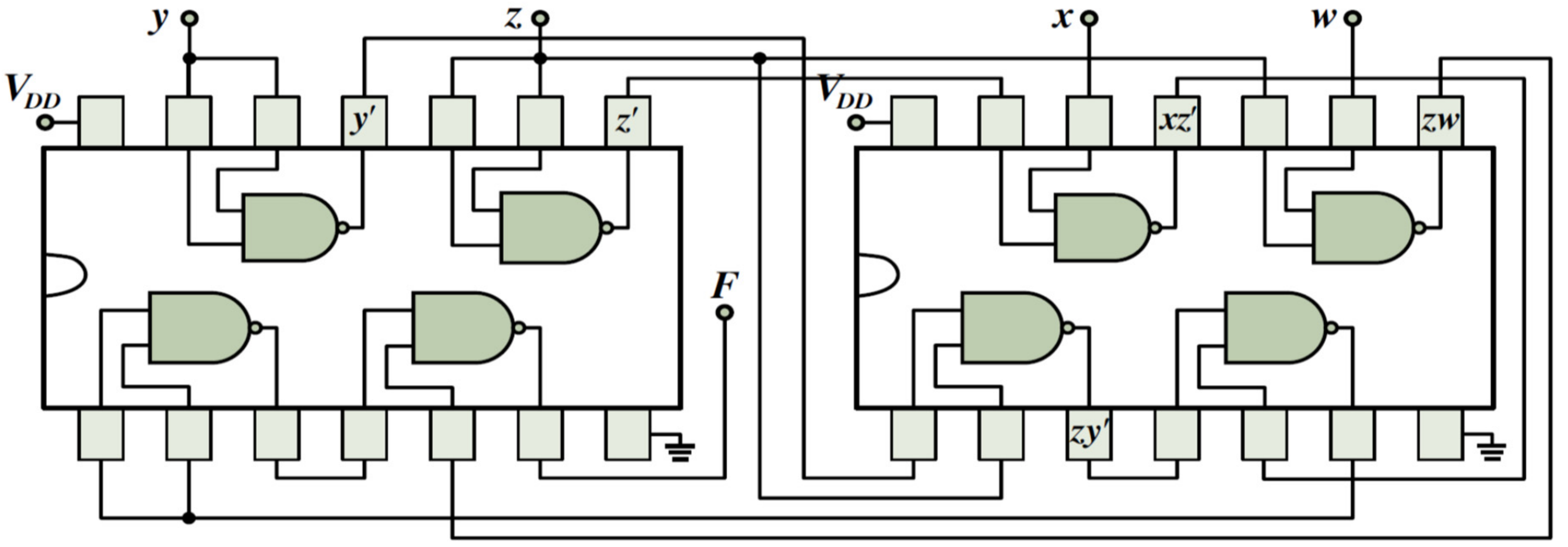
ΨΗΦΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΣΧΕΔΙΑΣΗ

- 5η ενότητα ασκήσεων -



Λάμπρος Μπισδούνης

Καθηγητής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

5η ενότητα ασκήσεων

- Σύνθεση (σχεδίαση) συνδυαστικών κυκλωμάτων
- Ανάλυση συνδυαστικών κυκλωμάτων
- Αριθμητικά συνδυαστικά κυκλώματα
- Κωδικοποιητές και αποκωδικοποιητές
- Πολυπλέκτες και αποπολυπλέκτες

✓ Σύνθεση (σχεδίαση) συνδυαστικών κυκλωμάτων

Σύνθεση (σχεδίαση) συνδυαστικών κυκλωμάτων

1ο βήμα: Ανάλυση και κατανόηση των λειτουργικών προδιαγραφών του κυκλώματος

2ο βήμα: Καθορισμός και ονομασία των εισόδων και των εξόδων και σχεδίαση του συνοπτικού διαγράμματος του κυκλώματος

3ο βήμα: Δημιουργία του πίνακα αλήθειας των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις εξόδους

4ο βήμα: Προσδιορισμός και ελαχιστοποίηση των λογικών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις εξόδους του κυκλώματος

5ο βήμα: Σχεδίαση του κυκλώματος με χρήση των κατάλληλων ή των διαθέσιμων πυλών

6ο βήμα: Επαλήθευση της ορθής λειτουργίας του κυκλώματος (ανάλυση του κυκλώματος)

Άσκηση 1

Μια πινακοθήκη αποτελείται από 3 αίθουσες, οι οποίες για λόγους α-σφαλείας είναι εξοπλισμένες με 3 ανιχνευτές κίνησης, αντίστοιχα. Κάθε νύχτα, στην πινακοθήκη υπάρχει ένας φύλακας που κινείται συνεχώς α-πό αίθουσα σε αίθουσα.

Θα συνθέσουμε συνδυαστικό κύκλωμα που θα δέχεται ως εισόδους τις εξόδους των 3 ανιχνευτών και θα ενεργοποιεί το συναγερμό, στις περι-πτώσεις που ανιχνεύεται κίνηση σε περισσότερες από μία αίθουσες (δη-λαδή όταν υπάρχει εισβολέας).

Το συνδυαστικό κύκλωμα θα ενεργοποιεί επίσης μία φωτεινή ένδειξη στις εγκαταστάσεις της εταιρείας φύλαξης, όταν υπάρχει υποψία εισβο-λής στην τρίτη αίθουσα (στην οποία εκτίθεται πίνακας μεγάλης αξίας), ώστε να σπεύσει στην πινακοθήκη ενισχυτικό προσωπικό ασφαλείας.

Άσκηση 1

Ανάλυση προδιαγραφών: οι είσοδοι του κυκλώματος θα πρέπει να είναι 3 (x, y, z), με καθεμία από αυτές να αντιστοιχεί στην έξοδο ενός από τους αισθητήρες κίνησης.

Θεωρούμε ότι όταν ένας από τους αισθητήρες ανιχνεύει κίνηση, η αντίστοιχη είσοδος του κυκλώματος λαμβάνει λογική τιμή 1, διαφορετικά λαμβάνει τιμή 0. Οι έξοδοι του κυκλώματος θα πρέπει να είναι δύο: η A θα ενεργοποιεί το συναγερμό της πινακοθήκης και η B θα ενεργοποιεί τη φωτεινή ένδειξη στο υποκατάστημα της εταιρείας φύλαξης.

Θεωρούμε, επίσης, ότι οι έξοδοι A και B λαμβάνουν λογική τιμή 1, όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες που ενεργοποιούν το συναγερμό και τη φωτεινή ένδειξη, αντίστοιχα, διαφορετικά λαμβάνουν λογική τιμή 0.

Άσκηση 1

Πίνακας αλήθειας των συναρτήσεων $\mathbf{A}(x,y,z)$ *και* $\mathbf{B}(x,y,z)$

x	*y*	*z*	***A***	***B***	*Παρατηρήσεις*
0	0	0	×	×	Αδιάφορη συνθήκη, αφού ο φύλακας κινείται συνεχώς από αίθουσα σε αίθουσα
0	0	1	0	0	
0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	Εισβολέας στη 2η ή στην 3η αίθουσα
1	0	0	0	0	
1	0	1	1	1	Εισβολέας στην 1η ή στην 3η αίθουσα
1	1	0	1	0	Εισβολέας στην 1η ή στη 2η αίθουσα
1	1	1	1	1	Εισβολείς σε δύο αίθουσες

Ο συνδυασμός τιμών των εισόδων που αντιστοιχεί σε ανυπαρξία κίνησης σε όλες τις αίθουσες (x = y = z = 0) συνιστά αδιάφορη λογική συνθήκη, αφού δεν μπορεί να συμβεί (υπάρχει πάντα ο φύλακας).

Άσκηση 1

Εξαγωγή αλγεβρικών εκφράσεων των συναρτήσεων: εντοπίζουμε στον πίνακα αλήθειας τους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών για τους οποίους κάθε συνάρτηση λαμβάνει τιμή 1:

$$A(x,y,z) = x'yz + xy'z + xyz' + xyz$$

$$B(x,y,z) = x'yz + xy'z + xyz$$

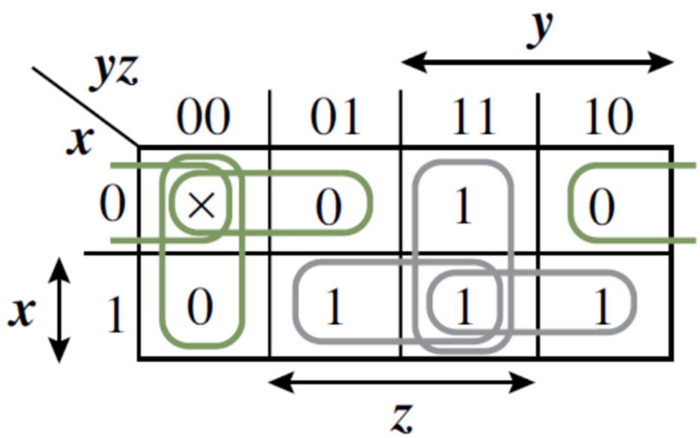
Αξιοποιώντας τους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών για τους οποίους κάθε συνάρτηση λαμβάνει τιμή 0 και το θεώρημα De Morgan, μπορούμε εύκολα να εκφράσουμε τις συναρτήσεις αυτές σε κανονική μορφή γινομένου μεγίστων όρων:

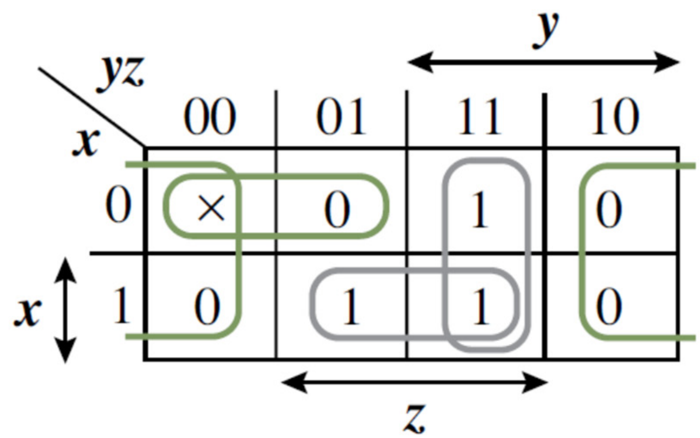
$$A(x,y,z) = (x'y'z + x'yz' + xy'z')' = (x+y+z')(x+y'+z)(x'+y+z)$$

$$B(x,y,z) = (x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz')' = (x+y+z')(x+y'+z)(x'+y+z)(x'+y'+z)$$

Άσκηση 1

Ελαχιστοποίηση των λογικών συναρτήσεων των εξόδων





$$A(x,y,z) = xy + xz + yz$$

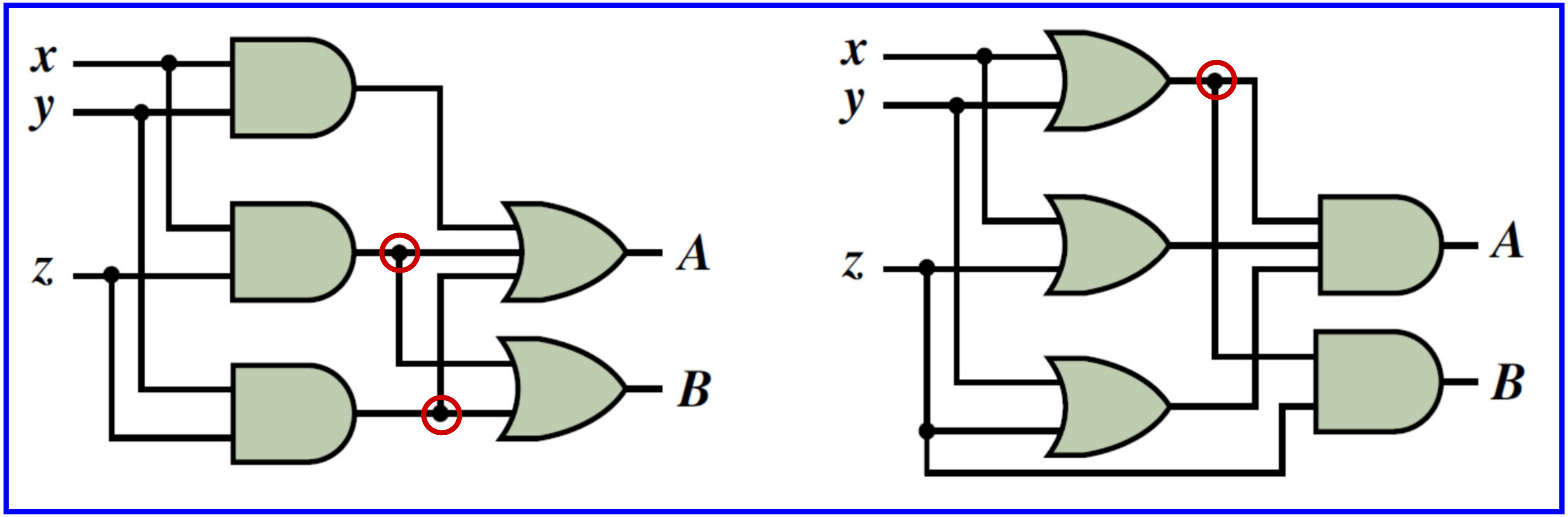
$$B(x,y,z) = xz + yz$$

$$A(x,y,z) = (x'y' + x'z' + y'z')' = (x + y)(x + z)(y + z)$$

$$B(x,y,z) = (x'y' + z')' = (x + y)z$$

Άσκηση 1

Υλοποίηση κυκλώματος (2 επίπεδα πυλών AND-OR και OR-AND)



Οι λογικές συναρτήσεις περιλαμβάνουν κοινούς όρους (λογικά γινόμενα). Οι κοινοί όροι υλοποιούνται μία φορά και επαναχρησιμοποιούνται για την παραγωγή των εξόδων, στις αλγεβρικές εκφράσεις των οποίων συμμετέχουν.

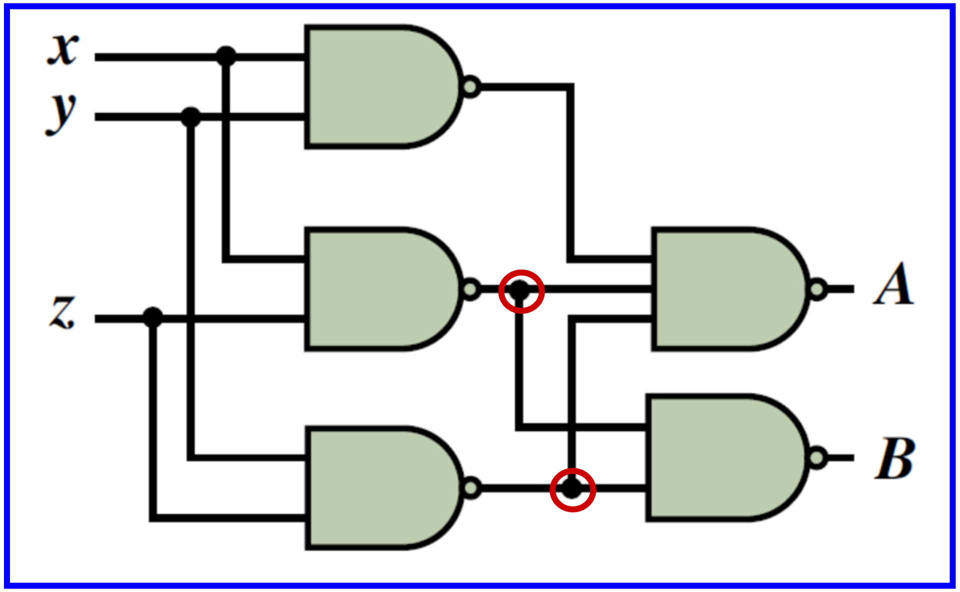
Άσκηση 1

Εφαρμογή του θεωρήματος διπλής άρνησης και στη συνέχεια του θεωρήματος De Morgan στη μορφή αθροίσματος γινομένων:

$$A(x,y,z) = [(xy)'(xz)'(yz)']'$$

$$B(x,y,z) = [(xz)'(yz)']'$$

Υλοποίηση κυκλώματος με πύλες NAND



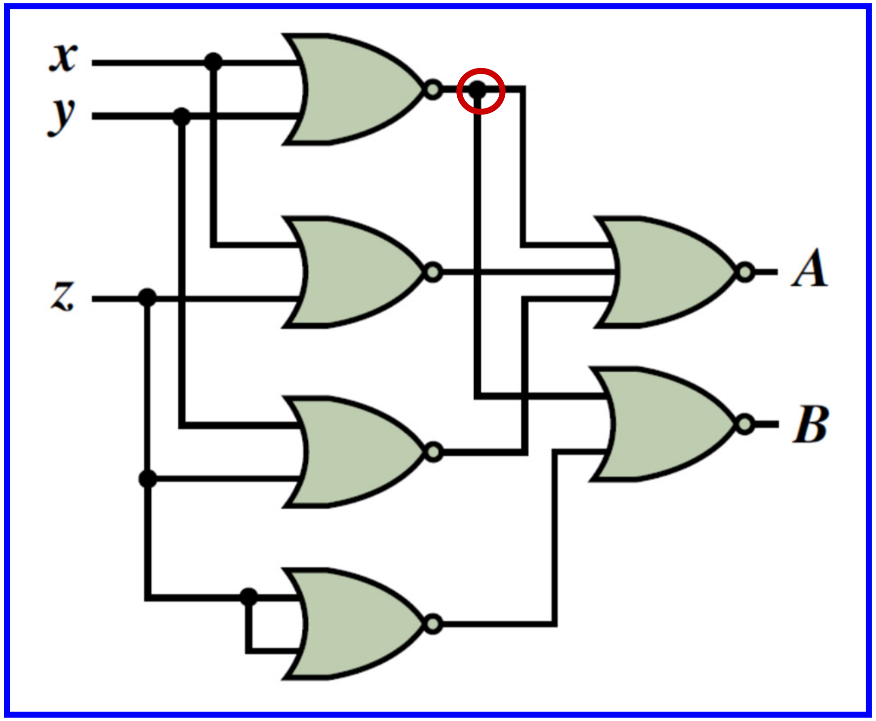
Άσκηση 1

Εφαρμογή του θεωρήματος διπλής άρνησης και στη συνέχεια του θεωρήματος De Morgan στη μορφή γινομένου αθροισμάτων:

$$A(x,y,z) = [(x+y)' + (x+z)' + (y+z)']'$$

$$B(x,y,z) = [(x+y)' + z']'$$

Υλοποίηση κυκλώματος με πύλες NOR

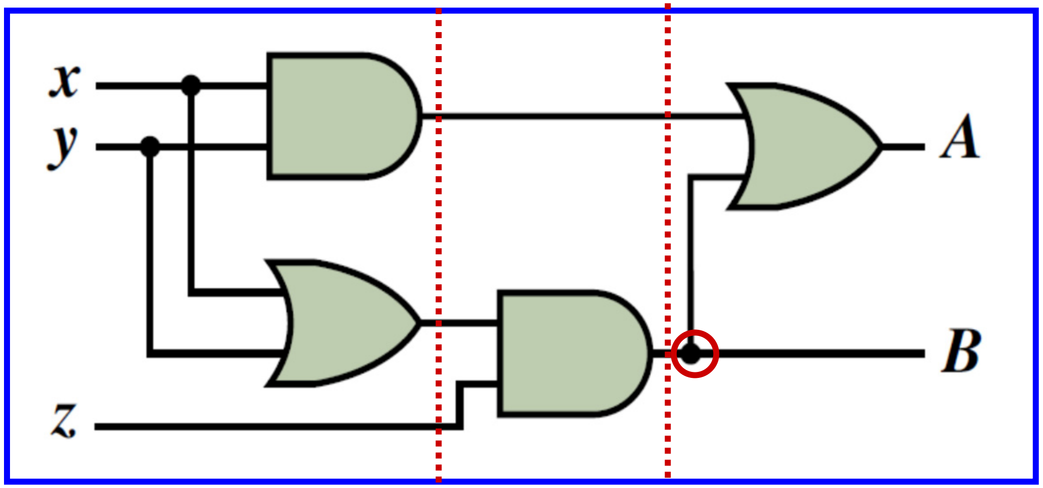


Άσκηση 1

Εάν στην ελαχιστοποιημένη μορφή αθροίσματος γινομένων των συναρτήσεων εξόδου χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης (αξίωμα επιμεριστικότητας), μπορούμε να εξάγουμε ισοδύναμες λογικές συναρτήσεις:

$$\boxed{\mathbf{A(x,y,z) = (x + y)z + xy} \quad \textbf{και} \quad \mathbf{B(x,y,z) = (x + y)z}}$$

οι οποίες υλοποιούνται από ένα κύκλωμα τριών επιπέδων πυλών που αποτελείται από μόνο 4 πύλες με δύο εισόδους η καθεμία.



Άσκηση 2

Εάν έχετε στη διάθεσή σας μόνο λογικές πύλες NAND, να συνθέσετε συνδυαστικό κύκλωμα για την εξαγωγή δυαδικών αριθμών τριών ψηφίων που αντιστοιχούν στην απόλυτη τιμή ακέραιων αριθμών με τέσσερα δυαδικά ψηφία, οι οποίοι παριστάνονται με μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2. Το κύκλωμα που θα συνθέσετε θα πρέπει να περιλαμβάνει, εκτός των άλλων, δυνατότητα ανίχνευσης υπερχείλισης, δηλαδή της κατάστασης κατά την οποία το πλήθος των ψηφίων που εξάγονται δεν επαρκεί για την παράσταση της απόλυτης τιμής.

Άσκηση 2

Με τέσσερα δυαδικά ψηφία είναι δυνατή η παράσταση προσημασμένων αριθμών από –8 έως +7. Οι είσοδοι του κυκλώματος θα πρέπει να είναι τέσσερις (έστω $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, με την είσοδο $\boldsymbol{A_0}$ να αντιστοιχεί στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο των αριθμών), δηλαδή όσα και τα ψηφία των προσημασμένων δυαδικών αριθμών. Το ζητούμενο κύκλωμα θα πρέπει να παράγει δυαδικούς αριθμούς τριών ψηφίων που αντιστοιχούν στην απόλυτη τιμή των αριθμών που λαμβάνει στην είσοδό του. Λόγω του ότι η απόλυτη τιμή του –8, δηλαδή ο αριθμός 8, δεν μπορεί να παρασταθεί με τρία δυαδικά ψηφία, ο συνδυασμός τιμών των εισόδων $\boldsymbol{A_3A_2A_1A_0} = 1000$ αποτελεί αδιάφορη λογική συνθήκη και ο ελαχιστόρος που αντιστοιχεί σε αυτόν, είναι αδιάφορος όρος.

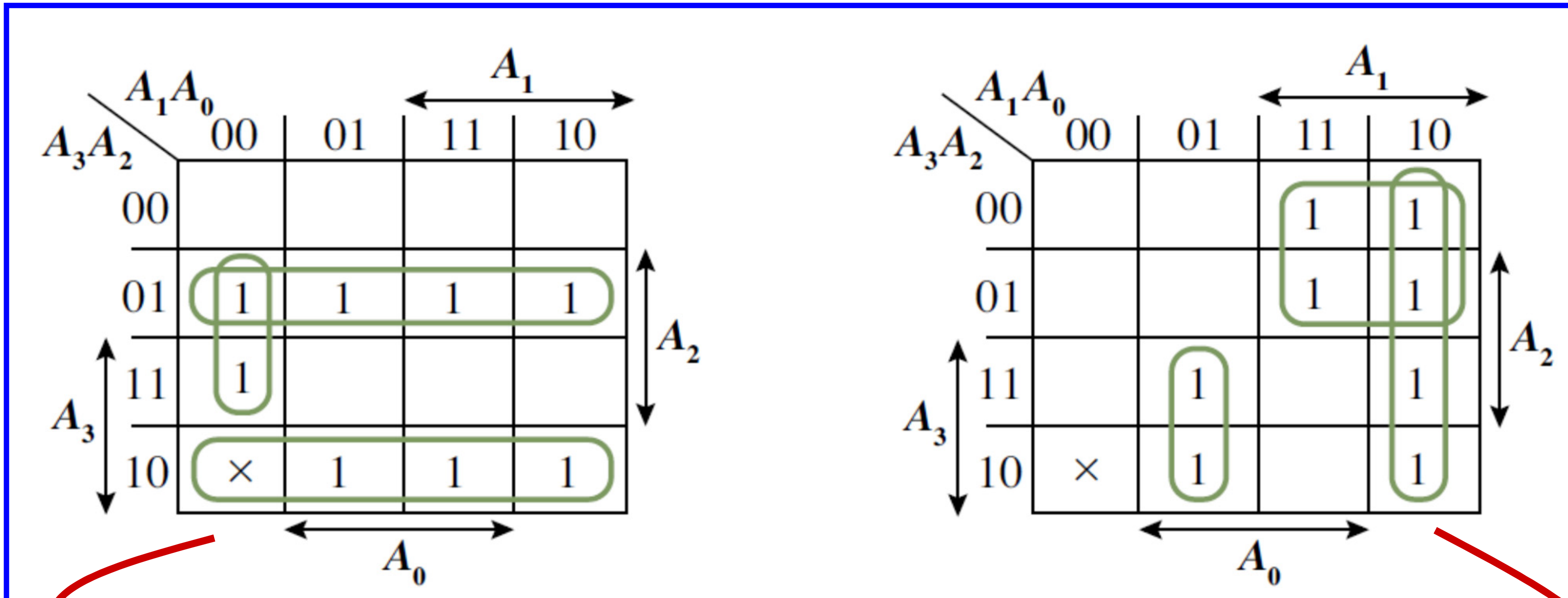
Άσκηση 2

Για την παράσταση της απόλυτης τιμής των αριθμών εισόδου παρέχονται τρία ψηφία, τα οποία αντιστοιχούν σε τρεις εξόδους (έστω S_0, S_1, S_2, με την είσοδο S_0 να αντιστοιχεί στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο). Με βάση τα παραπάνω, μπορείτε να δημιουργήσετε τον πίνακα αλήθειας των λογικών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις εξόδους S_0, S_1 και S_2. Παρατηρώντας τον πίνακα αλήθειας, όσον αφορά την έξοδο S_0, προκύπτει εύκολα ότι $S_0 = A_0$ (εάν επιλέξετε για τον αδιάφορο όρο της συνάρτησης τη λογική τιμή 0).

Άσκηση 2

Δεκαδικός αριθμός	A_3	A_2	A_1	A_0	S_2	S_1	S_0	Απόλυτη τιμή σε δεκαδική μορφή
0	0	0	0	0	0	0	0	0
+1	0	0	0	1	0	0	1	1
+2	0	0	1	0	0	1	0	2
+3	0	0	1	1	0	1	1	3
+4	0	1	0	0	1	0	0	4
+5	0	1	0	1	1	0	1	5
+6	0	1	1	0	1	1	0	6
+7	0	1	1	1	1	1	1	7
−8	1	0	0	0	×	×	×	8
−7	1	0	0	1	1	1	1	7
−6	1	0	1	0	1	1	0	6
−5	1	0	1	1	1	0	1	5
−4	1	1	0	0	1	0	0	4
−3	1	1	0	1	0	1	1	3
−2	1	1	1	0	0	1	0	2
−1	1	1	1	1	0	0	1	1

Άσκηση 2



$$S_2 = A'_3A_2 + A_3A'_2 + A_2A'_1A'_0 = [(A'_3A_2 + A_3A'_2 + A_2A'_1A'_0)']' = [(A'_3A_2)'(A_3A'_2)'(A_2A'_1A'_0)']'$$

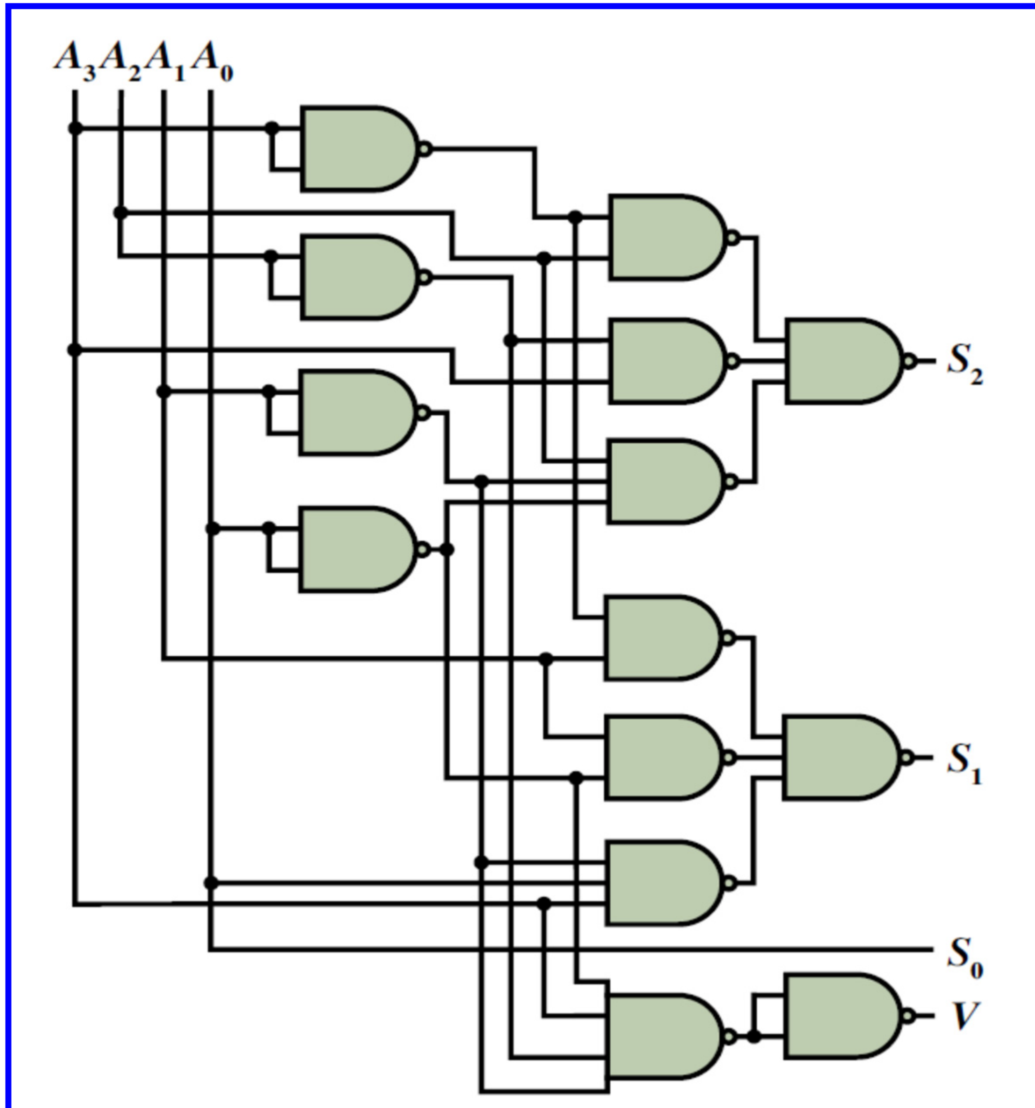
$$S_1 = A'_3A_1 + A_1A'_0 + A_3A'_1A'_0 = [(A'_3A_1 + A_1A'_0 + A_3A'_1A'_0)']' = [(A'_3A_1)'(A_1A'_0)'(A_3A'_1A_0)']'$$

Από τον πίνακα αλήθειας, όσον αφορά τον όρο S_0, προκύπτει ότι $S_0 = A_0$ (αν επιλέξουμε για τον αδιάφορο όρο την τιμή 0) .

Άσκηση 2

Το κύκλωμα πρέπει να ανιχνεύει την υπερχείλιση, δηλαδή την κατάσταση όπου το πλήθος των ψηφίων που εξάγονται δεν επαρκεί για την παράσταση της απόλυτης τιμής. Αυτό συμβαίνει για εισόδους $A_3A_2A_1A_0$ = 1000, συνεπώς η συνάρτηση που ανιχνεύει την υπερχείλιση είναι:

$V = A_3\, A'_2\, A'_1\, A'_0$.



Άσκηση 3

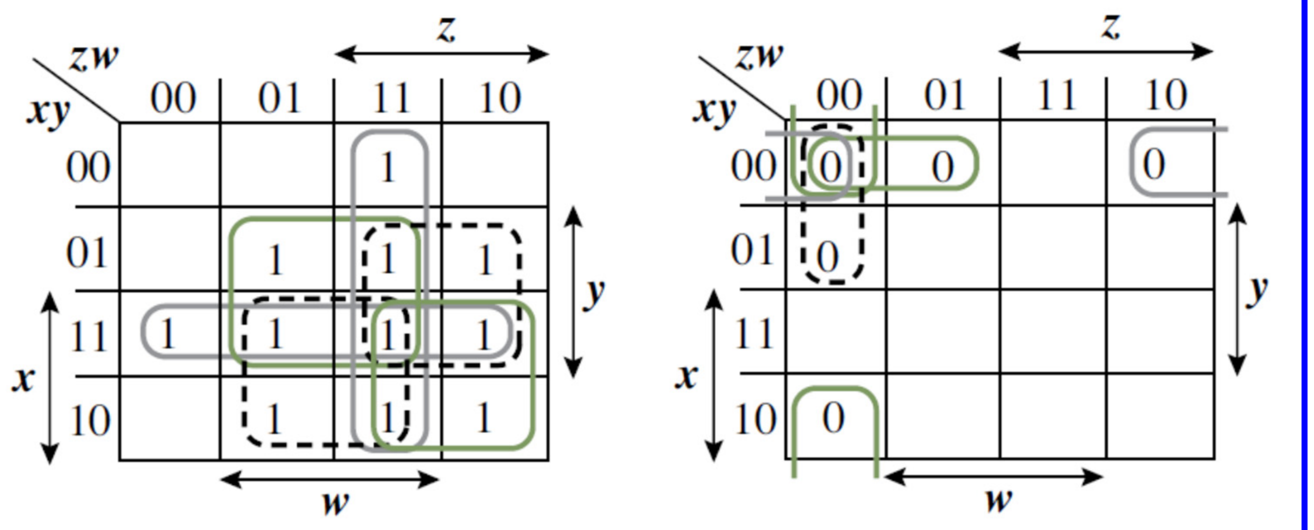
Η διακίνηση μηνυμάτων μεταξύ των τεσσάρων υπολογιστών που συμμετέχουν στο δίκτυο ενός γραφείου διενεργείται μέσω ενός δρομολογητή (router). Σύμφωνα με τη λειτουργία του δρομολογητή αυτού, όταν τουλάχιστον δύο υπολογιστές μεταδίδουν μηνύματα, συμβαίνει σύγκρουση που δημιουργεί την ανάγκη επαναμετάδοσής τους. Να συνθέσετε το συνδυαστικό κύκλωμα ανίχνευσης σύγκρουσης του δρομολογητή, με δύο επίπεδα πυλών AND και OR, επιδιώκοντας το μικρότερο κόστος υλοποίησης.

Άσκηση 3

Το συνδυαστικό κύκλωμα θα πρέπει να έχει τέσσερις εισόδους (**x**, **y**, **z**, **w**), καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί σε έναν από τους υπολογιστές του γραφείου. Θεωρήστε, λοιπόν, ότι κάθε είσοδος λαμβάνει λογική τιμή 1 σε περίπτωση μετάδοσης μηνύματος από τον αντίστοιχο υπολογιστή, διαφορετικά λαμβάνει τιμή 0. Όταν συμβαίνει σύγκρουση, όταν, δηλαδή, δύο ή περισσότεροι υπολογιστές μεταδίδουν μηνύματα (που σημαίνει ότι δύο ή περισσότερες είσοδοι έχουν τιμή 1), θα πρέπει να ενεργοποιείται (λαμβάνοντας λογική τιμή 1) η έξοδος ***C*** του κυκλώματος ανίχνευσης σύγκρουσης. Με βάση τα παραπάνω, μπορείτε να δημιουργήσετε τον πίνακα αλήθειας της λογικής συνάρτησης ***C*** και τον αντίστοιχο χάρτη Karnaugh.

Άσκηση 3

x	y	z	w	C
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1



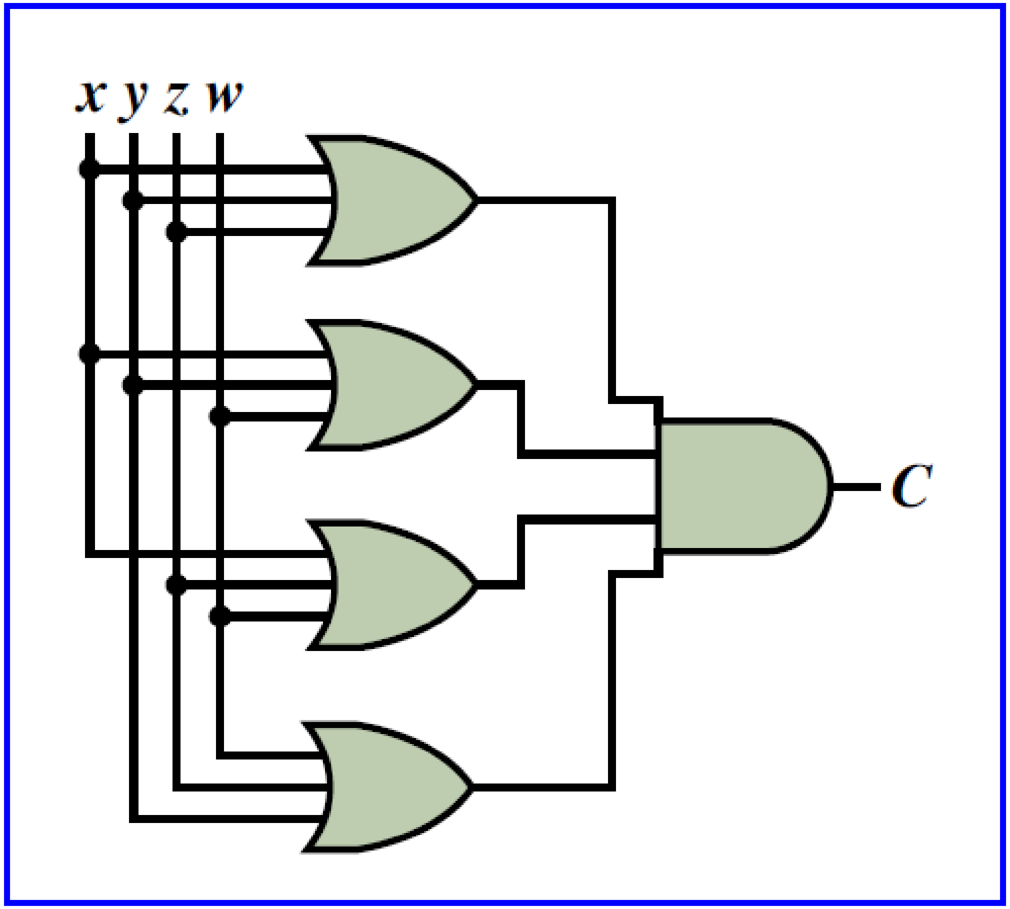
$$C(x,y,z,w) = xy + xz + xw + yz + yw + zw$$

$$C(x,y,z,w) = (x'y'z' + x'y'w' + x'z'w' + y'z'w')'$$
$$= (x+y+z)(x+y+w)(x+z+w)(y+z+w)$$

Άσκηση 3

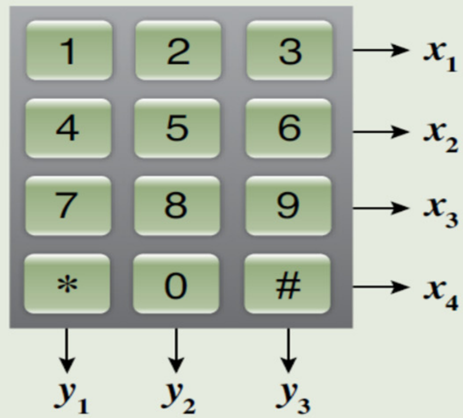
Οι δύο ελαχιστοποιημένες μορφές της συνάρτησης υλοποιούνται εύκολα με δύο επίπεδα πυλών AND και OR. Ωστόσο, θα πρέπει προηγουμένως να διερευνήσετε ποια από τις δύο μορφές οδηγεί σε μικρότερο κόστος υλοποίησης. Όπως έχει συχνά προαναφερθεί, το κόστος μιας υλοποίησης είναι το άθροισμα του αριθμού των πυλών που περιλαμβάνονται στο κύκλωμα και του πλήθους των εισόδων των πυλών αυτών. Για την υλοποίηση της μορφής αθροίσματος γινομένων απαιτούνται έξι πύλες AND δύο εισόδων και μία πύλη OR έξι εισόδων, γεγονός που οδηγεί σε κόστος 25. Για την υλοποίηση της μορφής γινομένου αθροισμάτων απαιτούνται τέσσερις πύλες OR τριών εισόδων και μία πύλη AND τεσσάρων εισόδων, γεγονός που οδηγεί σε κόστος 21. Επομένως, αφού ζητείται η επιδίωξη του μικρότερου κόστους υλοποίησης, θα πρέπει να επιλέξετε το συνδυαστικό κύκλωμα που υλοποιεί την ελαχιστοποιημένη συνάρτηση μορφής γινομένου αθροισμάτων.

Άσκηση 3



Άσκηση 4

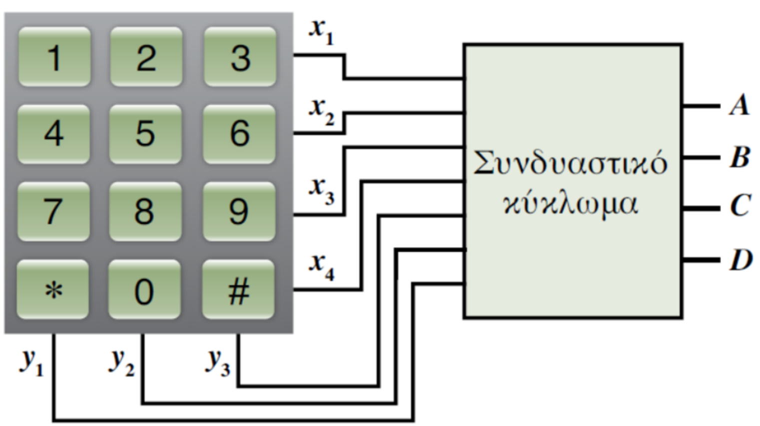
Το πληκτρολόγιο μιας σταθερής τηλεφωνικής συσκευής που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, περιλαμβάνει 12 πλήκτρα και παρέχει 7 εξόδους, μία για κάθε γραμμή και μία για κάθε στήλη πλήκτρων.



Με το πάτημα ενός πλήκτρου, οι έξοδοι που αντιστοιχούν στη γραμμή και τη στήλη στην οποία αυτό ανήκει, λαμβάνουν λογική τιμή 1. Να σχεδιάσετε συνδυαστικό κύκλωμα το οποίο να μετατρέπει τις εξόδους του πληκτρολογίου στο δυαδικό αριθμό που αντιστοιχεί στο αριθμητικό πλήκτρο που πατιέται κάθε φορά ή σε προκαθορισμένους δυαδικούς αριθμούς για τις περιπτώσεις όπου πατιέται το πλήκτρο του αστερίσκου ή το πλήκτρο της δίεσης. Θεωρήστε ότι δεν είναι δυνατό το ταυτόχρονο πάτημα δύο ή περισσότερων πλήκτρων. Χρησιμοποιήστε δύο επίπεδα πυλών διάταξης AND-OR.

Άσκηση 4

Το ζητούμενο συνδυαστικό κύκλωμα θα πρέπει να λαμβάνει 7 εισόδους από το πληκτρολόγιο και να εξάγει ένα δυαδικό αριθμό για κάθε πλήκτρο που πατιέται από το χρήστη του πληκτρολογίου. Αφού τα πλήκτρα είναι δώδεκα (δηλαδή περισσότερα από οκτώ και λιγότερα από δεκαέξι), θα πρέπει το συνδυαστικό κύκλωμα να έχει τέσσερις εξόδους, όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω συνοπτικό διάγραμμα. Μετά τον καθορισμό των εισόδων και των εξόδων του ζητούμενου κυκλώματος, με βάση τη διαδικασία σύνθεσης συνδυαστικών κυκλωμάτων, δημιουργούμε τον πίνακα αλήθειας των συναρτήσεων που αντιστοιχούνστι ς τέσσερις εξόδους του κυκλώματος.



Άσκηση 4

Ωστόσο, επειδή το κύκλωμα διαθέτει επτά εισόδους και οι πίνακες αλήθειας των συναρτήσεων αυτών περιλαμβάνουν 128 (δηλαδή 2^7) γραμμές, με τις περισσότερες από αυτές να αντιστοιχούν στο ταυτόχρονο πάτημα περισσότερων του ενός πλήκτρων (ενδεχόμενο που δεν είναι δυνατό, με βάση τη σχετική θεώρηση της εκφώνησης), είναι προτιμότερο να ακολουθήσουμε διαφορετική πρακτική, ώστε να καταλήξουμε στις λογικές εκφράσεις των εξόδων του κυκλώματος. Μπορούμε, λοιπόν, να δημιουργήσουμε πίνακα, σε κάθε γραμμή του οποίου περιλαμβάνονται οι είσοδοι του κυκλώματος που ενεργοποιούνται (δηλαδή που λαμβάνουν τιμή 1) για το πάτημα ενός πλήκτρου και ο αντίστοιχος δυαδικός αριθμός εξόδου. Στα πλήκτρα του αστερίσκου και της δίεσης αντιστοιχίζουμε 2 δυαδικούς αριθμούς μεγαλύτερους του 9 (οι αριθμοί 1010 και 1011 αφορούν αστερίσκο και δίεση, αντίστοιχα).

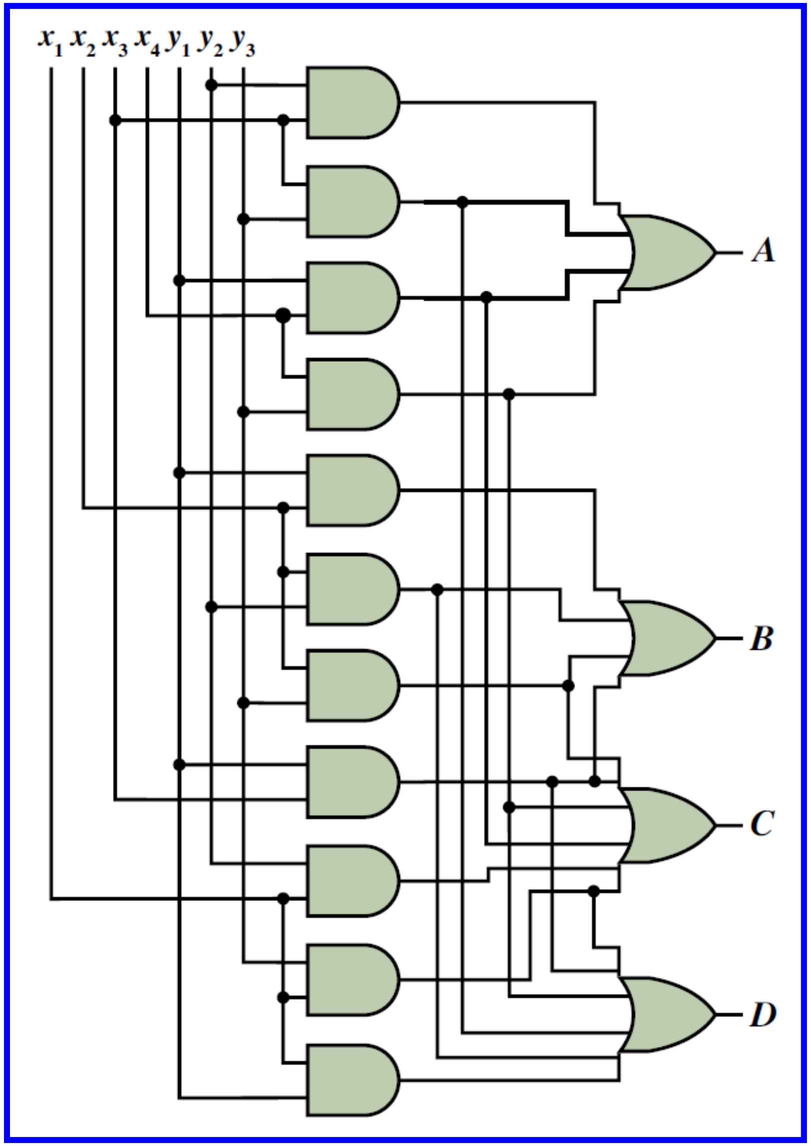
Άσκηση 4

Πλήκτρο	Είσοδοι		A	B	C	D
0	x_4	y_2	0	0	0	0
1	x_1	y_1	0	0	0	1
2	x_1	y_2	0	0	1	0
3	x_1	y_2	0	0	1	1
4	x_2	y_1	0	1	0	0
5	x_2	y_2	0	1	0	1
6	x_2	y_3	0	1	1	0
7	x_3	y_1	0	1	1	1
8	x_3	y_2	1	0	0	0
9	x_3	y_3	1	0	0	1
*	x_4	y_1	1	0	1	0
#	x_4	y_3	1	0	1	1

$$A = x_3y_2 + x_3y_3 + x_4y_1 + x_4y_3$$
$$B = x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$$
$$C = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_4y_1 + x_4y_3$$
$$D = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3 + x_4y_3$$

Άσκηση 4

Στις συναρτήσεις των εξόδων του κυκλώματος υπάρχουν αρκετοί κοινοί όροι (λογικά γινόμενα), οι οποίοι υλοποιούνται μία φορά και στη συνέχεια επαναχρησιμοποιούνται



✓ Ανάλυση συνδυαστικών κυκλωμάτων

Ανάλυση συνδυαστικών κυκλωμάτων

1ο βήμα: Επιβεβαίωση της συνδυαστικής φύσης του κυκλώματος, δηλαδή της απουσίας ανατροφοδότησης

2ο βήμα: Ονομασία των εσωτερικών συνδέσεων του κυκλώματος

3ο βήμα: Παρατήρηση της δομής του κυκλώματος και διαίρεσή του σε επίπεδα πυλών, με το 1ο επίπεδο να περιλαμβάνει τις πύλες που λαμβάνουν ως εισόδους τις εισόδους του κυκλώματος, το 2ο επίπεδο τις πύλες που τροφοδοτούνται τουλάχιστον από μία έξοδο πύλης του 1ου επιπέδου κ.ο.κ.

4ο βήμα: Εξαγωγή των λογικών συναρτήσεων των εξόδων των πυλών του 1ου επιπέδου, οι οποίες περιλαμβάνουν μόνο τις εισόδους του κυκλώματος

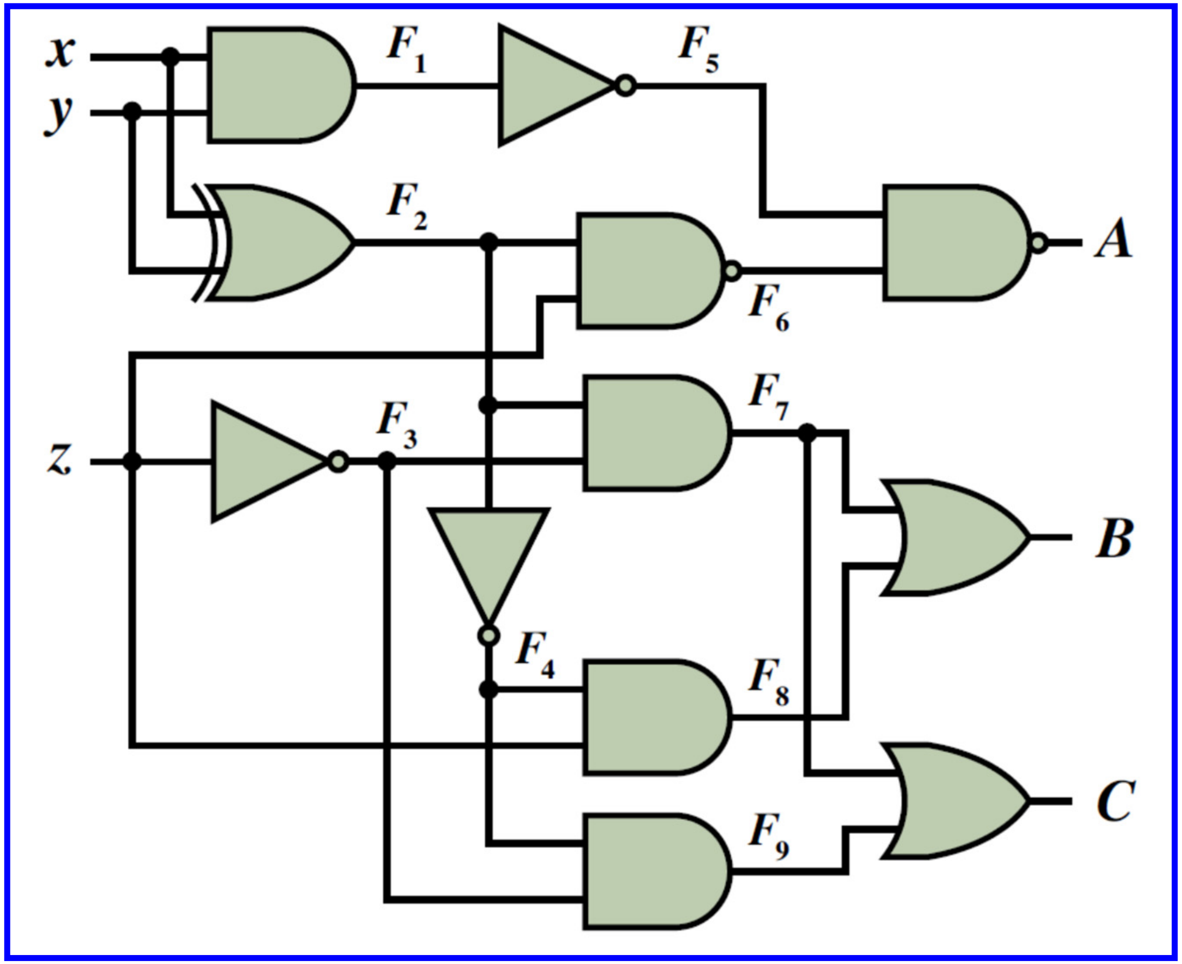
5ο βήμα: Εξαγωγή των συναρτήσεων των εξόδων του 2ου επιπέδου που περιλαμβάνουν και εξόδους πυλών του 1ου επιπέδου και αντικατάσταση των συναρτήσεων του 1ου βήματος, ώστε να προκύψουν συναρτήσεις που περιλαμβάνουν μόνο τις εισόδους του κυκλώματος

6ο βήμα: Επανάληψη του 5ου βήματος της διαδικασίας για τα επόμενα επίπεδα πυλών, έως τον προσδιορισμό των εξόδων του κυκλώματος, συναρτήσει μόνο των εισόδων του

7ο βήμα: Εξαγωγή κανονικών αλγεβρικών μορφών ή κατάστρωση του πίνακα αλήθειας των συναρτήσεων των εξόδων του κυκλώματος ή λεκτική περιγραφή της λειτουργίας του κυκλώματος

Άσκηση 5

Ανάλυση συνδυαστικού κυκλώματος που λαμβάνει και παράγει τριψήφιους μη προσημασμένους αριθμούς



Άσκηση 5

Επίπεδα πυλών	Λογικές συναρτήσεις
1ο επίπεδο	$F_1 = xy, F_2 = x \oplus y, F_3 = z'$
2ο επίπεδο	$F_4 = F_2' = (x \oplus y)', F_5 = F_1' = (xy)',$ $F_6 = (zF_2)' = z' + F_2' = z' + (x \oplus y)', F_7 = F_2F_3 = (x \oplus y)z'$
3ο επίπεδο	$F_8 = zF_4 = z(x \oplus y)', F_9 = F_3F_4 = z'(x \oplus y)',$ $A = (F_5F_6)' = F_5' + F_6' = xy + [z' + (x \oplus y)']' = xy + z(x \oplus y)$
4ο επίπεδο	$B = F_7 + F_8 = (x \oplus y)z' + z(x \oplus y)' = x \oplus y \oplus z,$ $C = F_7 + F_9 = (x \oplus y)z' + z'(x \oplus y)'$

Κανονικές μορφές αθροίσματος ελαχίστων όρων των συναρτήσεων εξόδου:

$$A = xy + z(x \oplus y) = xy(z + z') + z(x'y + xy') = xyz + xyz' + x'yz + xy'z$$

$$B = x \oplus y \oplus z = (x'y + xy')z' + (xy + x'y')z = x'yz' + xy'z' + xyz + x'y'z$$

$$C = (x \oplus y)z' + z'(x \oplus y)' = (x'y + xy')z' + z'(xy + x'y') = x'yz' + xy'z' + xyz' + x'y'z'$$

Άσκηση 5

Από τις κανονικές μορφές αθροίσματος ελαχιστόρων των συναρτήσεων εξόδου, δημιουργούμε άμεσα τον πίνακα αληθείας:

x	*y*	*z*	*A*	*B*	*C*
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Άσκηση 5

Λεκτική περιγραφή της λειτουργίας του κυκλώματος:

Η λειτουργία του κυκλώματος δεν είναι εύκολο να περιγραφεί λεκτικά από τις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων εξόδου του κυκλώματος.

Ωστόσο, αφού πρόκειται για κύκλωμα που λαμβάνει και παράγει τριψήφιους μη προσημασμένους αριθμούς, από τον πίνακα αλήθειας διαπιστώνουμε ότι όταν ο δυαδικός αριθμός εισόδου ισούται με 0, 1, 2 ή 3 (σε δεκαδική μορφή), ο δυαδικός αριθμός εξόδου είναι κατά ένα μεγαλύτερος, ενώ όταν ο αριθμός εισόδου ισούται με 4, 5, 6 ή 7, ο αριθμός εξόδου είναι κατά ένα μικρότερος.

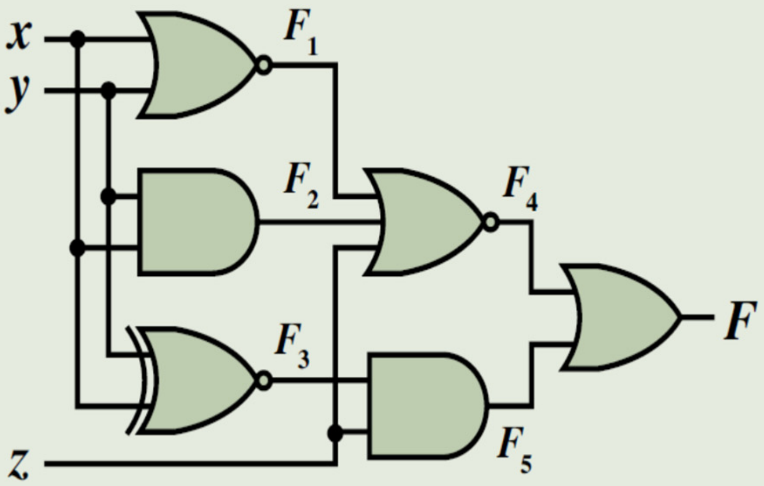
Άσκηση 5

Ο πίνακας αλήθειας μπορεί να προκύψει και με σταδιακή εξαγωγή των στηλών που αντιστοιχούν στις εσωτερικές συνδέσεις του κυκλώματος, ώστε από αυτές να προκύψουν οι στήλες του πίνακα που αντιστοιχούν στις εξόδους του κυκλώματος, χρησιμοποιώντας μόνο τους ορισμούς των βασικών λογικών πράξεων:

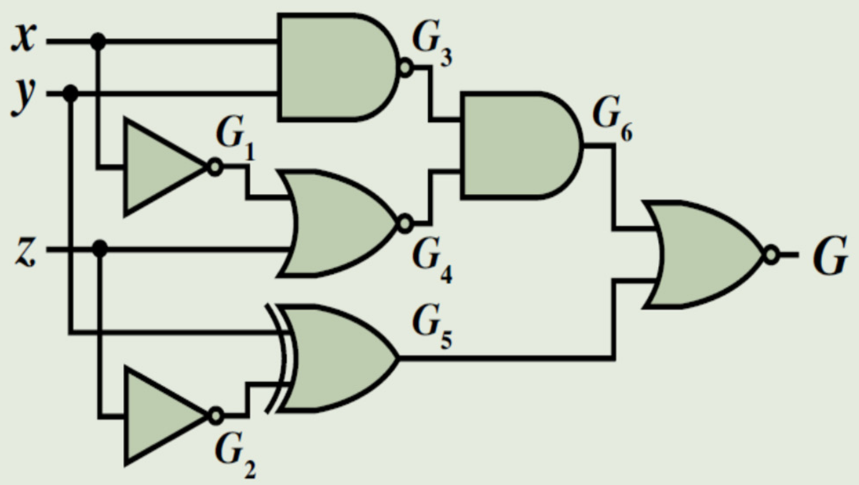
x	y	z	$F_1 = xy$	$F_2 = x \oplus y$	$F_3 = z'$	$F_4 = F_2'$	$F_5 = F_1'$	$F_6 = (zF_2)'$	$F_7 = F_2F_3$	$F_8 = zF_4$	$F_9 = F_3F_4$	$A = (F_5F_6)'$	$B = F_7 + F_8$	$C = F_7 + F_9$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0

Άσκηση 6

Να αναλύσετε τα κυκλώματα που παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα και να διερευνήσετε εάν αυτά είναι λειτουργικά ισοδύναμα.



Κύκλωμα α



Κύκλωμα β

Άσκηση 6

Αρχικά ονομάζουμε τις εσωτερικές συνδέσεις των δύο κυκλωμάτων. Παρατηρώντας τη δομή των κυκλωμάτων αυτών, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το πρώτο κύκλωμα αποτελείται από 3 επίπεδα πυλών, ενώ το δεύτερο από 4 επίπεδα πυλών. Ξεκινώντας από το πρώτο επίπεδο πυλών, εξάγουμε τις λογικές συναρτήσεις εξόδου των πυλών, μέχρι να παραχθούν οι επιθυμητές συναρτήσεις των εξόδων του κυκλώματος.

Άσκηση 6

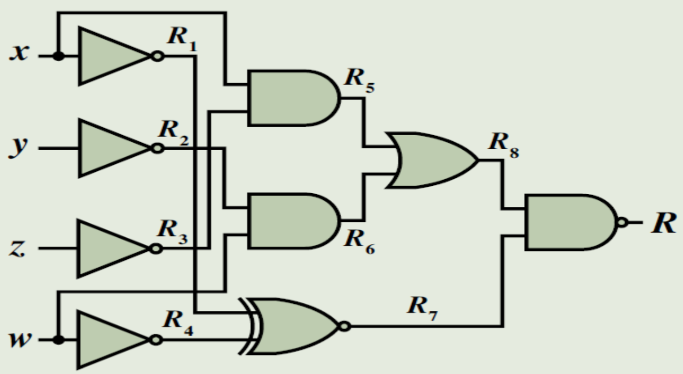
Επίπεδα πυλών	Λογικές συναρτήσεις	
	Κύκλωμα α	Κύκλωμα β
1ο επίπεδο	$F_1 = (x+y)', F_2 = xy, F_3 = (x \oplus y)'$	$G_1 = x', G_2 = z', G3 = (xy)' = x' + y'$
2ο επίπεδο	$F4 = (F1 + F2 + z)' = [(x+y)' + xy + z]'$ $= (x + y(x' + y')z' = (xy' + x'y)z'$ $= (x \oplus y)z', F_5 = zF_3 = z(x \oplus y)'$	$G_4 = (G_1 + z)' = (x' + z)' = xz',$ $G_5 = y \oplus G_2 = y \oplus z'$
3ο επίπεδο	$F = F_4 + F_5 = (x \oplus y)z' + z(x \oplus y)'$ $= x \oplus y \oplus z$	$G6 = G_3 G_4 = (x' + y')xz' = xy'z'$
4ο επίπεδο	---	$G = (G_5 + G_6)' = [(y \oplus z') + xy'z']'$ $= (yz + y'z' + xy'z')'$ $= [yz + y'z'(1+x)]' = (yz + y'z')'$ $= [(y \oplus z)']' = y \oplus z$

Άσκηση 6

Από τις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων των εξόδων ***F*** και ***G***, διαπιστώνεται ότι το πρώτο κύκλωμα είναι ισοδύναμο με μία πύλη XOR 3 εισόδων ενώ το δεύτερο κύλωμα είναι ισοδύναμο με μία πύλη XOR 2 εισόδων. Μολονότι, θα πρέπει για να διαπιστωθεί ότι δύο κυκλώματα είναι λειτουργικά ισοδύναμα, να συγκρίνονται οι πίνακες αλήθειας ή οι κανονικές μορφές των συναρτήσεων που υλοποιούν, είναι προφανές, με βάση την προαναφερθείσα διαπίστωση, ότι τα δύο κυκλώματα δεν είναι ισοδύναμα.

Άσκηση 7

Στη συνεδρίαση της κεντρικής επιτροπής ενός πολιτικού κόμματος, τίθενται σε ψηφοφορία τέσσερις προτάσεις x, y, z και w. Σε κάθε μέλος της επιτροπής διατίθενται ισάριθμοι διακόπτες δύο θέσεων, δηλαδή ένας διακόπτης για κάθε πρόταση. Η πρώτη θέση του διακόπτη μιας πρότασης αντιστοιχεί στην υπερψήφισή της, η οποία εκφράζεται με λογική τιμή 1 της μεταβλητής που αντιστοιχεί στην πρόταση, ενώ η δεύτερη θέση αντιστοιχεί στην καταψήφισή της, η οποία εκφράζεται με λογική τιμή 0 της μεταβλητής που αντιστοιχεί στην πρόταση. Κατά την ψηφοφορία, κάθε μέλος θα πρέπει να τηρεί έναν κανόνα που περιγράφει μια εξάρτηση μεταξύ των προτάσεων.



Η έξοδος $\boldsymbol{R}$ του κυκλώματος λαμβάνει τιμή 1, όταν τηρείται ο κανόνας που έχει τεθεί, ενώ λαμβάνει τιμή 0 σε περίπτωση που ο κανόνας αυτός παραβιάζεται. Αφού αναλύσετε το κύκλωμα, να διατυπώσετε με σύντομο τρόπο τον εν λόγω κανόνα.

Άσκηση 7

Το κύκλωμα αποτελείται από 4 επίπεδα πυλών. Ξεκινώντας από το πρώτο επίπεδο πυλών, εξάγετε τις λογικές συναρτήσεις εξόδου των πυλών, μέχρι να παραχθεί η επιθυμητή συνάρτηση της εξόδου ***R*** του κυκλώματος, εκτελώντας παράλληλα τους απαιτούμενους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς.

Επίπεδα πυλών	**Λογικές συναρτήσεις**
1ο επίπεδο	$R_1 = x', R_2 = y', R_3 = z', R_4 = w'$
2ο επίπεδο	$R_5 = xR_3 = xz', R_6 = wR_2 = y'w, R_7 = (R_1 \oplus R_4)' = (x' \oplus w')' = x'w' + xw$
3ο επίπεδο	$R_8 = R_5 + R_6 = xz' + y'w$
4ο επίπεδο	$R = (R_8 R_7)' = [(xz' + y'w)(x'w' + xw)]' = (xz'w + xy'w)'$ $= [xw(y' + z')]' = (xw)' + (y' + z')' = (xw)' + yz$

Άσκηση 7

Με βάση τη λογική συνάρτηση της εξόδου του κυκλώματος που προκύπτει, η διατύπωση του κανόνα ψηφοφορίας έχει ως εξής: «Όποιο μέλος της επιτροπής επιθυμεί να ψηφίσει και τις δύο προτάσεις $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{w}$, θα πρέπει να ψηφίσει το σύνολο των προτάσεων (δηλαδή και τις δύο προτάσεις $\boldsymbol{y}$ και $\boldsymbol{z}$)». Πράγματι, εάν ψηφιστούν οι προτάσεις $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{w}$ (δηλαδή $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} = 1$), ο πρώτος όρος της συνάρτησης $\boldsymbol{R}$ λαμβάνει τιμή 0, συνεπώς για να λάβει η συνάρτηση τιμή 1 (που σημαίνει ότι ο κανόνας τηρείται), θα πρέπει να ισχύει $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} = 1$, ώστε ο δεύτερος όρος της να λάβει τιμή 1, δηλαδή θα πρέπει να ψηφιστούν και οι δύο εναπομείνασες προτάσεις $\boldsymbol{y}$ και $\boldsymbol{z}$.

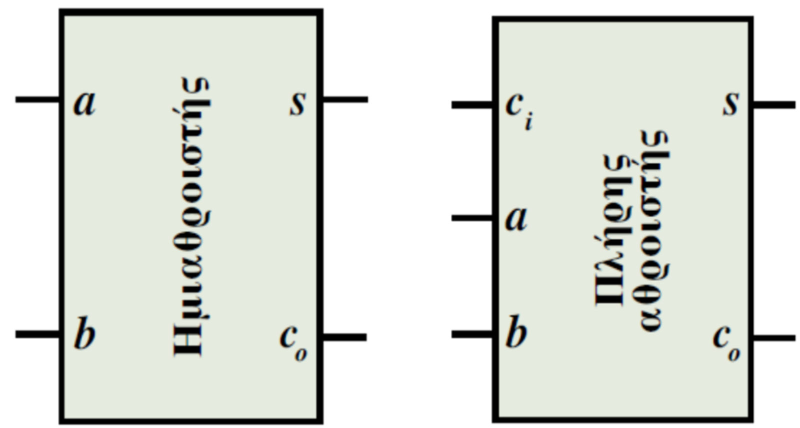
✓ Αριθμητικά συνδυαστικά κυκλώματα

Ημιαθροιστής και πλήρης αθροιστής

a	b	s	c_o
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$s = a \oplus b$$
$$c_o = ab$$

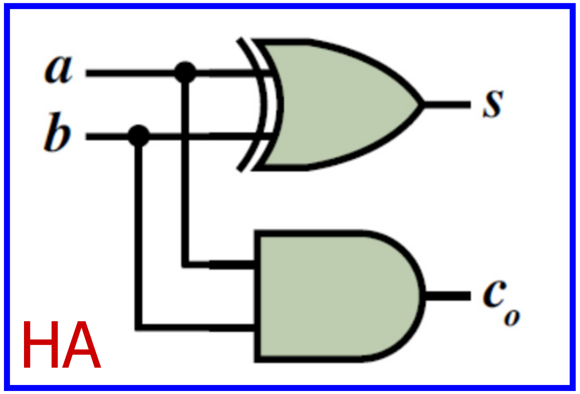
a	b	c_i	s	c_o
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

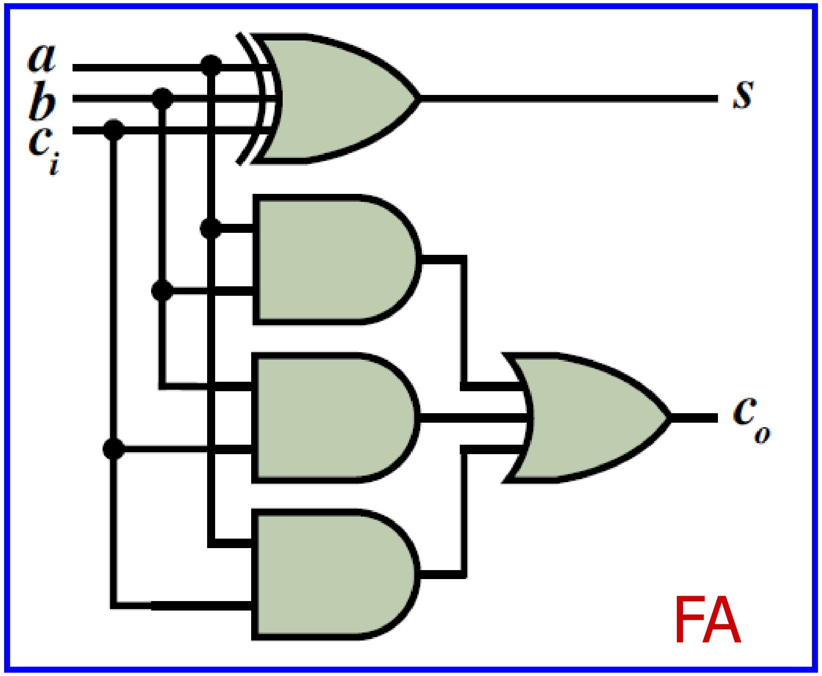


$$s = a'b'c_i + a'bc_i' + ab'c_i' + abc_i = (ab' + a'b)c_i' + (ab + a'b')c_i = a \oplus b \oplus c_i$$

$$c_o = a'bc_i + ab'c_i + abc_i' + abc_i = a'bc_i + ab'c_i + abc_i' + abc_i + abc_i + abc_i$$
$$= ab(c_i + c_i') + bc_i(a + a') + ac_i(b + b') = ab + bc_i + ac_i$$

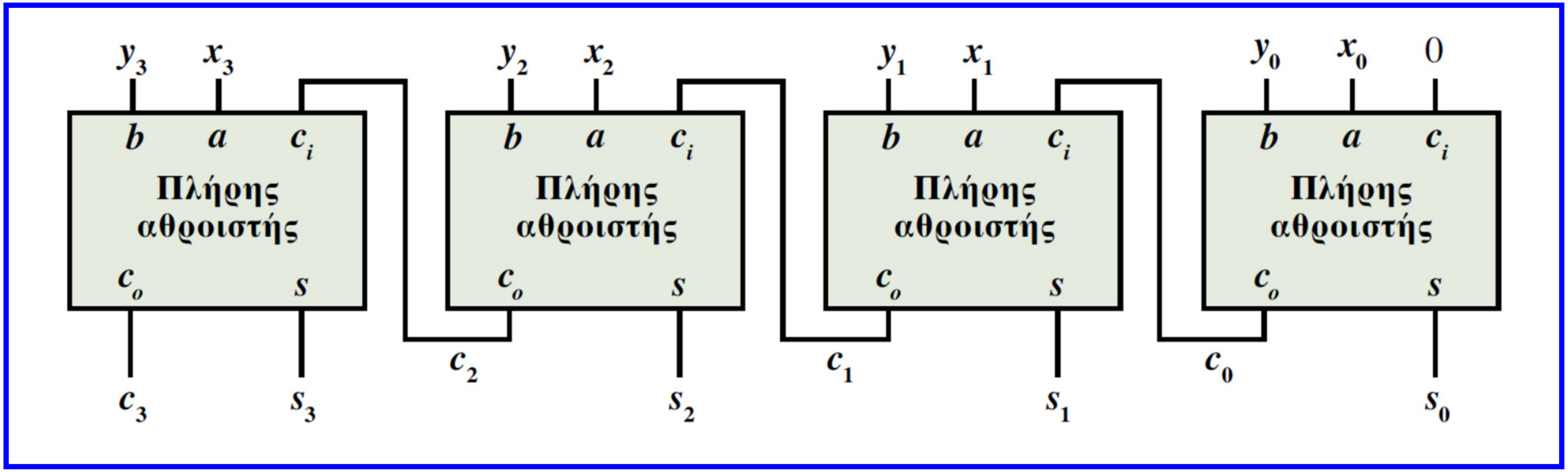
Ημιαθροιστής και πλήρης αθροιστής





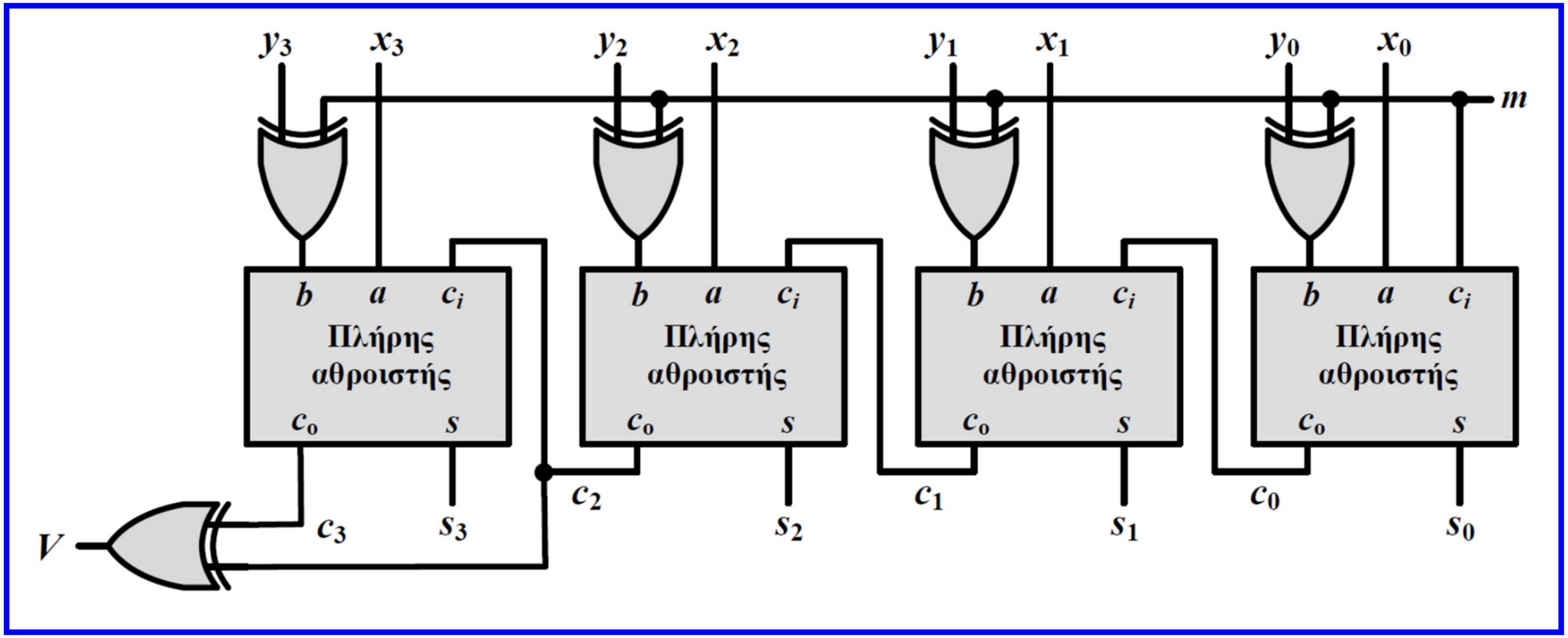
Παράλληλος αθροιστής

- Ο παράλληλος αθροιστής δύο δυαδικών αριθμών n ψηφίων προκύπτει εύκολα, εάν συνδέσουμε N πλήρεις αθροιστές (FA).
- Το συνδυαστικό κύκλωμα του παράλληλου αθροιστή διαθέτει N + 1 εξόδους.
- Κάθε FA δέχεται ένα ζεύγος ψηφίων εισόδου και παράγει ένα ψηφίο αθροίσματος και ένα ψηφίο κρατουμένου, το οποίο διαδίδεται στον πλήρη αθροιστή της επόμενης (πιο σημαντικής) θέσης με το τελικό κρατούμενο να λαμβάνεται στην έξοδο κρατουμένου του FA της πιο σημαντικής θέσης (αθροιστές διάδοσης κρατουμένου ή κυματικοί).



Παράλληλος αθροιστής / αφαιρέτης

- Αφαίρεση δυαδικών αριθμών = πρόσθεση μειωτέου με αντίθετο αφαιρετέου.
- X – Y = X + Y′ + 1, Y′ = συμπλήρωμα ως προς 1 του Y.
- Όταν στη μία είσοδο μιας XOR 2 εισόδων τεθεί τιμή 1, τότε η έξοδός της ισούται με το συμπλήρωμα της άλλης εισόδου.
- m = 0: εκτέλεση πρόσθεσης, m = 1: εκτέλεση αφαίρεσης.



Άσκηση 8

Σύνθεση αθροιστή 10δικών ψηφίων κωδικοποιημένων κατά BCD

Ο κώδικας BCD χρησιμοποιείται στην κωδικοποίηση των 10 δεκαδικών ψηφίων και είναι ισοδύναμος με τη δυαδική παράσταση των ψηφίων αυτών. Κατά την πρόσθεση 2 δεκαδικών ψηφίων κωδικοποιημένων κατά BCD, όταν το δυαδικό άθροισμα είναι ίσο ή μικρότερο του 1001 (δηλαδή του 9), τότε ταυτίζεται με το άθροισμα κατά BCD. Όταν το δυαδικό άθροισμα είναι μεγαλύτερο του 1001, για να ληφθεί το σωστό άθροισμα κατά BCD, θα πρέπει να προσθέσουμε στο δυαδικό άθροισμα τον αριθμό 0110 (6). Αυτό θα έχει αποτέλεσμα τη δημιουργία κρατουμένου δυαδικού ψηφίου. Για πρόσθεση 2 δεκαδικών ψηφίων κωδικοποιημένων κατά BCD, χρησιμοποιούνται δύο αθροιστές διάδοσης κρατουμένου με 4 δυαδικά ψηφία. Με τον πρώτο από αυτούς εξαγεται το δυαδικό άθροισμα των ψηφίων, το οποίο, όταν είναι μικρότερο του 1001, αποτελεί το επιθυμητό αποτέλεσμα, αλλά όταν είναι μεγαλύτερο του 1001, απαιτείται διόρθωση μέσω πρόσθεσης με τον αριθμό 0110, κατά την οποία προκύπτει τελικό κρατούμενο. Η πρόσθεση αυτή υλοποιείται από τον δεύτερο αθροιστή διάδοσης κρατουμένου.

Άσκηση 8

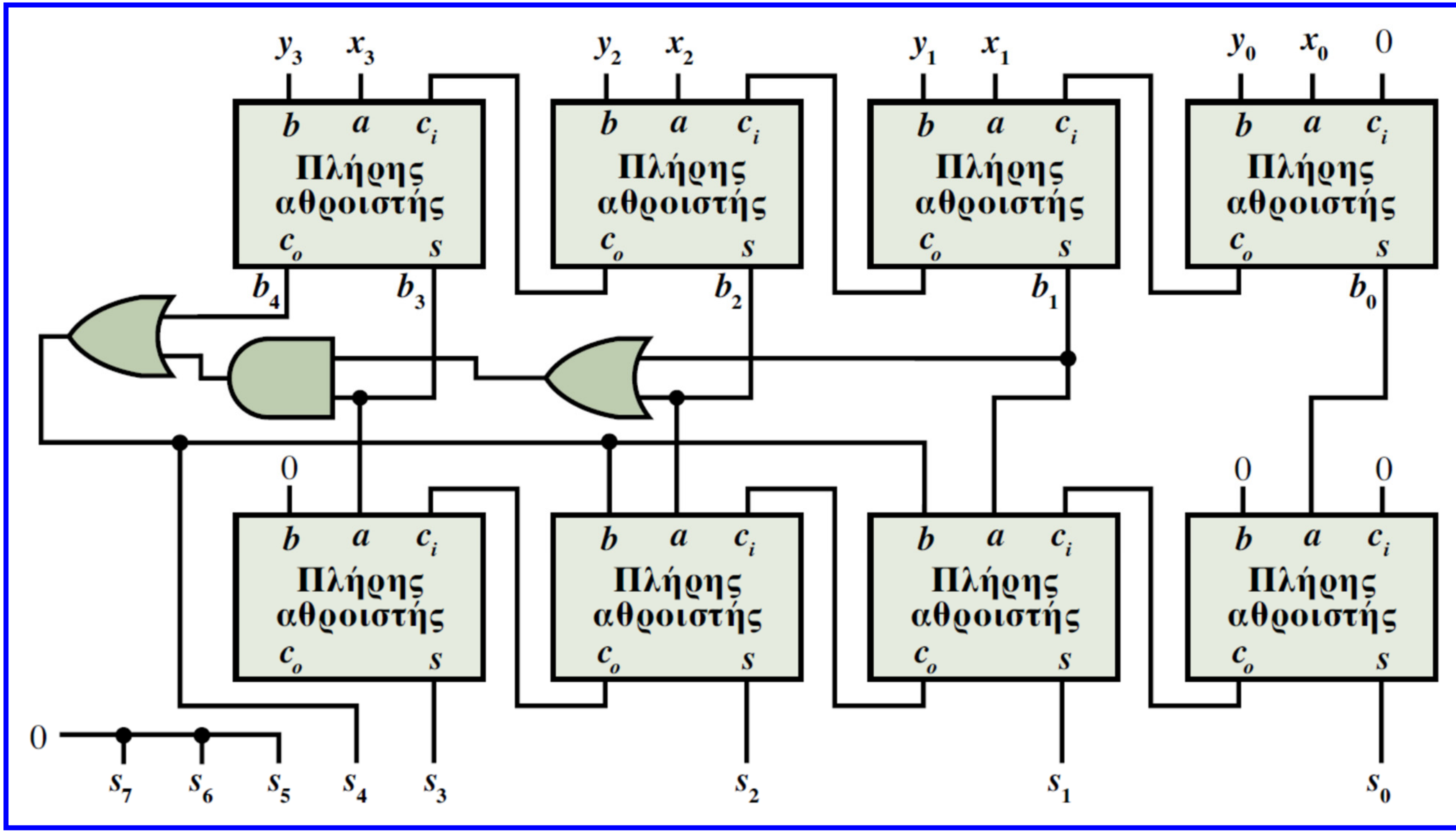
Διόρθωση του δυαδικού αθροίσματος απαιτείται όταν αυτό ισούται με τους συνδυασμούς που δεν περιλαμβάνονται στον κώδικα BCD (1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111), καθώς και όταν το δυαδικό άθροισμα συνοδεύεται από τη δημιουργία τελικού κρατουμένου (b_4), δηλαδή είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Επομένως, διόρθωση του δυαδικού αθροίσματος $b_3b_2b_1b_0$, απαιτείται όταν $b_3 = 1$ και επιπλέον $b_2 = 1$ ή $b_1 = 1$, καθώς και όταν $b_4 = 1$.

Η προϋπόθεση αυτή περιγράφεται από τη λογική έκφραση $b_3(b_2 + b_1) + b_4$ και, όταν συμβαίνει, το άθροισμα κατά BCD αποτελείται από 2 δεκαδικά ψηφία με πιο σημαντικό το 1 (0001 σε κώδικα BCD).

Η διορθωτική πρόσθεση του δυαδικού αθροίσματος με τον αριθμό 0110 (6) γίνεται μόνο όταν $b_3(b_2 + b_1) + b_4 = 1$ και η λογική τιμή της έκφρασης αυτής χρησιμοποιείται ως το πιο σημαντικό ψηφίο του αθροίσματος κατά BCD.

Άσκηση 8



y_3 x_3
y_2 x_2
y_1 x_1
y_0 x_0 0
b a c_i
Πλήρης αθροιστής
c_o s
b_4 b_3 b_2 b_1 b_0
0
0 0
0
s_7 s_6 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1 s_0

Άσκηση 9

Σύνθεση πολλαπλασιαστή 3ψήφιων δυαδικών αριθμών με παράλληλους αθροιστές 3 ψηφίων και πύλες AND 2 εισόδων

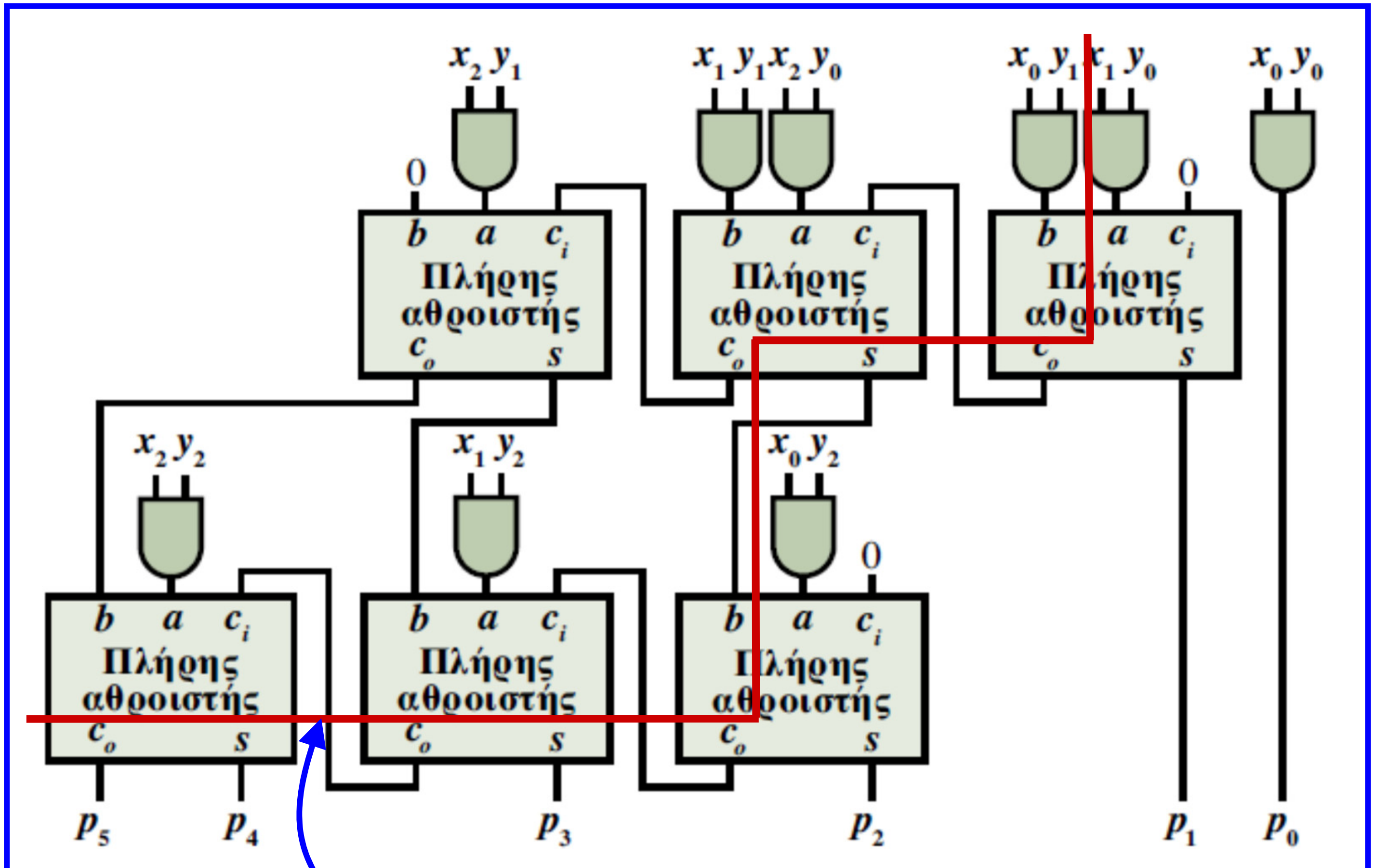
Απαιτούνται 9 πύλες AND 2 εισόδων για τα ισάριθμα μερικά γινόμενα.

Πρόσθεση των μερικών γινομένων κάθε στήλης, αφού ληφθεί υπόψη κάθε φορά το κρατούμενο που προκύπτει από την πρόσθεση σε κάθε στήλη.

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & & & x_2 & x_1 & x_0 \\
\times & & & & y_2 & y_1 & y_0 \\
\hline
 & & & & x_2y_0 & x_1y_0 & x_0y_0 \\
 & & & x_2y_1 & x_1y_1 & x_0y_1 & \\
+ & & x_2y_2 & x_1y_2 & x_0y_2 & & \\
\hline
 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0
\end{array}
$$

Με βάση τη διάταξη των στηλών των μερικών γινομένων, καθώς και τον αριθμό των προσθετέων που προκύπτουν κατά την εκτέλεση της πράξης, προκύπτει ότι για να υλοποιηθεί ο πολλαπλασιαστής τριψήφιων δυαδικών αριθμών με αθροιστές διάδοσης κρατουμένου, απαιτούνται 2 αθροιστές διάδοσης κρατουμένου για δυαδικούς αριθμούς με 3 ψηφία.

Άσκηση 9



Διαδρομή μέγιστης καθυστέρησης
(1 AND + 2 FA + 3 FA)

Άσκηση 10

Σύνθεση συγκριτή 4ψήφιων προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Η σύγκριση 2 προσημασμένων αριθμών (σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2), γίνεται με έλεγχο του αποτελέσματος της αφαίρεσής τους.

Το μηδενικό αποτέλεσμα της αφαίρεσης ανιχνεύεται μέσω μιας εξόδου z του αφαιρέτη που λαμβάνει τιμή 1, όταν και οι 4 έξοδοι του είναι 0 (υλοποίηση της z με μία πύλη NOR 4 εισόδων).

Το αρνητικό αποτέλεσμα της αφαίρεσης ανιχνεύεται μέσω μιας εξόδου n, η οποία λαμβάνει τιμή 1, όταν ο αριθμός που συνιστούν οι έξοδοι του αφαιρέτη είναι αρνητικός (πιο σημαντικό ψηφίο διαφοράς = 1).

Η υπερχείλιση ανιχνεύεται όταν η έξοδος v = 1.

Υπερχείλιση κατά την αφαίρεση δύο προσημασμένων αριθμών (X – Y) συμβαίνει όταν ο X είναι θετικός, ο Y είναι αρνητικός και το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, καθώς και όταν ο X είναι αρνητικός, ο Y είναι θετικός και το αποτέλεσμα είναι θετικό.

Άσκηση 10

Για να είναι ίσοι 2 προσημασμένοι αριθμοί X και Y, θα πρέπει το αποτέλεσμα της αφαίρεσης X – Y να είναι 0, δηλαδή θα πρέπει **z = 1**, συνεπώς η έξοδος E (equal) ταυτίζεται με την έξοδο z.

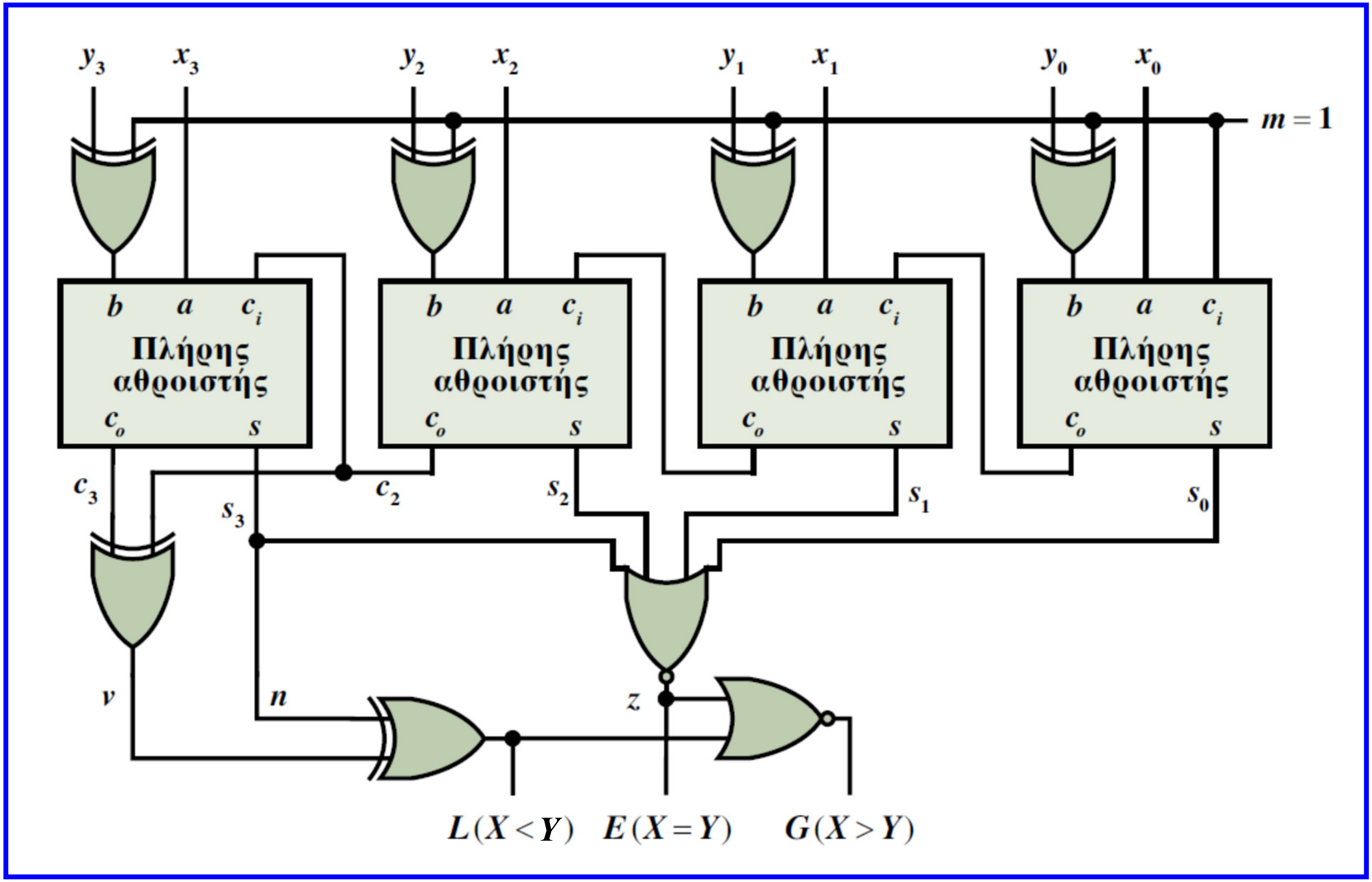
Όταν οι 2 αριθμοί είναι ομόσημοι (δεν συμβαίνει υπερχείλιση κατά την αφαίρεση X – Y, δηλαδή v = 0) και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι αρνητικό (δηλαδή n = 1), τότε X < Y.

Η ανισότητα X < Y ισχύει και όταν ο X είναι αρνητικός και ο Y είναι θετικός. Τότε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι αρνητικό (n = 1), εάν δε συμβεί υπερχείλιση (v = 0), ή θετικό (n = 0), εάν συμβεί υπερχείλιση (v = 1).

Επομένως, η ανισότητα X < Y ισχύει, όταν οι έξοδοι n και v λαμβάνουν διαφορετική λογική τιμή, δηλαδή η έξοδος L (less) παράγεται εάν τροφοδοτηθεί μια πύλη XOR δύο εισόδων με τις εξόδους του κυκλώματος n και v.

Όταν X > Y, μια πρόσθετη έξοδος G (great) πρέπει να λαμβάνει τιμή 1. Τότε οι έξοδοι E και L λαμβάνουν τιμή 0, συνεπώς G = (E + L)′, με την έξοδο G να υλοποιείται εύκολα με μία πύλη NOR 2 εισόδων.

Άσκηση 10

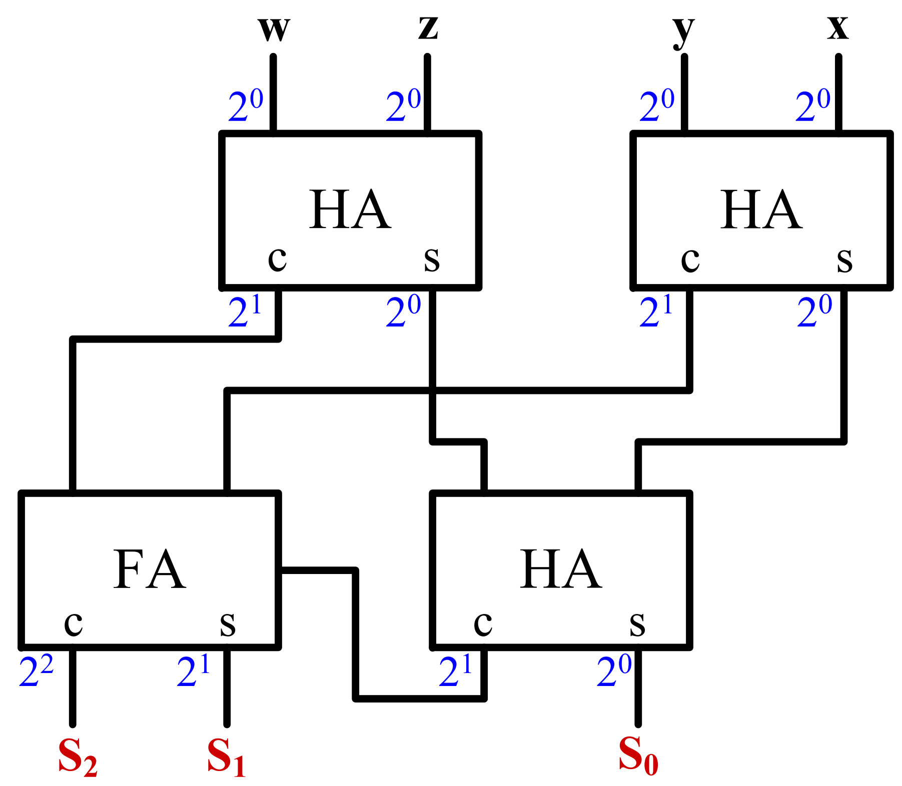


y3 x3 y2 x2 y1 x1 y0 x0
m = 1
b a ci
Πλήρης αθροιστής
co s
c3 s3 c2 s2 s1 s0
v n z
L(X < Y) E(X = Y) G(X > Y)

Άσκηση 11

Χρησιμοποιώντας ημιαθροιστές και πλήρεις αθροιστές σχεδιάζουμε συνδυαστικό κύκλωμα που προσθέτει τα ψηφία ενός τετραψήφιου δυαδικού αριθμού xyzw.

Το άθροισμα των ψηφίων λαμβάνει τιμές στο διάστημα [0, 4], συνεπώς αποτελείται από 3 ψηφία ($S_2S_1S_0$). Χωρίζουμε τον αριθμό σε 2 ζεύγη ψηφίων που τα προσθέτουμε με 2 HA. Έτσι παράγονται 2 ψηφία αθροίσματος με βάρος 2^0 και 2 ψηφία κρατουμένου με βάρος 2^1. Τα ψηφία αθροίσματος προστίθενται με HA και τα ψηφία του κρατουμένου με FA.

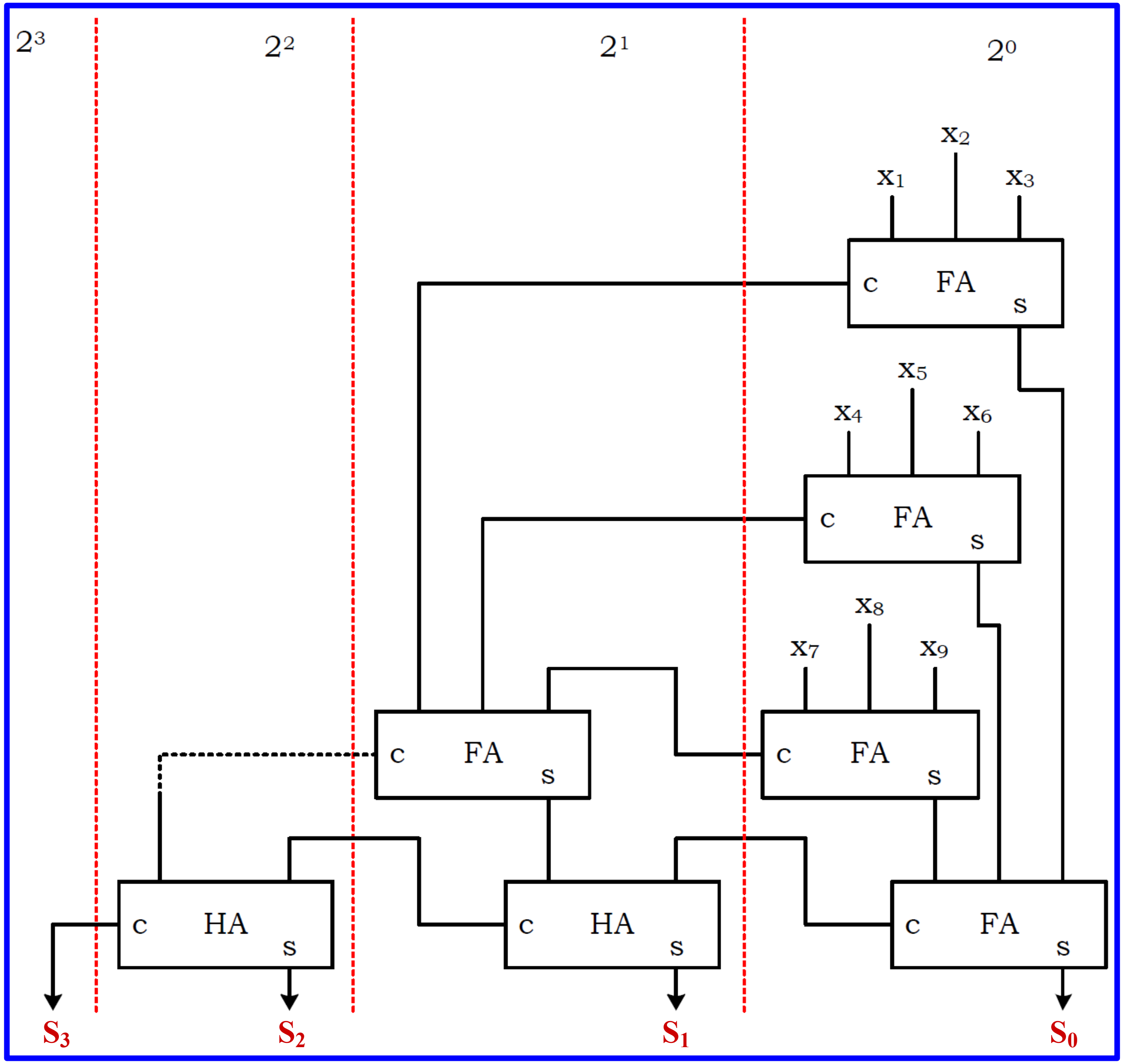


Άσκηση 12

Χρησιμοποιώντας ημιαθροιστές και πλήρεις αθροιστές σχεδιάζουμε συνδυαστικό κύκλωμα που προσθέτει τα ψηφία ενός εννιαψήφιου δυαδικού αριθμού $x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1$.

Το άθροισμα των ψηφίων λαμβάνει τιμές στο διάστημα [0, 9], συνεπώς αποτελείται από 4 ψηφία ($S_3S_2S_1S_0$). Χωρίζουμε τα ψηφία σε 3 τριάδες και τις προσθέτουμε με 3 FA. Παράγονται 3 ψηφία αθροίσματος με βάρος 2^0 και 3 ψηφία κρατουμένου με βάρος 2^1. Τα ψηφία αθροίσματος προστίθενται με 1 FA, η έξοδος αθροίσματος του οποίου δίνει το ψηφίο του αποτελέσματος (S_0), ενώ η έξοδος κρατουμένου 1 ακόμη ψηφίο με βάρος 2^1. Χρησιμοποιούμε 1 FA για τα 3 ψηφία με βάρος 2^1, η έξοδος του οποίου δίνει κρατούμενο με βάρος 2^2 και άθροισμα με βάρος 2^1. Για τα εναπομείναντα 2 ψηφία με βάρος 2^1, χρησιμοποιούμε 1 HA. Η έξοδος αθροίσματος δίνει το ψηφίο του αποτελέσματος S_1, ενώ η έξοδος κρατουμένου δίνει ψηφίο με βάρος 2^2. Ένας ακόμη HA προσθέτει τα 2 ψηφία βάρους 2^2 και οι έξοδοί του είναι τα ψηφία του αποτελέσματος S_2 και S_3.

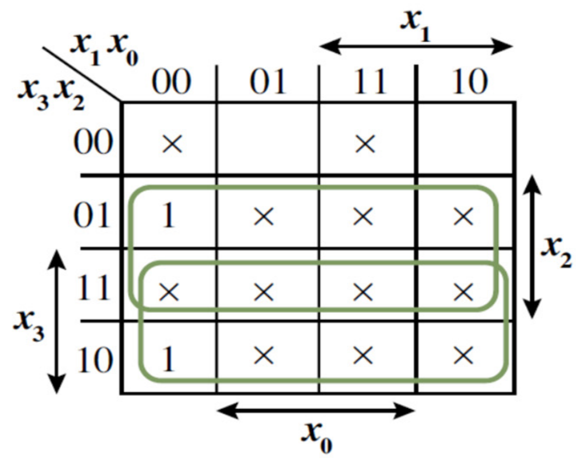
Άσκηση 12


2^3
2^2
2^1
2^0
x_1 x_2 x_3
c FA s
x_4 x_5 x_6
c FA s
x_7 x_8 x_9
c FA s
c FA s
c HA s
c HA s
c FA s
S_3
S_2
S_1
S_0

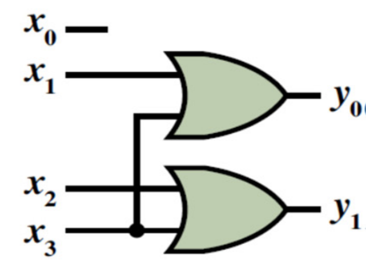
✓ Κωδικοποιητές και αποκωδικοποιητές

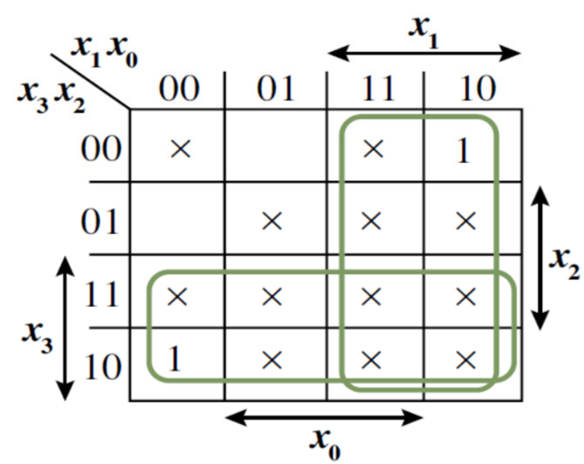
Απλός κωδικοποιητής

x_3	x_2	x_1	x_0	y_1	y_0
0	0	0	0	×	×
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	×	×
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	×	×
0	1	1	0	×	×
0	1	1	1	×	×
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	×	×
1	0	1	0	×	×
1	0	1	1	×	×
1	1	0	0	×	×
1	1	0	1	×	×
1	1	1	0	×	×
1	1	1	1	×	×

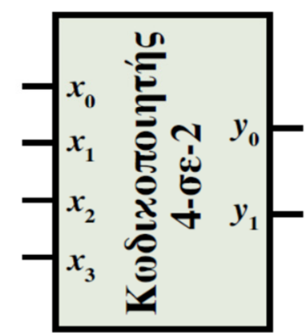


$$y_1 = x_2 + x_3$$



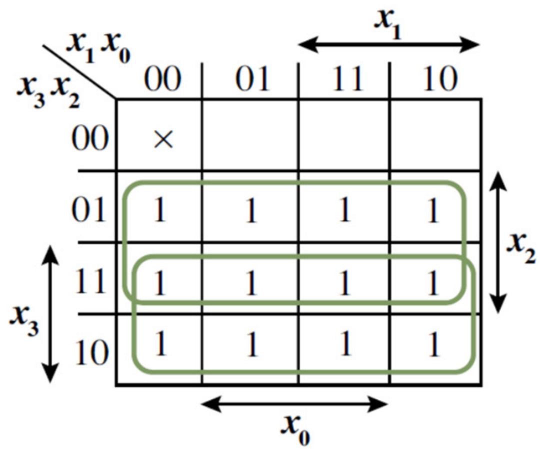


$$y_0 = x_1 + x_3$$

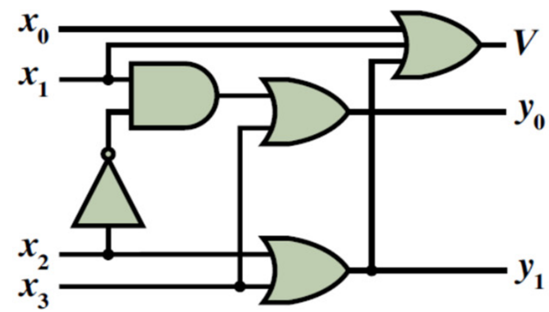


Κωδικοποιητής προτεραιότητας

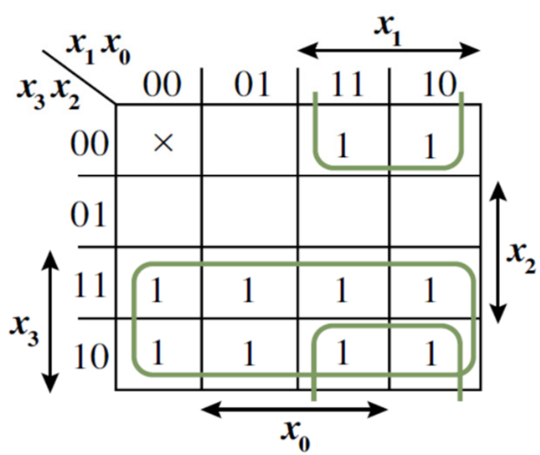
x_3	x_2	x_1	x_0	y_1	y_0	V
0	0	0	0	×	×	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1



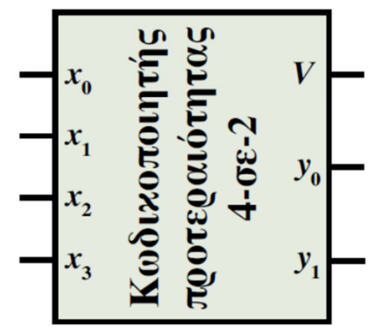
$$y_1 = x_2 + x_3$$



$$V' = x'_3 x'_2 x'_1 x'_0 \;\Rightarrow$$
$$V = x_3 + x_2 + x_1 + x_0$$



$$y_0 = x_3 + x_1 x'_2$$



Άσκηση 13

Να τροποποιήσετε τον κωδικοποιητή προτεραιότητας της προηγούμενης σελίδας, έτσι ώστε η είσοδος με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα να είναι η $\boldsymbol{x_0}$ και να ακολουθούν σε σειρά προτεραιότητας οι είσοδοι $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ και $\boldsymbol{x_3}$. Για την υλοποίηση, να χρησιμοποιήσετε μόνο λογικές πύλες NOR.

Άσκηση 13

x_3	x_2	x_1	x_0	y_1	y_0	V
0	0	0	0	×	×	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	×	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	1	0	0	0

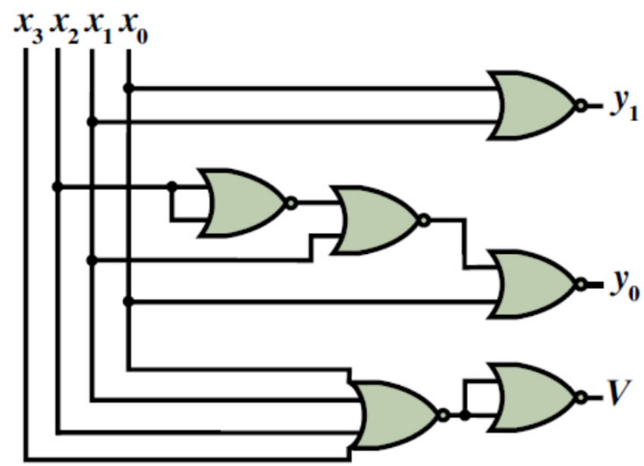
$$y_1' = x_1 + x_0$$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	×	0	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

$$y_0' = x_0 + x_2x_1'$$

$$y_1 = (x_0 + x_1)'$$

$$y_0 = [x_0 + (x_2' + x_1)']'$$



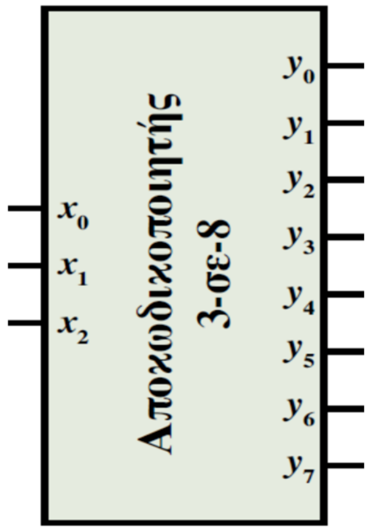
$$V' = m_0 = x_3'x_2'x_1'x_0' \Rightarrow$$

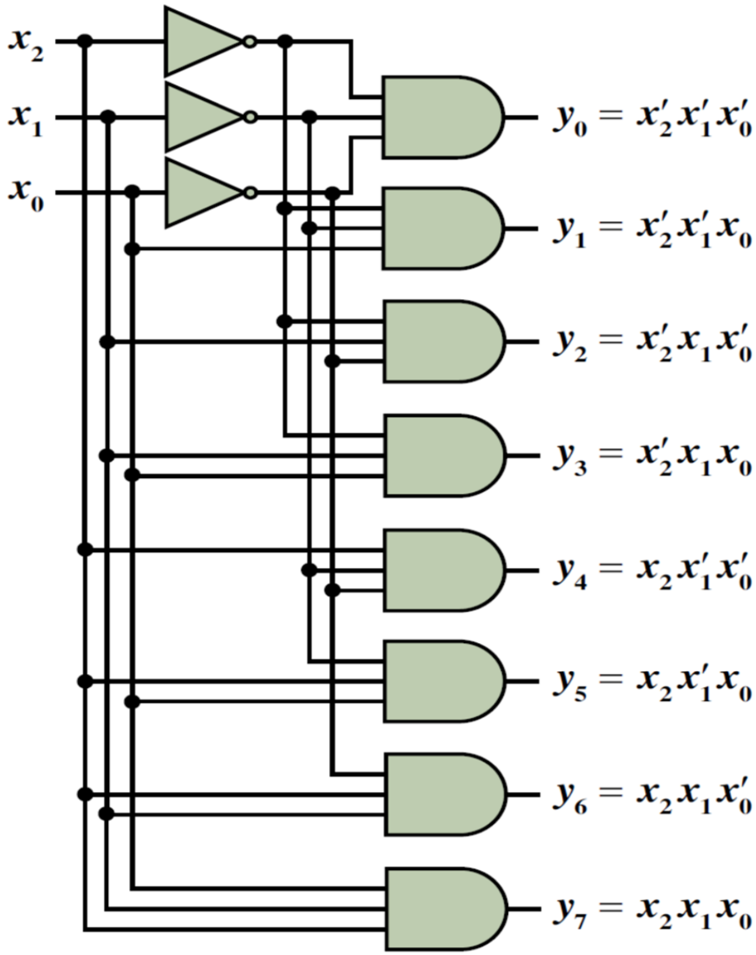
$$V = x_3 + x_2 + x_1 + x_0 \Rightarrow$$

$$V = [(x_3 + x_2 + x_1 + x_0)']'$$

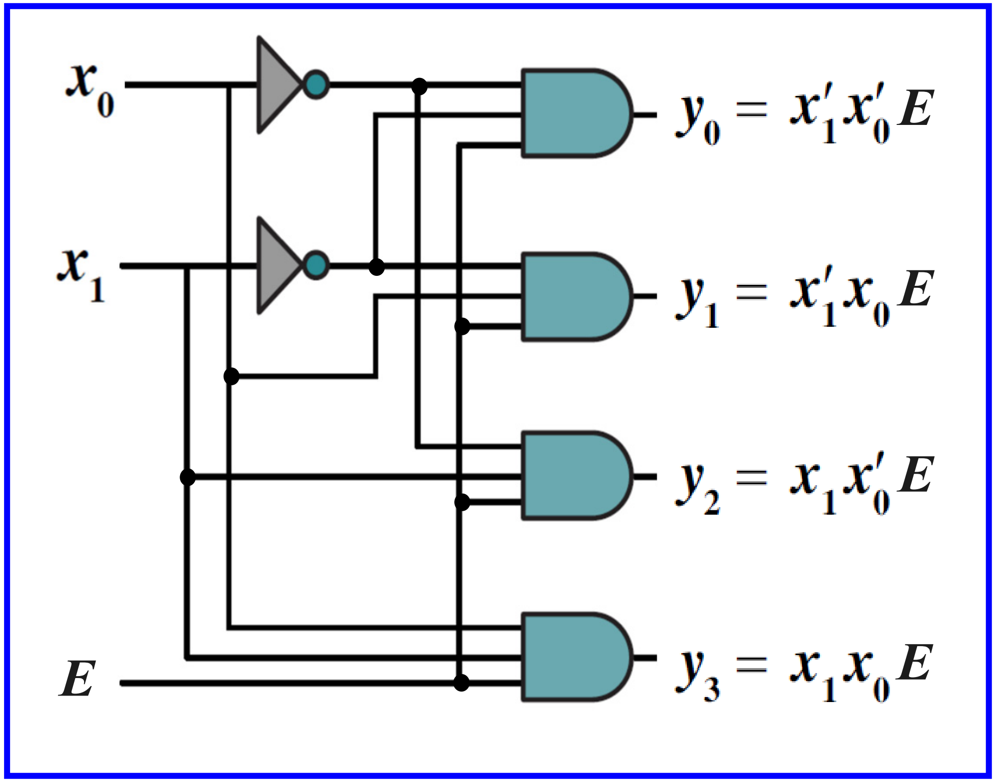
Αποκωδικοποιητές

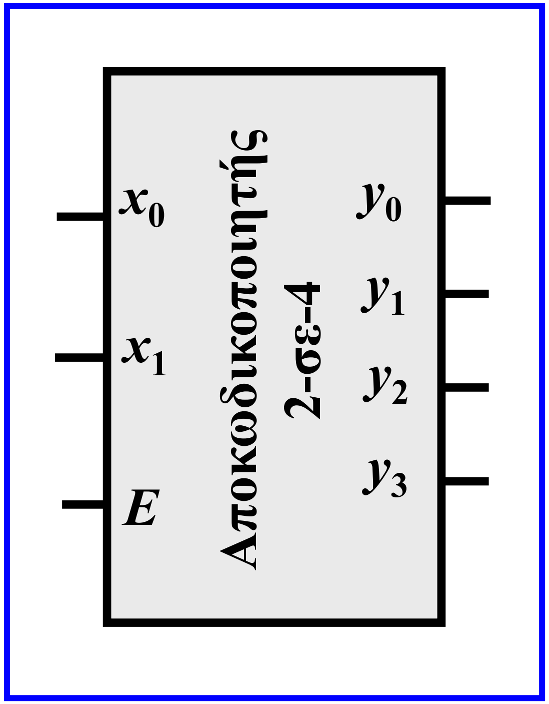
x_2	x_1	x_0	y_7	y_6	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0





Αποκωδικοποιητές με είσοδο ενεργοποίησης



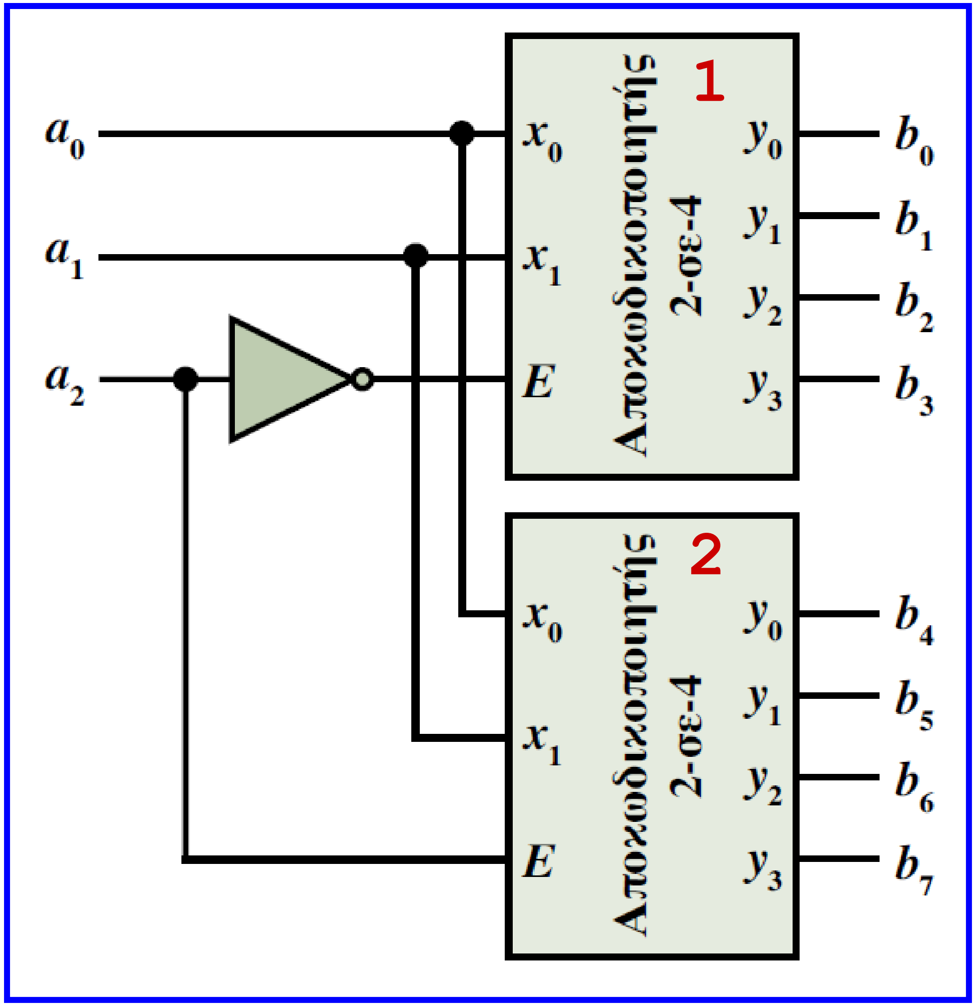


Σύνθεση πολύπλοκων αποκωδικοποιητών

Σύνθεση αποκωδικοποιητή 3-σε-8 με αποκωδικοποιητές 2-σε-4:

Όταν $\alpha_2 = 0$, ενεργοποιείται ο 1ος αποκωδικοποιητής 2-σε- 4 και παράγει στις εξόδους b_0 έως b_3 τους ελαχιστόρους m_0 έως m_3, αντίστοιχα,

Όταν $\alpha_2 = 1$, ενεργοποιείται ο 2ος αποκωδικοποιητής 2-σε-4 και παράγει στις εξόδους b_4 έως b_7 τους ελαχιστόρους m_4 έως m_7, αντίστοιχα.



Υλοποίηση συναρτήσεων με αποκωδικοποιητή

- Αφού ένας αποκωδικοποιητής N-σε-2^N αποτελεί και γεννήτρια ελαχιστόρων, προκύπτει ότι συνδυάζοντάς τον με μία λογική πύλη OR, η οποία παράγει το λογικό άθροισμα κατάλληλων εξόδων του, μπορούμε να υλοποιήσουμε οποιαδήποτε λογική συνάρτηση μορφής αθροίσματος ελαχιστόρων.

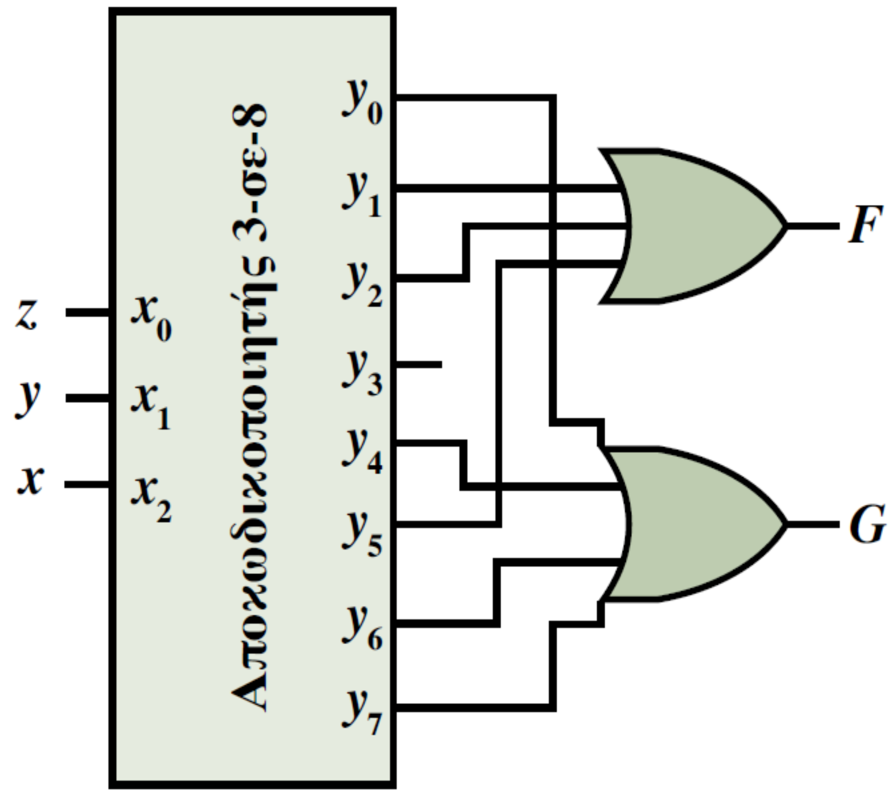
- Για να γίνει αυτό θα πρέπει το πλήθος των εισόδων του αποκωδικοποιητή να ισούται με το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης και το πλήθος των εισόδων της πύλης OR να ισούται με το πλήθος των ελαχιστόρων που συμμετέχουν στη συνάρτηση.

Άσκηση 14

Υλοποίηση των λογικών συναρτήσεων F και G με αποκωδικοποιητή

$$F(x,y,z) = \Sigma(1,\ 2,\ 5)$$

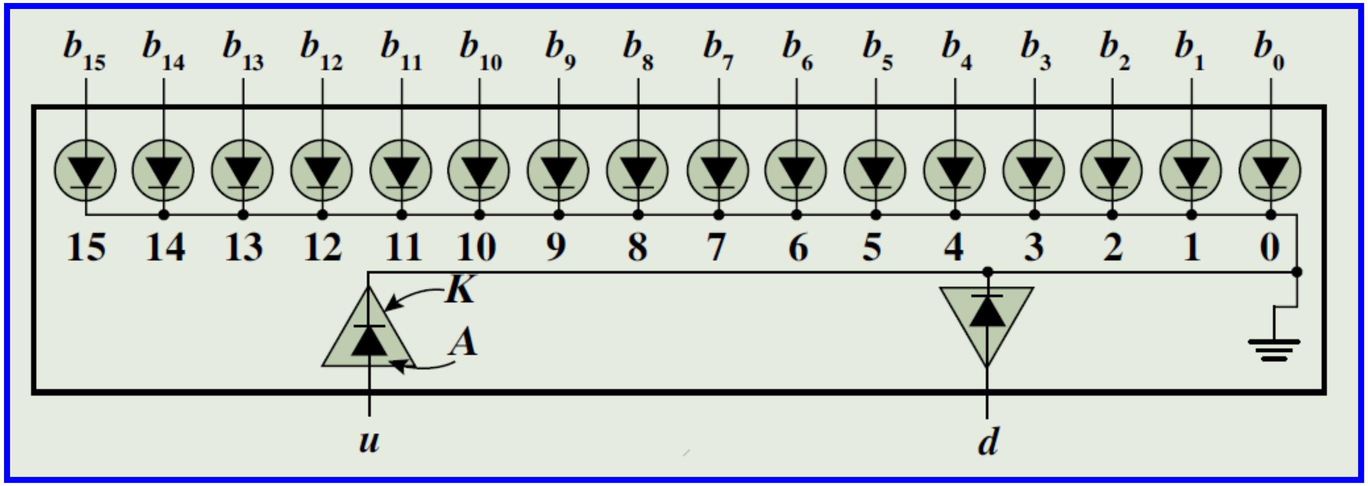
$$G(x,y,z) = xy + y'z'$$
$$= xy(z+z') + y'z'(x+x')$$
$$= xyz + xyz' + xy'z' + x'y'z'$$
$$= \Sigma(7,6,4,0)$$



Άσκηση 15

Πάνω από τις πόρτες πρόσβασης στον ανελκυστήρα ενός κτιρίου με δεκαέξι ορόφους (συμπεριλαμβανομένου του ισόγειου), είναι τοποθετημένος ένας ενδείκτης με δεκαοκτώ διόδους φωτοεκπομπής (*light-emitting diodes*, *LEDs*), όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα. Οι 16 από αυτές υποδεικνύουν τον όροφο στον οποίο βρίσκεται ο ανελκυστήρας, ενώ οι υπόλοιπες δύο υποδεικνύουν την κατεύθυνση κίνησής του. Καθεμία από τις διόδους εκπέμπει φως, όταν στην άνοδό της (***A***) εφαρμόζεται επαρκώς μεγαλύτερη τάση από εκείνη που εφαρμόζεται στην κάθοδό της (***K***). Οι κάθοδοι των διόδων του ενδείκτη είναι συνδεδεμένες στη γείωση, δηλαδή σε μηδενική τάση, η οποία αντιστοιχεί στη λογική τιμή 0, με αποτέλεσμα, εάν στην άνοδο μιας διόδου εφαρμοστεί τάση που αντιστοιχεί στη λογική τιμή 1, αυτή να εκπέμπει φως και το αντίστοιχο τμήμα του ενδείκτη να «ανάβει».

Άσκηση 15



Η μονάδα ελέγχου του ανελκυστήρα παράγει έναν πενταψήφιο δυαδικό αριθμό, το πιο σημαντικό ψηφίο του οποίου υποδεικνύει την κατεύθυνση κίνησης του ανελκυστήρα (δηλαδή είναι 1 για την άνοδο και 0 για την κάθοδο), ενώ τα υπόλοιπα ψηφία αντιστοιχούν στον όροφο που βρίσκεται η καμπίνα του ανελκυστήρα. Εάν διαθέτετε έναν αντιστροφέα και αποκωδικοποιητές 2-σε-4 με είσοδο ενεργοποίησης, να συνθέσετε συνδυαστικό κύκλωμα το οποίο να διασυνδέει τη μονάδα ελέγχου του ανελκυστήρα με τους ενδείκτες που βρίσκονται πάνω από τις πόρτες πρόσβασης.

Άσκηση 15

Οι κάθοδοι των διόδων του ενδείκτη είναι συνδεδεμένες στη γείωση, η οποία αντιστοιχεί στη λογική τιμή 0. Έτσι, για να ενεργοποιηθεί («ανάψει») ένα τμήμα του ενδείκτη, θα πρέπει η αντίστοιχη είσοδός του να τροφοδοτηθεί με λογική τιμή 1. Τα τέσσερα λιγότερο σημαντικά ψηφία (έστω $\boldsymbol{a_3}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_0}$) που παράγει η μονάδα ελέγχου του ανελκυστήρα, θα πρέπει να αποκωδικοποιηθούν σε δεκαέξι δυαδικά ψηφία ($\boldsymbol{b_{15}}$ έως $\boldsymbol{b_0}$), τα οποία αντιστοιχούν στις διόδους που υποδεικνύουν τον όροφο που βρίσκεται η καμπίνα του ανελκυστήρα. Απαιτείται, λοιπόν, ένας αποκωδικοποιητής 4-σε-16, τον οποίο θα πρέπει να συνθέσετε χρησιμοποιώντας τους διαθέσιμους αποκωδικοποιητές 2-σε-4. Με βάση τη λογική που ακολουθήθηκε στη σελίδα 62, όπου συνθέσαμε έναν αποκωδικοποιητή 3-σε-8 με δύο αποκωδικοποιητές 2-σε-4, μπορείτε να καταλήξετε στη ζητούμενη διάταξη αποκωδικοποιητών 2-σε-4.

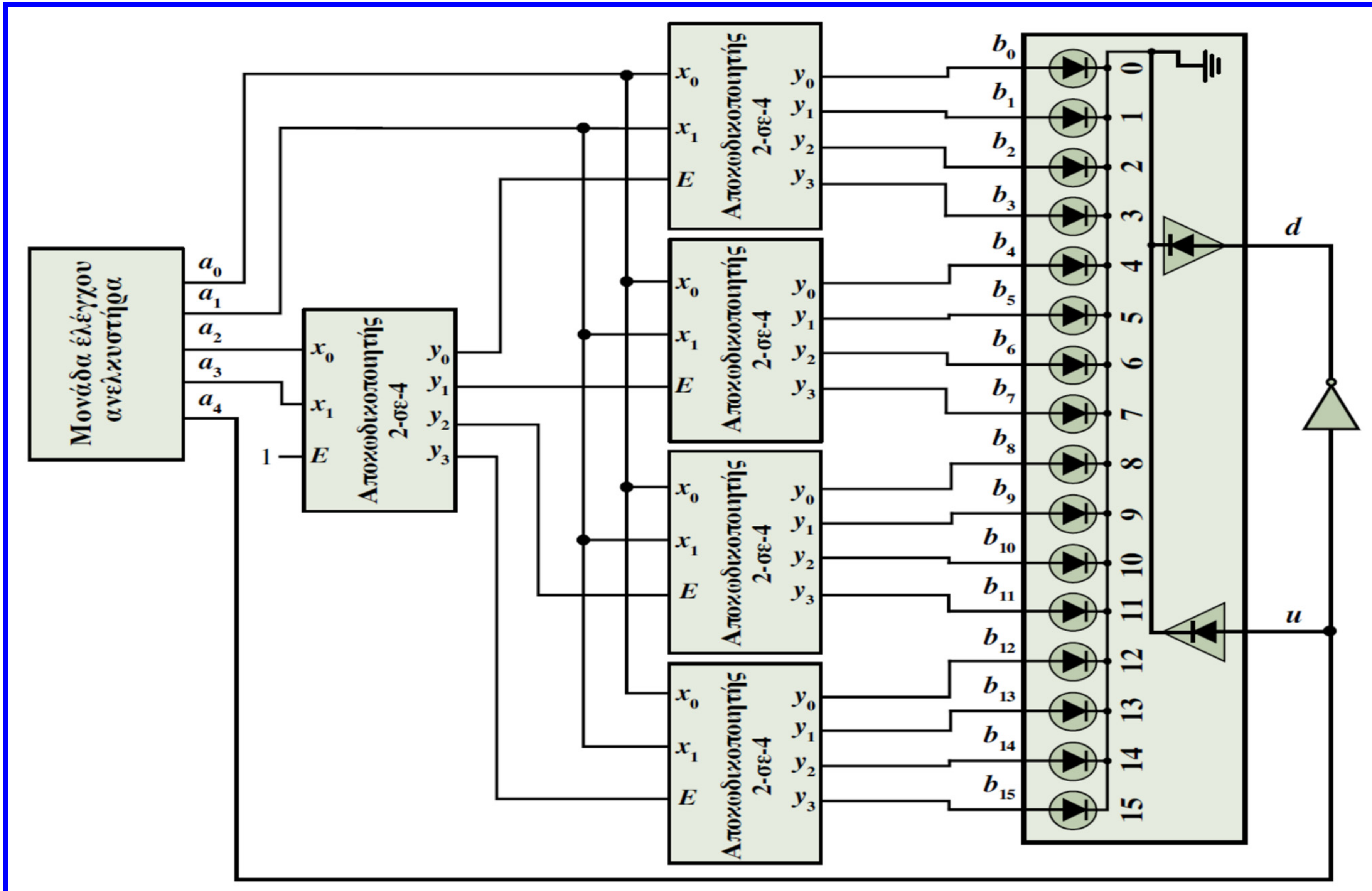
Άσκηση 15

Ο αποκωδικοποιητής του πρώτου επιπέδου της διάταξης αυτής είναι μονίμως ενεργοποιημένος ($\boldsymbol{E} = 1$) και αποκωδικοποιεί τα δύο πιο σημαντικά ψηφία της τετράδας εισόδου. Με βάση την έξοδο του αποκωδικοποιητή αυτού, επιλέγεται κάθε φορά ένας από τους τέσσερις αποκωδικοποιητές του δεύτερου επιπέδου της διάταξης, οι οποίοι λαμβάνουν ως είσοδο τα δύο λιγότερο σημαντικά ψηφία της τετράδας εισόδου. Για παράδειγμα, όταν $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2 = 0$, ενεργοποιείται ο πρώτος αποκωδικοποιητής του δεύτερου επιπέδου, αφού η έξοδος $\boldsymbol{y}_0$ του αποκωδικοποιητή του πρώτου επιπέδου λαμβάνει τιμή 1.

Άσκηση 15

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στην έξοδο του πρώτου αποκωδικοποιητή του δεύτερου επιπέδου να παράγονται οι ελαχιστόροι $\boldsymbol{b_0 = a'_3 a'_2 a'_1 a'_0}$, $\boldsymbol{b_1 = a'_3 a'_2 a'_1 a_0}$, $\boldsymbol{b_2 = a'_3 a'_2 a_1 a'_0}$ και $\boldsymbol{b_3 = a'_3 a'_2 a_1 a_0}$, δηλαδή οι ελαχιστόροι $\boldsymbol{m_0}$ έως $\boldsymbol{m_3}$ της συνάρτησης των τεσσάρων μεταβλητών $\boldsymbol{a_3}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_1}$ και $\boldsymbol{a_0}$. Με τον τρόπο αυτόν επιτυγχάνετε τη σύνθεση ενός αποκωδικοποιητή 4-σε-16 με πέντε αποκωδικοποιητές 2-σε-4. Το πιο σημαντικό ψηφίο που παράγεται από τη μονάδα ελέγχου ($\boldsymbol{a_4}$) υποδεικνύει την κατεύθυνση κίνησης του ανελκυστήρα ($\boldsymbol{a_4} = 1$ για την άνοδο και $\boldsymbol{a_4} = 0$ για την κάθοδο). Μπορείτε, λοιπόν, να οδηγήσετε το ψηφίο αυτό απευθείας στην είσοδο $\boldsymbol{u}$ του ενδείκτη, με αποτέλεσμα, όταν $\boldsymbol{a_4} = 1$, να ενεργοποιείται η δίοδος που υποδεικνύει την άνοδο. Επίσης, εάν τροφοδοτήσετε το ίδιο ψηφίο, μέσω του διαθέσιμου αντιστροφέα, στην είσοδο $\boldsymbol{d}$ του ενδείκτη, επιτυγχάνετε την ενεργοποίηση της διόδου που υποδεικνύει την κάθοδο, όταν $\boldsymbol{a_4} = 0$.

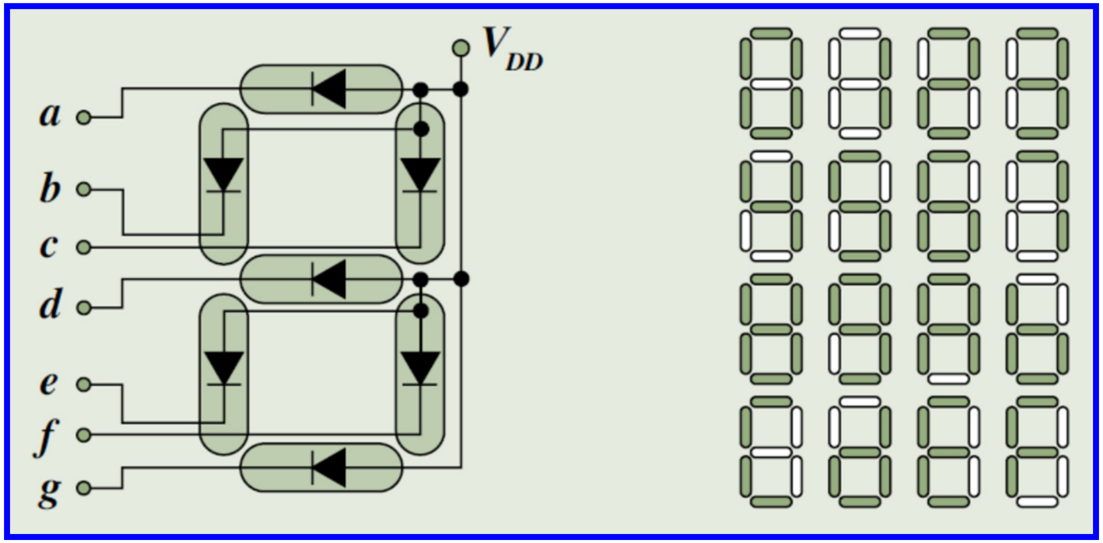
Άσκηση 15



Μονάδα ελέγχου ανελκυστήρα
a_0
a_1
a_2
a_3
a_4
1
Αποκωδικοποιητής 2-σε-4
x_0
x_1
E
y_0
y_1
y_2
y_3
b_0
b_1
b_2
b_3
b_4
b_5
b_6
b_7
b_8
b_9
b_{10}
b_{11}
b_{12}
b_{13}
b_{14}
b_{15}
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
d
u

Άσκηση 16

Μια χρήσιμη εφαρμογή των αποκωδικοποιητών είναι η μετατροπή χαρακτήρων σε μορφή κατάλληλη για προβολή σε καθημερινές ηλεκτρονικές συσκευές, όπως είναι οι αριθμομηχανές και τα ψηφιακά ρολόγια. Σε πολλές από αυτές τις συσκευές χρησιμοποιείται ο *ενδείκτης επτά τμημάτων* (*seven-segment display*), ο οποίος παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα και αποτελείται από 7 διόδους φωτοεκπομπής. Η κοινή τάση τροφοδοσίας (V_{DD}) των ανόδων των διόδων αντιστοιχεί στη λογική τιμή 1.



Άσκηση 16

Χρησιμοποιώντας μόνο έναν αποκωδικοποιητή και λογικές πύλες OR, να υλοποιήσετε συνδυαστικό κύκλωμα που να δέχεται στις εισόδους του δυαδικούς αριθμούς τεσσάρων ψηφίων και να παράγει εξόδους οι οποίες εφαρμοζόμενες στον ενδείκτη του σχήματος να έχουν αποτέλεσμα την απεικόνιση των δεκαέξι πρώτων αριθμών του δεκαεξαδικού συστήματος, η οποία παρουσιάζεται στο σχήμα.

Άσκηση 16

Οι άνοδοι των διόδων του ενδείκτη τροφοδοτούνται με λογική τιμή 1, συνεπώς για την ενεργοποίηση ενός τμήματός του θα πρέπει να τροφοδοτήσετε την αντίστοιχη είσοδό του με λογική τιμή 0. Με βάση τη διαπίστωση αυτή, αλλά και την απεικόνιση των δεκαεξαδικών αριθμών που δίνεται, μπορείτε να δημιουργήσετε τον πίνακα αλήθειας των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις 7 εισόδους του ενδείκτη. Οι συναρτήσεις που ενεργοποιούν τα τμήματα του ενδείκτη προκύπτουν απευθείας από τον πίνακα και έχουν ως εξής:

$\boldsymbol{a} = \Sigma(1, 4, 11, 13)$, $\boldsymbol{b} = \Sigma(1, 2, 3, 7, 13)$, $\boldsymbol{c} = \Sigma(5, 6, 11, 12, 14, 15)$, $\boldsymbol{d} = \Sigma(0, 1, 7, 12)$,

$$\boldsymbol{e} = \Sigma(1, 3, 4, 5, 7, 9),\ \boldsymbol{f} = \Sigma(2, 12, 14, 15),\ \boldsymbol{g} = \Sigma(1, 4, 7, 10, 15).$$

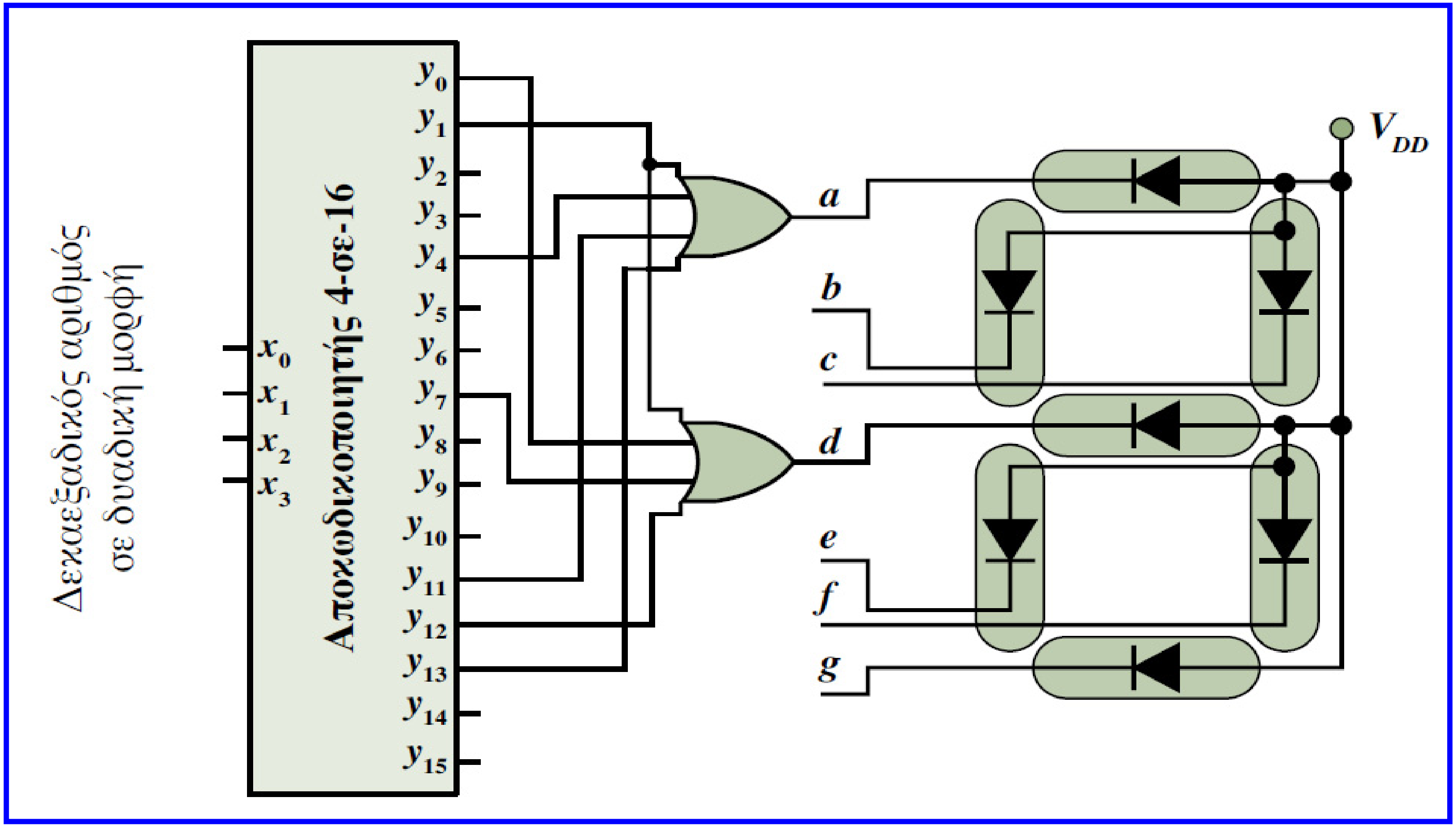
Για την υλοποίησή τους θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε έναν αποκωδικοποιητή 4-σε-16 (αφού οι αριθμοί εισόδου είναι κωδικοποιημένοι με 4 δυαδικά ψηφία), σε συνδυασμό με 7 πύλες OR, μία για κάθε συνάρτηση.

Άσκηση 16

Δεκαεξαδικός αριθμός	x_3	x_2	x_1	x_0	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
A	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
B	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
C	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
D	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
E	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
F	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1

Άσκηση 16

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η υλοποίηση του ζητούμενου συνδυαστικού κυκλώματος για 2 από τις 7 συναρτήσεις.



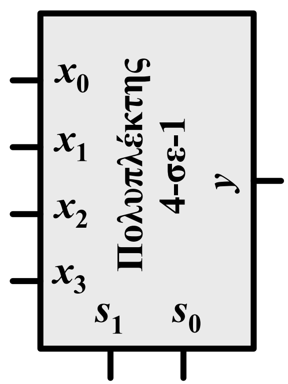
✓ Πολυπλέκτες και αποπολυπλέκτες

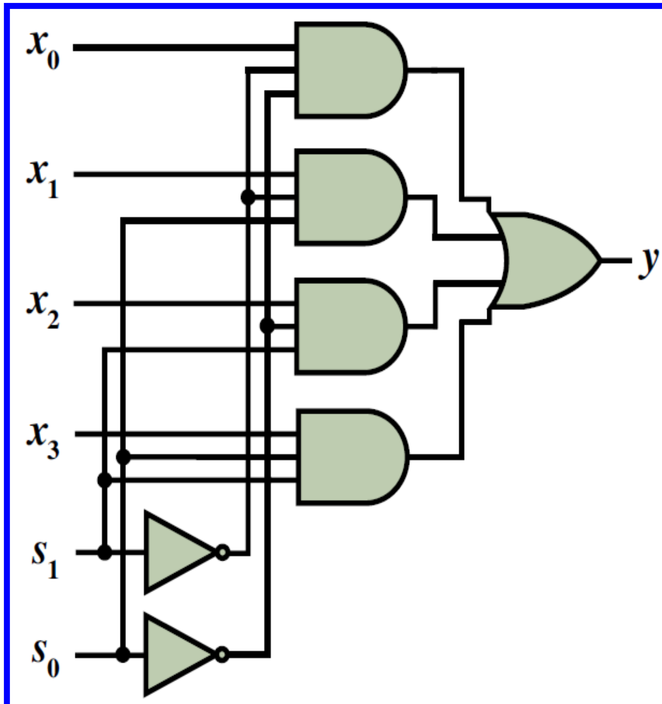
Πολυπλέκτες

- Οι πολυπλέκτες λαμβάνουν στην είσοδό τους 2^N δυαδικά ψηφία και μεταφέρουν στην έξοδό τους την τιμή ενός από τα ψηφία εισόδου.
- Για την επιλογή του ψηφίου εισόδου που θα μεταφερθεί στην έξοδο, οι πολυπλέκτες περιλαμβάνουν N πρόσθετες εισόδους, που αναφέρονται ως είσοδοι επιλογής.

$$y = s_1' s_0' x_0 + s_1' s_0 x_1 + s_1 s_0' x_2 + s_1 s_0 x_3$$

s_1	s_0	y
0	0	x_0
0	1	x_1
1	0	x_2
1	1	x_3





Σύνθεση πολυπλεκτών με απλούστερους πολυπλέκτες

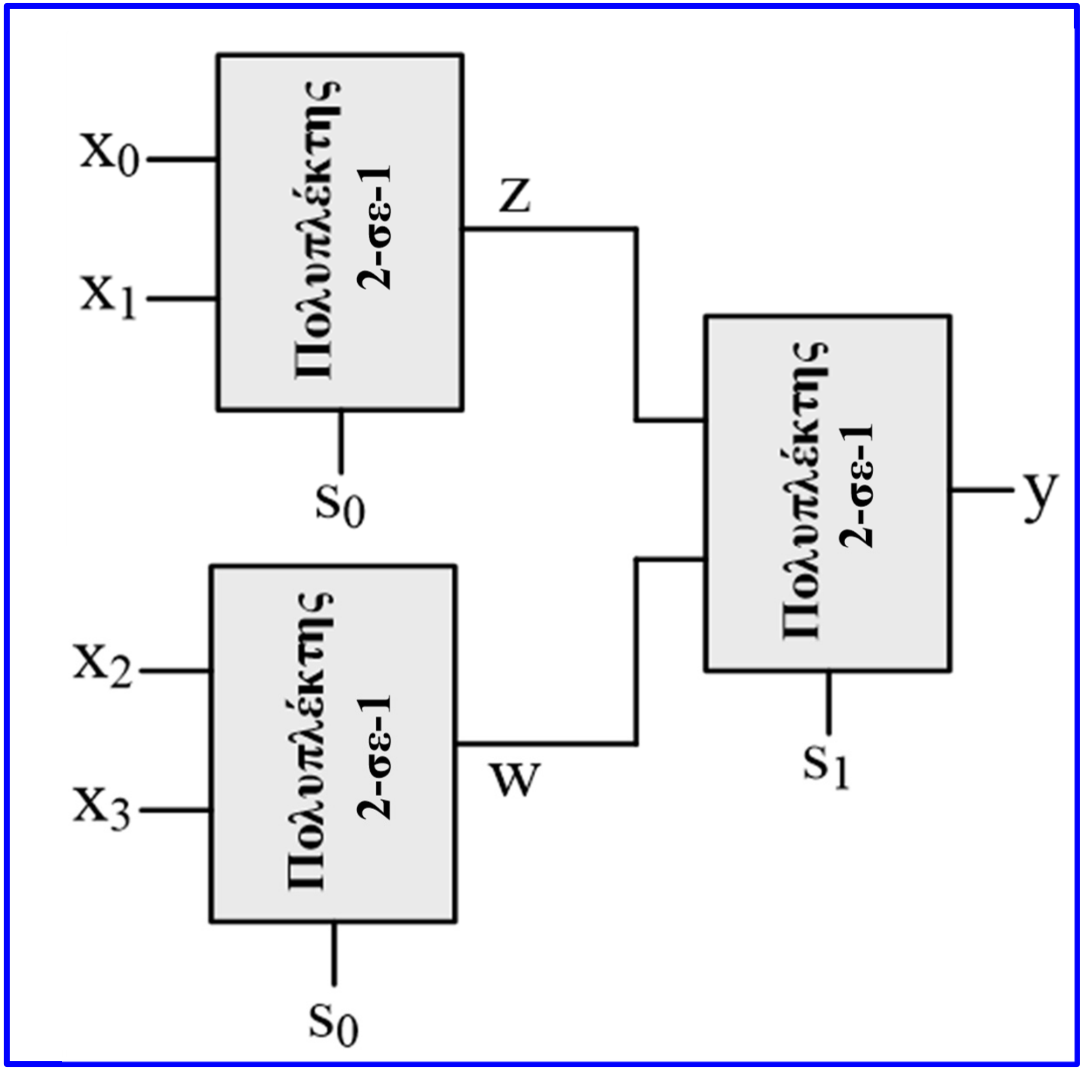
- Μπορούμε να συνθέσουμε πολυπλέκτες πολλών εισόδων με μικρότερους πολυπλέκτες.
- Για παράδειγμα, μπορούμε να υλοποιήσουμε έναν πολυπλέκτη 4-σε-1 με πολυπλέκτες 2-σε-1, αρκεί να μετασχηματίσουμε κατάλληλα τη λογική έκφραση της εξόδου ενός πολυπλέκτη 4-σε-1:

$$y = s'_1 s'_0 x_0 + s'_1 s_0 x_1 + s_1 s'_0 x_2 + s_1 s_0 x_3 = s'_1(s'_0 x_0 + s_0 x_1) + s_1(s'_0 x_2 + s_0 x_3)$$

$= s'_1 z + s_1 w$, όπου: $z = s'_0 x_0 + s_0 x_1$ και $w = s'_0 x_2 + s_0 x_3$

- Παρατηρούμε ότι z είναι η έξοδος ενός πολυπλέκτη 2-σε-1 με εισόδους δεδομένων x_0 και x_1 και είσοδο επιλογής s_0.
- Ομοίως, w είναι η έξοδος ενός πολυπλέκτη 2-σε-1 με εισόδους δεδομένων x_2 και x_3 και είσοδο επιλογής s_0.
- Τέλος, y είναι η έξοδος ενός πολυπλέκτη 2-σε-1 με εισόδους δεδομένων z και w (που είναι έξοδοι των 2 προηγούμενων) και είσοδο επιλογής s_1.

Σύνθεση πολυπλεκτών με απλούστερους πολυπλέκτες



Άσκηση 17

Σύνθεση πολυπλέκτη 8-σε-1 με πολυπλέκτες 4-σε-1 και 2-σε-1

Η αλγεβρική έκφραση που διέπει τη λειτουργία ενός πολυπλέκτη 8-σε-1 με εισόδους δεδομένων $\boldsymbol{A_0}$ έως $\boldsymbol{A_7}$, εισόδους επιλογής $\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$ και έξοδο $\boldsymbol{B}$, έχει ως εξής:

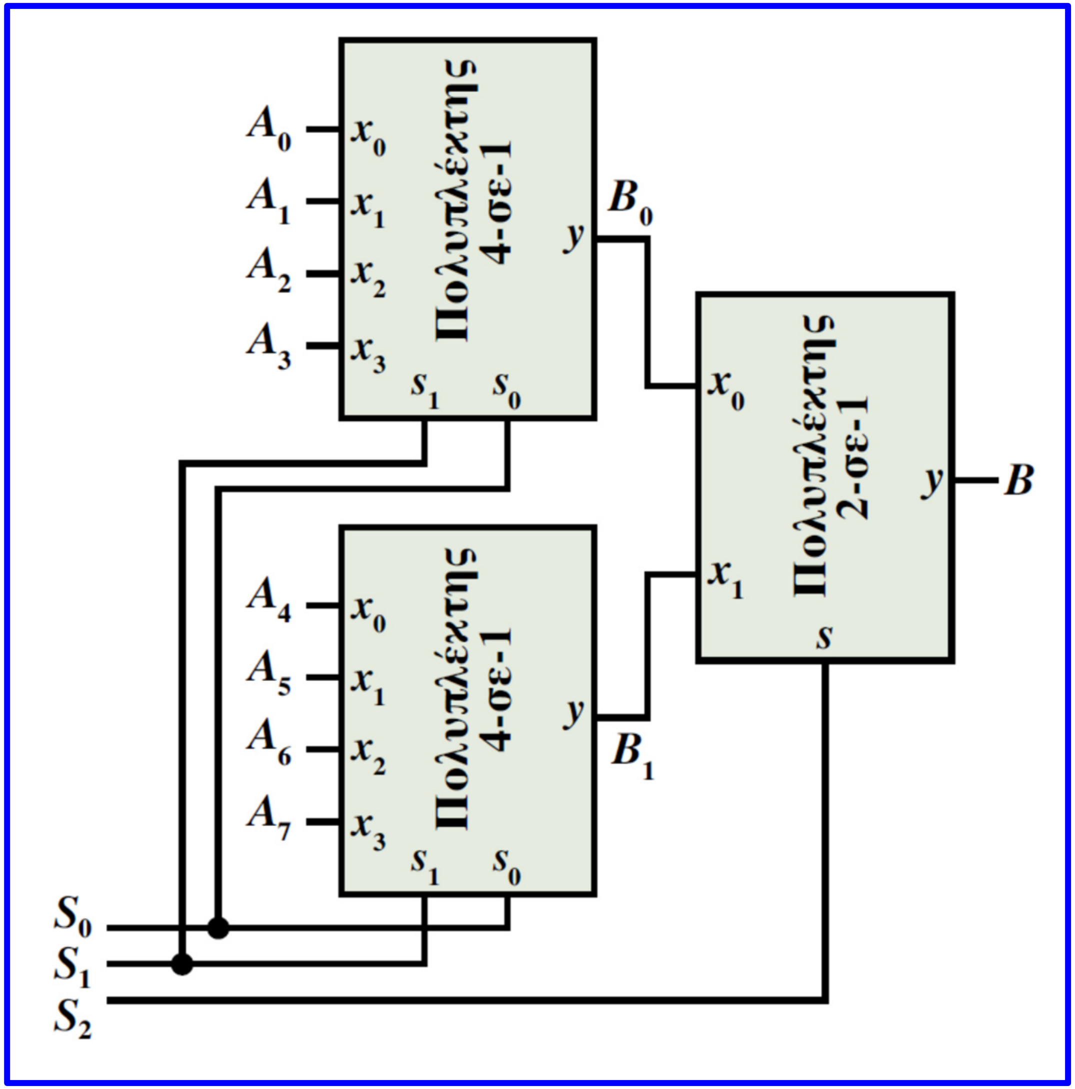
$$B = S'_2 S'_1 S'_0 A_0 + S'_2 S'_1 S_0 A_1 + S'_2 S_1 S'_0 A_2 + S'_2 S_1 S_0 A_3 + S_2 S'_1 S'_0 A_4 + S_2 S'_1 S_0 A_5 + S_2 S_1 S'_0 A_6 + S_2 S_1 S_0 A_7$$

Εφαρμόζοντας στην παραπάνω σχέση τη μέθοδο της παραγοντοποίησης ως προς την πιο σημαντική είσοδο επιλογής, λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση:

$$B = S'_2 (S'_1 S'_0 A_0 + S'_1 S_0 A_1 + S_1 S'_0 A_2 + S_1 S_0 A_3) + S_2 (S'_1 S'_0 A_4 + S'_1 S_0 A_5 + S_1 S'_0 A_6 + S_1 S_0 A_7)$$

$$\Rightarrow B = S'_2 B_0 (A_0, A_1, A_2, A_3, S_0, S_1) + S_2 B_1 (A_4, A_5, A_6, A_7, S_0, S_1)$$

Άσκηση 17



Πολυπλέκτης 4-σε-1
A_0
A_1
A_2
A_3
x_0
x_1
x_2
x_3
s_1
s_0
y
B_0
Πολυπλέκτης 4-σε-1
A_4
A_5
A_6
A_7
x_0
x_1
x_2
x_3
s_1
s_0
y
B_1
Πολυπλέκτης 2-σε-1
x_0
x_1
s
y
B
S_0
S_1
S_2

Υλοποίηση συναρτήσεων με πολυπλέκτη

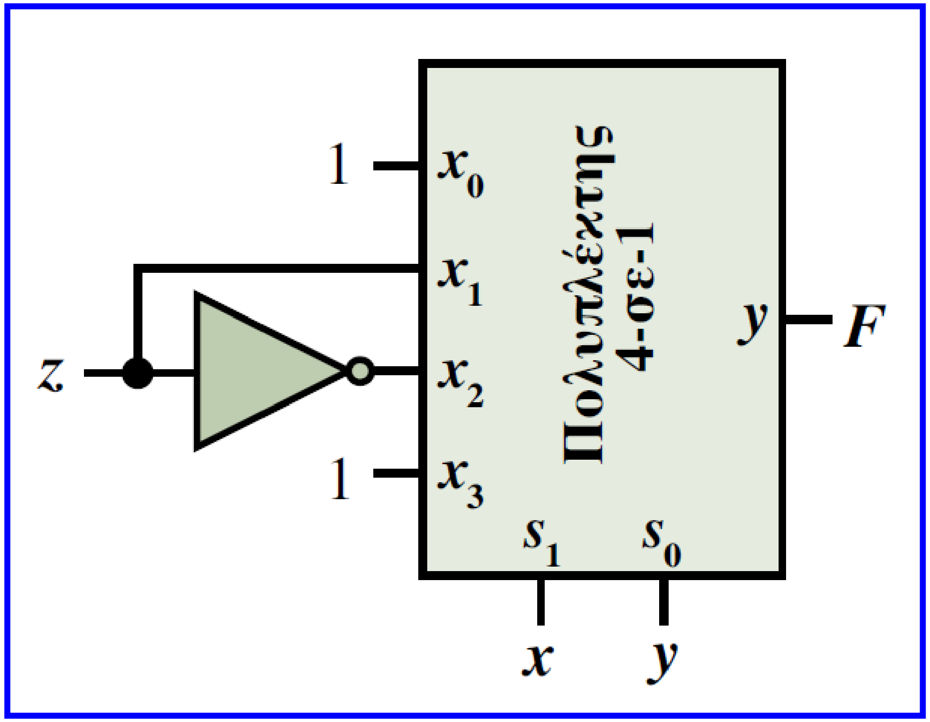
Μπορούμε να παράγουμε στην έξοδο ενός πολυπλέκτη το άθροισμα ελαχιστόρων μιας λογικής συνάρτησης N μεταβλητών, με έναν πολυπλέκτη 2^{N-1}-σε-1, τροφοδοτώντας τις (N – 1) εισόδους επιλογής με ισάριθμες μεταβλητές της συνάρτησης και χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή που απομένει για την τροφοδότηση εισόδου ή εισόδων δεδομένων.

Άσκηση 18

Υλοποίηση της συνάρτησης **F(x,y,z) = x′y′ + xz′ + yz** με τον απλούστερο δυνατό πολυπλέκτη και μία λογική πύλη.

$$F(x,y,z) = x'y' + xz' + yz$$

x	y	z	F	
0	0	0	1	$F = 1$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$F = z$
0	1	1	1	
1	0	0	1	$F = z'$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$F = 1$
1	1	1	1	



Θεώρημα ανάπτυξης συναρτήσεων (Shannon)

- Κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί ως προς μία από τις μεταβλητές που συμμετέχουν σε αυτήν, ως εξής:

$$\boxed{F(x, y\ldots, w) = xF(1, y,\ldots, w) + x'F(0, y,\ldots, w)}$$

- Οι συναρτήσεις F(1, y,…, w) και F(0, y,…, w) προκύπτουν από τη συνάρτηση F(x, y…, w) για x = 1 και x = 0, αντίστοιχα.

- Ανάπτυξη λογικής συνάρτησης 3 μεταβλητών:

$$\boxed{\begin{aligned} F(x,y,z) &= xF(1,y,z) + x'F(0,y,z) \\ &= x[yF(1,1,z) + y'F(1,0,z)] + x'[yF(0,1,z) + y'F(0,0,z)] \end{aligned}}$$

Υλοποίηση συναρτήσεων με πολυπλέκτες 2-σε-1

- Από την ανάπτυξη μιας λογικής συνάρτησης σύμφωνα με το θεώρημα Shannon, προκύπτει μια μορφή της συνάρτησης που είναι άμεσα υλοποιήσιμη με πολυπλέκτες 2-σε-1:

$$F(x, y, z) = x[yF(1, 1, z) + y'F(1, 0, z)] + x'[yF(0, 1, z) + y'F(0, 0, z)]$$

- Οι συναρτήσεις στις αγκύλες υλοποιούνται με έναν πολυπλέκτη 2-σε-1 η καθεμία.
- Η είσοδος επιλογής των δύο πολυπλεκτών τροφοδοτείται με τη μεταβλητή y.
- Οι είσοδοι δεδομένων τους τροφοδοτούνται με τις συναρτήσεις $F(1, 1, z)$, $F(1, 0, z)$, $F(0, 1, z)$, $F(0, 0, z)$, οι οποίες ισούνται με 0 ή 1 ή z ή z'.
- Οι έξοδοι των δύο πολυπλεκτών τροφοδοτούνται στις εισόδους δεδομένων ενός τρίτου πολυπλέκτη 2-σε-1 με είσοδο επιλογής τη μεταβλητή x.

Υλοποίηση συναρτήσεων με πολυπλέκτες 2-σε-1

- Με τη προαναφερόμενη μεθοδολογία, μπορεί να υλοποιηθεί οποιαδήποτε συνάρτηση Ν μεταβλητών, χρησιμοποιώντας Ν – 1 επίπεδα πολυπλεκτών 2-σε-1.

- Στο πρώτο επίπεδο συμμετέχουν έως 2^{N-2} πολυπλέκτες 2-σε-1, με το πλήθος τους να υποδιπλασιάζεται σε κάθε επόμενο επίπεδο, έως το τελευταίο επίπεδο, το οποίο περιλαμβάνει έναν πολυπλέκτη 2-σε-1.

- Στην περίπτωση που από το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης προκύπτει ότι οι είσοδοι δεδομένων ενός πολυπλέκτη 2-σε-1 τροφοδοτούνται με την ίδια λογική τιμή, μεταβλητή ή συμπληρωματική μορφή μεταβλητής, ο αντίστοιχος πολυπλέκτης του 1ου επιπέδου απαλείφεται, οδηγώντας σε πιο απλό κύκλωμα.

Άσκηση 19

Υλοποίηση της λογικής συνάρτησης αποκλειστικού-OR (XOR) 3 μεταβλητών με πολυπλέκτες 2-σε-1 και αντιστροφείς.

$F(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$: περιττή συνάρτηση (λαμβάνει τιμή 1 όταν το πλήθος των μεταβλητών της με τιμή 1 είναι περιττό, διαφορετικά ισούται με 0).

$$F(x, y, z) = x[yF(1, 1, z) + y'F(1, 0, z)] + x'[yF(0, 1, z) + y'F(0, 0, z)]$$

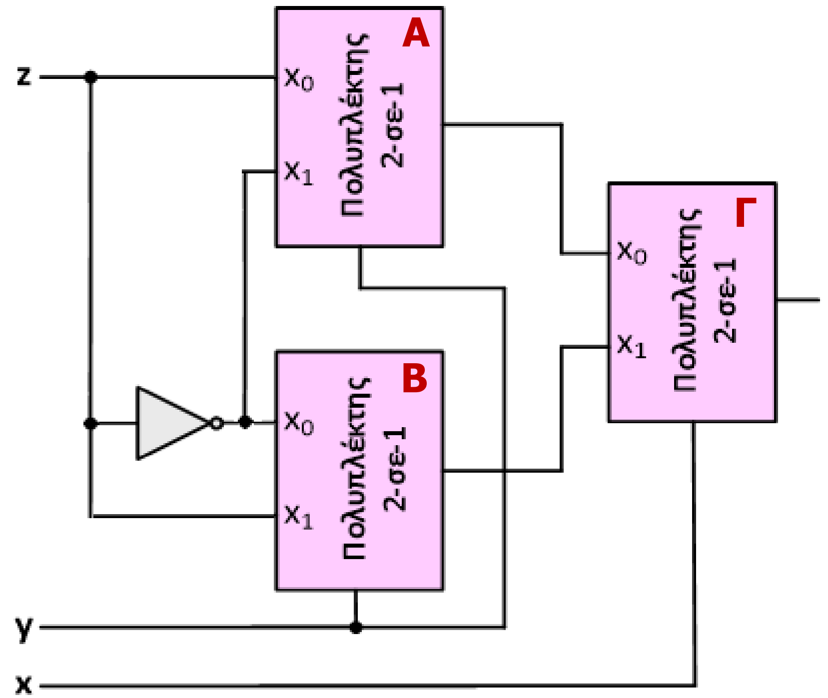
x	y	z	F	
0	0	0	0	F = z
0	0	1	1	
0	1	0	1	F = z′
0	1	1	0	
1	0	0	1	F = z′
1	0	1	0	
1	1	0	0	F = z
1	1	1	1	

$\Rightarrow F(0, 0, z) = \mathbf{z}$

$\Rightarrow F(0, 1, z) = \mathbf{z'}$

$\Rightarrow F(1, 0, z) = \mathbf{z'}$

$\Rightarrow F(1, 1, z) = \mathbf{z}$

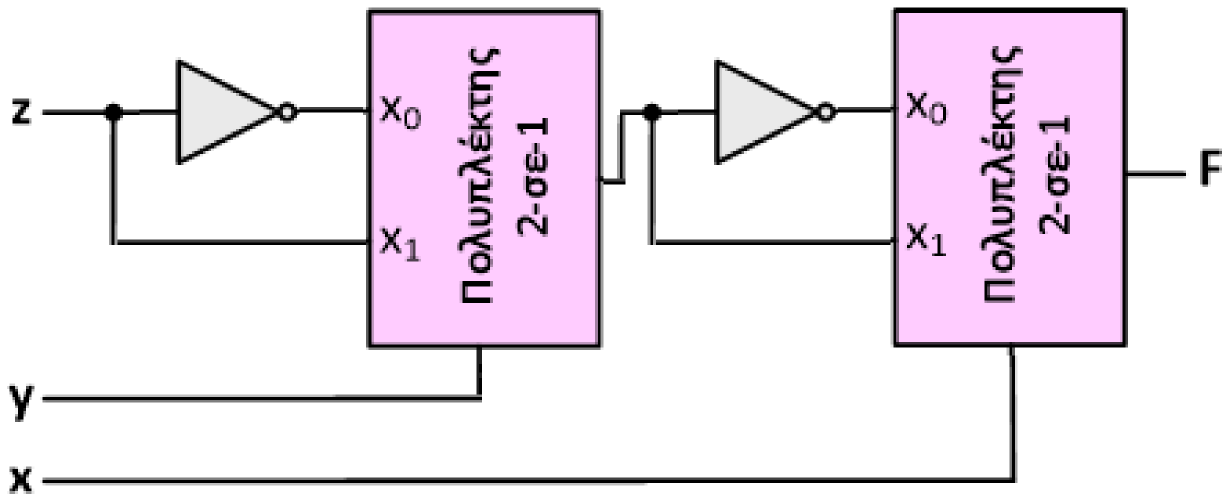


$$F(x, y, z) = x(y\mathbf{z} + y'\mathbf{z'}) + x'(y\mathbf{z'} + y'\mathbf{z})$$

Άσκηση 19

Στην προηγούμενη υλοποίηση παρατηρούμε ότι όταν η έξοδος του πολυπλέκτη A λαμβάνει τιμή z, η έξοδος του πολυπλέκτη B λαμβάνει τιμή z′ και αντιστρόφως.

Επομένως, ο ένας από αυτούς τους δύο πολυπλέκτες μπορεί να απαλειφθεί και αντ’ αυτού στην είσοδο του πολυπλέκτη Γ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας αντιστροφέας.



Άσκηση 20

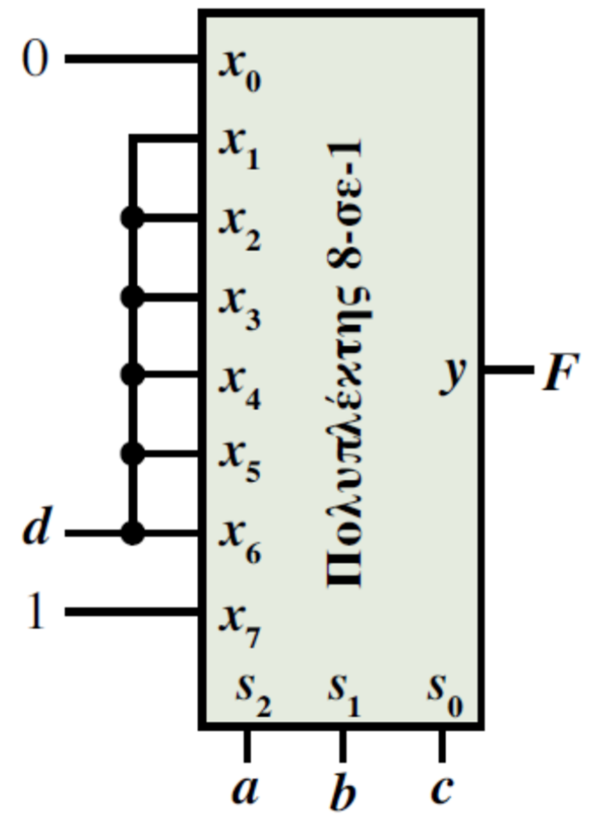
Στη λήψη αποφάσεων ενός δικαστηρίου συμμετέχουν τέσσερις τακτικοί δικαστές, οι κ.κ. Αμφίγνωμος (***a***), Βαρυποινίτης (***b***), Γνωμοδότης (***c***) και Δεδικασμένος (***d***). Η τελική απόφαση περί αθωότητας ή ενοχής λαμβάνεται κατά πλειοψηφία, εκτός από τις περιπτώσεις ισοψηφίας, για τις οποίες λαμβάνεται ως διπλή (λόγω μακρόχρονης εμπειρίας) η ψήφος του κ. Δεδικασμένου, ώστε να ληφθεί η τελική απόφαση. Κάθε δικαστής έχει στην έδρα του ένα διακόπτη δύο θέσεων 0 και 1, οι οποίες αντιστοιχούν στις λογικές τιμές 0 και 1, αντίστοιχα. Όταν η απόφασή του είναι αθωωτική, ο δικαστής θέτει το διακόπτη στη θέση 1, ενώ όταν είναι καταδικαστική, θέτει το διακόπτη στη θέση 0. Να συνθέσετε συνδυαστικό κύκλωμα το οποίο να υλοποιεί τη λογική συνάρτηση (***F***), η οποία λαμβάνει λογική τιμή 1, όταν η τελική απόφαση του δικαστηρίου είναι αθωωτική, και λογική τιμή 0, όταν η τελική απόφαση είναι καταδικαστική. Η σύνθεση του κυκλώματος θα πρέπει να γίνει με δύο τρόπους, (α) με ένα μόνο πολυπλέκτη και (β) μόνο με πολυπλέκτες 2-σε-1. Να συγκρίνετε το κόστος των δύο υλοποιήσεων.

Άσκηση 20

Για την υλοποίηση της συνάρτησης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έναν πολυπλέκτη 2^{n-1}-σε-1, δηλαδή έναν πολυπλέκτη 8-σε-1, αφού πρόκειται για συνάρτηση 4 μεταβλητών. Τις εισόδους επιλογής του πολυπλέκτη πρέπει να τις τροφοδοτήσετε με τις 3 πιο σημαντικές μεταβλητές εισόδου ***a***, ***b*** και ***c***. Στις εισόδους δεδομένων πρέπει να θέσετε την κατάλληλη λογική τιμή ή την κατάλληλη μορφή της λιγότερο σημαντικής μεταβλητής εισόδου (***d***) της συνάρτησης, ανάλογα με την τιμή που λαμβάνει η συνάρτηση για καθέναν από τους 8 συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών ***a***, ***b*** και ***c***.

Άσκηση 20

a	b	c	d	F	
0	0	0	0	0	$F = 0$
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	$F = d$
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	0	$F = d$
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	0	$F = d$
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	$F = d$
1	0	0	1	1	
1	0	1	0	0	$F = d$
1	0	1	1	1	
1	1	0	0	0	$F = d$
1	1	0	1	1	
1	1	1	0	1	$F = 1$
1	1	1	1	1	



Άσκηση 20

Για την υλοποίηση της συνάρτησης με πολυπλέκτες 2-σε-1, θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα ανάπτυξης συναρτήσεων. Η αλγεβρική μορφή της συνάρτησης προκύπτει εύκολα από τον προηγούμενο πίνακα και είναι $\boldsymbol{F} = \Sigma(3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Shannon, προκύπτει:

$$F(a,b,c,d) = aF(1,b,c,d) + a'F(0,b,c,d)$$

$$= a[bF(1,1,c,d) + b'(1,0,c,d)] + a'[bF(0,1,c,d) + b'(0,0,c,d)]$$

$$= a\{b[cF(1,1,1,d) + c'F(1,1,0,d)] + b'[cF(1,0,1,d) + c'F(1,0,0,d)]\}$$

$$+ a'\{b[cF(0,1,1,d) + c'F(0,1,0,d)] + b'[cF(0,0,1,d) + c'F(0,0,0,d)]\}$$

Άσκηση 20

Οι συναρτήσεις που περικλείονται στις αγκύλες του τελικού αναπτύγματος μπορούν να υλοποιηθούν με τέσσερις (δηλαδή 2^{n-2}) πολυπλέκτες 2-σε-1, η είσοδος επιλογής των οποίων θα πρέπει να τροφοδοτηθεί με τη μεταβλητή $\boldsymbol{c}$. Οι είσοδοι δεδομένων των πολυπλεκτών αυτών, τις οποίες προσδιορίζετε εύκολα με βάση την τελευταία στήλη του προηγούμενου πίνακα ή από την αλγεβρική μορφή της συνάρτησης, είναι:

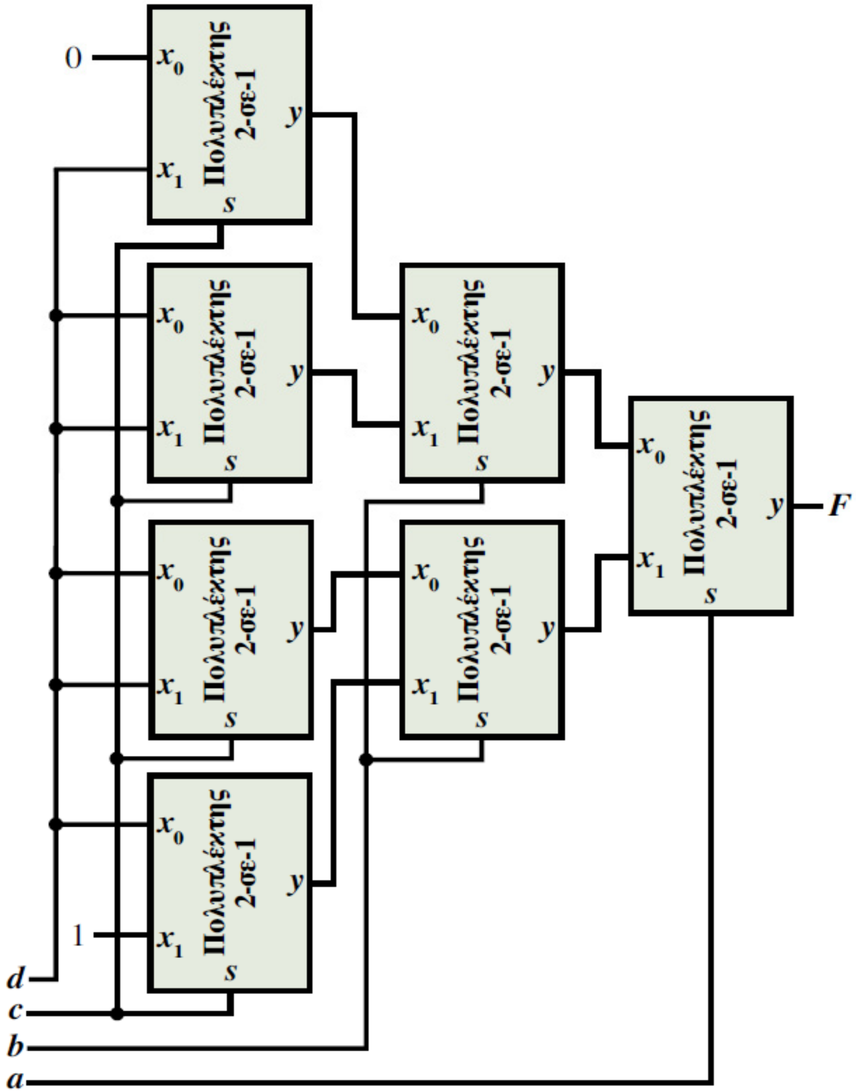
$$\boldsymbol{F}(0,0,0,\boldsymbol{d}) = 0, \boldsymbol{F}(0,0,1,\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}, \boldsymbol{F}(0,1,0,\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{F}(0,1,1,\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}, \boldsymbol{F}(1,0,0,\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}, \boldsymbol{F}(1,0,1,\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}, \boldsymbol{F}(1,1,0,\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d} \text{ και } \boldsymbol{F}(1,1,1,\boldsymbol{d}) = 1.$$

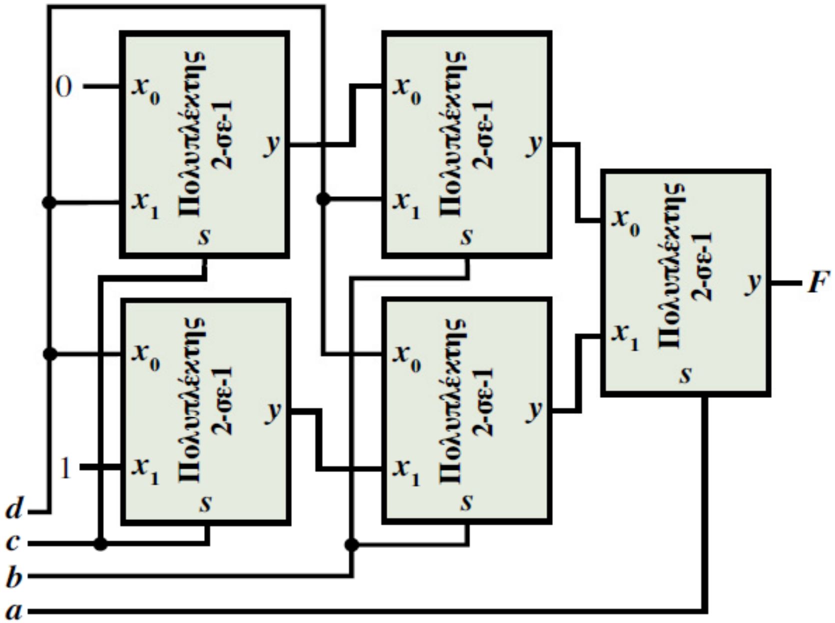
Άσκηση 20

Στη συνέχεια, τροφοδοτείτε ανά δύο τις εξόδους των πολυπλεκτών αυτών, στις εισόδους δεδομένων δύο πολυπλεκτών 2-σε-1 με είσοδο επιλογής τη μεταβλητή ***b***. Στον πολυπλέκτη 2-σε-1 του τελευταίου επιπέδου θα πρέπει να θέσετε ως είσοδο επιλογής τη μεταβλητή ***a***, όπως υποδεικνύεται από το ανάπτυγμα της συνάρτησης των τεσσάρων μεταβλητών. Παρατηρήστε ότι ο δεύτερος και ο τρίτος πολυπλέκτης του πρώτου επιπέδου είναι περιττοί, αφού σε καθέναν από αυτούς οι είσοδοι δεδομένων τροφοδοτούνται με την ίδια μεταβλητή (***d***). Συνεπώς, μπορείτε να καταλήξετε στην οικονομικότερη υλοποίηση.

Άσκηση 20



0
x_0
x_1
s
y
Πολυπλέκτης 2-σε-1
1
d
c
b
a
F

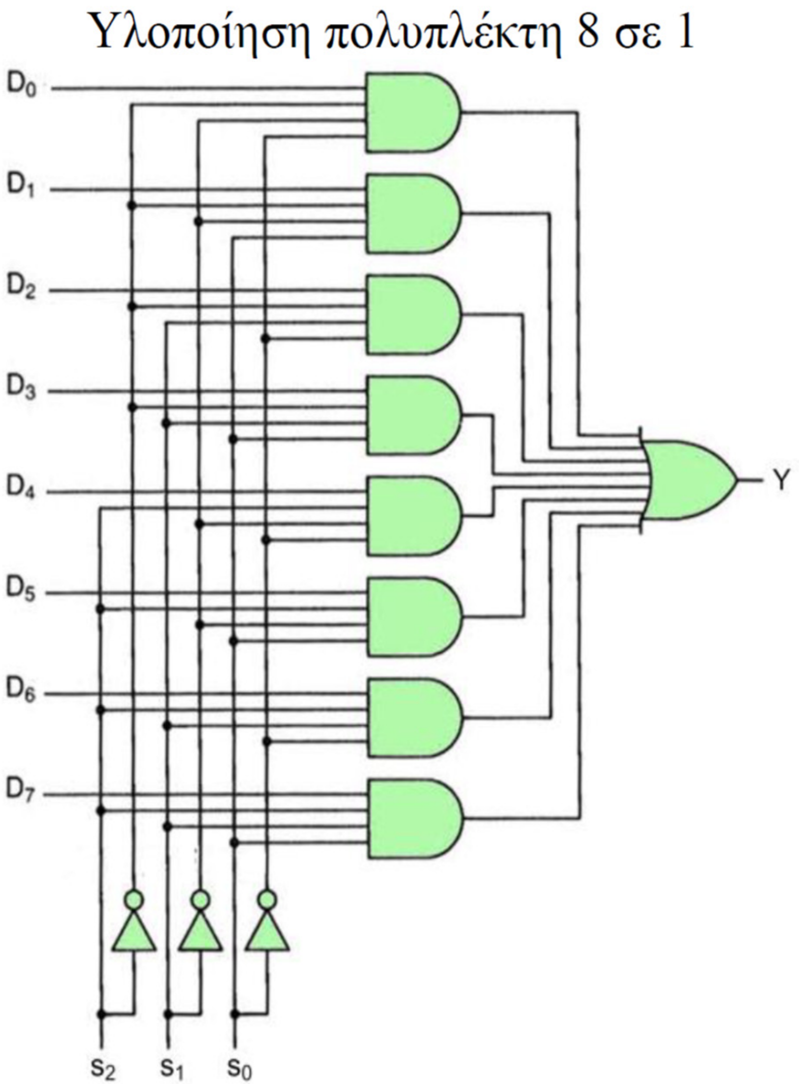


0
1
x_0
x_1
s
y
Πολυπλέκτης 2-σε-1
d
c
b
a
F

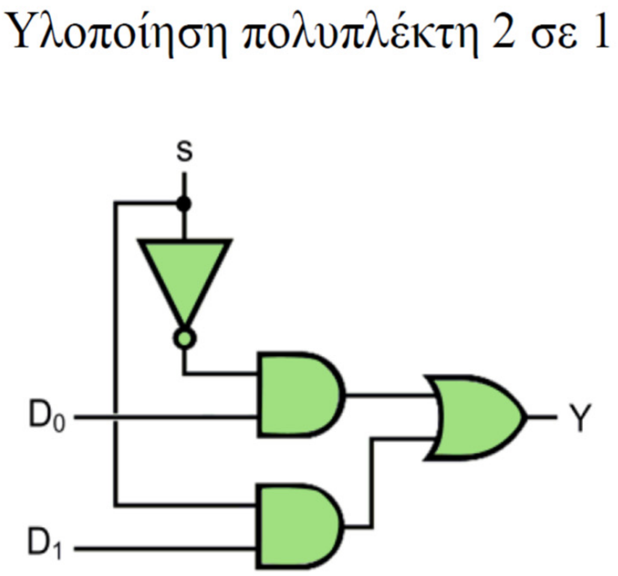
Άσκηση 20

Για την ενός πολυπλέκτη 8-σε-1 απαιτούνται τρεις αντιστροφείς (για την εξαγωγή των συμπληρωματικών μορφών των εισόδων επιλογής), οκτώ πύλες AND 4 εισόδων και μία πύλη OR 8 εισόδων, συνεπώς το κόστος της 1ης υλοποίησης είναι 55. Για την υλοποίηση ενός πολυπλέκτη 2-σε-1 απαιτείται ένας αντιστροφέας, δύο πύλες AND 2 εισόδων και μία πύλη OR 2 εισόδων, με αποτέλεσμα, αφού στη δεύτερη υλοποίηση συμμετέχουν πέντε τέτοιοι πολυπλέκτες, το κόστος της να είναι 55, δηλαδή είναι ίδιο με εκείνο της πρώτης υλοποίησης.

Άσκηση 20



Υλοποίηση πολυπλέκτη 8 σε 1
D0
D1
D2
D3
D4
D5
D6
D7
Y
S2
S1
S0



Υλοποίηση πολυπλέκτη 2 σε 1
S
D0
D1
Y

Άσκηση 21

Σχεδιασμός κυκλώματος υλοποίησης της λογικής συνάρτησης

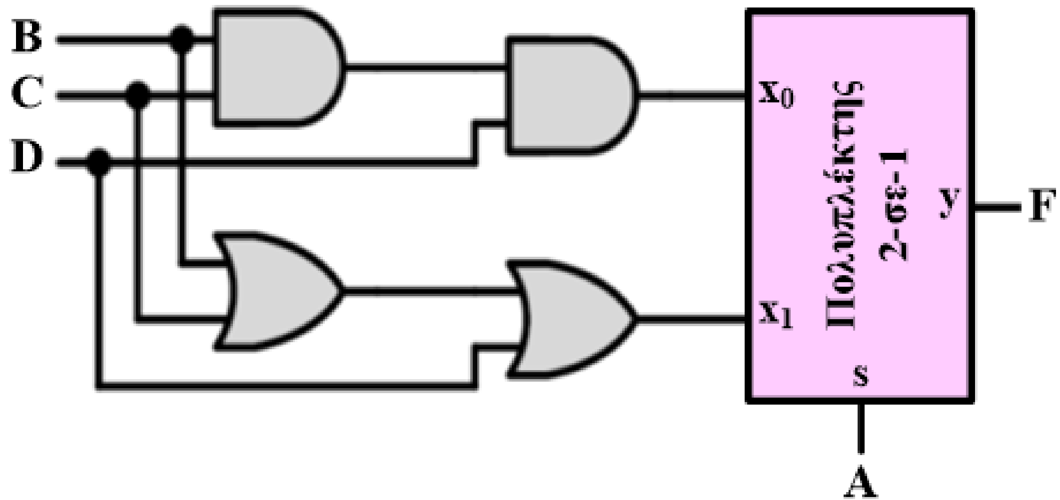
$$F = \Sigma\,(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15),$$

το οποίο περιλαμβάνει έναν πολυπλέκτη 2-σε-1 και λογικές πύλες AND και OR δύο εισόδων.

Άσκηση 21

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

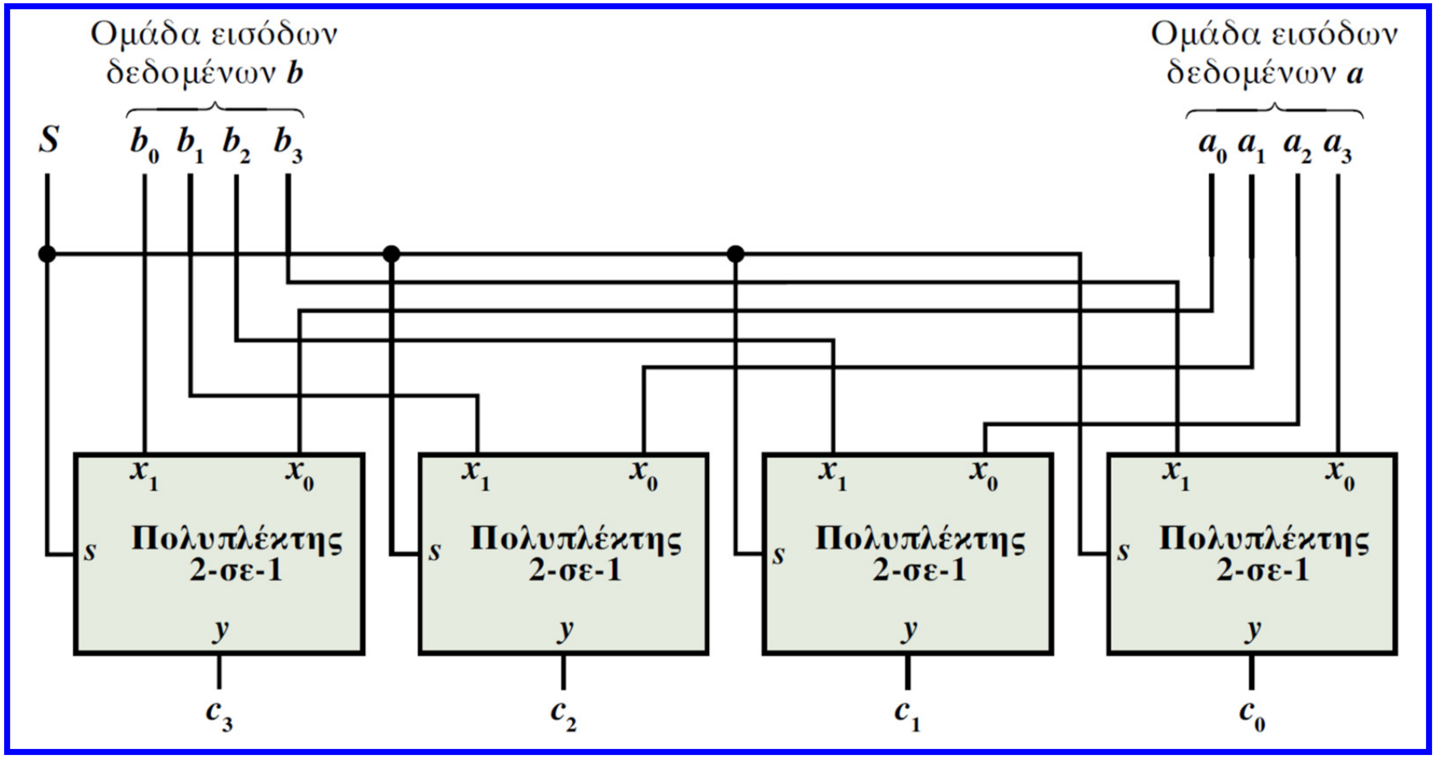
Από τον πίνακα αλήθειας προκύπτει ότι:
όταν A = 0 τότε F = BCD, ενώ
όταν A = 1 τότε F = B + C + D.
Επομένως, τροφοδοτώντας την είσοδο επιλογής ενός πολυπλέκτη 2-σε-1 με τη μεταβλητή A, υλοποιούμε το ζητούμενο κύκλωμα, χρησιμοποιώντας πύλες AND και OR δύο εισόδων:



Πολυπλέκτες επιλογής πολλαπλών εισόδων

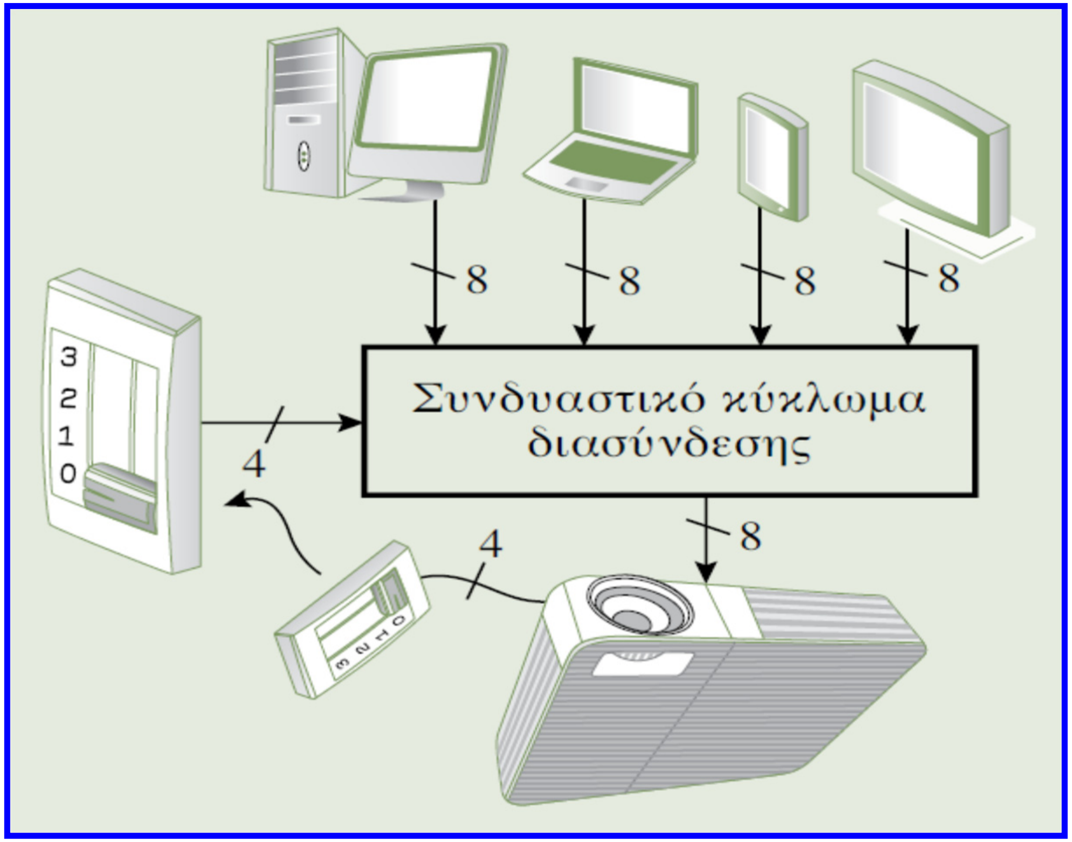
- Σε αρκετές εφαρμογές, απαιτείται επιλογή ομάδας δεδομένων.
- Αυτό γίνεται με πολυπλέκτες επιλογής πολλαπλών εισόδων που συνδυάζουν απλούς πολυπλέκτες (τόσους όσες και οι εισοδοι κάθε ομάδας) με κοινές εισόδους επιλογής και πλήθος εισόδων δεδομένων όμοιο με το πλήθος των ομάδων δεδομένων.

Τετραπλός πολυπλέκτης 2-σε-1



Άσκηση 22

Μια συσκευή προβολής (projector) έχει τη δυνατότητα λήψης εικόνας από τέσσερις πηγές (επιτραπέζιο υπολογιστή, φορητό υπολογιστή, ταμπλέτα και τηλεόραση), αλλά μπορεί να προβάλει κάθε φορά την εικόνα μιας μόνο πηγής.



Άσκηση 22

Καθεμία από τις πηγές διαθέτει οκτώ γραμμές εξόδου, από τις οποίες μπορεί να ληφθεί ψηφιακά κωδικοποιημένη εικόνα. Η συσκευή προβολής διαθέτει οκτώ γραμμές εισόδου, στις οποίες λαμβάνει την εικόνα που πρόκειται να προβάλει. Είναι, επίσης, εφοδιασμένη με ένα διακόπτη τεσσάρων θέσεων, με τον οποίο κάθε φορά επιλέγεται η πηγή της οποίας η εικόνα θα προβληθεί. Ο διακόπτης διαθέτει τέσσερις εξόδους, από τις οποίες κάθε φορά μονάχα μία μπορεί να είναι ενεργή (δηλαδή να λαμβάνει λογική τιμή 1). Να συνθέσετε το συνδυαστικό κύκλωμα της συσκευής προβολής, το οποίο διασυνδέει τη συσκευή προβολής (έξοδοι διακόπτη και είσοδοι εικόνας) με τις εξόδους των δύο υπολογιστών, της ταμπλέτας και της τηλεόρασης

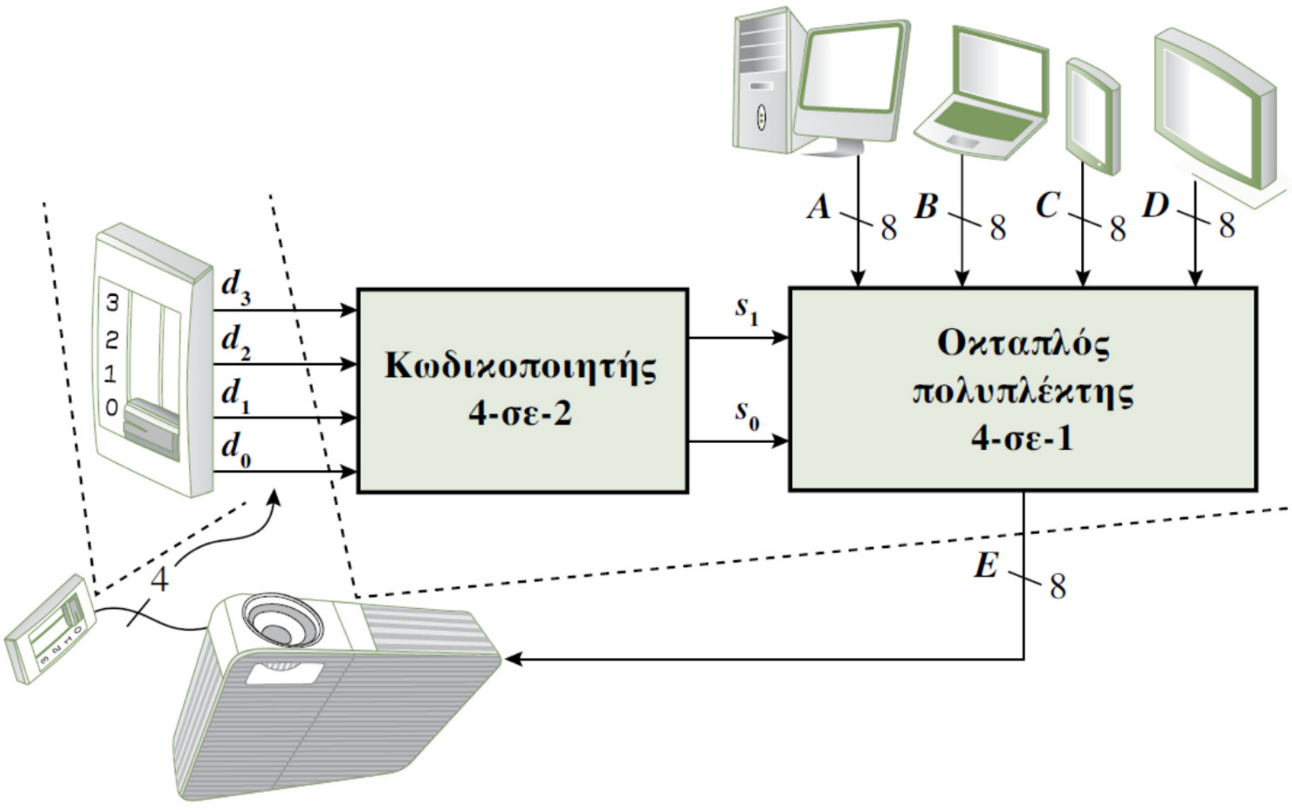
Άσκηση 22

Από την περιγραφή της εφαρμογής που πρέπει να αντιμετωπίσετε στη δραστηριότητα αυτή, προκύπτει ότι το υπό σύνθεση συνδυαστικό κύκλωμα θα πρέπει να έχει τη δυνατότητα επιλογής μιας από τις τέσσερις οκτάδες γραμμών εξόδου των πηγών εικόνας, ανάλογα με την πηγή που επιλέγει ο χρήστης μέσω του διακόπτη. Η δυνατότητα αυτή παρέχεται από έναν πολυπλέκτη επιλογής πολλαπλών εισόδων και στην εν λόγω εφαρμογή από έναν οκταπλό πολυπλέκτη 4-σε-1. Μπορείτε να συνθέσετε τον πολυπλέκτη αυτόν συνδυάζοντας οκτώ πολυπλέκτες 4-σε-1 με κοινές εισόδους επιλογής.

Ο πολυπλέκτης αυτός θα λαμβάνει στις εισόδους δεδομένων του τέσσερις ομάδες οκτώ ψηφίων (μία από κάθε πηγή), ώστε να μεταφέρει μία από αυτές στις οκτώ γραμμές εισόδου της συσκευής προβολής. Η λειτουργία του οκταπλού πολυπλέκτη 4-σε-1 προϋποθέτει δύο εισόδους επιλογής (έστω s_0 και s_1), οι τιμές των οποίων εξαρτώνται από τις λογικές τιμές των τεσσάρων εξόδων του διακόπτη της συσκευής προβολής (έστω d_0, d_1, d_2 και d_3).

Άσκηση 22

Μπορείτε, λοιπόν, να τροφοδοτήσετε τις εισόδους επιλογής του πολυπλέκτη με τις εξόδους ενός κωδικοποιητή 4-σε-2, ο οποίος λαμβάνει στις εισόδους του τις τέσσερις εξόδους του διακόπτη.

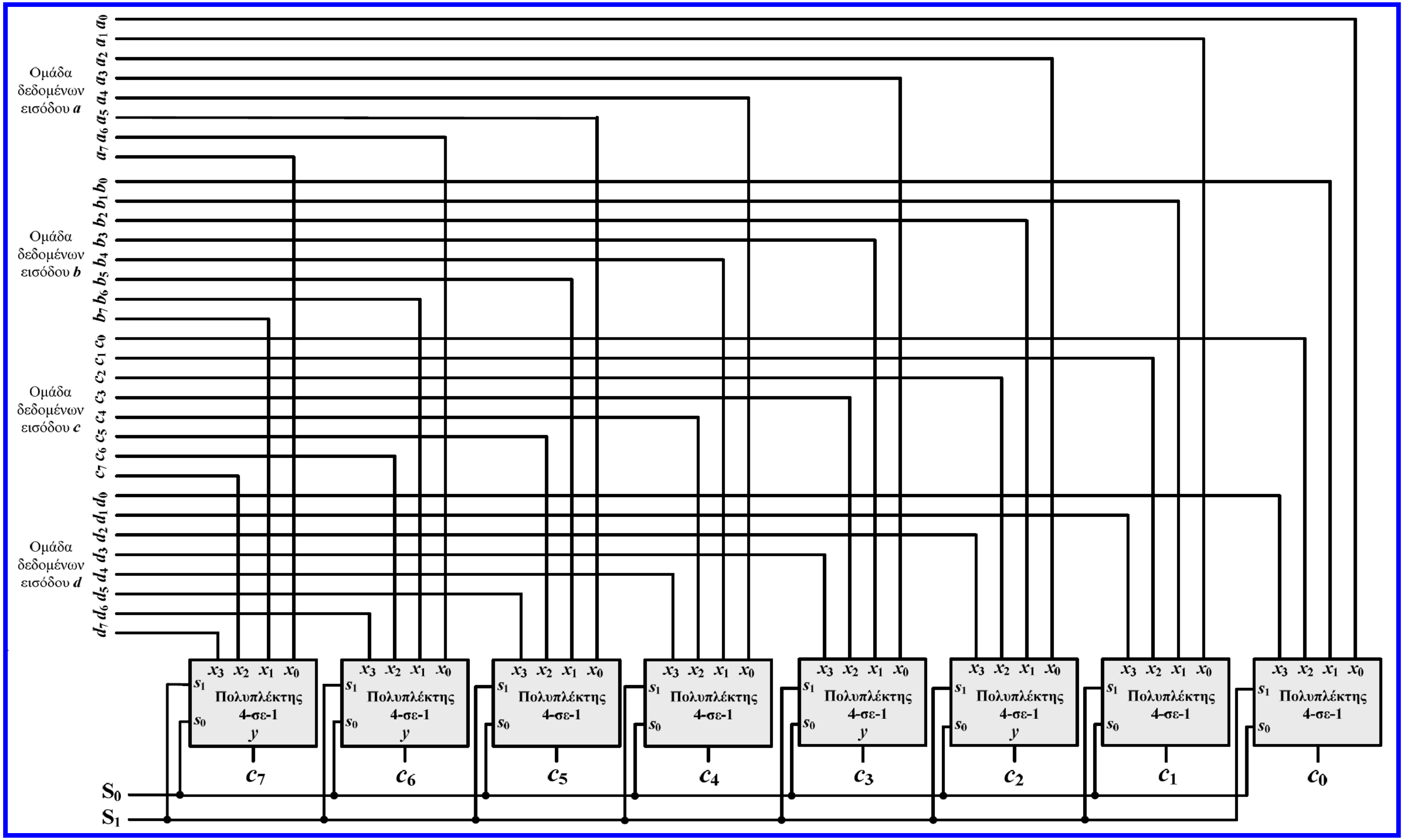


Άσκηση 22

Παρατηρήστε, για παράδειγμα, ότι όταν ο διακόπτης τεθεί από το χρήστη στη θέση 2, ενεργοποιείται η τρίτη έξοδος του διακόπτη (δηλαδή $d_2 = 1$) και οι γραμμές επιλογής s_1 και s_0 του πολυπλέκτη τροφοδοτούνται με λογικές τιμές 1 και 0, αντίστοιχα, ώστε ο πολυπλέκτης να μεταφέρει τις γραμμές εξόδου της τρίτης πηγής (ταμπλέτας) στη συσκευή προβολής.

Άσκηση 22

Οκταπλός πολυπλέκτης 4-σε-1



Άσκηση 23

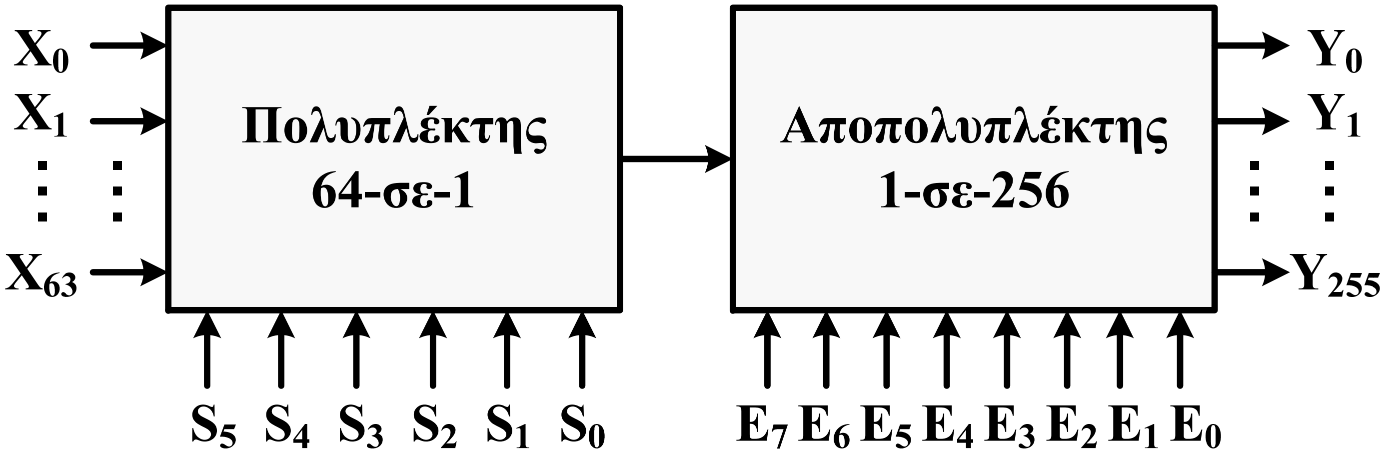
Επιθυμούμε να δρομολογούμε επιλεκτικά με κατάλληλο πολυπλέκτη 50 σήματα (X_0 έως X_{49}) σε 200 επιλεγόμενες εξόδους (Y_0 έως Y_{199}) ενός κατάλληλου αποπολυπλέκτη.

α) Προσδιορίζουμε το απαραίτητο πλήθος N των γραμμών (εισόδων) επιλογής Si (i = 0 έως N – 1) του πολυπλέκτη και το απαραίτητο πλήθος M των γραμμών (εισόδων) επιλογής Ej (j = 0 έως M – 1) του αποπολυπλέκτη και σχεδιάζουμε το συνοπτικό διάγραμμα διασύνδεσης του πολυπλέκτη με τον αποπολυπλέκτη.

β) Προσδιορίζουμε τους κατάλληλους συνδυασμούς τιμών των εισόδων επιλογής $S_{N-1}S_{N-2}\ldots S_0$ του πολυπλέκτη και των εισόδων επιλογής $E_{M-1}E_{M-2}\ldots E_0$ του αποπολυπλέκτη, για την περίπτωση που επιθυμούμε να δρομολογήσουμε το σήμα εισόδου X_{34} του πολυπλέκτη στην έξοδο Y_{175} του αποπολυπλέκτη.

Άσκηση 23

α) Ένας πολυπλέκτης που διαθέτει N γραμμές (μεταβλητές) επιλογής μπορεί να ελέγξει τη δρομολόγηση στη μοναδική έξοδό του μέχρι 2^N σημάτων εισόδου. Επομένως, για την δρομολόγηση 50 σημάτων εισόδου απαιτούνται 6 γραμμές (είσοδοι) επιλογής, αφού $2^5 = 32 < 50 < 2^6 = 64$, δηλαδή N = 6. Από τις 64 συνολικά εισόδους θα χρησιμοποιούνται μόνο οι 50 πρώτες. Με την ίδια λογική προκύπτει ότι για τον αποπολυπλέκτη απαιτούνται M = 8 είσοδοι επιλογής (αφού $2^7 = 128 < 200 < 2^8 = 256$).



Άσκηση 23

β) Οι κατάλληλοι συνδυασμοί τιμών των μεταβλητών επιλογής S_5, S_4, S_3, S_2, S_1, S_0 του πολυπλέκτη και E_7, E_6, E_5, E_4, E_3, E_2, E_1, E_0 του αποπολυπλέκτη, προκειμένου να πραγματοποιηθεί η επιθυμητή δρομολόγηση, προκύπτουν από την μετατροπή των δεικτών αναφοράς του σήματος εισόδου X_{34} του πολυπλέκτη και της εξόδου Y_{175} του αποπολυπλέκτη, από το δεκαδικό στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα:

$$S_5 S_4 S_3 S_2 S_1 S_0 = 100010 = 34_{10}$$

$$E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 E_0 = 10101111 = 175_{10}$$

Τέλος 5ης ενότητας ασκήσεων