{ Hz} \\ \frac{\Delta f}{\Delta f_1} &= \frac{75(10^3)}{10} = 7500 = n_1 n_2 \\ f_2 &= n_1 f_1 = n_1 (2)(10^5) \text{ Hz}\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε μετατροπή προς τα κάτω, έχουμε

$$f_2 - f_{LO} = \frac{f_c}{n_2}$$

Και έτσι:

$$f_{LO} = n_1 f_1 - \frac{f_c}{n_2} = \frac{7500(2)(10^5) - 108(10^6)}{n_2} = \frac{1392}{n_2} (10^6) \text{ Hz}$$

Αν θέσουμε  $n_2 = 150$ , λαμβάνουμε

$$n_1 = 50 \text{ και } f_{LO} = 9.28 \text{ MHz}$$