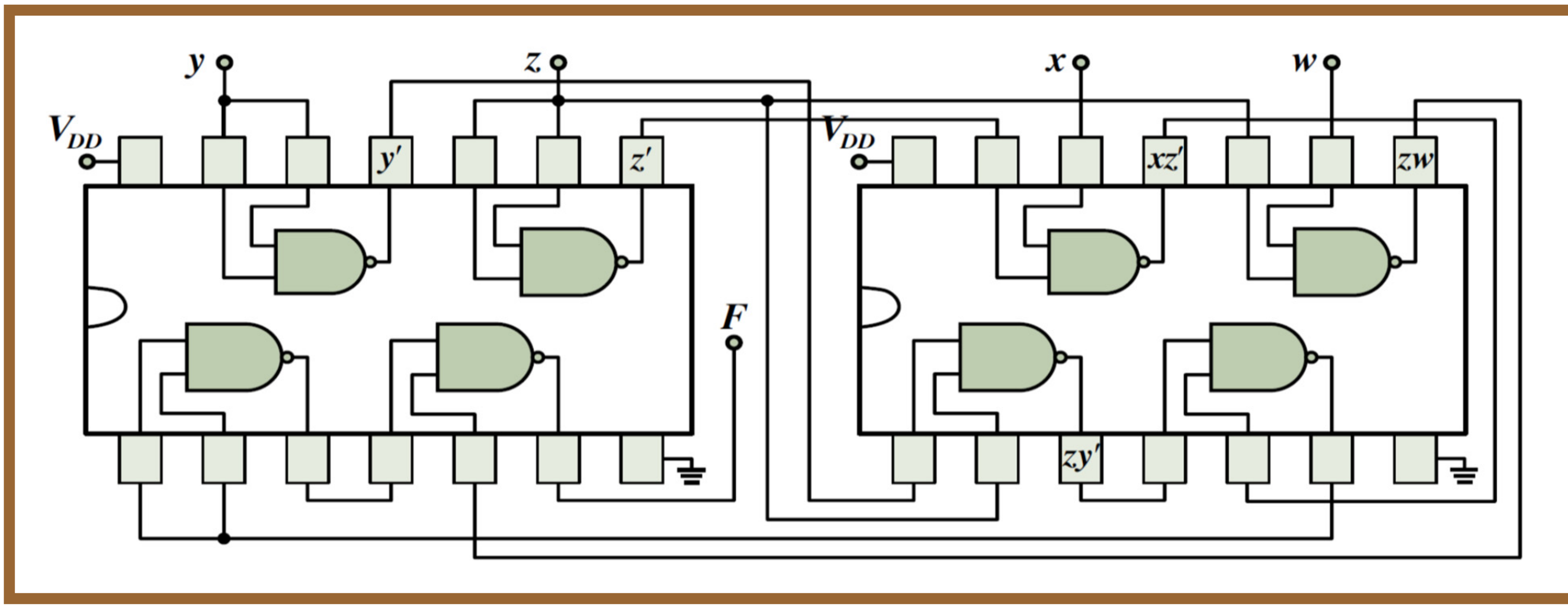
ΨΗΦΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΣΧΕΔΙΑΣΗ

- 2η ενότητα ασκήσεων -



Λάμπρος Μπισδούνης

Καθηγητής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

2η ενότητα ασκήσεων

- Παράσταση αριθμητικών δεδομένων σε διάφορα αριθμητικά συστήματα με έμφαση στο δυαδικό σύστημα
- Εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με δυαδικούς αριθμούς
- Αριθμοί κινητής υποδιαστολής
- Δυαδικοί κώδικες παράστασης δεδομένων

✓ Αριθμητικά συστήματα

Μετατροπή αριθμού με βάση r σε δεκαδικό αριθμό

$$(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m})_r = \sum_{-m}^{n-1} a_i \times r^i =$$

$$a_{n-1}\times r^{n-1} + a_{n-2}\times r^{n-2} + \ldots + a_1\times r^1 + a_0\times r^0 + a_{-1}\times r^{-1} + \ldots + a_{-m}\times r^{-m}$$

όπου: $\boldsymbol{r}$ η βάση του αριθμητικού συστήματος και $\boldsymbol{a_i}$ τα ψηφία του αριθμού που λαμβάνουν τιμές μεταξύ 0 και $\boldsymbol{r}-1$, $\boldsymbol{n}$ το πλήθος των ακέραιων ψηφίων του αριθμού, $\boldsymbol{m}$ το πλήθος των κλασματικών ψηφίων του αριθμού, ενώ ο δείκτης $\boldsymbol{i}$ υποδεικνύει τη *θέση* ή *τάξη* του ψηφίου $\boldsymbol{a_i}$.

Άσκηση 1

Σύμφωνα με τη σχέση   που προαναφέρθηκε, ο δεκαδικός αριθμός 397.264 μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} =$$

$$300 + 90 + 7 + 0.2 + 0.06 + 0.004 = 397.264$$

Παρομοίως, ο δυαδικός αριθμός 110.101 και ο δεκαεξαδικός αριθμός B43.5C8, μπορούν κατά σειρά να εκφραστούν ως εξής:

$$1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} =$$

$$4 + 2 + 0 + 0.5 + 0 + 0.125 = (6.625)_{10}$$

$$11 \times 16^2 + 4 \times 16^1 + 3 \times 16^0 + 5 \times 16^{-1} + 12 \times 16^{-2} + 8 \times 16^{-3} =$$

$$2816 + 64 + 3 + 0.3125 + 0.046875 + 0.001953125 = (2883.36132812)_{10}$$

Μετατροπή αριθμών διαφορετικής βάσης

Για τη μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού στον ισοδύναμό του αριθμό με βάση r διαφορετική του 10, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

α. Το ακέραιο μέρος του δεκαδικού αριθμού διαιρείται επαναληπτικά με τη βάση ***r***, μέχρι να μηδενιστεί το πηλίκο που προκύπτει. Το υπόλοιπο της πρώτης διενεργηθείσας διαίρεσης αποτελεί το λιγότερο σημαντικό ψηφίο και το υπόλοιπο της τελευταίας διαίρεσης αποτελεί το περισσότερο σημαντικό ψηφίο της παράστασης του ακέραιου μέρους του αριθμού στο σύστημα με βάση ***r***.

Μετατροπή αριθμών διαφορετικής βάσης

β. Το κλασματικό μέρος πολλαπλασιάζεται επαναληπτικά με τη βάση ***r***, μέχρι να προκύψει ως γινόμενο ένας αριθμός με μηδενικό κλασματικό μέρος. Αυτό, ωστόσο, δεν είναι πάντα δυνατό, δηλαδή μπορεί η μετατροπή να είναι ατελής. Στην περίπτωση αυτή, το κλασματικό μέρος θα περιλαμβάνει τον αριθμό ψηφίων που καθορίζεται από την επιθυμητή ακρίβεια. Το ακέραιο μέρος του γινομένου του πρώτου διενεργηθέντος πολλαπλασιασμού αποτελεί το περισσότερο σημαντικό ψηφίο και το ακέραιο μέρος του τελευταίου πολλαπλασιασμού αποτελεί το λιγότερο σημαντικό ψηφίο της παράστασης του κλασματικού μέρους του αριθμού στο σύστημα με βάση ***r***.

Άσκηση 2

Για τη μετατροπή του αριθμού $(39.84375)_{10}$ στον ισοδύναμό του δυαδικό αριθμό, ξεκινάμε από τη μετατροπή του ακέραιου μέρους του:

39 / 2 = πηλίκο 19 + υπόλοιπο 1 (LSB)

19 / 2 = πηλίκο 9 + υπόλοιπο 1

9 / 2 = πηλίκο 4 + υπόλοιπο 1

4 / 2 = πηλίκο 2 + υπόλοιπο 0

2 / 2 = πηλίκο 1 + υπόλοιπο 0

1 / 2 = πηλίκο 0 + υπόλοιπο 1 (MSB)

Στην τελευταία πράξη διαίρεσης το πηλίκο μηδενίστηκε, συνεπώς η ζητούμενη παράσταση του ακέραιου μέρους του αριθμού είναι: $(100111)_2$.

Άσκηση 2

Στη συνέχεια εκτελούμε τη μετατροπή του κλασματικού μέρους:

$$0.84375 \times 2 = 1.6875 = 0.6875 + 1 \text{ (MSB)}$$

$$0.6875 \times 2 = 1.375 = 0.375 + 1$$

$$0.375 \times 2 = 0.75 = 0.75 + 0$$

$$0.75 \times 2 = 1.5 = 0.5 + 1$$

$$0.5 \times 2 = 1 = 0.0 + 1 \text{ (LSB)}$$

Στην τελευταία πράξη πολλαπλασιασμού το κλασματικό μέρος του γινομένου μηδενίστηκε, συνεπώς η ζητούμενη παράσταση του κλασματικού μέρους του αριθμού είναι: $(0.11011)_2$. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των δύο βημάτων μετατροπής, λαμβάνουμε το ζητούμενο δυαδικό αριθμό: $(100111.11011)_2$.

Άσκηση 3

Για τη μετατροπή του αριθμού $(345.158)_{10}$ στον ισοδύναμό του οκταδικό αριθμό, εκτελούμε κατά σειρά τη μετατροπή του ακέραιου και του κλασματικού μέρους.

345 / 8 = πηλίκο 43 + υπόλοιπο 1 (LSB)

43 / 8 = πηλίκο 5 + υπόλοιπο 3

5 / 8 = πηλίκο 0 + υπόλοιπο 5 (MSB)

Στην τελευταία πράξη διαίρεσης το πηλίκο μηδενίστηκε, συνεπώς η ζητούμενη παράσταση του ακέραιου μέρους του αριθμού είναι: $(531)_8$.

Άσκηση 3

$$0.158 \times 8 = 1.264 = 0.264 + 1 \text{ (MSB)}$$

$$0.264 \times 8 = 2.112 = 0.112 + 2$$

$$0.112 \times 8 = 0.896 = 0.896 + 0$$

$$0.896 \times 8 = 7.168 = 0.168 + 7, \text{κ.ο.κ.}$$

Η μετατροπή του κλασματικού μέρους είναι ατελής, συνεπώς η ζητούμενη παράσταση του αριθμού με ακρίβεια τεσσάρων ψηφίων κλασματικού μέρους είναι: $(531.1207...)_8$.

Άσκηση 4

Για τη μετατροπή του αριθμού $(7400.125)_{10}$ στον ισοδύναμό του δεκαεξαδικό αριθμό, ακολουθούμε μεθοδολογία όμοια με εκείνη των δύο προηγούμενων παραδειγμάτων.

7400 / 16 = πηλίκο 462 + υπόλοιπο 8 (LSB)

462 / 16 = πηλίκο 28 + υπόλοιπο 14 (E στο δεκαεξαδικό σύστημα)

28 / 16 = πηλίκο 1 + υπόλοιπο 12 (C στο δεκαεξαδικό σύστημα)

1 / 16 = πηλίκο 0 + υπόλοιπο 1 (MSB)

Στην τελευταία πράξη διαίρεσης το πηλίκο μηδενίστηκε, συνεπώς η ζητούμενη παράσταση του ακέραιου μέρους του αριθμού είναι: $(1CE8)_{16}$.

Άσκηση 4

$$0.125 \times 16 = 2.0 = 0.0 + 2 \text{ (MSB)}$$

Αφού το κλασματικό μέρος του γινομένου μηδενίστηκε από την πρώτη κιόλας πράξη πολλαπλασιασμού, η ζητούμενη παράσταση του κλασματικού μέρους του αριθμού είναι: $(0.2)_{16}$. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των δύο βημάτων μετατροπής, λαμβάνουμε το ζητούμενο δεκαεξαδικό αριθμό: $(1CE8.2)_{16}$.

Άσκηση 5

Η μετατροπή του αριθμού $(1011000110101 1.1111)_2$ στον ισοδύναμό του οκταδικό και δεκαεξαδικό αριθμό γίνεται με την ακόλουθη μεθοδολογία. Ομαδοποιούμε τα δυαδικά ψηφία ανά τρία, ώστε να προκύψουν τα αντίστοιχα ψηφία του οκταδικού αριθμού, και στη συνέχεια ομαδοποιούμε τα δυαδικά ψηφία ανά τέσσερα, ώστε να προκύψουν τα ψηφία του δεκαεξαδικού αριθμού. Οι ομάδες των λιγότερο και των περισσότερο σημαντικών ψηφίων του κλασματικού και του ακέραιου μέρους, αντίστοιχα, συμπληρώνονται ανάλογα, ώστε να αριθμούν τρία ή τέσσερα ψηφία.

Άσκηση 5

010	110	001	101	011	.	111	100		0010	1100	0110	1011	.	1111
2	6	1	5	3		7	4		2	C	6	B		F

Συνεπώς, τα αποτελέσματα των ζητούμενων μετατροπών έχουν ως εξής:

$$(1011000110101 1.1111)_2 = (26153.74)_8 = (2C6B.F)_{16}$$

Άσκηση 6

Για τη μετατροπή του αριθμού $(306.D)_{16}$ στον ισοδύναμό του δυαδικό, αντικαθιστούμε κάθε ψηφίο του δεκαεξαδικού αριθμού με τον αντίστοιχο τετραψήφιο δυαδικό αριθμό.

$$\begin{array}{cccc} 3 & \underline{0} & \underline{6} & \underline{D} \\ 0011 & 0000 & 0110\,. & 1101 \end{array}$$

Συνεπώς: $(306.D)_{16} = (00110000110.1101)_2$

Άσκηση 7

α. Μετατρέψτε το δυαδικό αριθμό 11101.1011 και το δεκαεξαδικό αριθμό EF9.B στους ισοδύναμούς τους δεκαδικούς αριθμούς.

β. Μετατρέψτε το δεκαδικό αριθμό 57.54379 στον ισοδύναμό του δυαδικό με πέντε ψηφία κλασματικού μέρους και το δεκαδικό αριθμό 543.815 στον ισοδύναμό του οκταδικό με δύο ψηφία κλασματικού μέρους.

γ. Μετατρέψτε τον εξαδικό αριθμό 1354.24 στον ισοδύναμό του τετραδικό με τέσσερα ψηφία κλασματικού μέρους.

Άσκηση 7

α.

$$(11101.1011)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} =$$

$$16 + 8 + 4 + 1 + 0.5 + 0.125 + 0.0625 = (29.6875)_{10}$$

$$(EF9.B)_{16} = 14 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 9 \times 16^0 + 11 \times 16^{-1} = (3833.6875)_{10}$$

Άσκηση 7

β. Εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία μετατροπής δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό και σε οκταδικό αριθμό:

57 / 2 = πηλίκο 28 + υπόλοιπο 1 (LSB)

28 / 2 = πηλίκο 14 + υπόλοιπο 0

14 / 2 = πηλίκο 7 + υπόλοιπο 0

7 / 2 = πηλίκο 3 + υπόλοιπο 1

3 / 2 = πηλίκο 1 + υπόλοιπο 1

1 / 2 = πηλίκο 0 + υπόλοιπο 1 (MSB)

Στην τελευταία πράξη διαίρεσης το πηλίκο μηδενίστηκε, συνεπώς η ζητούμενη παράσταση του ακέραιου μέρους του αριθμού είναι $(111001)_2$.

Άσκηση 7

$$0.54379 \times 2 = 1.08758 = 0.08758 + 1 \text{ (MSB)}$$

$$0.08758 \times 2 = 0.17516 = 0.17516 + 0$$

$$0.17516 \times 2 = 0.35032 = 0.35032 + 0$$

$$0.35032 \times 2 = 0.70064 = 0.70064 + 0$$

$$0.70064 \times 2 = 1.40128 = 0.40128 + 1 \text{ (LSB)}$$

Η ζητούμενη παράσταση του κλασματικού μέρους του αριθμού είναι $(0.10001)_2$.

Άσκηση 7

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των δύο βημάτων μετατροπής, λαμβάνουμε το ζητούμενο δυαδικό αριθμό $(111001.10001)_2$.

543 / 8 = πηλίκο 67 + υπόλοιπο 7 (LSB)

67 / 8 = πηλίκο 8 + υπόλοιπο 3

8 / 8 = πηλίκο 1 + υπόλοιπο 0

1 / 8 = πηλίκο 0 + υπόλοιπο 1 (MSB)

Άσκηση 7

Στην τελευταία πράξη διαίρεσης, το πηλίκο μηδενίστηκε, συνεπώς η ζητούμενη παράσταση του ακέραιου μέρους του αριθμού είναι $(1037)_8$.

$$0.815 \times 8 = 6.52 = 0.52 + 6 \text{ (MSB)}$$

$$0.52 \times 8 = 4.16 = 0.16 + 4 \text{ (LSB)}$$

Η ζητούμενη παράσταση του κλασματικού μέρους του αριθμού με ακρίβεια δύο ψηφίων είναι $(0.64)_8$ και η ζητούμενη συνολική παράσταση είναι $(1037.64)_8$.

Άσκηση 7

γ. Η μετατροπή αριθμών μεταξύ συστημάτων με βάση διαφορετική του 10 μπορεί να επιτευχθεί εύκολα με τη χρησιμοποίηση του δεκαδικού συστήματος ως ενδιάμεσου σταδίου. Συνεπώς, αρχικά θα πρέπει να μετατρέψουμε τον εξαδικό αριθμό που δίνεται στον ισοδύναμό του δεκαδικό:

$$(1354.24)_6 = 1 \times 6^3 + 3 \times 6^2 + 5 \times 6^1 + 4 \times \cdot 6^0 + 2 \times 6^{-1} + 4 \times \cdot 6^{-2} = (358.4444)_{10}$$

Στη συνέχεια, μετατρέπουμε το ακέραιο και το κλασματικό μέρος του δεκαδικού αριθμού που προέκυψε σε τετραδικό:

Άσκηση 7

$358 / 4 = \text{πηλίκο } 89 + \text{υπόλοιπο } 2 \text{ (LSB)}$

$89 / 4 = \text{πηλίκο } 22 + \text{υπόλοιπο } 1$

$22 / 4 = \text{πηλίκο } 5 + \text{υπόλοιπο } 2$

$5 / 4 = \text{πηλίκο } 1 + \text{υπόλοιπο } 1$

$1 / 4 = \text{πηλίκο } 0 + \text{υπόλοιπο } 1 \text{ (MSB)}$

$0.4444 \times 4 = 1.7776 = 0.7776 + 1 \text{ (MSB)}$

$0.7776 \times 4 = 3.1104 = 0.1104 + 3$

$0.1104 \times 4 = 0.4414 = 0.4414 + 0$

$0.4414 \times 4 = 1.7656 = 0.7656 + 1 \text{ (LSB)}$

Η ζητούμενη παράσταση του αριθμού με ακρίβεια τεσσάρων ψηφίων κλασματικού μέρους είναι $(11212.1301)_4$.

Άσκηση 8

Ένα αριθμητικό σύστημα χρησιμοποιεί τρία ψηφία: 0, 1 και X. Ποια είναι η βάση και ποιοι οι πρώτοι δέκα αριθμοί του συστήματος αυτού;

Αφού η βάση ενός αριθμητικού συστήματος καθορίζεται από το πλήθος των ψηφίων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτό, είναι προφανές ότι βάση του εν λόγω συστήματος είναι ο αριθμός 3.
Είναι, επίσης, προφανές ότι το σύμβολο X αντιστοιχεί στη δεκαδική τιμή 2.
Για να παραστήσετε τους δέκα πρώτους αριθμούς του εν λόγω συστήματος, θα πρέπει να λάβετε υπόψη ότι το λιγότερο σημαντικό ψηφίο κάθε αριθμού έχει βάρος 3^0, το αμέσως πιο σημαντικό έχει βάρος 3^1 κ.ο.κ. Έτσι, οι ζητούμενοι δέκα αριθμοί είναι: 0, 1, X, 10, 11, 1X, X0, X1, XX, 100.

Άσκηση 9

α. Ποια είναι η περιοχή των δεκαδικών αριθμών που μπορούν να παρασταθούν με οκτώ δυαδικά ψηφία;

β. Πόσα δυαδικά ψηφία απαιτούνται για την παράσταση δεκαδικών αριθμών από 0 έως 12500;

γ. Μετά την απάντηση του ερωτήματος (β), προσδιορίστε μία γενική σχέση μεταξύ του πλήθους n των ψηφίων που απαιτούνται για την παράσταση ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα, και του πλήθους m των ψηφίων που απαιτούνται για την παράσταση του αριθμού αυτού στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα.

Άσκηση 9

α. Ο μέγιστος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με 8 δυαδικά ψηφία είναι ο αριθμός $2^8 - 1 = 255$, άρα η ζητούμενη περιοχή δεκαδικών αριθμών είναι από το 0 έως το 255.

β. Με 13 δυαδικά ψηφία μπορούμε να παραστήσουμε δεκαδικούς αριθμούς από το 0 έως το $(2^{13} - 1) = 8191$, ενώ με 14 δυαδικά ψηφία το άνω όριο της περιοχής δεκαδικών αριθμών που μπορεί να παρασταθεί γίνεται $(2^{14} - 1) = 16383$. Συνεπώς, το απαιτούμενο πλήθος δυαδικών ψηφίων είναι 14.

Άσκηση 9

γ. Για τη γενίκευση, και αφού ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με n ψηφία σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση $\boldsymbol{r}$ είναι ο $\boldsymbol{r}^n - 1$, μπορούμε να διατυπώσουμε την εξής σχέση: $2^m - 1 \geq 10^n - 1$. Αξιοποιώντας την ισότητα της σχέσης αυτής, καταλήγουμε στο ελάχιστο πλήθος των απαιτούμενων δυαδικών ψηφίων:

$$2^m - 1 = 10^n - 1 \Rightarrow m = \frac{n}{\log_{10} 2} \Rightarrow m = \frac{n}{0.3}$$

Άσκηση 10

α. Οι πράξεις $15 + 23 + 42 + 32 + 23 = 245$, $66 / 6 = 11$, $62 / 4 = 14$ και $30 \times 11.1 = 403$ είναι πιθανώς ορθές σε ένα ή περισσότερα αριθμητικά συστήματα με βάση $\boldsymbol{r}$. Να προσδιορίσετε τη βάση $\boldsymbol{r}$ για καθεμία πράξη, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

β. Προσδιορίστε τη βάση $\boldsymbol{r}$ του αριθμού BEE, για τον οποίο ισχύει ότι: $(\mathrm{BEE})_{\boldsymbol{r}} = (2699)_{10}$.

Άσκηση 10

Η βάση ενός αριθμ. συστήματος καθορίζεται από το πλήθος των ψηφίων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτό, τα οποία είναι οι φυσικοί αριθμοί που είναι μικρότεροι από τη βάση. Θα πρέπει, επίσης, να προσέξετε ότι σε συστήματα με βάση μεγαλύτερη του 10 χρησιμοποιούνται τα ψηφία 0 έως 9 και στη συνέχεια τα πρώτα γράμματα του λατινικού αλφαβήτου.

Άσκηση 10

α_1.

$$15 + 23 + 42 + 32 + 23 = 245 \Rightarrow$$

$$1 \times r^1 + 5 \times r^0 + 2 \times r^1 + 3 \times r^0 + 4 \times r^1 + 2 \times r^0 + 3 \times r^1 + 2 \times r^0 + 2 \times r^1 + 3 \times r^0 =$$

$$2 \times r^2 + 4 \times r^1 + 5 \times r^0 \Rightarrow 12 \times r + 15 = 2 \times r^2 + 4 \times r + 5 \Rightarrow$$

$$2 \times r^2 - 8 \times r - 10 = 0 => r = 5 \text{ ή } r = -1$$

Ο αριθμός 5 δεν μπορεί να είναι η βάση, αφού εμφανίζεται στην πράξη. Επίσης, αρνητικός αριθμός δεν μπορεί να αποτελεί βάση αριθμητικού συστήματος.

Συνεπώς, η πράξη δεν είναι ορθή σε κανένα αριθμητικό σύστημα.

Άσκηση 10

α_2. $66 / 6 = 11 \Rightarrow 6 \times r^1 + 6 \times r^0 = 6 \times r^0 \times (1 \times r^1 + 1) \Rightarrow 6 \times r + 6 = 6 \times r + 6$

Καταλήξαμε σε ταυτότητα, συνεπώς η βάση ***r*** για την πράξη αυτή μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 7 (αφού το μεγαλύτερο ψηφίο που εμφανίζεται στην πράξη είναι το 6).

α_3. $62 / 4 = 14 \Rightarrow 6 \times r^1 + 2 \times r^0 = 4 \times r^0 \times (1 \times r^1 + 4 \times r^0) \Rightarrow 2 \times r = 14 \Rightarrow r = 7$

Άσκηση 10

α_4. $$30 \times 11.1 = 403 \Rightarrow (3 \times r^1 + 0 \times r^0) \times (1 \times r^1 + 1 \times r^0 + 1 \times r^{-1}) =$$

$$4 \times r^2 + 0 \times r^1 + 3 \times r^0 \Rightarrow 3 \times r^2 + 3 \times r + 3 = 4 \times r^2 + 3 \Rightarrow r^2 - 3 \times r = 0 \Rightarrow$$

$$r = 0 \text{ ή } r = 3$$

Ο αριθμός 0 δεν μπορεί να είναι βάση. Στην παραπάνω πράξη περιέχονται αριθμοί με τα ψηφία 3 και 4, οπότε, επίσης, ο αριθμός 3 δεν μπορεί να αποτελεί βάση. Συνεπώς, η πράξη δεν είναι ορθή σε κανένα αριθμητικό σύστημα.

Άσκηση 10

β. Αναλύουμε το πρώτο μέρος της εξίσωσης που δίνεται,

$$(\text{BEE})_r = (2699)_{10} \Rightarrow 11 \times r^2 + 14 \times r^1 + 14 \times r^0 = 2699 \Rightarrow$$

$$11 \times r^2 + 14 \times r - 2685 = 0$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει έχει μία θετική ($\boldsymbol{r} = 15$) και μία αρνητική ρίζα, συνεπώς η ζητούμενη βάση είναι το 15. Αναμέναμε βάση μεγαλύτερη του 14, αφού για την παράσταση του αριθμού χρησιμοποιείται το λατινικό γράμμα E, που αντιστοιχεί στο δεκαδικό αριθμό 14.

Άσκηση 11

Σε εξέταση μαθήματος ψηφιακών συστημάτων, ένας φοιτητής έγραψε ως απάντηση σε θέμα μετατροπής δεκαδικού αριθμού σε αριθμό συστήματος με άλλη βάση: $(2754)_6$. Ποιο είναι το εμφανές λάθος στην απάντηση και ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός δεκαδικός αριθμός που θα μπορούσε να περιλαμβάνει η εκφώνηση του θέματος;

Άσκηση 11

Στην άσκηση αυτή, μέσω του υποτιθέμενου λάθους του φοιτητή, παρουσιάζεται ένα συνηθισμένο λάθος που γίνεται στο χειρισμό μη δεκαδικών αριθ-Λόγω της ύπαρξης του ψηφίου 7 που είναι μεγαλύτερο του 5 (δηλαδή του μεγαλύτερου επιτρεπτού αριθμού στο αριθμητικό σύστημα με βάση το 6), η απάντηση είναι προφανώς λανθασμένη. Η μικρότερη αποδεκτή βάση για τον εν λόγω αριθμό είναι ο αριθμός 8 και είναι αυτή που οδηγεί στο μικρότερο δυνατό ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό που θα μπορούσε να περιλαμβάνεται στην εκφώνηση του θέματος:

$$(2754)_8 = 2 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 1024 + 448 + 40 + 4 = (1516)_{10}.$$

Άσκηση 12

Θεωρήστε αριθμητικό σύστημα με βάση 32 που χρησιμοποιεί τα ψηφία 0 έως 9 και τα γράμματα του λατινικού αλφαβήτου A έως V. Να δώσετε την παράσταση του δυαδικού αριθμού 110101.001 σε αυτό το αριθμητικό σύστημα.

Επισημαίνεται ότι σε συστήματα με βάση μεγαλύτερη του 10 χρησιμοποιούνται τα ψηφία 0 έως 9 και στη συνέχεια όσα γράμματα του λατινικού αλφαβήτου απαιτούνται για την παράσταση των χρησιμοποιούμενων από το σύστημα ψηφίων έως τη βάση μειωμένη κατά 1. Από τη σχέση $2^5 = 32$ προκύπτει ότι για την παράσταση των ψηφίων του συστήματος με βάση 32 απαιτούνται πέντε ψηφία.

Άσκηση 12

Ομαδοποιούμε, λοιπόν, τα ψηφία του δυαδικού αριθμού ανά πέντε, ώστε να προκύψουν τα αντίστοιχα ψηφία του αριθμού με βάση 32. Οι ομάδες των λιγότερο και των περισσότερο σημαντικών δυαδικών ψηφίων συμπληρώνονται, ώστε να αριθμούν πέντε δυαδικά ψηφία.

$$\begin{array}{ccccc} 0000\underline{1} & \underline{10101} & . & \underline{001}00 \\ 1 & L & & 4 \end{array}$$

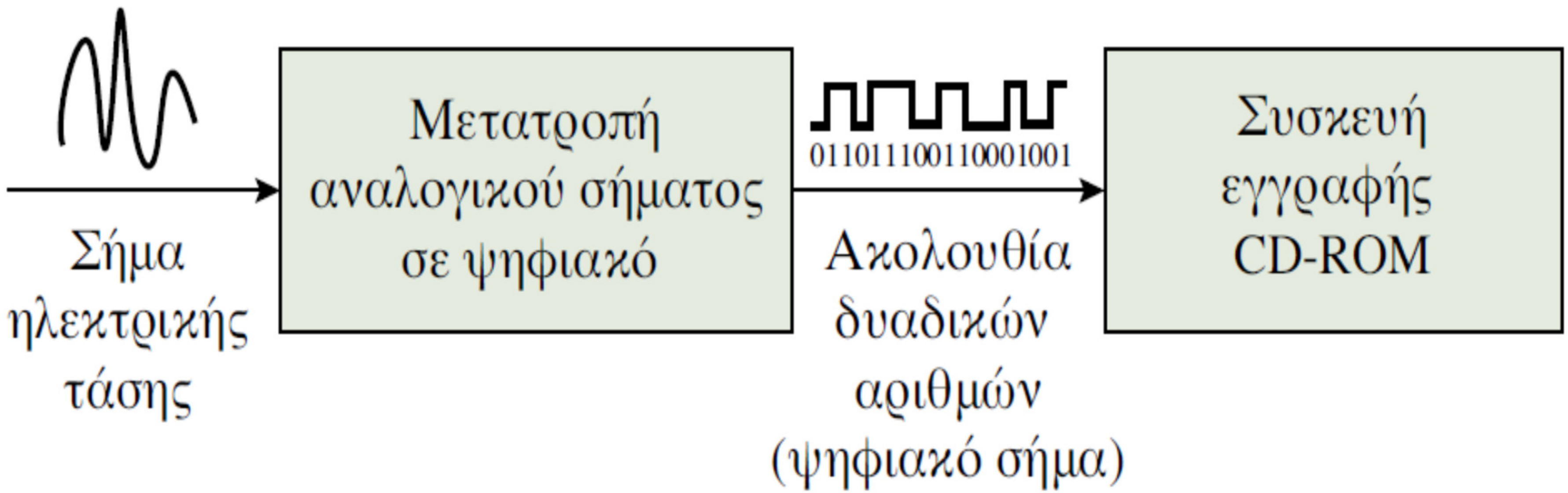
Συνεπώς: $(110101.001)_2 = (1L.4)_{32}$

Άσκηση 13

Στο σήμα ηλεκτρικής τάσης που «μεταφέρει» τον ήχο σε έναν ψηφιακό δίσκο (CD-ROM), εφαρμόζεται δειγματοληψία περίπου 44000 φορές το δευτερόλεπτο και η τιμή κάθε δείγματος εγγράφεται στην επιφάνεια του δίσκου ως δυαδικός αριθμός. Με άλλα λόγια, κάθε δυαδικός αριθμός που εγγράφεται παριστάνει μία τιμή του σήματος ηλεκτρικής τάσης που «μεταφέρει» τον ήχο. Εάν το πλήθος των ψηφίων κάθε δυαδικού αριθμού που εγγράφεται είναι 10, πόσες διαφορετικές τιμές ηλεκτρικής τάσης μπορούν να καταγραφούν; Πόσα δυαδικά ψηφία καταγράφονται στο δίσκο σε ένα δευτερόλεπτο; Εάν σε έναν ψηφιακό δίσκο μπορούν να αποθηκευτούν συνολικά πέντε δισεκατομμύρια δυαδικά ψηφία, ποια είναι η διάρκεια της μουσικής που μπορεί να αποθηκευτεί στο δίσκο αυτόν;

Άσκηση 13

Αφού το πλήθος των δυαδικών ψηφίων του αριθμού που παριστάνει μία τιμή του σήματος ηλεκτρικής τάσης είναι 10, οι διαφορετικές τιμές ηλεκτρικής τάσης που μπορούν να καταγραφούν είναι $2^{10} = 1024$.



Άσκηση 13

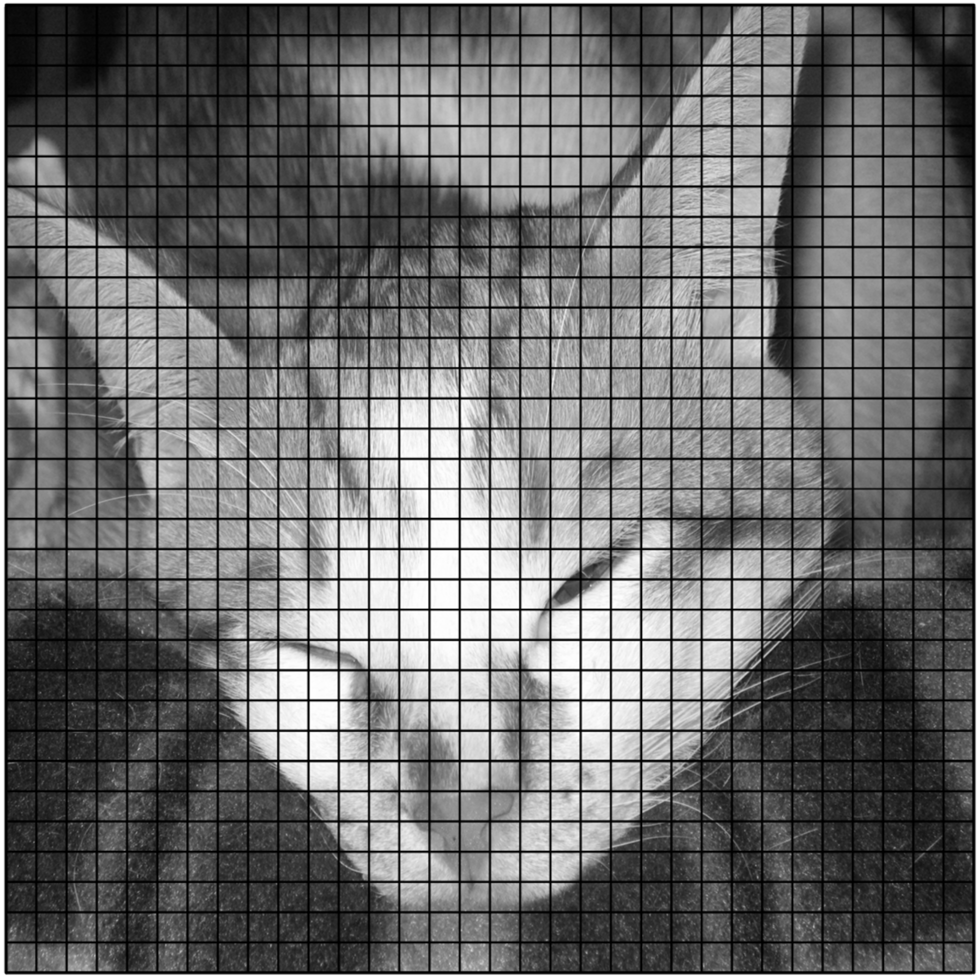
Αφού εφαρμόζεται δειγματοληψία 44000 φορές κάθε sec και για την ψηφιακή κωδικοποίηση κάθε δείγματος απαιτούνται 10 δυαδικά ψηφία, τα δυαδικά ψηφία που καταγράφονται στο δίσκο σε κάθε δευτερόλεπτο είναι $44000 \times 10 = 440000$. Η διάρκεια της μουσικής που μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα δίσκο, για τον οποίο δίνεται ότι μπορεί να αποθηκεύσει 5 δισεκατομμύρια δυαδικά ψηφία, είναι $5 \times 10^9 / 440000 = 11363.63$ δευτερόλεπτα ή περίπου 3 ώρες και 10 λεπτά.

Άσκηση 14

Μια ασπρόμαυρη ψηφιακή φωτογραφική μηχανή θέτει ένα πλέγμα σε κάθε εικόνα και στη συνέχεια αποθηκεύει ένα δυαδικό αριθμό που παριστάνει την απόχρωση ή στάθμη του γκρι χρώματος που εμφανίζεται σε κάθε κελί του πλέγματος. Εάν είναι επιθυμητή η διάκριση μεταξύ 254 διαφορετικών αποχρώσεων του γκρι χρώματος, πόσα δυαδικά ψηφία απαιτούνται για την παράστασή τους και ποια θα μπορούσε να είναι η ψηφιακή παράσταση του λευκού και του μαύρου χρώματος; Εάν υποθέσουμε ότι το πλέγμα που τοποθετείται σε μια εικόνα έχει μέγεθος 32×32 κελιά, πόσα δυαδικά ψηφία απαιτούνται για την αποθήκευσή της;

Άσκηση 14

Στην ασπρόμαυρη εικόνα του σχήματος διακρίνεται το πλέγμα που τοποθετείται από την ψηφιακή κάμερα, ώστε να είναι δυνατή, στη συνέχεια, η παράσταση της απόχρωσης του γκρι χρώματος κάθε κελιού του πλέγματος με χρήση δυαδικών αριθμών.



Άσκηση 14

Ο αριθμός των κελιών του πλέγματος (στη συγκεκριμένη περίπτωση 32×32 κελιά), αφορά το χαρακτηριστικό της εικόνας που αναφέρεται ως ανάλυση. Λόγω του ότι $2^8 = 256$, διαπιστώνουμε ότι για την παράσταση 254 διαφορετικών αποχρώσεων του γκρι χρώματος απαιτούνται δυαδικοί αριθμοί 8 ψηφίων και ότι το άσπρο και το μαύρο χρώμα μπορούν να παρασταθούν με τους δυαδικούς αριθμούς 0000000 και 1111111, αντίστοιχα. Για την αποθήκευση ενός κελιού μιας εικόνας στην οποία τοποθετείται πλέγμα μεγέθους $32 \times 32 = 1024$ κελιών, απαιτούνται επιπλέον 10 δυαδικά ψηφία για την ψηφιακή παράσταση της θέσης του κελιού (αφού $2^{10} = 1024$), δηλαδή για κάθε κελί απαιτούνται συνολικά 18 δυαδικά ψηφία. Συνεπώς, για την αποθήκευση της συνολικής πληροφορίας που αφορά την εν λόγω εικόνα απαιτούνται $18 \times 1024 = 18432$ δυαδικά ψηφία.

Συμπληρώματα δυαδικών αριθμών

- Τα συμπληρώματα χρησιμοποιούνται στις πράξεις δυαδικών αριθμών.
- Το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός δυαδικού αριθμού Α ορίζεται ως $(2^n - 1) - A$, ενώ το συμπλήρωμα ως προς 2 του ίδιου αριθμού ορίζεται ως $2^n - A$.
- Ο αριθμός $2^n - 1$ στο δυαδικό σύστημα είναι ο μεγαλύτερος με n δυαδικά ψηφία και αποτελείται από n μονάδες.
- Αφού $1 - 0 = 1$ και $1 - 1 = 0$, το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός αριθμού προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε τα 0 με 1 και τα 1 με 0.
- Το συμπλήρωμα ως προς 2 ενός αριθμού προκύπτει εάν προσθέσουμε 1 στο συμπλήρωμά του ως προς 1
- Ισοδύναμα προκύπτει εάν αφαιρέσουμε τον αριθμό από τον αριθμό 2^n (= 1 μονάδα ακολουθούμενη από n μηδενικά), ενέργεια που αντιστοιχεί στη διατήρηση των συνεχόμενων λιγότερο σημαντικών 0 και του πρώτου 1 και στην εναλλαγή 0 και 1 στις υπόλοιπες πιο σημαντικές θέσεις του αριθμού.
- Παράδειγμα: $\Sigma_1(1101100) = 0010011$ και $\Sigma_2(1101100) = 0010100$.

Προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί

- Στην παράσταση προσημασμένου μεγέθους το + είναι 0, το - είναι 1 και καταλαμβάνουν την περισσότερο σημαντική θέση. Ακολουθούν n – 1 δυαδικά ψηφία που συνιστούν το μέγεθος ή μέτρο ή τιμή του αριθμού.
- Κατά την παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος, οι θετικοί αριθμοί παριστάνονται με πρόσημο 0 και τιμή που καθορίζεται από τα n – 1 λιγότερο σημαντικά ψηφία, ενώ οι αρνητικοί αριθμοί παριστάνονται με το συμπλήρωμα ως προς 1 ή 2 των αντίστοιχων θετικών αριθμών.
- Από τον ορισμό των συμπληρωμάτων προκύπτει ότι πρόσημο (MSB) των αρνητικών αριθμών είναι πάντα 1.
- Οι θετικοί αριθμοί είναι ίδιοι και στους τρεις τρόπους παράστασης προσημασμένων αριθμών.
- Ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός που μπορεί να παρασταθεί και με τους 3 τρόπους είναι ο $2^{n-1} - 1$ (για n δυαδικά ψηφία) και ο μικρότερος αρνητικός αριθμός είναι ο αριθμός $- 2^{n-1} + 1$, με εξαίρεση την παράσταση συμπληρώματος ως προς 2, στην οποία μπορεί να παρασταθεί και ο αρνητικός αριθμός $- 2^{n-1}$.

Προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί

Δεκαδική παράσταση	Παράσταση προσημασμένου μεγέθους	Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1	Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
0	0000 ή 1000	0000 ή 1111	0000

Προσημασμένοι δυαδικού αριθμοί

Δεκαδική παράσταση	Παράσταση προσημασμένου μεγέθους	Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1	Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2
−1	1001	1110	1111
−2	1010	1101	1110
−3	1011	1100	1101
−4	1100	1011	1100
−5	1101	1010	1011
−6	1110	1001	1010
−7	1111	1000	1001
−8	–	–	1000

Άσκηση 15

Να εξαγάγετε τις παραστάσεις προσημασμένου μεγέθους και προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 με οκτώ δυαδικά ψηφία, των δεκαδικών αριθμών: +119, −77 και −3.

Άσκηση 15

Η άσκηση αυτή αφορά δύο παραστάσεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών: την παράσταση προσημασμένου μεγέθους και την παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2. Στην παράσταση προσημασμένου μεγέθους το πρόσημο καταλαμβάνει την πιο σημαντική θέση του αριθμού, ως θετικό πρόσημο χρησιμοποιούμε το δυαδικό ψηφίο 0 και ως αρνητικό πρόσημο το δυαδικό ψηφίο 1. Στην παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, οι θετικοί αριθμοί n δυαδικών ψηφίων παριστάνονται με μηδενικό πρόσημο και τιμή που καθορίζεται από τα $n-1$ λιγότερο

Άσκηση 15

σημαντικά ψηφία, ενώ οι αρνητικοί αριθμοί παριστάνονται με το συμπλήρωμα ως προς 2 των αντίστοιχων θετικών αριθμών. Αρχικά, λοιπόν, χρησιμοποιούμε τη σχέση μετατροπής δεκαδικών αριθμών σε δυαδικούς αριθμούς με 7 δυαδικά ψηφία. Η παράσταση προσημασμένου μεγέθους προϋποθέτει στη συνέχεια μόνο την προσάρτηση του ψηφίου-προσήμου στην πιο σημαντική θέση των αριθμών. Οι θετικοί αριθμοί είναι ίδιοι και στους δύο τρόπους παράστασης.

Η παράσταση των αρνητικών αριθμών σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2 προϋποθέτει τον υπολογισμό του συμπληρώματος ως προς 2 των αντίστοιχων θετικών αριθμών.

Άσκηση 15

Δεκαδικός αριθμός	Δυαδικός αριθμός επτά ψηφίων	Παράσταση προσημασμένου μεγέθους	Παράσταση συμπληρώματος ως προς 2
+119	1110111	01110111	01110111
–77	1001101	11001101	10110011
–3	0000011	10000011	11111101

Άσκηση 16

Η παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 3, ενός αριθμού στο τριαδικό αριθμητικό σύστημα, είναι 12221. Ακολουθώντας επαγωγική μέθοδο διερεύνησης, όσον αφορά το πλήθος των ψηφίων του αριθμού, να διαπιστώσετε εάν πρόκειται για αρνητικό ή θετικό αριθμό και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τον αντίστοιχο δεκαδικό αριθμό.

Άσκηση 16

Η άσκηση αυτή αποτελεί εφαρμογή της παράστασης προσημασμένων αριθμών με τη χρήση του συμπληρώματος ως προς τη βάση του αριθμητικού συστήματος και αφορά το τριαδικό αριθμητικό σύστημα. Σε αυτό το αριθμητικό σύστημα, στο οποίο βάση αποτελεί ο αριθμός 3, χρησιμοποιούνται τα στοιχεία 0, 1 και 2. Για να αντεπεξέλθετε στις δυσκολίες που υπάρχουν, προτιμήστε να προσεγγίσετε την απάντηση με επαγωγική μέθοδο, ξεκινώντας από τριαδικούς αριθμούς δύο ψηφίων. Αφού $3^2 = 9$, με δύο ψηφία μπορούν να παρασταθούν εννέα αριθμοί, που αντιστοιχούν στους δεκαδικούς αριθμούς από -4 έως $+4$. Ο δεκαδικός αριθμός $+1$ μπορεί να παρασταθεί με τον τριαδικό αριθμό 01, αφού εύκολα προκύπτει ότι: $0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 1$. Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι οι δεκαδικοί αριθμοί $+2$, $+3$ και $+4$ παριστάνονται με τους τριαδικούς αριθμούς 02, 10 και 11, αντίστοιχα. Οι αρνητικοί αριθμοί παριστάνονται με το συμπλήρωμα ως προς 3 των αντίστοιχων θετικών.

Άσκηση 16

Έτσι οι δεκαδικοί αριθμοί – 4, –3, –2 & –1, παριστάνονται με τους τριαδικούς αριθμούς 12, 20, 21 & 22, αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι το συμπλήρωμα ενός αριθμού Α με n ψηφία ως προς τη βάση r ισούται με r^n – A, συνεπώς για τριαδικό αριθμό Α με 2 ψηφία το συμπλήρωμα ως προς 3 είναι 3^2 – A. Αφού 3^3 = 27, με 3 ψηφια μπορούν να παρασταθούν 27 αριθμοί (το 0, 13 θετικοί και 13 αρνητικοί).

Άσκηση 16

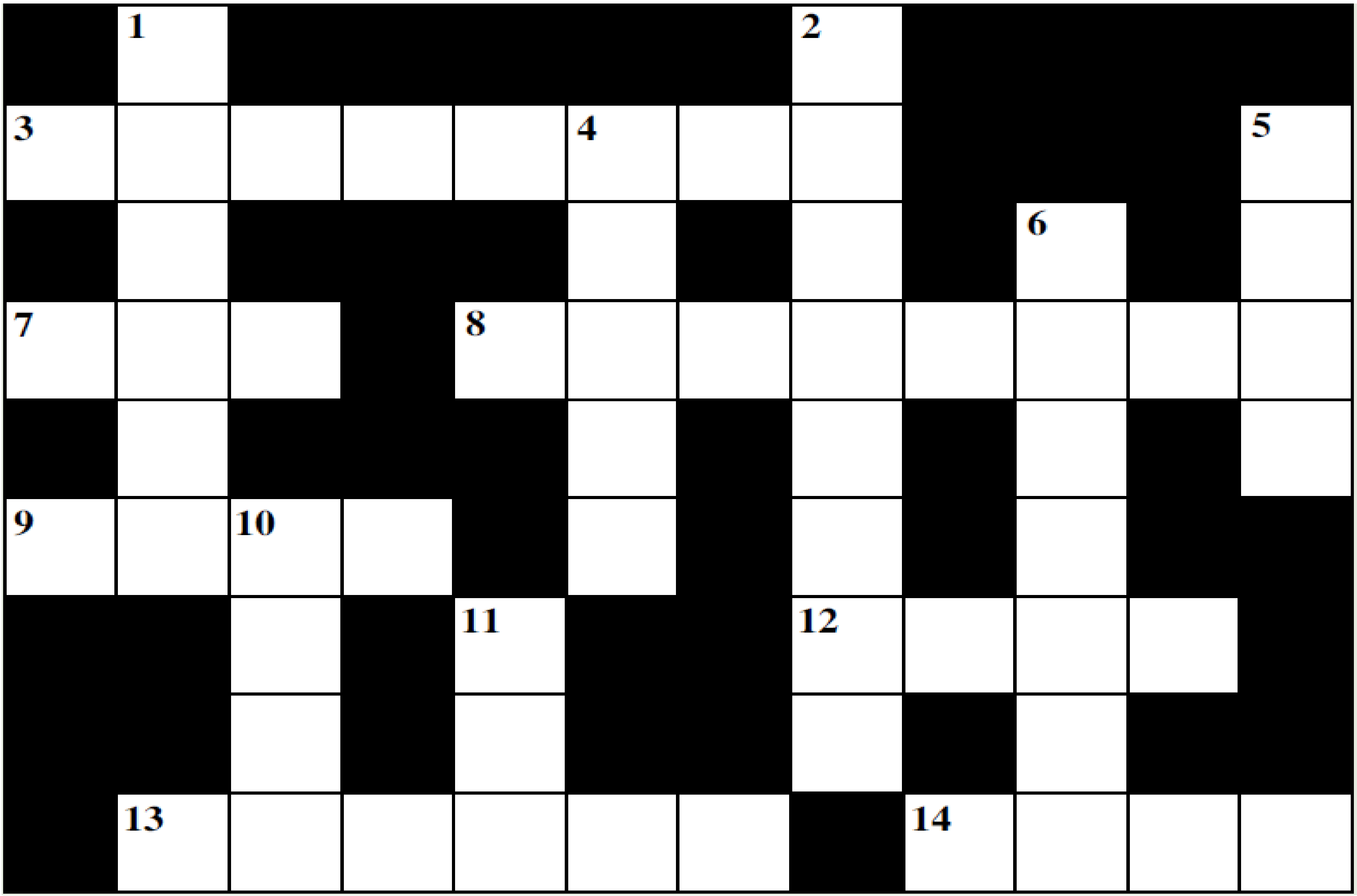
Με προσέγγιση όμοια με εκείνη που ακολουθήθηκε για τους αριθμούς δύο ψηφίων, προκύπτει ότι οι θετικοί αριθμοί είναι οι εξής: 001, 002, 010, 011, 012, 020, 021, 022, 100, 101, 102, 110, 111. Οι αρνητικοί αριθμοί είναι οι εξής: 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222. Παρατηρήστε ότι οι θετικοί αριθμοί εκτείνονται από 000...1 έως 111...1, ενώ οι αρνητικοί αριθμοί από 111...12 έως 222...22. Συνεπώς, ο αριθμός 12221 είναι αρνητικός και για να προσδιορίσετε τον αντίστοιχο δεκαδικό αριθμό θα πρέπει αρχικά να υπολογίσετε το συμπλήρωμά του ως προς 3. Αυτό υπολογίζεται ως εξής:

$$(22222 - 12221) + 1 = 10001 + 1 = 10002$$

Ο αντίστοιχος αρνητικός δεκαδικός αριθμός προκύπτει εύκολ ως εξής:

$$-(1 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0) = -(81 + 2) = -83$$

Άσκηση 17



Άσκηση 17

Οριζόντια

3. Ο δυαδικός αριθμός που αντιστοιχεί στον αριθμό 37 του δεκαεξαδικού συστήματος
7. Ο δεκαδικός αριθμός –4 στο δυαδικό σύστημα σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2
8. Ο δεκαδικός αριθμός –35 στο δυαδικό σύστημα σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2
9. Το δεκαεξαδικό ψηφίο Ε στο δυαδικό σύστημα

Κάθετα

1. Ο αριθμός 43 του οκταδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα
2. Ο δεκαδικός αριθμός +114 στο δυαδικό σύστημα σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2
4. Ο δεκαδικός αριθμός 20 στο δυαδικό σύστημα
5. Ο δεκαδικός αριθμός –6 στο δυαδικό σύστημα σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2

Άσκηση 17

Οριζόντια

12. Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης των δεκαεξαδικών ψηφίων A – E στο δυαδικό σύστημα

13. Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης των δεκαδικών αριθμών 64 – 26 στο δυαδικό σύστημα

14. Το δεκαεξαδικό ψηφίο 4 στο δυαδικό σύστημα

Κάθετα

6. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης του δεκαεξαδικού αριθμού 10 με το δεκαδικό αριθμό 83 στο δυαδικό σύστημα

10. Ο δεκαδικός αριθμός 12 στο δυαδικό σύστημα

11. Ο δεκαδικός αριθμός +3 στο δυαδικό σύστημα σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2

Άσκηση 17

Για παράδειγμα, στη θέση 7 οριζοντίως ζητείται ο δυαδικός αριθμός -4 σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2. Στη θέση αυτή του σταυρόλεξου διατίθενται τρία ψηφία, με τα οποία μπορούν να παρασταθούν οι προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί από -4 έως $+3$. Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 100, αφού το πιο σημαντικό ψηφίο σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 έχει βαρύτητα $-2^n - 1$, δηλαδή για αριθμό ψηφίων $\boldsymbol{n} = 3$, η βαρύτητα του εν λόγω ψηφίου είναι -4.

Άσκηση 17

■	1 1	■	■	■	■	■	2 0	■	■	■	■
3	0				4		1	■	■	■	5
■	0	■	■	■		■	1	■	6	■	
7 1	0	0	■	8			1				
■	1	■	■	■		■	0	■		■	
9	1	10		■		■	0	■		■	■
■	■		■	11	■	■	12 1	1	0	0	■
■	■		■		■	■	0	■		■	■
■	13						■	14			

✓ Βασικές πράξεις δυαδικών αριθμών

Πρόσθεση μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Άσκηση 18

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των δεκαδικών αριθμών 45 και 61 στο δυαδικό σύστημα, μετατρέπουμε τους δύο δεκαδικούς αριθμούς σε δυαδικούς και εκτελούμε την πράξη της πρόσθεσης δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στο χειρισμό των κρατουμένων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι από την πρόσθεση τριών μονάδων προκύπτει άθροισμα 1 και κρατούμενο 1 (δηλαδή 11 που αντιστοιχεί στο δεκαδικό αριθμό 3) και ότι η εν λόγω άσκηση αφορά μη προσημασμένους αριθμούς.

Άσκηση 18

$$
\begin{array}{cccccccccl}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & & & \leftarrow \text{Κρατούμενα από προηγούμενη θέση} \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & (45)_{10} \\
+ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & (61)_{10} \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & (106)_{10}
\end{array}
$$

Άσκηση 19

Να προσθέσετε τους μη προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς 101101, 110101, 001101, 010001, εκτελώντας την πράξη ανά ζεύγη αριθμών και στη συνέχεια εκτελώντας την πράξη σε μία μόνο φάση με το σύνολο των αριθμών.

Η πρόσθεση των αριθμών που δίνονται, ανά ζεύγη, δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία, αρκεί να μεταφέρετε σωστά στην επόμενη θέση τα κρατούμενα ψηφία που προκύπτουν κατά την πρόσθεση σε μία θέση. Αφού προσθέσετε τα δύο ζεύγη των αριθμών, στη συνέχεια θα πρέπει να εκτελέσετε την πρόσθεση των επιμέρους αθροισμάτων.

Άσκηση 19

$$
\begin{array}{ccccccccl}
1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & (45)_{10} \\
+ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & (53)_{10} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & (98)_{10}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccl}
 & & & & & 1 & & \leftarrow \text{Κρατούμενα προηγούμενης θέσης} \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & (13)_{10} \\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & (17)_{10} \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (30)_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccl}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \leftarrow \text{Κρατούμενα προηγούμενης θέσης} \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (98)_{10} \\
+ & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (30)_{10} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (128)_{10}
\end{array}
$$

Άσκηση 19

Κατά την εκτέλεση της πρόσθεσης σε μία φάση με το σύνολο των αριθμών, θα πρέπει να δώσετε ιδιαίτερη προσοχή στα κρατούμενα που προκύπτουν κατά την πρόσθεση σε κάθε θέση. Για παράδειγμα, η πρόσθεση των ψηφίων στη λιγότερο σημαντική θέση έχει αποτέλεσμα $1 + 1 + 1 + 1 = 100$, που σημαίνει ότι το ψηφίο του αθροίσματος στη θέση αυτή είναι 0 και ότι η κρατούμενη ποσότητα αποτελείται από δύο ψηφία και είναι 10. Θα πρέπει, λοιπόν, κατά την πρόσθεση στην επόμενη θέση να μεταφερθεί και να προστεθεί με τα ψηφία αυτής, η εν λόγω κρατούμενη ποσότητα.

Άσκηση 19

	10	10	10	10	1	10		←	Κρατούμενη ποσότητα προηγούμενης θέσης
		1	0	1	1	0	1		$(45)_{10}$
		1	1	0	1	0	1		$(53)_{10}$
		0	0	1	1	0	1		$(13)_{10}$
+		0	1	0	0	0	1		$(17)_{10}$
1	0	0	0	0	0	0	0		$(128)_{10}$

Αφαίρεση μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών

- Για την εκτέλεση της αφαίρεσης δύο μη προσημασμένων αριθμών n δυαδικών ψηφίων, προσθέτουμε στον μειωτέο (Μ) το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου (Α), δηλαδή εκτελούμε την πράξη:
$$M + (2^n – A) = M – A + 2^n.$$
- Λόγω του ότι ο αριθμός 2^n στο δυαδικό σύστημα συνίσταται από μία μονάδα ακολουθούμενη από n μηδενικά, εάν $M \geq A$, στο αποτέλεσμα της πρόσθεσης προκύπτει μονάδα στην πιο σημαντική θέση (τελικό κρατούμενο), η οποία θα πρέπει να αγνοηθεί.
- Εάν $M < A$, το αποτέλεσμα της πρόσθεσης θα είναι: $2^n – (A – M)$, δηλαδή το συμπλήρωμα ως προς 2 του $A – M$.
- Στην περίπτωση αυτή, η διαφορά $M – A$ είναι αρνητικός αριθμός και η τιμή του προκύπτει με τον υπολογισμό του συμπληρώματος ως προς 2 του αποτελέσματος της πρόσθεσης του μειωτέου με το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου.

Άσκηση 20

Υπολογίζουμε τη διαφορά των δεκαδικών αριθμών 77 και 23, θέτοντας διαδοχικά και στους δύο αριθμούς το ρόλο του μειωτέου και του αφαιρετέου. Μετατρέπουμε τους δύο δεκαδικούς αριθμούς σε δυαδικούς, υπολογίζουμε το συμπλήρωμά τους ως προς 2 και εκτελούμε διαδοχικά τις πράξεις 77–23 και 23 – 77, προσθέτοντας στον μειωτέο το συμπλήρωμα του αφαιρετέου.

$$(77)_{10} = 1001101, \text{ συμπλήρωμα ως προς 2: } 0110011$$

$$(23)_{10} = 0010111, \text{ συμπλήρωμα ως προς 2: } 1101001$$

Άσκηση 20

	1	0	0	1	1	0	1	$(77)_{10}$
+	1	1	0	1	0	0	1	Συμπλήρωμα ως προς 2 του $(23)_{10}$
1	0	1	1	0	1	1	0	

Λόγω του ότι ο μειωτέος είναι μεγαλύτερος του αφαιρετέου, αγνοούμε το τελικό κρατούμενο και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι: $0110110 = (54)_{10}$.

Άσκηση 20

	0	0	1	0	1	1	1	$(23)_{10}$
+	0	1	1	0	0	1	1	Συμπλήρωμα ως προς 2 του $(77)_{10}$
	1	0	0	1	0	1	0	

Λόγω του ότι ο μειωτέος είναι μικρότερος του αφαιρετέου, η διαφορά τους είναι αρνητικός αριθμός, η τιμή του οποίου είναι το συμπλήρωμα ως προς 2 του αποτελέσματος της διενεργηθείσας πρόσθεσης: $0110110 = (54)_{10}$.

Πρόσθεση και αφαίρεση προσημασμένων αριθμών

- Οι προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί που παριστάνονται με μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, προστίθενται (συμπεριλαμβανομένου του ψηφίου που κατέχει θέση προσήμου), χωρίς προηγούμενη επεξεργασία.

- Εάν στο αποτέλεσμα της πρόσθεσης, το οποίο, επίσης, παριστάνεται με μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, προκύψει τελικό κρατούμενο (δηλαδή κρατούμενο στην πιο σημαντική θέση), αγνοείται.

- Η πράξη της αφαίρεσης προσημασμένων αριθμών ανάγεται σε πρόσθεση του μειωτέου με τον αντίθετο αριθμό του αφαιρετέου, ο οποίος μπορεί να παρασταθεί με το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου.

Άσκηση 21

Εκτελούμε τις πράξεις $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, $- \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ και $- \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, όταν $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ είναι προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί τεσσάρων ψηφίων σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2, με $\boldsymbol{A} = 0011 = (+3)_{10}$ και $\boldsymbol{B} = 1100 = (-4)_{10}$.

$$
\begin{array}{ccccc l}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & \boldsymbol{A} \\
+ & 1 & 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{B} \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & (-1)_{10}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc l}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & \boldsymbol{A} \\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & -\boldsymbol{B} \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 1 & (+7)_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc l}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\boldsymbol{A} \\
+ & 1 & 1 & 0 & 0 & +\boldsymbol{B} \\
\hline
\cancel{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & (-7)_{10}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc l}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\boldsymbol{A} \\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & -\boldsymbol{B} \\
\hline
\cancel{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & (+1)_{10}
\end{array}
$$

Άσκηση 21

Παρατηρήστε ότι οι αρνητικοί αριθμοί που συμμετέχουν στις πράξεις καθώς και τα αρνητικά αποτελέσματα των πράξεων βρίσκονται σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2 και ότι τα κρατούμενα που προκύπτουν στην πιο σημαντική θέση αγνοούνται.

Άσκηση 22

Υπερχείλιση

Κατά την πρόσθεση των θετικών δυαδικών αριθμών $0111 = (+7)_{10}$ και $0100 = (+4)_{10}$ προκύπτει λανθασμένο αρνητικό αποτέλεσμα, δηλαδή $1011 = (-5)_{10}$, λόγω της υπερχείλισης. Αυτό συμβαίνει διότι το ορθό αποτέλεσμα $01011 = (+11)_{10}$ είναι μεγαλύτερο από το μεγαλύτερο δυνατό θετικό αριθμό που μπορεί να παρασταθεί με 4 δυαδικά ψηφία, δηλαδή τον αριθμό $(+7)_{10}$. Επίσης, κατά την πρόσθεση των αρνητικών δυαδικών αριθμών $1100 = (-4)_{10}$ και $1010 = (-6)_{10}$ προκύπτει λανθασμένο θετικό αποτέλεσμα, δηλαδή $0110 = (+6)_{10}$, λόγω της υπερχείλισης, και αυτό συμβαίνει διότι το ορθό αποτέλεσμα $10110 = (-10)_{10}$ είναι μικρότερο από το μικρότερο δυνατό αρνητικό αριθμό που μπορεί να παρασταθεί με 4 δυαδικά ψηφία, δηλαδή το $(-8)_{10}$.

Άσκηση 23

Να προσθέσετε το μέγιστο θετικό ακέραιο αριθμό με τον ελάχιστο αρνητικό ακέραιο αριθμό που παριστάνονται με 16 δυαδικά ψηφία σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2.

Άσκηση 23

Οι αρνητικοί δυαδικοί αριθμοί παριστάνονται με το συμπλήρωμα ως προς 2 των αντίστοιχων θετικών. Οι αριθμοί που παριστάνονται με μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, προστίθενται χωρίς προηγούμενη επεξεργασία. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης παριστάνεται, επίσης, με μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2. Ο μέγιστος θετικός ακέραιος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με 16 δυαδικά ψηφία είναι ο αριθμός που αποτελείται από ένα μηδενικό στην περισσότερο σημαντική θέση, ακολουθούμενο από 15 μονάδες στις υπόλοιπες θέσεις.

Άσκηση 23

Ο ελάχιστος αρνητικός ακέραιος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με 16 δυαδικά ψηφία είναι ο αριθμός που αποτελείται από μία μονάδα στην περισσότερο σημαντική θέση, ακολουθούμενη από 15 μηδενικά στις υπόλοιπες θέσεις. Η πρόσθεση των δύο αριθμών έχει ως εξής:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccl}
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (+32767)_{10} \\
+ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-32768)_{10} \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (-1)_{10}
\end{array}
$$

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι αρνητικός αριθμός, του οποίου το συμπλήρωμα ως προς 2 μας παρέχει το μέγεθός του, που ισούται με 1.

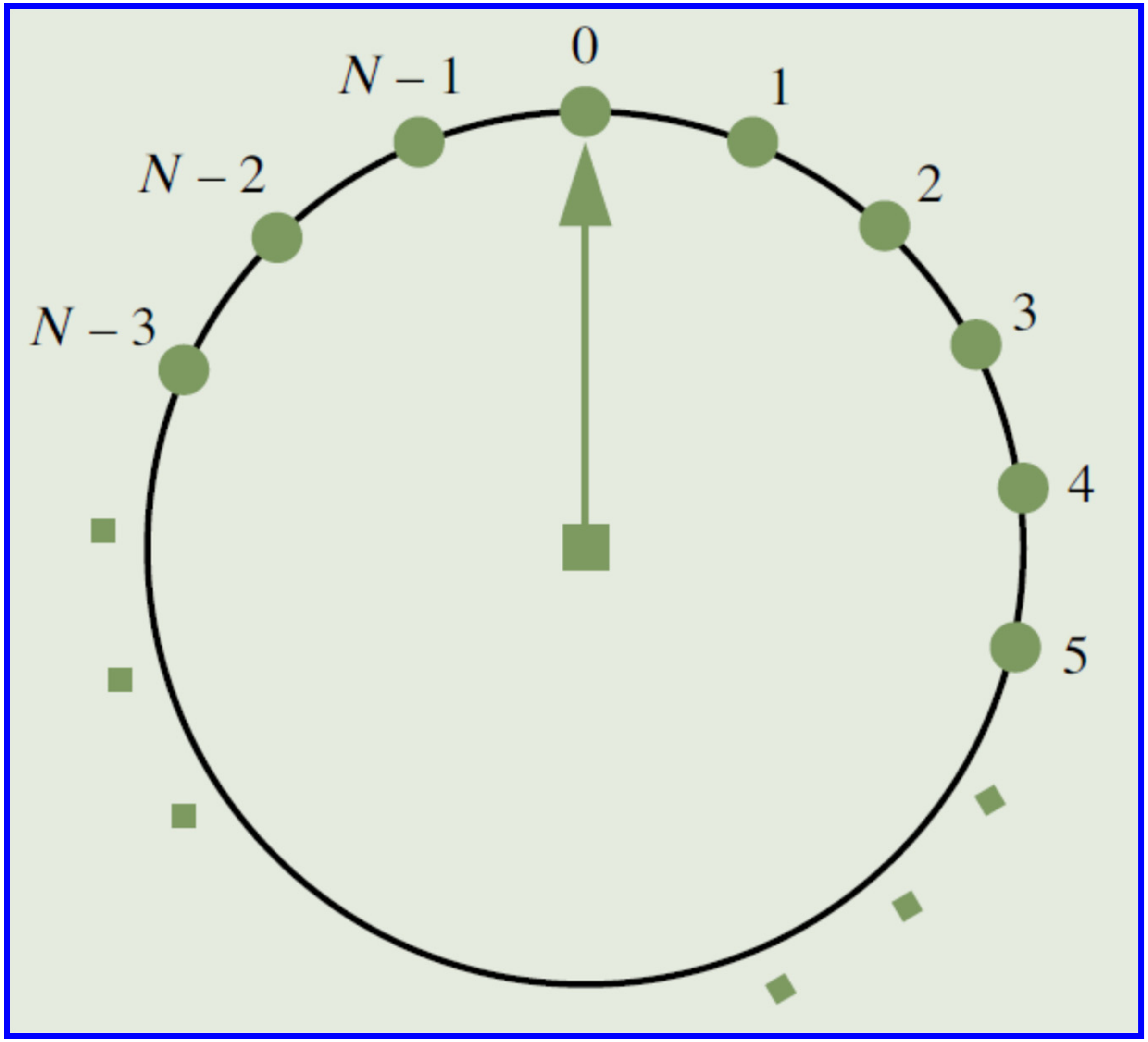
Άσκηση 24

Μια γραφική μέθοδος αναπαράστασης N θετικών ακέραιων αριθμών είναι το ρολόι της επόμενης διαφάνειας, που περιλαμβάνει στην περίμετρό του θέσεις από 0 έως $N - 1$, καθώς και ένα δείκτη μέσω της κίνησης του οποίου μπορούν να εκτελεστούν οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

α. Σχεδιάζοντας το ρολόι μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών για N=16, να υποδείξετε μια μέθοδο εκτέλεσης πρόσθεσης και αφαίρεσης, υποδεικνύοντας και τον κανόνα ύπαρξης τελικού κρατουμένου κατά την πρόσθεση.

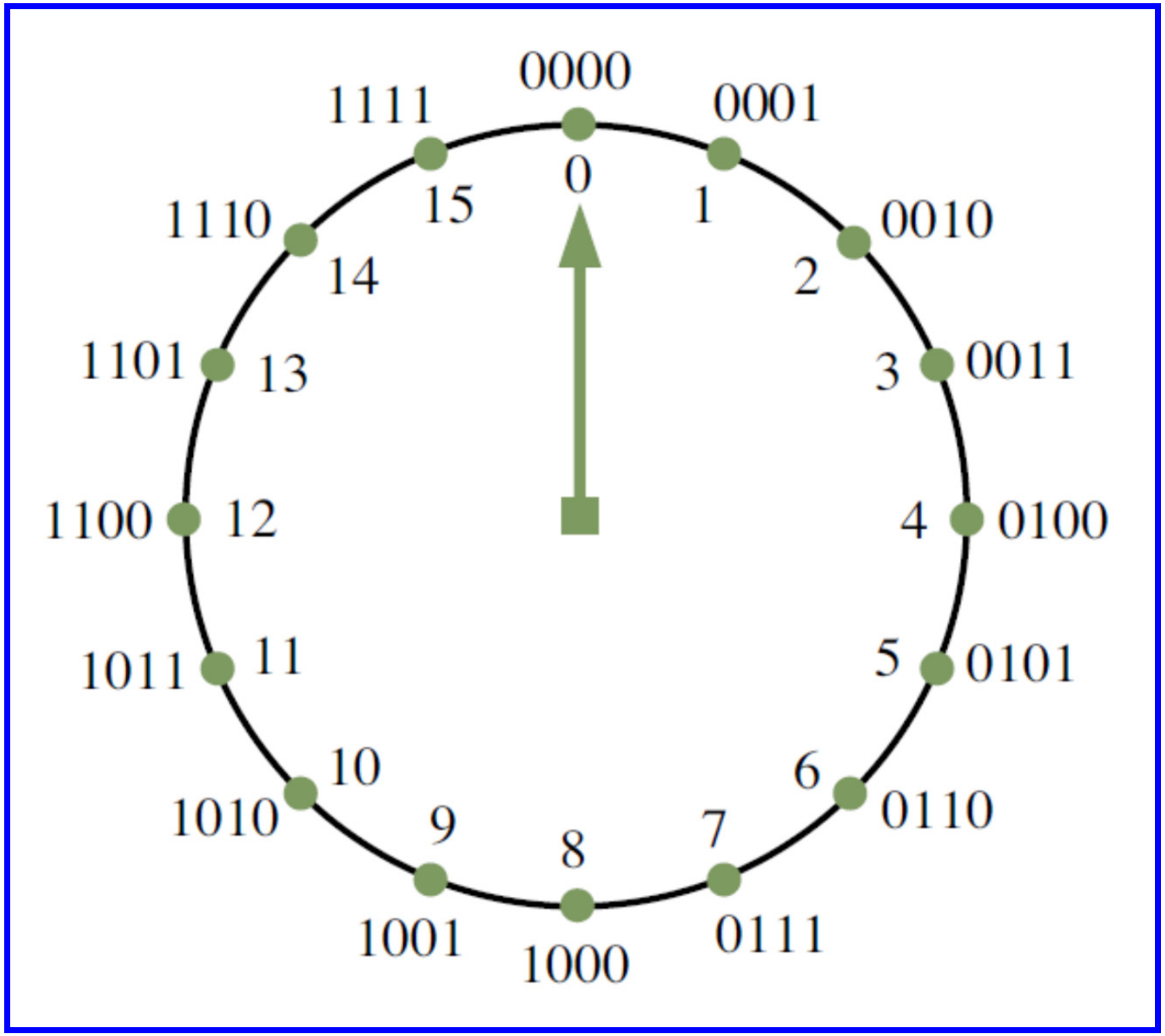
β. Σχεδιάστε αντίστοιχο ρολόι προσημασμένων δυαδικών αριθμών τεσσάρων ψηφίων σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2 και υποδείξτε τη διαδικασία εκτέλεσης πρόσθεσης και αφαίρεσης, υποδεικνύοντας και τον κανόνα ύπαρξης υπερχείλισης.

Άσκηση 24



Άσκηση 24

Ρολόι μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών



Άσκηση 24

Το ζητούμενο ρολόι για 16 μη προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτέλεση πρόσθεσης και αφαίρεσης με δεξιόστροφη κίνηση του δείκτη.

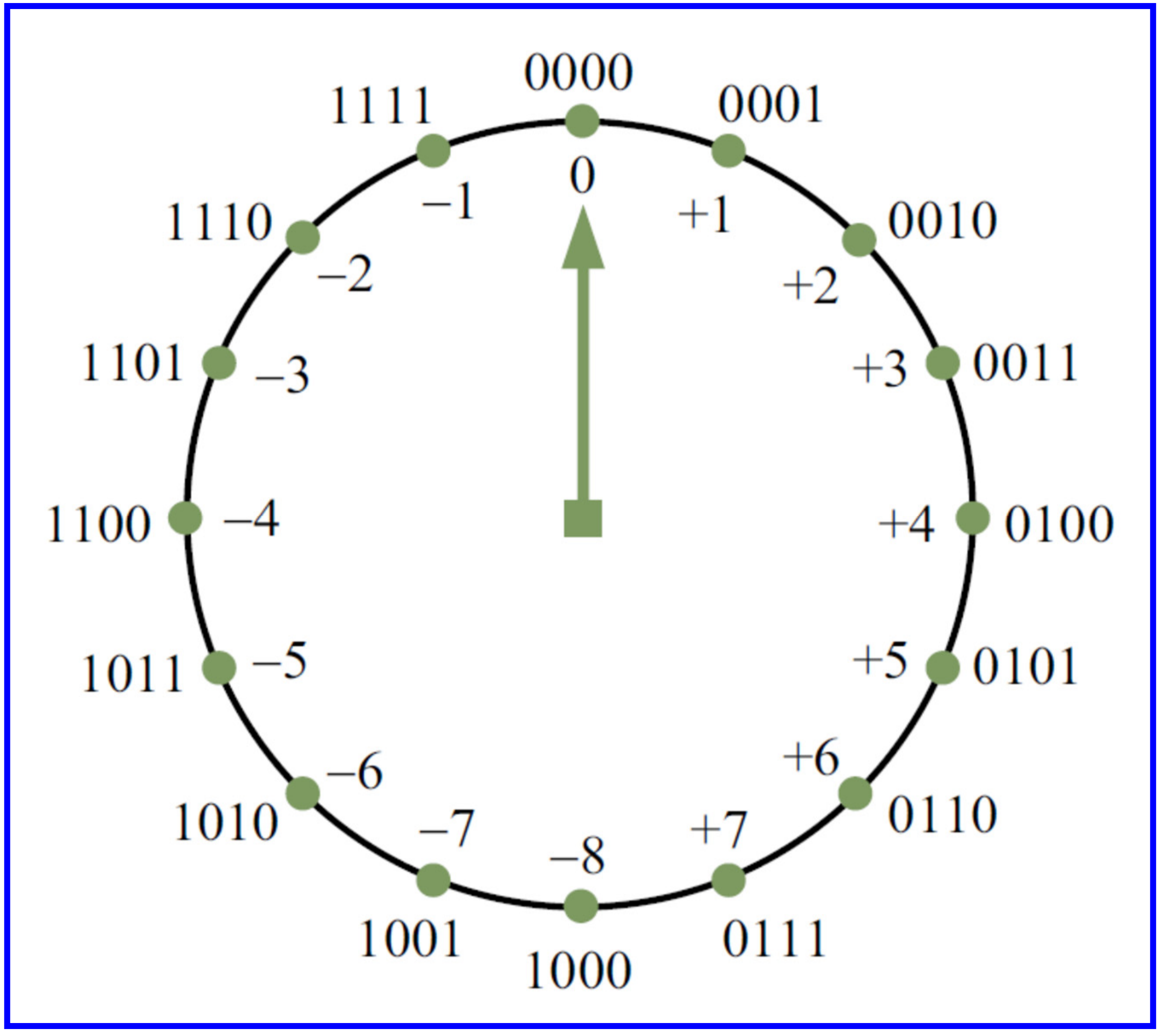
Για την πρόσθεση δύο αριθμών (π.χ. 3 + 9 ή 0011 + 1001), ξεκινώντας από τον αριθμό 0011 μετακινούμε το δείκτη δεξιόστροφα κατά 9 θέσεις και καταλήγουμε στο άθροισμα που είναι ο αριθμός 12 (1100). Εάν το ζητούμενο άθροισμα είναι μεγαλύτερο του 15 (π.χ. 3 + 14 = 17 ή 0011 + 1110 = 10001), η τελική θέση του δείκτη θα είναι ο αριθμός 0001, δηλαδή θα απουσιάζει το κρατούμενο ψηφίο που προκύπτει από την πρόσθεση στην πιο σημαντική θέση. Συνεπώς, ο κανόνας ύπαρξης κρατουμένου είναι η μετάβαση του δείκτη από τη θέση 15 στη θέση 0.

Άσκηση 24

Η αφαίρεση ανάγεται σε πρόσθεση στον μειωτέο του συμπληρώματος ως προς 2 του αφαιρετέου. Συνεπώς, όταν πρόκειται για αφαίρεση θα πρέπει να μετακινήσετε το δείκτη δεξιόστροφα τόσες θέσεις, όσες υποδεικνύει το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου. Για παράδειγμα, κατά την εκτέλεση της αφαίρεσης 9−3 (1001−0011), ξεκινώντας από τον αριθμό 1001 μετακινούμε το δείκτη δεξιόστροφα κατά 13 θέσεις (αφού το συμπλήρωμα ως προς 2 του 0011 είναι ο αριθμός 1101 με αντίστοιχο δεκαδικό τον αριθμό 13) και καταλήγουμε στη διαφορά που είναι ο αριθμός 6 (0110). Εναλλακτικά, για την αφαίρεση θα μπορούσε να υιοθετηθεί η αριστερόστροφη κίνηση του δείκτη κατά το πλήθος θέσεων που υποδεικνύεται από τον μειωτέο.

Άσκηση 24

Ρολόι προσημασμένων δυαδικών αριθμών .



Άσκηση 24

Το αντίστοιχο ρολόι προσημασμένων δυαδικών αριθμών τεσσάρων ψηφίων σε παράσταση συμπληρώματος ως προς 2, θα πρέπει να περιλαμβάνει τους αριθμούς της τελευταίας στήλης του πίνακα που προαναφέρθηκε. Για την πρόσθεση δύο προσημασμένων αριθμών (π.χ. των αριθμών +3 και –7 ή 0011 και 1001), ξεκινώντας από τον αριθμό 0011 μετακινούμε το δείκτη δεξιόστροφα κατά 9 θέσεις (αφού η αντίστοιχη δεκαδική τιμή του αριθμού 1001 είναι ο αριθμός 9) και καταλήγουμε στο άθροισμα που είναι ο αριθμός –4 (1100). Η πράξη της αφαίρεσης προσημασμένων αριθμών ανάγεται σε πρόσθεση του μειωτέου με τον αντίθετο αριθμό του αφαιρετέου. Υπερχείλιση κατά την πρόσθεση δύο προσημασμένων αριθμών συμβαίνει όταν οι αριθμοί είναι ομόσημοι και το άθροισμα που προκύπτει έχει διαφορετικό πρόσημο από τους αριθμούς που προστίθενται.

Άσκηση 24

Επιχειρώντας δοκιμές στο ρολόι των προσημασμένων αριθμών, μπορείτε να παρατηρήσετε ότι, εάν προσθέτετε θετικούς αριθμούς, υπερχείλιση συμβαίνει όταν υπάρχει διάβαση του δείκτη από τη θέση +7 στη θέση –8, ενώ εάν προσθέτετε αρνητικούς αριθμούς, υπερχείλιση συμβαίνει όταν δεν υπάρχει μετάβαση του δείκτη από τη θέση +7 στη θέση –8. Για παράδειγμα, κατά την πρόσθεση των αριθμών +7 και +4, υπάρχει μετάβαση του δείκτη από τη θέση +7 στη θέση –8 και η τελική του θέση είναι ο αριθμός –5 (1011), ενώ το ορθό αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι ο αριθμός +11 (01011). Το λανθασμένο αποτέλεσμα οφείλεται στην υπερχείλιση, κατά την οποία το ψηφίο-πρόσημο έχει μετατοπιστεί από την αναμενόμενη θέση του λόγω μη επάρκειας του πλήθους των ψηφίων.

Πρόσθεση 8δικων και 16δικών αριθμών – Άσκηση 25

Προσθέτουμε στο οκταδικό σύστημα τους αριθμούς 456 και 122 και στο δεκαεξαδικό σύστημα τους αριθμούς ABC και EDF.

Στο οκταδικό σύστημα εκτελούμε την πρόσθεση ανά ψηφίο και όταν προκύπτει άθροισμα S > 7, το άθροισμα ισούται με S – 8 (βάση) και το κρατούμενο με 1 (μία οκτάδα). Παρομοίως, εκτελούμε την πρόσθεση στο δεκαεξαδικό σύστημα, όπου γνωρίζουμε ότι βάση είναι το 16 και ότι για τα ψηφία άνω του 9 χρησιμοποιούνται τα λατινικά γράμματα A, B, C, D, E, F.

```
  1 1
  4 5 6
+ 1 2 2
-------
  6 0 0
```

```
 1 1 1
   A B C
+  E D F
--------
 1 9 9 B
```

Πολλαπλασιασμός δυαδικών αριθμών – Άσκηση 26

Υπολογίζουμε το γινόμενο των μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών $01100 = (12)_{10}$ και $10101 = (21)_{10}$, καθώς και των αριθμών $101110110 = (374)_{10}$ και $110101000 = (424)_{10}$.

$$
\begin{array}{cccccccccccl}
 & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & (12)_{10} \\
\times & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & (21)_{10} \\
\hline
 & & & & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
+ & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
\hline
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & (252)_{10}
\end{array}
$$

Άσκηση 26

$(374)_{10}$										1	0	1	1	1	0	1	1	0
× $(424)_{10}$										1	1	0	1	0	1	0	0	0
										1								
									1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
								10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
							10	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
						10	1	0	1	1	1	0	1	1	0			
					10	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
				10	1	0	1	1	1	0	1	1	0					
			1	0	0	0	0	0	0	0	0	0						
		1	1	0	1	1	1	0	1	1	0							
		1	0	1	1	1	0	1	1	0								
$(158576)_{10}$	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0

Διαίρεση δυαδικών αριθμών – Άσκηση 27

Διαιρούμε του δυαδικούς αριθμούς $1110111 = (119)_{10}$ και $1001 = (9)_{10}$:

$(119)_{10}$: διαιρετέος

$$
\begin{array}{cccccccc|cccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{9-12}
- & 1 & 0 & 0 & 1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{1-5}
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 & - & 1 & 0 & 0 & 1 & \downarrow & \downarrow & & & & \\ \cline{2-6}
 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \downarrow & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & \downarrow & & & & \\ \cline{3-7}
 & & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & - & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & &
\end{array}
$$

$(9)_{10}$: διαιρέτης

$(13)_{10}$: πηλίκο

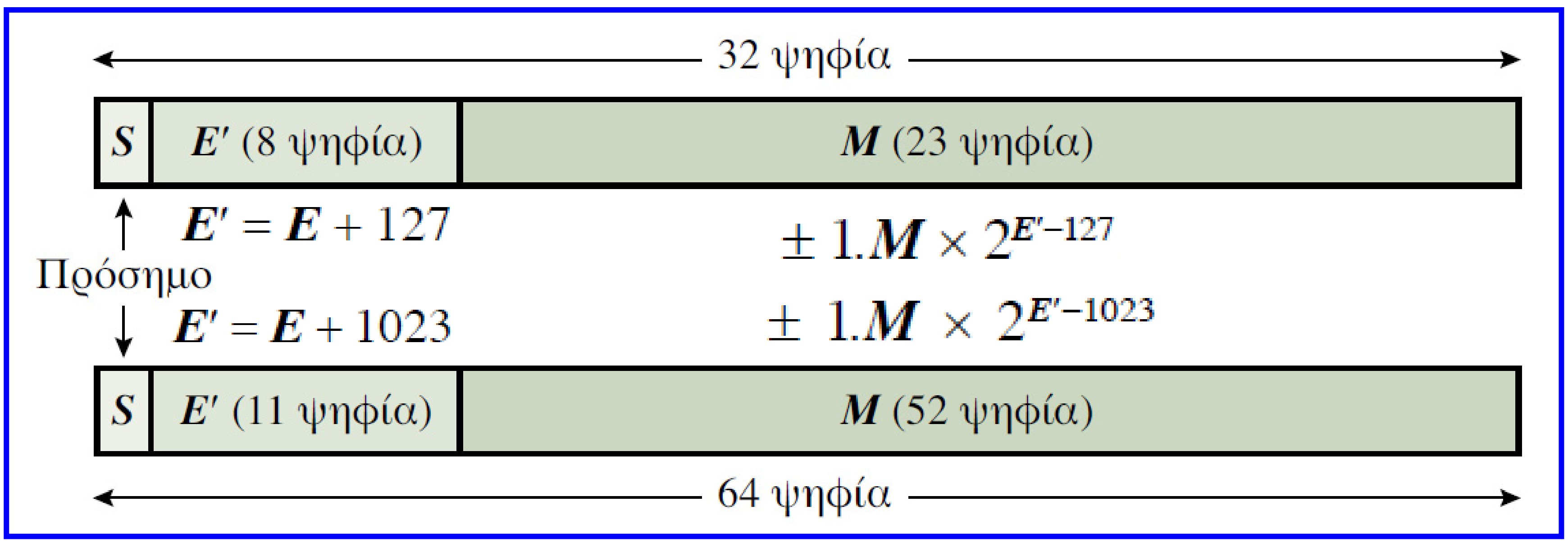
$(2)_{10}$: υπόλοιπο

Παρατηρήστε ότι κατά το τρίτο βήμα της διαίρεσης δεν εκτελείται αφαίρεση και το αντίστοιχο ψηφίο του πηλίκου είναι 0, αφού ο διαιρέτης είναι μεγαλύτερος από το μειωμένο τμήμα του διαιρετέου.

✓ Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

- Για να ικανοποιηθεί η ανάγκη παράστασης πολύ μεγάλων ακέραιων και πολύ μικρών κλασματικών αριθμών, στα ψηφιακά υπολογιστικά συστήματα έχει υιοθετηθεί η παράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής (floating point numbers).
- Πρότυπο παράστασης αριθμών κινητής υποδιαστολής IEEE 754.



Άσκηση 28

Για την παράσταση του δεκαδικού αριθμού 47.3125, σύμφωνα με το πρότυπο κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας που έχει καθοριστεί από το IEEE, αρχικά μετατρέπουμε το δεκαδικό αριθμό σε δυαδικό με βάση τη διαδικασία μετατροπής δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό και προκύπτει ο δυαδικός αριθμός: $(47.3125)_{10} = (101111.0101)_2$. Ο αριθμός αυτός μπορεί να γραφεί ως 101111.0101×2^0, χωρίς προφανώς να αλλοιωθεί η τιμή του.

Άσκηση 28

Για να κανονικοποιήσουμε τον αριθμό αυτόν, θα πρέπει να μετατοπίσουμε την υποδιαστολή πέντε θέσεις προς τα αριστερά, με αποτέλεσμα την αύξηση του εκθέτη κατά 5, δηλαδή: 1.011110101×2^5. Η τιμή του αριθμού $\boldsymbol{E'}$ που επέχει θέση εκθέτη σύμφωνα με το πρότυπο είναι $\boldsymbol{E'} = 5 + 127 = 132$, με αντίστοιχο δυαδικό αριθμό τον αριθμό 10000100. Με βάση τα παραπάνω, η παράσταση του δεκαδικού αριθμού 47.3125, σύμφωνα με το πρότυπο κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας που έχει καθοριστεί από το IEEE, έχει ως εξής:

0	1 0 0 0 0 1 0 0	0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Επισημαίνεται η ανάγκη προσάρτησης μηδενικών στις λιγότερο σημαντικές θέσεις του κλασματικού μέρους και στις περισσότερο σημαντικές θέσεις του εκθέτη, εφόσον αυτό είναι απαραίτητο για τη συμπλήρωση 23 και 8 ψηφίων, αντίστοιχα.

Πρόσθεση και αφαίρεση

Κατά την πρόσθεση ή αφαίρεση δύο αριθμών κινητής υποδιαστολής, αρχικά επιλέγουμε τον αριθμό με το μικρότερο εκθέτη και μετατοπίζουμε το κλασματικό του μέρος δεξιά τόσες θέσεις, όση είναι η διαφορά των εκθετών των δύο αριθμών. Ως εκθέτης του αποτελέσματος λαμβάνεται ο μεγαλύτερος από τους εκθέτες των δύο αριθμών. Στη συνέχεια εκτελείται πρόσθεση ή αφαίρεση των κλασματικών μερών (συμπεριλαμβανομένων των ψηφίων που βρίσκονται αριστερά της υποδιαστολής), και καθορίζεται το πρόσημο του αθροίσματος ή της διαφοράς.

Άσκηση 29

Για την εκτέλεση της πράξης $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, με $\boldsymbol{A} = 1.101101 \times 2^4$ και $\boldsymbol{B} = 1.101011 \times 2^6$, θα πρέπει αρχικά να παραστήσουμε τους δύο αριθμούς σύμφωνα με το πρότυπο του IEEE για αριθμούς κινητής υποδιαστολής. Χρησιμοποιούμε την παράσταση απλής ακρίβειας και, αφού υπολογίσουμε τους αριθμούς $\boldsymbol{E'}_A$ και $\boldsymbol{E'}_B$ που αντιστοιχούν στους εκθέτες των δύο αριθμών, σχηματίζουμε στη συνέχεια την παράστασή τους σύμφωνα με το πρότυπο του IEEE:

$$\boldsymbol{E'}_A = 4 + 127 = 131 \text{ ή } 10000011, \boldsymbol{E'}_B = 6 + 127 = 133 \text{ ή } 10000101$$

	Πρόσημο	Εκθέτης	Mantissa
A:	0	1 0 0 0 0 0 1 1	1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
B:	0	1 0 0 0 0 1 0 1	1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Άσκηση 29

Λόγω του ότι $E'_B > E'_A$, προκύπτει ότι: $E'_C = E'_B = 10000101$. Οι εκθέτες διαφέρουν κατά 2, συνεπώς το κλασματικό μέρος του αριθμού με το μικρότερο εκθέτη (δηλαδή ο αριθμός $\boldsymbol{A}$) θα πρέπει να μετατοπιστεί δεξιά κατά δύο θέσεις, ενέργεια που έχει το εξής αποτέλεσμα: 0.01101101. Η αφαίρεση των κλασματικών μερών μπορεί να αναχθεί σε πρόσθεση του κλασματικού μέρους του $\boldsymbol{A}$ με το συμπλήρωμα ως προς 2 του κλασματικού μέρους του $\boldsymbol{B}$ (δηλαδή του αριθμού 0.010101). Επίσης, επειδή το κλασματικό μέρος του $\boldsymbol{B}$ είναι μεγαλύτερο από το κλασματικό μέρος του $\boldsymbol{A}$, θα πρέπει να υπολογίσουμε το συμπλήρωμα του αποτελέσματος της πρόσθεσης και να θέσουμε αρνητικό πρόσημο στον αριθμό που προκύπτει:

$$\begin{array}{r}
0.\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;0\;1 \\
+\;0.\;0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\;0 \\
\hline
0.\;1\;1\;0\;0\;0\;0\;0\;1
\end{array}$$

Άσκηση 29

Το συμπλήρωμα ως προς 2 του αποτελέσματος της πρόσθεσης είναι: 1.00111111, συνεπώς η παράσταση κινητής υποδιαστολής του αριθμού $\boldsymbol{C}$ έχει ως εξής:

1	1 0 0 0 0 1 0 1	0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Το αποτέλεσμα της παραπάνω αφαίρεσης μπορεί να επαληθευτεί εύκολα στο δεκαδικό σύστημα, αφού προκύπτει ότι: $\boldsymbol{A} = 27.25$, $\boldsymbol{B} = 107$ και $\boldsymbol{C} = -79.75$.

Άσκηση 30

Παριστάνουμε τους αριθμούς **X** = 53.625 και **Y** = − 215.25 σύμφωνα με το πρότυπο IEEE 754 απλής ακρίβειας και εκτελούμε την πράξη **X** + **Y**.

Άσκηση 30

Ακολουθώντας τη διαδικασία μετατροπής δεκαδικών αριθμών σε δυαδικούς, η δυαδική παράσταση των αριθμών έχει ως εξής: $X = (53.625)_{10} = (110101.101)_2$ και $Y = (-215.25)_{10} = (-11010111.01)_2$. Οι αριθμοί αυτοί μπορούν να γραφούν ως $X = 110101.101 \times 2^0$ και $Y = -11010111.01 \times 2^0$, χωρίς να αλλοιωθεί η αρχική τιμή τους. Για να κανονικοποιήσετε τους αριθμούς αυτούς, θα πρέπει να μετατοπίσετε την υποδιαστολή προς τα αριστερά τόσες θέσεις όσες απαιτούνται σε κάθε αριθμό, έτσι ώστε να είναι μονάδα το πιο σημαντικό ψηφίο τους, με αντίστοιχη αύξηση των εκθετών των αριθμών. Ύστερα από αυτό, οι δύο αριθμοί μπορούν να γραφούν ως $X = 1.10101101 \times 2^5$ και $Y = -1.101011101 \times 2^7$.

Άσκηση 30

Υπολογίζετε στη συνέχεια τους αριθμούς E'_X και E'_Y που αντιστοιχούν στους εκθέτες των δύο αριθμών και σχηματίζετε την παράστασή τους, σύμφωνα με το πρότυπο του IEEE απλής ακρίβειας:

$$E'_X = 5 + 127 = 132 \text{ ή } 10000100, E'_Y = 7 + 127 = 134 \text{ ή } 10000110$$

X:	0	1 0 0 0 0 1 0 0	1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Y:	1	1 0 0 0 0 1 1 0	1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Άσκηση 30

Πριν από τον υπολογισμό του αθροίσματος και της διαφοράς των δύο αριθμών, θα πρέπει να μετατοπίσετε το κλασματικό μέρος του αριθμού με το μικρότερο εκθέτη τόσες θέσεις προς τα δεξιά, όσες χρειάζονται για να εξισωθούν οι δύο εκθέτες. Ο μεγαλύτερος εκθέτης είναι και ο εκθέτης του αποτελέσματος των πράξεων. Οι εκθέτες διαφέρουν κατά 2, συνεπώς θα πρέπει να μετατοπίσετε δεξιά κατά δύο θέσεις το κλασματικό μέρος του αριθμού με το μικρότερο εκθέτη (δηλαδή του αριθμού $\boldsymbol{X}$), ενέργεια που έχει το εξής αποτέλεσμα: 0.0110101101. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των κλασματικών μερών των αριθμών $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$, πρέπει να υπολογίσετε το συμπλήρωμα ως προς 2 του κλασματικού μέρους του αριθμού $\boldsymbol{Y}$ συμπεριλαμβανομένης και της μονάδας αριστερά της υποδιαστολής (που είναι 0.0101000110) και να το προσθέσετε στο κλασματικό μέρος του αριθμού $\boldsymbol{X}$:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 0. & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
+ & 0. & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0. & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Άσκηση 30

Στη συνέχεια, επειδή το κλασματικό μέρος του ***Y*** είναι μεγαλύτερο από εκείνο του ***X***, θα πρέπει να υπολογίσετε το συμπλήρωμα ως προς 2 του παραπάνω αποτελέσματος και να θέσετε αρνητικό ψηφίο-πρόσημο (δηλαδή 1) στην ακόλουθη παράσταση κινητής υποδιαστολής του αθροίσματος:

1	1 0 0 0 0 1 1 0	0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση

Κατά τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών κινητής υποδιαστολής εκτελείται αρχικά πρόσθεση των εκθετών και αφαίρεση από το άθροισμα του αριθμού 127 (1023, όταν πρόκειται για αριθμούς διπλής ακρίβειας). Στη συνέχεια, εκτελείται πολλαπλασιασμός των κλασματικών μερών (συμπεριλαμβανομένων των ψηφίων που βρίσκονται αριστερά της υποδιαστολής) και καθορίζεται το πρόσημο του γινομένου. Κατά τη διαίρεση, εκτελείται αρχικά αφαίρεση των εκθετών και πρόσθεση στη διαφορά του αριθμού 127 (1023, όταν πρόκειται για αριθμούς διπλής ακρίβειας). Στη συνέχεια, διαιρούνται τα κλασματικά μέρη και καθορίζεται το πρόσημο του πηλίκου. Το αποτέλεσμα των τεσσάρων πράξεων που προαναφέρθηκαν θα πρέπει να κανονικοποιείται.

✓ Δυαδικοί κώδικες

Δυαδικοί κώδικες παράστασης δεδομένων

- Τα ψηφιακά συστήματα έχουν τη δυνατότητα να χειρίζονται, εκτός από δυαδικούς αριθμούς, διακριτά στοιχεία πληροφορίας που ανήκουν σε ένα πεπερασμένο σύνολο, αφού το καθένα από αυτά μπορεί να παρασταθεί με μία ακολουθία δυαδικών ψηφίων, σύμφωνα με τους κανόνες ενός δυαδικού κώδικα.
- Κάθε διαφορετικό στοιχείο πληροφορίας θα πρέπει να αντιστοιχίζεται σε μία μοναδική ακολουθία ή συνδυασμό δυαδικών ψηφίων.
- Για την παράσταση 2^N στοιχείων πληροφορίας (π.χ. αριθμών ή γραμμάτων, απαιτείται δυαδικός κώδικας που να χρησιμοποιεί τουλάχιστον N δυαδικά ψηφία.
- Βασικοί δυαδικοί κώδικες αφορούν την παράσταση δεκαδικών αριθμών και αλφαριθμητικών χαρακτήρων, καθώς και την ανίχνευση και διόρθωσης σφαλμάτων κατά τη μετάδοση και την επεξεργασία ψηφιακών δεδομένων.
- Για την κωδικοποίηση των 10 δεκαδικών ψηφίων απαιτούνται 4 δυαδικά ψηφία, συνεπώς από τους 16 συνδυασμούς δυαδικών ψηφίων παραμένουν 6 αχρησιμοποίητοι.

Κώδικας BCD

- Η κωδικοποίηση με τον κώδικα BCD (Binary Coded Decimal) βασίζεται στη χρήση των συντελεστών βαρύτητας 8, 4, 2, 1 για τα 4 δυαδικά ψηφία (κατά σειρά σημαντικότητας) κάθε συνδυασμού.
- Ο κώδικας BCD είναι ισοδύναμος με την παράσταση των 10 δεκαδικών ψηφίων στο δυαδικό σύστημα.
- Η παράσταση ενός δεκαδικού αριθμού στο δυαδικό σύστημα είναι διαφορετική από την παράστασή του σε κώδικα BCD.

Δεκαδικό ψηφίο	Κωδικοποίηση BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

18: 00011000

- Παράδειγμα: η παράσταση του δεκαδικού αριθμού 18 στο δυαδικό σύστημα είναι 10010 (5 ψηφία), ενώ η BCD κωδικοποίησή του προκύπτει από τη συνένωση των κωδικοποιημένων ψηφίων 1 και 8: 00011000 (8 ψηφία).

Πρόσθεση αριθμών BCD

- Κατά την πρόσθεση δύο δεκαδικών ψηφίων κωδικοποιημένων κατά BCD, όταν το δυαδικό άθροισμα είναι ίσο ή μικρότερο του 1001 (9), τότε ταυτίζεται με το άθροισμα κατά BCD.
- Όταν το δυαδικό άθροισμα είναι μεγαλύτερο του 1001 (δηλαδή δεν περιλαμβάνεται στον BCD), θα πρέπει να προσθέσουμε στο δυαδικό άθροισμα τον αριθμό 0110 (6).
- Θα προκύψει κρατούμενο δυαδικό ψηφίο, το οποίο θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την πρόσθεση των κωδικοποιημένων κατά BCD ψηφίων της πιο σημαντικής θέσης.
- Εάν προκύψει κρατούμενο δυαδικό ψηφίο κατά την αρχική πρόσθεση δύο BCD ψηφίων, αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την πρόσθεση των BCD ψηφίων της πιο σημαντικής θέσης.
- Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει, επίσης, να προστεθεί στο άθροισμα των BCD ψηφίων της λιγότερο σημαντικής θέσης ο αριθμός 0110 (6).

Άσκηση 31

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & 0 & 1 & 0 & 0 & & (4)_{10} \\
+ & 0 & 1 & 0 & 1 & & (5)_{10} \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & & (9)_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & (4)_{10} \\
 & & & & + & 1 & 0 & 0 & 0 & & (8)_{10} \\
\cline{5-9}
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & & + & 0 & 1 & 1 & 0 & & (6)_{10} \\
\cline{5-9}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \leftarrow & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & (12)_{10}
\end{array}
$$

Άσκηση 31

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & (24)_{10} \\
 & + & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 1 & 1 & (67)_{10} \\
\hline
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & + & & & & 1 & \leftarrow & 0 & 1 & 1 & 0 & (6)_{10} \\
\hline
 & & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & (91)_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 & (88)_{10} \\
 & & + & 1 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & (98)_{10} \\
\hline
1 & \leftarrow & & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & + & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 1 & 0 & (6)_{10} \\
\hline
\mathbf{0\ 0\ 0\ 1} & & & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & (186)_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & (84)_{10} \\
 & & + & 0 & 1 & 1 & 1 & & 0 & 1 & 1 & 0 & (76)_{10} \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & + & & & & 1 & \leftarrow & 0 & 1 & 1 & 0 & (6)_{10} \\
\hline
1 & \leftarrow & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & + & 0 & 1 & 1 & 0 & & & & & & (6)_{10} \\
\hline
\mathbf{0\ 0\ 0\ 1} & & & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (160)_{10}
\end{array}
$$

Κώδικας Gray

- Στον κώδικα Gray, κατά τη μετάβαση μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών υφίσταται αλλαγή μόνο ένα δυαδικό ψηφίο.
- Ο κώδικας Gray παρουσιάζει την ανακλαστική ιδιότητα και δεν ακολουθεί συντελεστές βαρύτητας.

αρχή	ανάκλαση	προσθήκη	ανάκλαση	προσθήκη	ανάκλαση	προσθήκη
0	0	00	00	000	000	0000
1	1	01	01	001	001	0001
	1	11	11	011	011	0011
	0	10	10	010	010	0010
			10	110	110	0110
			11	111	111	0111
			01	101	101	0101
			00	100	100	0100
					100	1100
					101	1101
					111	1111
					110	1110
					010	1010
					011	1011
					001	1001
					000	1000

Παραγωγή του κώδικα Gray με ανάκλαση

Δεκαδικός αριθμός	Κωδικοποίηση Gray
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

Δυαδικοί κώδικες αλφαριθμητικών χαρακτήρων

- Σε αρκετές εφαρμογές χρησιμοποιούνται εκτός από αριθμητικά δεδομένα και γράμματα ή σύμβολα.
- Δυαδικός κώδικας αλφαριθμητικών χαρακτήρων που χρησιμοποιείται ευρύτατα, είναι ο κώδικας ASCII (American Standard Code for Information Interchange, Πρότυπος Αμερικανικός Κώδικας Ανταλλαγής Πληροφοριών).

Χρησιμοποιεί 7 ψηφία για την κωδικοποίηση 128 χαρακτήρων (94 αλφαριθμητικοί και σύμβολα και 34 μη εκτυπώσιμοι χαρακτήρες ελέγχου)

Παράδειγμα:
Λέξη «if» σε ASCII
1101001 1100110

$b_4 b_3 b_2 b_1$	$b_7 b_6 b_5$ 000	$b_7 b_6 b_5$ 001	$b_7 b_6 b_5$ 010	$b_7 b_6 b_5$ 011	$b_7 b_6 b_5$ 100	$b_7 b_6 b_5$ 101	$b_7 b_6 b_5$ 110	$b_7 b_6 b_5$ 111
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	“	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	g	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	–	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων

- Η επίδραση του θορύβου (ανεπιθύμητων διακυμάνσεων των ψηφιακών σημάτων) στα ψηφιακά συστήματα, κατά τη μετάδοση ή την επεξεργασία δεδομένων, μπορεί να έχει αποτέλεσμα την αλλοίωση της τιμής ενός ή περισσότερων δυαδικών ψηφίων.

- Ένας τρόπος ανίχνευσης των σφαλμάτων είναι η προσθήκη ενός επιπλέον ψηφίου (ψηφίο ισοτιμίας, parity bit) σε κάθε κωδικοποιημένο χαρακτήρα ή αριθμό, έτσι ώστε το πλήθος των μονάδων που περιέχονται σε αυτόν να είναι περιττό ή άρτιο, δηλαδή να δημιουργείται κώδικας με περιττή ή άρτια ισοτιμία, αντίστοιχα.

- Για σύστημα που χρησιμοποιεί κωδικοποίηση ASCII, προσαρτούμε στην πιο σημαντική θέση κάθε κωδικοποιημένου χαρακτήρα ένα ψηφίο ισοτιμίας, ώστε να υποδηλώσουμε την ισοτιμία του.

Άσκηση 32

Ποια από τις παρακάτω επιλογές περιγράφει τις υποενότητες δεδομένων που συνιστούν την ακόλουθη ενότητα δεδομένων, η οποία αποτελείται από 40 δυαδικά ψηφία 0101000011001100010100110011010110110001;

α. Δεκαδικά ψηφία σε κώδικα BCD

β. Δεκαδικά ψηφία σε κώδικα με συντελεστές βαρύτητας 8, 4, –2, –1

γ. Χαρακτήρες κώδικα ASCII με ψηφίο άρτιας ισοτιμίας στην πιο σημαντική θέση

Άσκηση 32

Η άσκηση αυτή αποτελεί εφαρμογή για τους δυαδικούς κώδικες δεκαδικών ψηφίων και αλφαριθμητικών χαρακτήρων. Θα πρέπει να εξετάσετε κάθε επιλογή ξεχωριστά, διερευνώντας εάν η ενότητα δεδομένων που δίνεται αποτελείται από χαρακτήρες που χρησιμοποιούνται (δηλαδή είναι έγκυροι) στο δυαδικό κώδικα κάθε επιλογής. Ξεκινώντας από την επιλογή (α), αφού χωρίσουμε την ενότητα δεδομένων των 40 δυαδικών ψηφίων σε δέκα ακολουθίες των τεσσάρων δυαδικών ψηφίων, παρατηρούμε ότι η ακολουθία 1100 περιλαμβάνεται δύο φορές στην ενότητα δεδομένων (τρίτη και τέταρτη τετράδα ψηφίων, ξεκινώντας από την πιο σημαντική τετράδα) και η ακολουθία 1011 μία φορά (ένατη τετράδα ψηφίων), οι οποίες δε χρησιμοποιούνται στον κώδικα BCD, αφού δεν αντιστοιχούν σε ένα από τα δέκα δεκαδικά ψηφία.

Άσκηση 32

Διερευνώντας το ενδεχόμενο να ισχύει η επιλογή (β) παρατηρούμε ότι η ενότητα δεδομένων περιέχει τις ακολουθίες 1100, 0011, 0001 που δε χρησιμοποιούνται στον κώδικα με συντελεστές βαρύτητας 8, 4, -2, -1, αφού οι ακολουθίες αυτές, με βάση τους συντελεστές βαρύτητας του κώδικα, αντιστοιχούν κατά σειρά στους αριθμούς 12, -2, -1, που δεν περιλαμβάνονται στα 10 δεκαδικά ψηφία.

Ο κώδικας ASCII χρησιμοποιεί 7 δυαδικά ψηφία για την κωδικοποίηση κάθε χαρακτήρα. Με δεδομένο ότι στην επιλογή (γ) συμπεριλαμβάνεται πρόσθετο ψηφίο ισοτιμίας, αντιστοιχούν οκτώ ψηφία σε κάθε χαρακτήρα.

0 1010000 **1** 1001100 **0** 1010011 **0** 0110101 **1** 0110001

Με σχετικό έλεγχο, μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε ότι τηρείται η άρτια ισοτιμία (αφού σε όλες τις οκτάδες ψηφίων το συνολικό πλήθος των μονάδων είναι άρτιο) και χρησιμοποιώντας τον πίνακα του κώδικα, μπορείτε, επίσης, εύκολα να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι η ενότητα δεδομένων αποτελείται από χαρακτήρες του κώδικα που σχηματίζουν τη λέξη PLS51.

Άσκηση 33

Το παιχνίδι της πρέφας παίζεται με τα εξής φύλλα της τράπουλας: 7, 8, 9, 10, J (βαλές), Q (ντάμα), K (ρήγας), A (άσος) και των τεσσάρων σχημάτων (♠ μπαστούνι, ♣ σπαθί, ♦ καρό, ♥ κούπα). Να προσδιορίσετε ένα δυαδικό κώδικα για την παράσταση των φύλλων της τράπουλας με τα οποία παίζεται το παιχνίδι, χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό δυαδικών ψηφίων.

Άσκηση 33

Η πρέφα παίζεται με 32 φύλλα της τράπουλας. Με έναν δυαδικό κώδικα που χρησιμοποιεί ***n*** δυαδικά ψηφία μπορούν να παρασταθούν το πολύ 2^n διάκριτα στοιχεία πληροφορίας, αφού ***n*** δυαδικά ψηφία μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά με 2^n διαφορετικούς τρόπους (συνδυασμούς). Επομένως, το ελάχιστο πλήθος δυαδικών ψηφίων που απαιτούνται για να παρασταθούν με ένα δυαδικό κώδικα τα φύλλα της τράπουλας με τα οποία παίζεται το παιχνίδι είναι 5 (αφού $2^5 = 32$). Ο τρόπος αναπαράστασης των 32 φύλλων της τράπουλας με τα οποία παίζεται το παιχνίδι συνίσταται στο ότι τα 32 αυτά φύλλα μπορούν να χωριστούν σε τέσσερις ομάδες, ανάλογα με τα 4 σχήματα της τράπουλας. Τα 4 σχήματα της τράπουλας μπορείτε να τα κωδικοποιήσετε χρησιμοποιώντας 2 δυαδικά ψηφία (αφού $2_2 = 4$) και τα 8 φύλλα κάθε σχήματος χρησιμοποιώντας 3 δυαδικά ψηφία (αφού $2^3 = 8$).

Άσκηση 33

Επιμέρους κωδικοποίηση των σχημάτων και των φύλλων της πρέφας

Σχήμα	Κώδικας
♠	00
♣	01
♦	10
♥	11

Φύλλο	Κώδικας
7	000
8	001
9	010
10	011
J	100
Q	101
K	110
A	111

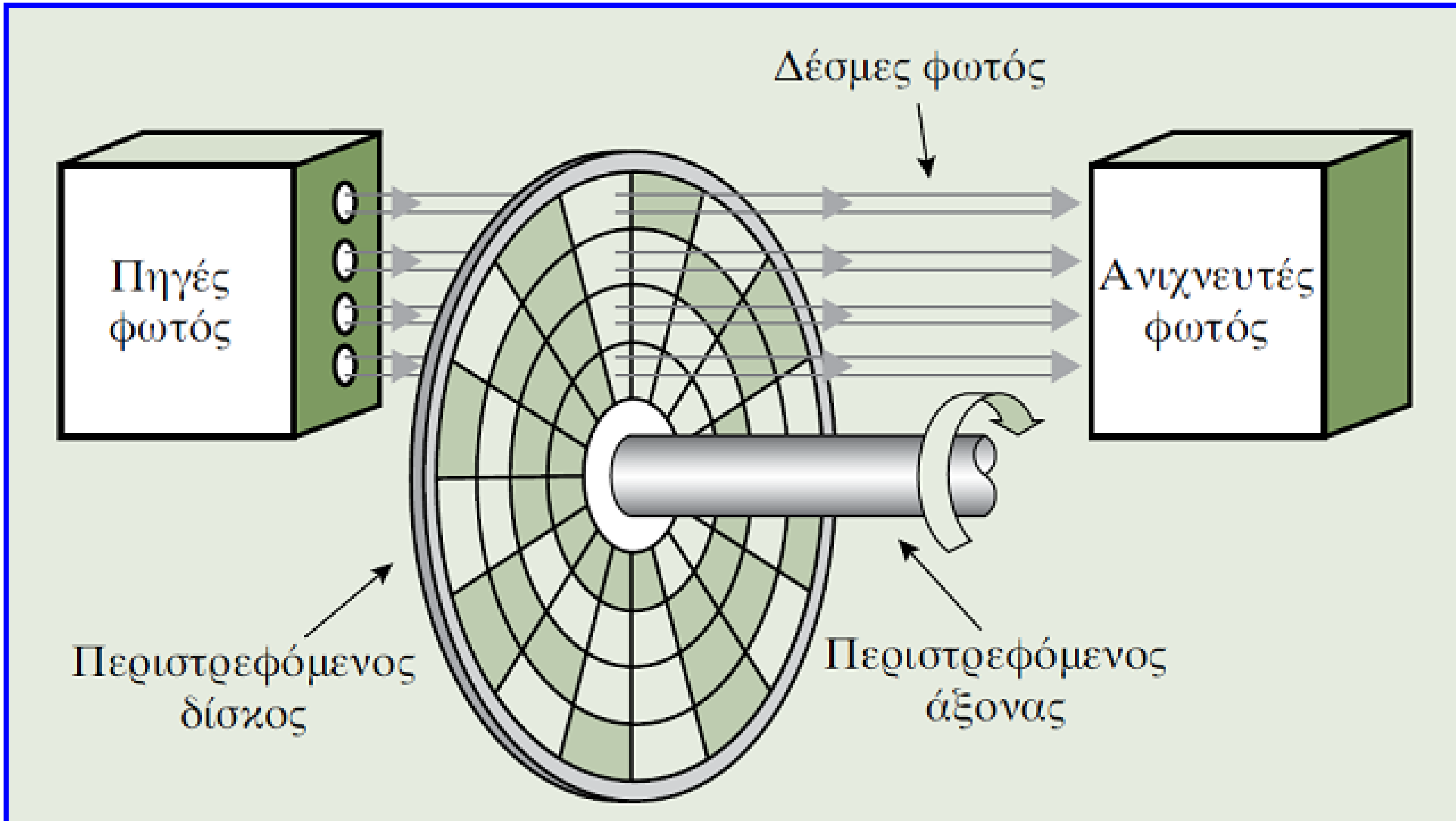
Άσκηση 33

Κώδικας πέντε δυαδικών ψηφίων των φύλλων της πρέφας

Φύλλο	Κώδικας	Φύλλο	Κώδικας	Φύλλο	Κώδικας	Φύλλο	Κώδικας
♠ 7	00000	♣ 7	01000	♦ 7	10000	♥ 7	11000
♠ 8	00001	♣ 8	01001	♦ 8	10001	♥ 8	11001
♠ 9	00010	♣ 9	01010	♦ 9	10010	♥ 9	11010
♠ 10	00011	♣ 10	01011	♦ 10	10011	♥ 10	11011
♠ J	00100	♣ J	01100	♦ J	10100	♥ J	11100
♠ Q	00101	♣ Q	01101	♦ Q	10101	♥ Q	11101
♠ K	00110	♣ K	01110	♦ K	10110	♥ K	11110
♠ A	00111	♣ A	01111	♦ A	10111	♥ A	11111

Άσκηση 34

Απόλυτος οπτικός κωδικοποιητής για μέτρηση γωνίας περιστροφής άξονα



Άσκηση 34

Οι δέσμες φωτός διέρχονται ή διακόπτονται από τα διαφανή ή τα αδιαφανή παράθυρα, αντίστοιχα. Οι διερχόμενες από το δίσκο δέσμες ανιχνεύονται από τους αντίστοιχους ανιχνευτές φωτός. Η τοποθέτηση των παραθύρων είναι τέτοια, ώστε σε κάθε τομέα να αντιστοιχεί ένας συνδυασμός δυαδικών ψηφίων, εάν θεωρηθεί ότι ένα αδιαφανές παράθυρο αντιστοιχεί στη δυαδική τιμή 0, ενώ ένα διαφανές παράθυρο αντιστοιχεί στην τιμή 1. Παρατηρήστε ότι ο δίσκος της συσκευής είναι κατασκευασμένος με βάση την κανονική δυαδική ακολουθία, με αποτέλεσμα κατά τη δεξιόστροφη περιστροφή του δίσκου να συμβαίνει αύξηση του αριθμού που τελικά ανιχνεύεται κατά μία μονάδα ανά τομέα. Στις συσκευές αυτές, επειδή οι δέσμες φωτός δεν ευθυγραμμίζονται απόλυτα, είναι πιθανό να προκύψουν

Άσκηση 34

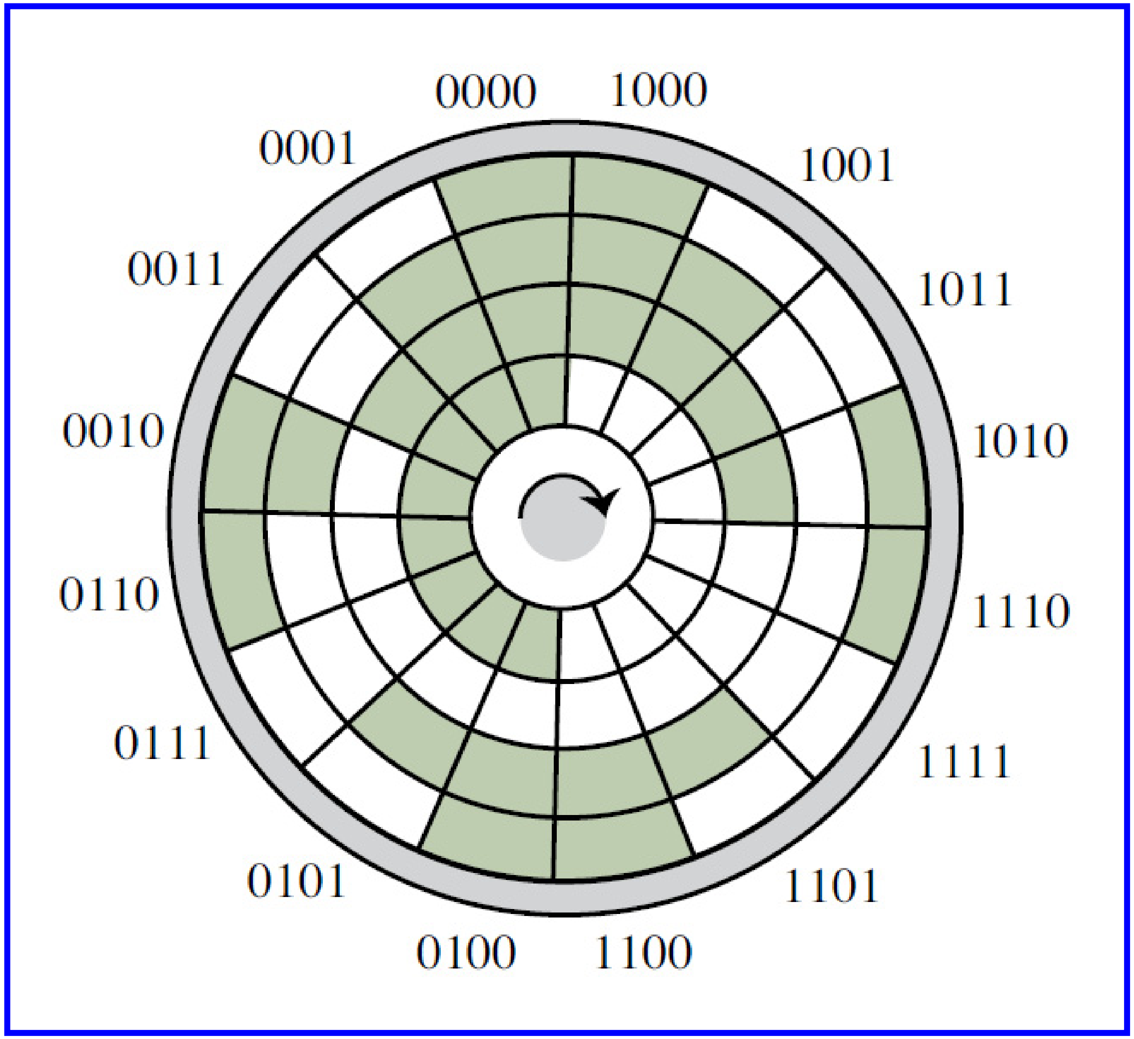
σφάλματα στα όρια των τομέων, αν λάβουμε υπόψη και ότι, λόγω της χρήσης του δυαδικού συστήματος, σε πολλές περιπτώσεις γειτονικών τομέων προκαλείται ταυτόχρονη αλλαγή κατάστασης σε περισσότερα από ένα παράθυρα. Για παράδειγμα, στο όριο των τομέων που αντιστοιχούν στους δυαδικούς αριθμούς 0001 και 0010, λόγω μη απόλυτης ευθυγράμμισης μπορεί να ανιχνευτεί εσφαλμένα ο αριθμός 0011 ή ο αριθμός 0000. Μεγαλύτερο σφάλμα μπορεί να προκληθεί όταν αλλάζει ταυτόχρονα η τιμή τριών ή τεσσάρων δυαδικών ψηφίων. Να προτείνετε μία λύση, όσον αφορά την τοποθέτηση των παραθύρων στο δίσκο, ώστε να μειωθούν οι επιπτώσεις του προβλήματος αυτού. Επίσης, να προσδιορίσετε τη διακριτική ικανότητα της συσκευής του σχήματος (δηλαδή τη μικρότερη γωνία περιστροφής που μπορεί να ανιχνεύσει) και να προτείνετε μία λύση για τη βελτίωση του χαρακτηριστικού αυτού.

Άσκηση 34

Επειδή οι δέσμες φωτός δεν ευθυγραμμίζονται απόλυτα, είναι πιθανό να προκύψουν σφάλματα στα όρια των τομέων του κωδικοποιητή, αν λάβουμε υπόψη και ότι, λόγω της χρήσης του δυαδικού συστήματος, σε πολλές περιπτώσεις προκαλείται ταυτόχρονη αλλαγή κατάστασης σε περισσότερα από ένα παράθυρα γειτονικών τομέων. Λαμβάνοντας υπόψη το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του κώδικα Gray, το οποίο συνίσταται στην αλλαγή της τιμής ενός μόνο δυαδικού ψηφίου κατά τη μετάβαση μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε για την τοποθέτηση των παραθύρων στο δίσκο. Η μικρότερη γωνία περιστροφής του άξονα που μπορεί να μετρηθεί με τον εν λόγω κωδικοποιητή είναι $360° / 2^4 = 22.5°$. Γενικεύοντας τη σχέση αυτή, προκύπτει ότι η μικρότερη γωνία περιστροφής είναι $360° / 2^n$, όπου $\boldsymbol{n}$ είναι το πλήθος των παραθύρων ανά τομέα και 2^n το πλήθος των τομέων του δίσκου.

Άσκηση 34

Τοποθέτηση παραθύρων με βάση τον κώδικα Gray



Τέλος 2ης ενότητας ασκήσεων