2. Αριθμητικά συστήματα, πράξεις και δυαδικοί κώδικες

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Μηχανικών Υπολογιστών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Αριθμητικά συστήματα

Το δεκαδικό σύστημα αποτελεί το πιο οικείο αριθμητικό σύστημα, αφού χρησιμοποιείται σε πολλές δραστηριότητες (μέτρηση διάφορων μεγεθών, οι εμπορικές συναλλαγές κ.ά.).

Ωστόσο, έχουν αναπτυχθεί και άλλα αριθμητικά συστήματα, η γνώση των οποίων είναι αναγκαία για την κατανόηση και την ανάλυση της λειτουργίας των ψηφιακών συστημάτων.

Η αναγκαιότητα αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι τα ψηφιακά συστήματα σχεδιάζονται ώστε να λειτουργούν με δυαδικά σήματα, συνεπώς τα αριθμητικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στο εσωτερικό τους θα πρέπει να είναι συμβατά με τον τρόπο λειτουργίας τους και την τεχνολογία με την οποία αναπτύσσονται.

Αριθμητικά συστήματα

Για να είναι δυνατή η υιοθέτηση του οικείου δεκαδικού αριθμητικού συστήματος στα ψηφιακά κυκλώματα και συστήματα, θα έπρεπε να χρησιμοποιηθούν ηλεκτρονικά στοιχεία με δέκα καταστάσεις λειτουργίας, ώστε να μπορούν να παρασταθούν όλα τα αναγκαία ψηφία.

Ωστόσο, λόγω του ότι δεν είναι διαθέσιμα τέτοιου είδους στοιχεία, αλλά έχουν αναπτυχθεί ηλεκτρονικά στοιχεία όπως τα τρανζίστορ με δύο καταστάσεις λειτουργίας, το δυαδικό αριθμητικό σύστημα έχει πρωταρχική σημασία και χρησιμότητα για τους σχεδιαστές ψηφιακών κυκλωμάτων και συστημάτων.

Αριθμητικά συστήματα, όπως το οκταδικό και το δεκαεξαδικό, χρησιμοποιούνται, επίσης, κατά το σχεδιασμό και την ανάλυση ψηφιακών συστημάτων.

Αριθμητικά συστήματα

Βασικό διακριτικό χαρακτηριστικό των αριθμητικών συστημάτων είναι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 που αναφέρεται ως βάση (base ή radix) του συστήματος.

Τα αριθμητικά συστήματα λαμβάνουν το όνομά τους από τον αριθμό που αποτελεί τη βάση τους. Έτσι, η βάση του δεκαδικού, του δυαδικού, του οκταδικού και του δεκαεξαδικού συστήματος είναι ο αριθμός 10, 2, 8 και 16, αντίστοιχα.

Η βάση ενός συστήματος καθορίζεται από το πλήθος των ψηφίων ή συμβόλων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτό.

Αριθμητικά συστήματα

Τα ψηφία αυτά είναι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι από τη βάση ή σύμβολα που αντιστοιχούν σε φυσικούς αριθμούς μικρότερους από τη βάση του συστήματος:

- στο δυαδικό σύστημα χρησιμοποιούνται τα ψηφία 0 και 1,
- στο οκταδικό τα ψηφία από 0 έως 7,
- στο δεκαδικό σύστημα τα ψηφία 0 έως 9
- στο δεκαεξαδικό σύστημα τα ψηφία 0 έως 9 και τα πρώτα 6 γράμματα του λατινικού αλφαβήτου (A, B, C, D, E, F) που αντιστοιχούν στους δεκαδικούς αριθμούς 10 έως 15.

Κάθε ψηφίο, ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται, κατέχει διαφορετική βαρύτητα. Για το λόγο αυτόν, τα εν λόγω αριθμητικά συστήματα αναφέρονται ως θεσιακά (positional) αριθμητικά συστήματα.

Αριθμητικά συστήματα

Το πρώτο από αριστερά ψηφίο ενός αριθμού αναφέρεται ως περισσότερο σημαντικό ψηφίο (most significant digit, MSD) ή περισσότερο σημαντικό δυαδικό ψηφίο (most significant bit, MSB), όταν πρόκειται για δυαδικό αριθμό.

Το τελευταίο αναφέρεται ως λιγότερο σημαντικό ψηφίο (least significant digit, LSD) ή λιγότερο σημαντικό δυαδικό ψηφίο (least significant bit, LSB), όταν πρόκειται για δυαδικό αριθμό.

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Ένας ακέραιος μη-προσημασμένος δεκαδικός αριθμός, για παράδειγμα ο 5792, παριστάνει μια ποσότητα ίση με 5 χιλιάδες συν 7 εκατοντάδες συν 9 δεκάδες συν 2 μονάδες:

$$5 \times 1000 + 7 \times 100 + 9 \times 10 + 2 \times 1$$

Οι χιλιάδες, εκατοντάδες, δεκάδες και μονάδες, είναι δυνάμεις του 10 που προσδιορίζονται από τη θέση των ψηφίων του αριθμού:

$$5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Επομένως, ο 5792 είναι μια παράσταση (συντομογραφία) της παραπάνω ποσότητας.

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Η σύμβαση που ακολουθείται είναι να γράφονται μόνο οι συντελεστές (δηλαδή, τα ψηφία με τα οποία πολλαπλασιάζονται οι αντίστοιχες δυνάμεις του 10) και από τη θέση των συντελεστών να προσδιορίζονται οι αναγκαίες δυνάμεις του 10.

Γενικά, ένας ακέραιος μη-προσημασμένος δεκαδικός αριθμός A παριστάνεται από μια ακολουθία συντελεστών:

$$A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \ldots \alpha_1\alpha_0$$

Οι συντελεστές α_i μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα δεκαδικά ψηφία (0, 1, 2, ..., 9), ενώ η τιμή του δείκτη i είναι η τάξη (θέση) κάθε συντελεστή, δηλαδή τη δύναμη του 10 με την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο συγκεκριμένος συντελεστής:

$$A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \ldots \alpha_1\alpha_0 = \alpha_{n-1} \times 10^{n-1} + \alpha_{n-2} \times 10^{n-2} + \ldots + \alpha_1 \times 10^1 + \alpha_0 \times 10^0$$

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Η σύμβαση αυτή ακολουθείται σε όλα τα αριθμητικά συστήματα (δεκαδικό, δυαδικό, τετραδικό, οκταδικό, δεκαεξαδικό κλπ.).

Σε οποιοδήποτε αριθμητικό σύστημα, με βάση τον αριθμό B, ένας ακέραιος μη προσημασμένος αριθμός A με πλήθος ψηφίων n, εκφράζεται ως ακολούθως:

$$(A)_B = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \ldots \alpha_1\ \alpha_0 = \alpha_{n-1} \times B^{n-1} + \alpha_{n-2} \times B^{n-2} + \ldots + \alpha_1 \times B^1 + \alpha_0 \times B^0$$

όπου B η βάση του αριθμητικού συστήματος και οι συντελεστές α_i μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα ψηφία του αριθμητικού συστήματος, τα οποία παίρνουν ακέραιες τιμές από 0 μέχρι και B – 1. Οι τιμές του δείκτη i είναι η τάξη (θέση) κάθε συντελεστή και κατά συνέπεια η δύναμη της βάσης B με την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο συντελεστής αυτός.

Στη βιβλιογραφία η βάση B (base) αναφέρεται και ως r (radix).

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Στο δεκαδικό σύστημα, για να παρασταθούν αριθμοί μεγαλύτεροι του μεγαλύτερου επιτρεπτού ψηφίου (του 9), απαιτούνται περισσότερα από ένα ψηφία (2 ψηφία για αριθμούς μεταξύ του 10 και του 99, 3 ψηφία για αριθμούς μεταξύ του 100 και του 999, κ.ο.κ).

Γενικεύοντας, προκύπτει ότι για την παράσταση έως 10^n δεκαδικών αριθμών απαιτούνται n δεκαδικά ψηφία, για την παράσταση έως 2^n δυαδικών αριθμών απαιτούνται n δυαδικά ψηφία και για την παράσταση έως 8^n οκταδικών αριθμών και έως 16^n δεκαεξαδικών αριθμών απαιτούνται n οκταδικά και δεκαεξαδικά ψηφία, αντίστοιχα.

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με n δυαδικά ψηφία είναι εκείνος που αποτελείται από n μονάδες και η αντίστοιχη δεκαδική τιμή είναι:

$1 \times 2^{n-1} + 1 \times 2^{n-2} + \ldots + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2^n - 1$.

Παρομοίως, προκύπτει ότι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με n ψηφία σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση B, είναι ο $B^n - 1$.

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Παραδείγματα:

Δεκαδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 10)

Τα ψηφία του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 0 μέχρι και 9.

$(795)_{10} = 7 \times 100 + 9 \times 10 + 5 \times 1 = 7 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Τετραδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 4)

Τα ψηφία του τετραδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 0 μέχρι και 3.

$(132)_4 = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 1 \times 16 + 3 \times 4 + 2 \times 1 = (30)_{10}$

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Οκταδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 8)

Τα ψηφία του οκταδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 0 μέχρι και 7.

$(370)_8 = 3 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 0 \times 8^0 = 3 \times 64 + 7 \times 8 + 0 \times 1 = (248)_{10}$

Δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 16)

Τα ψηφία του δεκαεξαδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί 0 και 15, όμως οι αξίες 10, 11, 12, 13, 14 και 15 εκφράζονται με τους λατινικούς χαρακτήρες A, B, C, D, E και F αντίστοιχα.

$$(1AF)_{16} = 1 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0 =$$

$$= 1 \times 256 + 10 \times 16 + 15 \times 1 = (431)_{10}$$

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Δυαδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 2)

Τα ψηφία του δυαδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί 0 και 1.

$(1001)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 \times 8 + 1 \times 1 = (9)_{10}$

Επομένως, στο δεκαδικό σύστημα έχουμε μονάδες (10^0), δεκάδες (10^1), εκατοντάδες (10^2), χιλιάδες (10^3), κλπ., ενώ στο δυαδικό σύστημα θα έχουμε μονάδες (2^0), δυάδες (2^1), τετράδες (2^2), οκτάδες (2^3), κλπ., αντίστοιχα.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η παράσταση των δεκαδικών αριθμών 0 έως και 15 στο δυαδικό, τεραδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα αντίστοιχα.

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Δεκαδικό	Δυαδικό	Τετραδικό	Οκταδικό	Δεκαεξαδικό
0	0 0 0 0	0 0	0 0	0
1	0 0 0 1	0 1	0 1	1
2	0 0 1 0	0 2	0 2	2
3	0 0 1 1	0 3	0 3	3
4	0 1 0 0	1 0	0 4	4
5	0 1 0 1	1 1	0 5	5
6	0 1 1 0	1 2	0 6	6
7	0 1 1 1	1 3	0 7	7
8	1 0 0 0	2 0	1 0	8
9	1 0 0 1	2 1	1 1	9
10	1 0 1 0	2 2	1 2	A
11	1 0 1 1	2 3	1 3	B
12	1 1 0 0	3 0	1 4	C
13	1 1 0 1	3 1	1 5	D
14	1 1 1 0	3 2	1 6	E
15	1 1 1 1	3 3	1 7	F

Παράσταση αριθμών σε θεσιακά αριθμητικά συστήματα

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι δυνάμεις του 2 (από 0 έως 20)

n	2^n		*n*	2^n		*n*	2^n
0	1		7	128		14	16384
1	2		8	256		15	32768
2	4		9	512		16	65536
3	8		10	1024		17	131072
4	16		11	2048		18	262144
5	32		12	4096		19	524288
6	64		13	8192		20	1048576

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Η μετατροπή ενός αριθμού από το σύστημα με βάση B, στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, γίνεται αν αναπτύξουμε τον αριθμό σε μία ακολουθία δυνάμεων της βάσης B και προσθέσουμε όλους τους όρους, όπως δείξαμε προηγουμένως:

$(370)_8 = 3 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 0 \times 8^0 = 3 \times 64 + 7 \times 8 + 0 \times 1 = (248)_{10}$

$(1AF)_{16} = 1 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0 = 1 \times 256 + 10 \times 16 + 15 \times 1 = (431)_{10}$

$(1001)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = (9)_{10}$

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Η μετατροπή ενός αριθμού από το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα σε οποιοδήποτε άλλο αριθμητικό σύστημα με βάση Β γίνεται με επαναλαμβανόμενη διαίρεση του δεκαδικού αριθμού με τη βάση Β του επιθυμητού συστήματος, μέχρι το πηλίκο της διαίρεσης να γίνει 0.

Οι συντελεστές του αριθμού στο επιθυμητό σύστημα με βάση Β λαμβάνονται από τα υπόλοιπα των διαιρέσεων.

Το υπόλοιπο της πρώτης διαίρεσης αντιστοιχεί στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο (Least Significant Digit – LSD).

Το υπόλοιπο της τελευταίας διαίρεσης αντιστοιχεί στο περισσότερο σημαντικό ψηφίο (Most Significant Digit – MSD).

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Παράδειγμα : Να μετατραπεί ο αριθμός $(141)_{10}$ στο δυαδικό, τετραδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα

Μετατροπή αριθμού στο δυαδικό σύστημα:

	141	2							
LSD	**1**	70	2						
		0	35	2					
			1	17	2				
				1	8	2			
					0	4	2		
						0	2	2	
							0	1	2
							MSD	**1**	0

Επομένως, $\mathbf{(141)_{10} = (10001101)_2}$

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Μετατροπή αριθμού στο τετραδικό σύστημα:

	141	4			
LSD	**1**	35	4		
		3	8	4	
			0	2	4
			MSD	**2**	0

Επομένως, $\mathbf{(141)_{10} = (2031)_4}$

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Μετατροπή αριθμού στο οκταδικό σύστημα:

	141	8		
LSD	**5**	17	8	
		1	2	8
		MSD	**2**	0

Επομένως, $\mathbf{(141)_{10} = (215)_8}$

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Μετατροπή αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα:

	141	16	
LSD	**13**	8	16
	MSD	**8**	0

Επομένως, **$(141)_{10} = (8D)_{16}$**

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Η μετατροπή ενός αριθμού μεταξύ αριθμητικών συστημάτων που έχουν βάση Β, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως δύναμη του 2, δηλαδή:

δυαδικό:	$B = 2 = 2^1$,
τετραδικό:	$B = 4 = 2^2$,
οκταδικό:	$B = 8 = 2^3$,
δεκαεξαδικό:	$B = 16 = 2^4$,

γίνεται μέσω του δυαδικού αριθμητικού συστήματος.

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Παράδειγμα: Να μετατραπεί ο αριθμός 10001101_2 στο τετραδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα και να επαληθευτεί η μετατροπή (αντίστροφη μετατροπή).

Μετατροπή του δυαδικού αριθμού στο τετραδικό σύστημα
Χωρίζουμε δυάδες ψηφίων από δεξιά προς τα αριστερά:

10	**00**	**11**	**01**	δυαδικό
2	**0**	**3**	**1**	τετραδικό

Επαλήθευση: εκφράζουμε κάθε ψηφίο του τετραδικού αριθμού σε δυαδική μορφή:

2	**0**	**3**	**1**	τετραδικό
10	**00**	**11**	**01**	δυαδικό

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Μετατροπή του δυαδικού αριθμού στο οκταδικό σύστημα

Χωρίζουμε τριάδες ψηφίων από δεξιά προς τα αριστερά:

(0)**10**	**001**	**101**	δυαδικό
2	**1**	**5**	οκταδικό

Επαλήθευση:

Εκφράζουμε κάθε ψηφίο του οκταδικού αριθμού σε δυαδική μορφή

2	**1**	**5**	οκταδικό
(0)**10**	**001**	**101**	δυαδικό

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Μετατροπή του δυαδικού αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα

Χωρίζουμε τριάδες ψηφίων από δεξιά προς τα αριστερά:

1000	**1101**	δυαδικό
8	**D**	δεκαεξαδικό

Επαλήθευση:

Εκφράζουμε κάθε ψηφίο του δεκαεξαδικού αριθμού σε δυαδική μορφή:

8	**D**	δεκαεξαδικό
1000	**1101**	δυαδικό

Παράσταση αριθμών με κλασματικό μέρος

Όπως είδαμε, η σύμβαση που ακολουθείται στην παράσταση των αριθμών σε όλα τα αριθμητικά συστήματα, είναι να γράφονται μόνο οι συντελεστές (δηλαδή, τα ψηφία με τα οποία πολλαπλασιάζονται οι αντίστοιχες δυνάμεις της βάσης του συστήματος) και από τη θέση τους να προσδιορίζονται οι αναγκαίες δυνάμεις της βάσης:

$$A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0 = \alpha_{n-1} \times B^{n-1} + {}_{n-2} \times B^{n-2} + \ldots + \alpha_1 \times B^1 + \alpha_0 \times B^0$$

όπου B η βάση του αριθμητικού συστήματος και οι συντελεστές α_i μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα ψηφία του αριθμητικού συστήματος, τα οποία παίρνουν ακέραιες τιμές από 0 μέχρι και B – 1. Οι τιμές του δείκτη i είναι η τάξη (θέση) κάθε συντελεστή και κατά συνέπεια τη δύναμη της βάσης B με την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο συντελεστής αυτός.

Παράσταση αριθμών με κλασματικό μέρος

Όταν έχουμε μη προσημασμένους αριθμούς, οι οποίοι έχουν ακέραιο και κλασματικό μέρος, η παράσταση ακολουθεί την ίδια λογική:

$$A = \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0 \,.\, \alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{-m} =$$

$$\alpha_{n-1}B^{n-1} + \ldots + \alpha_1 B^1 + \alpha_0 B^0 .\ \alpha_{-1} B^{-1} + \alpha_{-2}B^{-2} + \ldots + \alpha_{-m}B^{-m}$$

Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός $(739.24)_{10}$ αντιστοιχεί στη μαθηματική έκφραση:

$$7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$$

Ομοίως, η δεκαδική παράσταση του δυαδικού αριθμού $(11010.11)_2$ υπολογίζεται από τη μαθηματική έκφραση:

$$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = (26.75)_{10}$$

και του οκταδικού αριθμού $(127.4)_8$ υπολογίζεται ως εξής:

$$1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = 64 + 16 + 7 + 0.5 = (87.5)_{10}$$

Μετατροπή αριθμών με κλασματικό μέρος

Η μετατροπή δεκαδικών αριθμών που έχουν ακέραιο και κλασματικό μέρος γίνεται χωριστά για το ακέραιο και το κλασματικό μέρος και, ακολούθως, συνδυάζονται τα δύο αποτελέσματα.

Για τη μετατροπή του κλασματικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού σε ένα σύστημα με βάση B ακολουθείται η εξής διαδικασία:

- Πολλαπλασιάζουμε το κλασματικό μέρος του δεκαδικού αριθμού με τη βάση B και προκύπτει ένα ακέραιο και ένα κλασματικό μέρος.
- Στη συνέχεια το νέο κλασματικό μέρος πολλαπλασιάζεται με τη βάση B και προκύπτει νέο ακέραιο και νέο κλασματικό μέρος.
- Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το νέο κλασματικό μέρος που προκύπτει να είναι 0 ή μέχρι ο αριθμός των ψηφίων να γίνει τέτοιος, ώστε να έχουμε την επιθυμητή ακρίβεια. Οι συντελεστές του κλασματικού μέρους του αριθμού στο σύστημα με βάση B λαμβάνονται από τα ακέραια μέρη των γινομένων.

Μετατροπή αριθμών με κλασματικό μέρος

Παράδειγμα : Να εκφραστεί ο δεκαδικός αριθμός $(0.6875)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα.

		Ακέραιο μέρος		Κλασματικό μέρος	Συντελεστής
0.6875 x 2	=	1	+	0.3750	$\alpha_{-1} = 1$
0.3750 x 2	=	0	+	0.7500	$\alpha_{-2} = 0$
0.7500 x 2	=	1	+	0.5000	$\alpha_{-3} = 1$
0.5000 x 2	=	1	+	0.0000	$\alpha_{-4} = 1$

Επομένως: $(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$

Μετατροπή αριθμών με κλασματικό μέρος

Παράδειγμα: Να εκφραστεί ο δεκαδικός αριθμός $(141.513)_{10}$ στο οκταδικό σύστημα.

Μετατροπή του ακέραιου μέρους του αριθμού στο οκταδικό σύστημα:

	141	8		
LSD	**5**	17	8	
		1	2	8
		MSD	**2**	0

Επομένως, το ακέραιο μέρος του αριθμού θα είναι: $(141)_{10} = (215)_8$

Μετατροπή αριθμών με κλασματικό μέρος

Μετατροπή του κλασματικού μέρους του αριθμού στο οκταδικό σύστημα:

$$0.513 \times 8 = 4.104$$
$$0.104 \times 8 = 0.832$$
$$0.832 \times 8 = 6.656$$
$$0.656 \times 8 = 5.244$$

Επομένως, με ακρίβεια τεσσάρων σημαντικών ψηφίων, το κλασματικό μέρος του αριθμού θα είναι: $(0.513)_{10} = (0.4065)_{8}$.

Άρα, θα έχουμε: $(141.513)_{10} = (215.4065)_{8}$.

Μετατροπή αριθμών με κλασματικό μέρος

Η μετατροπή ενός αριθμού μεταξύ αριθμητικών συστημάτων με βάση B, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως δύναμη του 2 (δυαδικό: $B = 2 = 2^1$, τετραδικό: $B = 4 = 2^2$, οκταδικό: $B = 8 = 2^3$, δεκαεξαδικό: $B = 16 = 2^4$), γίνεται μέσω του δυαδικού αριθμητικού συστήματος.

Υπενθυμίζεται ότι, για να μετατρέψουμε έναν αριθμό από το δυαδικό σύστημα σε ένα σύστημα με βάση B^n (τετραδικό: $n = 2$, οκταδικό: $n = 3$, δεκαεξαδικό: $n = 4$), χωρίζουμε τον δυαδικό αριθμό σε ομάδες των n bits, ξεκινώντας από την υποδιαστολή και προχωρώντας προς τα αριστερά για το ακέραιο μέρος και προς τα δεξιά για το κλασματικό.

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την κάθε ομάδα bits με τον αντίστοιχο συντελεστή του συστήματος με βάση B^n.

Μετατροπή αριθμών με κλασματικό μέρος

Για παράδειγμα, ο δυαδικός αριθμός $(10110001101011.111100000110)_2$, στο οκταδικό σύστημα ($B = 8 = 2^3$, $n = 3$) θα είναι:

$$(\underline{010}\ \ \underline{110}\ \ \underline{001}\ \ \underline{101}\ \ \underline{011}\ .\ \underline{111}\ \ \underline{100}\ \ \underline{000}\ \ \underline{110})_2 = (26153.7406)_8$$

$$2\quad 6\quad 1\quad 5\quad 3\ .\ 7\quad 4\quad 0\quad 6$$

Η μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα είναι παρόμοια, με τη διαφορά ότι χωρίζουμε σε ομάδες 4 δυαδικών ψηφίων, ενώ στο τετραδικό σε ομάδες των 2 δυαδικών ψηφίων.

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Πρόσθεση

Ο αλγόριθμος της πρόσθεσης σε όλα τα αριθμητικά συστήματα είναι ο ίδιος.

Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τους αριθμούς $X = X_3X_2X_1X_0$ και $Y = Y_3Y_2Y_1Y_0$.

Αθροίζουμε τους συντελεστές κάθε τάξης, ξεκινώντας από το ελάχιστο σημαντικό ψηφίο (μονάδες).

Κάθε επιμέρους άθροιση των X_i και Y_i δίνει ένα άθροισμα S_i και ένα κρατούμενο C_i.

Το κρατούμενο C_i που προκύπτει προστίθεται στους συντελεστές της επόμενης τάξης X_{i+1} και Y_{i+1}.

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Πρόσθεση

$X =$	(0)	X_3	X_2	X_1	X_0
$+\ Y =$	(0)	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
	C_3	C_2	C_1	C_0	
Άθροισμα **S** =	S_4	S_3	S_2	S_1	S_0
Επιμέρους Κρατούμενα C_i		C_3	C_2	C_1	C_0

Επομένως το άθροισμα που προκύπτει είναι $S = S_4S_3S_2S_1S_0$,
όπου $S_4 = C_3$

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Πρόσθεση

Παράδειγμα: Να προστεθούν οι δυαδικοί αριθμοί:

X = 1101 και Y = 111.

Στην δυαδική πρόσθεση έχουμε τις εξής δυνατές περιπτώσεις:

	Κρατούμενο	Άθροισμα	
	C	**S**	
0 + 0	0	0	$= (0)_{10}$
0 + 1 ή 1 + 0	0	1	$= (1)_{10}$
1 + 1	1	0	$= (2)_{10}$
1 + 1 +1	1	1	$= (3)_{10}$

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Πρόσθεση

Επομένως, για το παράδειγμά μας θα έχουμε:

A =	(0)	1	1	0	1	$= (13)_{10}$
+ B =	(0)	(0)	1	1	1	$= (7)_{10}$
	1	1	1	1		
Άθροισμα **S** =	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	$\mathbf{= (20)_{10}}$
Κρατούμενα		1	1	1	1	

Άρα, το άθροισμα που προκύπτει είναι: $S = S_4S_3S_2S_1S_0 = 10100$

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Αφαίρεση

Η αφαίρεση στο δυαδικό σύστημα μπορεί να γίνει με τον αλγόριθμο της αφαίρεσης που εφαρμόζουμε στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα.

Κατά την αφαίρεση, προσθέτουμε το δανειζόμενο ψηφίο για την αφαίρεση της προηγούμενης θέσης στον αφαιρετέο και το άθροισμά τους αφαιρείται από τον μειωτέο:

$$(\text{Διαφορά})_i = (\text{Μειωτέος})_i - [(\text{Αφαιρετέος})_i + (\text{Δανειζόμενο})_{i-1}]$$

Η διαδικασία όμως αυτή δεν είναι εύκολα υλοποιήσιμη στα ψηφιακά συστήματα και για το λόγο αυτό ακολουθείται η μέθοδος της χρήσης συμπληρωμάτων.

Τα συμπληρώματα χρησιμοποιούνται στους ψηφιακούς υπολογιστές για την απλοποίηση της πράξης της αφαίρεσης. Η απλοποίηση των αριθμητικών πράξεων οδηγεί σε απλούστερα και πιο οικονομικά κυκλώματα υλοποίησής τους.

Συμπληρώματα αριθμών

Υπάρχουν 2 τύποι συμπληρωμάτων σε κάθε αριθμητικό σύστημα: το συμπλήρωμα ως προς βάση και το συμπλήρωμα ως προς ελαττωμένη βάση ή συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ένα.

Σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση B, το πρώτο αναφέρεται ως συμπλήρωμα ως προς B, $Σ_B$, και το δεύτερο αναφέρεται ως συμπλήρωμα ως προς B-1, $Σ_{B-1}$.

Επομένως, στο δεκαδικό σύστημα θα αναφερόμαστε για τους δύο τύπους των συμπληρωμάτων σε συμπλήρωμα ως προς 10, $Σ_{10}$ και συμπλήρωμα ως προς 9, $Σ_9$. Στο δυαδικό σύστημα θα αναφερόμαστε σε συμπλήρωμα ως προς 2, $Σ_2$, και συμπλήρωμα ως προς 1, $Σ_1$, αντίστοιχα.

Συμπληρώματα αριθμών

Έστω ένας αριθμός $X = X_{n-1}X_{n-2}...X_1X_0$, με n ψηφία, σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση B.

Το συμπλήρωμα του X ως προς ελαττωμένη βάση ορίζεται ως:

$$\Sigma_{B-1}(X) = (B^n - 1) - X$$

Στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, B = 10 και B – 1 = 9, και επομένως, το συμπλήρωμα ως προς ελαττωμένη βάση, δηλαδή το συμπλήρωμα ως προς 9, ενός δεκαδικού αριθμού X είναι:

$$\Sigma_9(X) = (10^n - 1) - X$$

Συμπληρώματα αριθμών

Το 10^n παριστάνει έναν αριθμό που αποτελείται από μία μονάδα που ακολουθείται από n μηδενικά.

Το $10^n – 1$ είναι αριθμός που παριστάνεται από n φορές το ψηφίο 9.

Για παράδειγμα, εάν n = 3, έχουμε $10^3 = 1000$ και $10^3 – 1 = 999$.
Άρα το συμπλήρωμα ως προς 9 ενός δεκαδικού αριθμού προκύπτει αν αφαιρέσουμε κάθε ψηφίο από το 9.

Παραδείγματα:

$Σ_9$(56399) = 43600 (αφού: 9 – 5 = 4, 9 – 6 = 3, 9 – 3 = 6, 9 – 9 = 0)

$Σ_9$(024619) = 975380

Συμπληρώματα αριθμών

Στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα, B = 2 και B – 1 = 1 και το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός αριθμού δυαδικού αριθμού X είναι:

$$\Sigma_1(X) = (2^n - 1) - X$$

Και σε αυτή την περίπτωση το 2^n παριστάνεται από ένα δυαδικό αριθμό που αποτελείται από μία μονάδα που ακολουθείται από n μηδενικά και το $2^n - 1$ είναι δυαδικός αριθμός που παριστάνεται από n μονάδες.

Για παράδειγμα, εάν n = 3, $2^3 = (1000)_2$ και $2^3 - 1 = (111)_2$.

Συμπληρώματα αριθμών

Άρα το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός δυαδικού αριθμού προκύπτει αν αφαιρέσουμε κάθε ψηφίο από το 1.

Ωστόσο, όταν αφαιρούμε δυαδικά ψηφία από το 1, μπορούμε να έχουμε μόνο 1 – 0 = 1 ή 1 – 1 = 0, που σημαίνει ότι η αφαίρεση των δυαδικών ψηφίων από το 1 ισοδυναμεί με εναλλαγή των μονάδων και των μηδενικών (δηλαδή, αντικαθιστούμε τα 0 με 1 και τα 1 με 0).

Επομένως, το συμπλήρωμα ενός δυαδικού αριθμού ως προς 1 προκύπτει με εναλλαγή των μονάδων και των μηδενικών.

Παραδείγματα:

$\Sigma_1(101011101) = 010100010$

$\Sigma_1(01101011) = 10010100$

Συμπληρώματα αριθμών

Έστω ένας αριθμός $X = X_{n-1}X_{n-2} \ldots X_1X_0$, με n το πλήθος ψηφία, σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση B.

Το συμπλήρωμα του X ως προς τη βάση ορίζεται ως: $\Sigma_B(X) = B^n – X$.

$$\Sigma_B(X) = B^n – X = B^n – X + (1 – 1) = (B^n – 1) – X + 1 = \Sigma_{B-1}(X) + 1$$

Επομένως, το συμπλήρωμα ενός αριθμού X ως προς βάση ισούται με το συμπλήρωμα του αριθμού ως προς ελαττωμένη βάση συν 1:

$$\Sigma_B(X) = \Sigma_{B-1}(X) + 1$$

Συμπληρώματα αριθμών

Επομένως, στο δεκαδικό σύστημα έχουμε: $Σ_{10}(X) = Σ_9(X) + 1$.

Για παράδειγμα, στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, το συμπλήρωμα του αριθμού 735 ως προς βάση μείον 1 ($Σ_9$) είναι ο αριθμός 264, αφού 735 + 264 = 999 και το συμπλήρωμα ως προς βάση ($Σ_{10}$) είναι 264 + 1 = 265.

Στο δυαδικό σύστημα θα έχουμε: $Σ_2(X) = Σ_1(X) + 1$.

Το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον 1 ($Σ_1$) προκύπτει με εναλλαγή των ψηφίων του δυαδικού αριθμού (αντικατάσταση των 0 με 1 και των 1 με 0).

Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του δυαδικού αριθμού 1001 ως προς 1 είναι ο αριθμός 0110 και το συμπλήρωμα ως προς 2 αυτού του δυαδικού αριθμού είναι 0110 + 1 = 0111.

Συμπληρώματα αριθμών

Ο υπολογισμός του συμπληρώματος ως προς 2 ενός δυαδικού αριθμού με πρόσθεση μιας μονάδας στο συμπλήρωμα ως προς 1, είναι ισοδύναμος με το ακόλουθο υπολογισμό:

Στον δυαδικό αριθμό του οποίου επιθυμούμε να υπολογίσουμε το συμπλήρωμα ως προς 2, ξεκινώντας από τη λιγότερο σημαντική θέση (δεξιά) αφήνουμε αναλλοίωτα τα συνεχόμενα μηδενικά που συναντάμε και την πρώτη μονάδα και στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα μηδενικά με μονάδες και τις μονάδες με μηδενικά.

Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του δυαδικού αριθμού 100100 ακολουθώντας τον προαναφερόμενο τρόπο υπολογισμού είναι 011100 που είναι ίδιο με το συμπλήρωμα ως προς 1 του αριθμού συν 1 (011011 + 1 = 011100).

Αφαίρεση με χρήση συμπληρωμάτων

Σε όλα τα αριθμητικά συστήματα, αντί του κλασσικού αλγόριθμου της αφαίρεσης, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των συμπληρωμάτων, ειδικότερα μάλιστα στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα, λόγω της ευκολίας εφαρμογής του στο συγκεκριμένο αριθμητικό σύστημα.

Για την αφαίρεση X (μειωτέος) – Y (αφαιρετέος) δύο μη προσημασμένων ακέραιων αριθμών, $X = X_{n-1}X_{n-2} \ldots X_1 X_0$ και $Y = Y_{n-1}Y_{n-2} \ldots Y_1Y_0$, με το ίδιο πλήθος n ψηφίων ο καθένας, στο σύστημα με βάση B ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Αφαίρεση με χρήση συμπληρωμάτων

Εκφράζουμε τους αριθμούς με το ίδιο πλήθος ψηφίων (προσθήκη, αν χρειάζεται, μηδενικών στον αριθμό με το μικρότερο πλήθος ψηφίων, αριστερά από το μέγιστο σημαντικό ψηφίο του).

Προσδιορίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση (Σ_B) του αφαιρετέου.

Προσθέτουμε στον μειωτέο X το συμπλήρωμα ως προς βάση (Σ_B) του αφαιρετέου Y, δηλαδή υπολογίζουμε το:

$$X + \Sigma_B(Y) = X + (B^n - Y) = X - Y + B^n$$

Αν $X \geq Y$, τότε προκύπτει τελικό κρατούμενο 1 (ένα επιπλέον ψηφίο, που είναι ο συντελεστής της τάξης B^v), το οποίο παραλείπεται.
Ο αριθμός που απομένει είναι η διαφορά $X - Y$.

Αφαίρεση με χρήση συμπληρωμάτων

Αν $X < Y$, τότε στο άθροισμα που υπολογίζεται δεν προκύπτει κρατούμενο και το άθροισμα ισούται με $B^n – (Y – X)$ που είναι το συμπλήρωμα ως προς βάση του $Y – X$.

Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι προφανώς αρνητικός αριθμός, αφού ο μειωτέος είναι μικρότερος από τον αφαιρετέο.

Για να λάβουμε το αποτέλεσμα στην κανονική μορφή, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση του αθροίσματος που προκύπτει (δηλαδή, παίρνουμε το συμπλήρωμα του συμπληρώματος) και τοποθετούμε στην αρχή ένα αρνητικό πρόσημο.

Αφαίρεση με χρήση συμπληρωμάτων

Παράδειγμα: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $(619573)_{10} – (4237)_{10}$.

Ο αφαιρετέος έχει 2 ψηφία λιγότερα από τον μειωτέο, άρα συμπληρώνουμε 2 μηδενικά αριστερά από το περισσότερο σημαντικό ψηφίο: 4237 = 004237.

$Σ_9(004237) = 995762$

$Σ_{10}(004237) = 995762 + 1 = 995763$

Μειωτέος	619573
+ Συμπλήρωμα ως προς 10 του αφαιρετέου	995763
Άθροισμα	~~1~~615336
Διαφορά	**615336**

Αφού 619573 > 4237, παραλείπεται το τελικό κρατούμενο που προκύπτει

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Αφαίρεση με χρήση συμπληρωμάτων

Παράδειγμα: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $(9573)_{10}$ –$(14237)_{10}$.

Στην περίπτωση αυτή ο μειωτέος είναι μικρότερος από τον αφαιρετέο (X < Y), οπότε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης θα είναι προφανώς ένας αρνητικός αριθμός.

$\Sigma_9(14237) = 85762$

$\Sigma_{10}(14237) = \Sigma_9(14237) + 1 = 85762 + 1 = 85763$

Μειωτέος	09573
+ Συμπλήρωμα ως προς 10 του αφαιρετέου	85763
Άθροισμα	95336

Αφαίρεση με χρήση συμπληρωμάτων

Το άθροισμα που προέκυψε είναι το συμπλήρωμα ως προς βάση της διαφοράς Y – X.

Για να λάβουμε το αποτέλεσμα σε κανονική μορφή, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση του αθροίσματος που προέκυψε και τοποθετούμε αρνητικό πρόσημο:

$$\Sigma_9(95336) = \quad 04663$$

$$\Sigma_{10}(95336) = \Sigma_9(95336) + 1 = 4663 + 1 = \quad 4664$$

$$\textbf{Διαφορά} \quad \mathbf{-\,4664}$$

Αφαίρεση με χρήση συμπληρωμάτων

Παράδειγμα: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $(10101)_2 – (1101)_2$.

Ο αφαιρετέος έχει ένα ψηφίο λιγότερο από τον μειωτέο, άρα συμπληρώνουμε ένα μηδενικό αριστερά από το περισσότερο σημαντικό ψηφίο: $(1101)_2 = (01101)_2$.

$\Sigma_1(01101) = 10010$
$\Sigma_2(01101) = \Sigma_1(01101) + 1 = 10010 + 1 = 10011$

Μειωτέος	10101
+ Συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου	10011
Άθροισμα	$\cancel{1}$01000
Διαφορά	**01000**

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Αφαίρεση με χρήση συμπληρωμάτων

Παράδειγμα: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $(1111)_2 - (10101)_2$

Στην περίπτωση αυτή ο μειωτέος είναι μικρότερος από τον αφαιρετέο ($X < Y$), οπότε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης θα είναι προφανώς αρνητικός αριθμός.

Επιπλέον να σημειωθεί ότι, αφού ο αφαιρετέος $(10101)_2$ αποτελείται από 5 ψηφία, όλη η διαδικασία θα πρέπει να πραγματοποιηθεί με 5 ψηφία.

$$\Sigma_1(10101) = 01010$$
$$\Sigma_2(10101) = \Sigma_1(10101) + 1 = 01010 + 1 = 01011$$

Αφαίρεση με χρήση συμπληρωμάτων

Μειωτέος	01111
+ Συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου	01011
Άθροισμα	11010

Το άθροισμα που προέκυψε είναι το συμπλήρωμα ως προς βάση της διαφοράς Y – X.

Για να πάρουμε το αποτέλεσμα σε κανονική μορφή, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση του αθροίσματος που προέκυψε και τοποθετούμε στην αρχή ένα αρνητικό πρόσημο:

$\Sigma_1(11010) =$	00101
$\Sigma_2(11010) = \Sigma_1(11010) + 1 = 00101 + 1 =$	00110
Διαφορά	**– 110**

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Πολ/σμός

Για τον πολλαπλασιασμό των δυαδικών αριθμών ισχύουν οι εξής περιπτώσεις:

0 x 0 = 0

0 x 1 = 0

1 x 0 = 0

1 x 1 = 1

Ο πολλαπλασιασμός δύο δυαδικών αριθμών μπορεί να γίνει με την ίδια μέθοδο με το δεκαδικό σύστημα και συνίσταται σε διαδοχικές προσθέσεις και μετατοπίσεις.

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Πολ/σμός

Παράδειγμα: Πολλαπλασιασμός των μη προσημασμένων αριθμών $(1110)_2$ και $(1011)_2$:

Πολλαπλασιαστέος:						1	1	1	0
Πολλαπλασιαστής:					x	1	0	1	1
						1	1	1	0
					1	1	1	0	
				0	0	0	0		
			1	1	1	0			
κρατούμενα:		1	1	1	1	1	0	0	
Γινόμενο:		**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Πολ/σμός

Κατά την επιμέρους πρόσθεση των ψηφίων κάθε στήλης, δημιουργούνται επιμέρους κρατούμενα, τα οποία μεταφέρονται στην επόμενη στήλη και αθροίζονται με τα ψηφία αυτής.

Το πλήθος των ψηφίων του γινόμενου ισούται με το άθροισμα του πλήθους των ψηφίων του πολλαπλασιαστέου και του πολλαπλασιαστή.

Κάθε επιμέρους γινόμενο που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του εκάστοτε ψηφίου του πολλαπλασιαστή με τα ψηφία του πολλαπλασιαστέου είναι είτε ίσο με τον πολλαπλασιαστέο, όταν το ψηφίο του πολλαπλασιαστή είναι 1, είτε μηδέν (με πλήθος ψηφίων ίσο με το πλήθος των ψηφίων του πολλαπλασιαστέου), όταν το ψηφίο του πολλαπλασιαστή είναι 0.

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Πολ/σμός

Στα ψηφιακά συστήματα, είναι πιο αποδοτικό ως προς την υλοποίηση, αντί να προσθέτουμε στο τέλος του πολλαπλασιασμού όλα τα ψηφία των επιμέρους γινομένων κατά στήλη, να διενεργούμε διαδοχικές προσθέσεις ώστε σε κάθε βήμα να παράγεται ένα μερικό γινόμενο, μέχρι και την εξαγωγή του τελικού γινομένου:

Πολλαπλασιαστέος:					1	1	1	0
Πολλαπλασιαστής:				x	1	0	1	1
					1	1	1	0
			+	1	1	1	0	
			1	0	1	0	1	
		+	0	0	0	0		
			1	0	1	0		
	+	1	1	1	0			
Γινόμενο:	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Πολ/σμός

Ένας δυαδικός αριθμός Α μπορεί να πολλαπλασιαστεί επί 2, εάν τοποθετηθεί ένα μηδενικό δεξιά του λιγότερου σημαντικού ψηφίου του.

Με αυτόν τον τρόπο, όλα τα ψηφία του αριθμού Α μετατοπίζονται μια θέση προς τα αριστερά, δηλαδή ο αριθμός ολισθαίνει προς τα αριστερά (shift left) κατά μία θέση.

Επομένως, εάν $A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0$, τότε θα είναι:

$$2 \times A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0\mathbf{0}.$$

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό σύστημα: Διαίρεση

Η διαίρεση δύο δυαδικών αριθμών μπορεί να γίνει με την ίδια μέθοδο με το δεκαδικό σύστημα και συνίσταται σε διαδοχικές συγκρίσεις και αφαιρέσεις. Για παράδειγμα, να διαιρέσουμε τον αριθμό $(11011)_2 = (27)_{10}$ δια του αριθμού $(11)_2 = (3)_{10}$:

```
    1 1 0 1 1 | 1 1
  - 1 1       |--------
  -----       | 1 0 0 1
    0 0 0
    - 0 0
    -----
      0 0 1
      - 0 0
      -----
        0 1 1
        - 1 1
        -----
          0 0
```

Στην περίπτωση που το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι διαφορετικό από το μηδέν, προκύπτει επιπλέον του ακέραιου μέρους (που ισούται με το πηλίκο της διαίρεσης) και κλασματικό μέρος.

Προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στα ψηφιακά συστήματα οποιαδήποτε πληροφορία αναπαριστάνεται αποκλειστικά με τη χρήση δυαδικών ψηφίων.

Αυτό ισχύει και για την παράσταση προσημασμένων δυαδικών αριθμών.

Στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα υπάρχουν τρεις τρόποι παράστασης των προσημασμένων αριθμών:

Παράσταση προσημασμένου μεγέθους (signed-magnitude)

Σε αυτόν τον τρόπο παράστασης που αναφέρεται και ως παράσταση πρόσημο-μέτρο, χρησιμοποιείται ένα επιπλέον ψηφίο για το πρόσημο, που καταλαμβάνει την περισσότερο σημαντική θέση του αριθμού, δηλαδή, το περισσότερο σημαντικό ψηφίο παριστάνει το πρόσημο του αριθμού + (συν) ή – (πλην).

Η σύμβαση που ακολουθείται είναι:
εάν το ψηφίο προσήμου είναι 0, ο αριθμός είναι θετικός, ενώ
εάν το ψηφίο προσήμου είναι 1, ο αριθμός είναι αρνητικός.

Για παράδειγμα, στην παράσταση αυτή ο προσημασμένος δεκαδικός αριθμός **+** 9_{10} εκφράζεται με την ακολουθία δυαδικών ψηφίων **0**1001, ενώ ο αριθμός **–** 9_{10}, εκφράζεται ως **1**1001.

Παράσταση προσημασμένου μεγέθους (signed-magnitude)

Στην παράσταση αυτή δεσμεύουμε ένα ψηφίο για την παράσταση του προσήμου και προκύπτουν δύο παραστάσεις για το μηδέν, το **+** 0 (0000) και το **–** 0 (1000).

Κατά την πρόσθεση σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους, αρχικά διενεργείται σύγκριση των προσήμων. Εάν οι αριθμοί έχουν ίδιο πρόσημο, προσθέτουμε τα μεγέθη τους και διατηρούμε το πρόσημο, ενώ εάν έχουν διαφορετικό πρόσημο, τότε διενεργούμε σύγκριση του μεγέθους, αφαιρούμε το μικρότερο από το μεγαλύτερο μέγεθος και διατηρούμε το πρόσημο του αριθμού με το μεγαλύτερο μέγεθος.

Η απαιτούμενη σύγκριση προσήμων και μεγεθών των αριθμών αποτελεί μειονέκτημα της χρήσης της παράστασης προσημασμένου μεγέθους για την υλοποίηση αριθμητικών πράξεων με προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς στα ψηφιακά συστήματα.

Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος (signed-complement)

Η παράσταση των θετικών αριθμών είναι ίδια και στους 3 τρόπους παράστασης και προκύπτει από τους αντίστοιχους μη προσημασμένους αριθμούς, με την προσθήκη ενός επιπλέον ψηφίου προσήμου με τιμή 0, στη θέση του περισσότερο σημαντικού ψηφίου.

Στην παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος, οι αρνητικοί αριθμοί παριστάνονται με το συμπλήρωμα ως προς 1, είτε το συμπλήρωμα ως προς 2 των αντίστοιχων θετικών. Στον υπολογισμό των συμπληρωμάτων των θετικών αριθμών περιλαμβάνεται και το ψηφίο πρόσημο.

Η χρήση της παράστασης προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 είναι η πιο συνηθισμένη.

Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος (signed-complement)

Για παράδειγμα, θεωρούμε τον μη προσημασμένο δεκαδικό αριθμό 9, ο οποίος παριστάνεται στο δυαδικό σύστημα με 4 ψηφία (1001).

Στην παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1, ο προσημασμένος δεκαδικός αριθμός **+** 9_{10} εκφράζεται με την ακολουθία δυαδικών ψηφίων **0**1001, ενώ ο αριθμός **–** 9_{10}, εκφράζεται ως **1**0110.

Στην παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, ο προσημασμένος δεκαδικός αριθμός **+** 9_{10} εκφράζεται με την ακολουθία δυαδικών ψηφίων **0**1001, ενώ ο αριθμός **–** 9_{10}, εκφράζεται ως **1**0111.

Στην περίπτωση αριθμών με ακέραιο και κλασματικό μέρος, η υποδιαστολή δεν λαμβάνεται υπόψη κατά τον υπολογισμό των συμπληρωμάτων και διατηρεί την αρχική της θέση και στα συμπληρώματα.

Προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί

Δεκαδικός	Παράσταση προσημασμένου μεγέθους	Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1	Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2
+7	**0**111	**0**111	**0**111
+6	**0**110	**0**110	**0**110
+5	**0**101	**0**101	**0**101
+4	**0**100	**0**100	**0**100
+3	**0**011	**0**011	**0**011
+2	**0**010	**0**010	**0**010
+1	**0**001	**0**001	**0**001
0	**0**000 ή **1**000	**0**000 ή **1**111	**0**000
-1	**1**001	**1**110	**1**111
-2	**1**010	**1**101	**1**110
-3	**1**011	**1**100	**1**101
-4	**1**100	**1**011	**1**100
-5	**1**101	**1**010	**1**011
-6	**1**110	**1**001	**1**010
-7	**1**111	**1**000	**1**001
-8	-	-	**1**000

Προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί

Στις παραστάσεις προσημασμένου μεγέθους και προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1, το 0 εκφράζεται με 2 τρόπους, + 0 και – 0.

Και στους 3 τρόπους παράστασης με 4 δυαδικά ψηφία, ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί είναι ο δεκαδικός αριθμός +7.

Ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί είναι ο δεκαδικός αριθμός – 7, με εξαίρεση την παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, στην οποία μπορεί να παρασταθεί και ο δεκαδικός αριθμός – 8.

Γενικεύοντας για n δυαδικά ψηφία, ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με τους 3 τρόπους είναι ο $2^{n-1} - 1$ και ο μικρότερος είναι ο αριθμός $-2^{n-1} + 1$, με εξαίρεση την παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, στην οποία μπορεί να παρασταθεί και ο αριθμός -2^{n-1} (μια μονάδα ακολουθούμενη από n – 1 μηδενικά).

Προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί

Παράδειγμα: Να εκφράσετε με 8 δυαδικά ψηφία στις παραστάσεις προσημασμένου μεγέθους και προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 τους αριθμούς $+74_{10}$ και -74_{10}.

Το μέτρο του δεκαδικού αριθμού 74 με 7 δυαδικά ψηφία είναι 1001010. Το όγδοο ψηφίο χρησιμοποιείται για το πρόσημο.

Στην παράσταση προσημασμένου μεγέθους έχουμε:

$+74_{10} = \mathbf{0}1001010 \quad -74_{10} = \mathbf{1}1001010$

Στην παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 για $+74_{10}$ έχουμε την ίδια παράσταση, ενώ για το -74_{10} θα πρέπει να υπολογίσουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 του θετικού αριθμού 01001010 (συμπεριλαμβανομένου και του ψηφίου προσήμου):

$-74_{10} = \Sigma_2(01001010) = \Sigma_1(01001010) + 1 = 10110101 + 1 = 10110110$

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Όπως προαναφέρθηκε, κατά την πρόσθεση 2 δυαδικών αριθμών εκφρασμένων σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους, απαιτείται αρχικά η σύγκριση των προσήμων και του μέτρου των αριθμών και ακολούθως εκτελείται η πράξη της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Οι δύο αριθμοί είναι ομόσημοι (θετικοί ή αρνητικοί):

Στην περίπτωση αυτή προσθέτουμε τα μέτρα των δύο αριθμών και διατηρούμε το πρόσημο. Για παράδειγμα:

$$(+74)_{10} + (+12)_{10} = 01001010 + 00001100 = 01010110 = (+86)_{10}$$

$$(-74)_{10} + (-12)_{10} = 11001010 + 10001100 = 11010110 = (-86)_{10}$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο των αριθμών παραμένει το ίδιο, ενώ αλλάζει το ψηφίο πρόσημο.

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Οι δύο αριθμοί είναι ετερόσημοι:

Στην περίπτωση αυτή συγκρίνουμε τα μέτρα των αριθμών, αφαιρούμε το μικρότερο από το μεγαλύτερο και διατηρούμε το πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού.

Για παράδειγμα, για να προσθέσουμε τους αριθμούς $(+74)_{10}$ και $(–12)_{10}$, αρχικά αφαιρούμε τα μέτρα των δύο αριθμών:

$$(74)_{10} – (12)_{10} = 1001010 – 0001100 = 0111110 = (62)_{10}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε στον αριθμό που προέκυψε το ψηφίο πρόσημο, το οποίο είναι 0, αφού το αποτέλεσμα της αφαίρεσης 74 – 12 είναι θετικός αριθμός.

Επομένως, το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι ο θετικός αριθμός:

$$(+74)_{10} + (–12)_{10} = 00111110 = (+62)_{10}$$

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Αντίστοιχα, κατά την πρόσθεση των αριθμών $(-74)_{10}$ και $(+12)_{10}$, θα έχουμε ως αποτέλεσμα έναν αρνητικό αριθμό, με το ίδιο μέτρο όπως προηγουμένως, αλλά με ψηφίο προσήμου 1:

$$(-74)_{10} + (+12)_{10} = 10111110 = (-\,62)_{10}$$

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Η αφαίρεση δύο προσημασμένων δυαδικών αριθμών σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους ανάγεται σε πρόσθεση του μειωτέου με τον αντίθετο αριθμό του αφαιρετέου, ο οποίος εκφράζεται ως το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου και η πράξη εκτελείται σύμφωνα με τα προαναφερόμενα.

Στην πρόσθεση δύο προσημασμένων δυαδικών αριθμών σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, συμπεριλαμβάνεται και το ψηφίο που κατέχει θέση προσήμου και η πράξη γίνεται χωρίς προηγούμενη επεξεργασία.

Εάν στο αποτέλεσμα της πρόσθεσης, το οποίο, επίσης, παριστάνεται με μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, προκύψει τελικό κρατούμενο (δηλαδή κρατούμενο στην πιο σημαντική θέση), αυτό παραλείπεται.

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Για την αφαίρεση δύο προσημασμένων δυαδικών αριθμών σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου (συμπεριλαμβανομένου του ψηφίου προσήμου) και το προσθέτουμε στον μειωτέο. Εάν προκύψει κρατούμενο στη θέση του ψηφίου προσήμου, αυτό παραλείπεται.

Η διαδικασία αυτή έχει καθιερωθεί επειδή η πράξη της αφαίρεσης μπορεί να μετατραπεί σε πράξη πρόσθεσης, εάν απλά αλλάξουμε το πρόσημο του αφαιρετέου και εκτελέσουμε πρόσθεση:

$$(\pm A) - (+B) = (\pm A) + (-B), \quad (\pm A) - (-B) = (\pm A) + (+B)$$

Η αλλαγή ενός θετικού αριθμού σε αρνητικό προκύπτει απλά, υπολογίζοντας το συμπλήρωμα ως προς 2 του θετικού αριθμού. Ισχύει επίσης το αντίστροφο, αφού το συμπλήρωμα ως προς 2 ενός αρνητικού αριθμού, παράγει τον αντίστοιχο θετικό αριθμό.

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Παράδειγμα: Δίνονται οι δεκαδικοί αριθμοί A = +4 και B = –11. Να εκφραστούν οι αριθμοί αυτοί σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 και να πραγματοποιηθούν οι πράξεις: A + B, A – B, – A + B και – A – B.

Αρχικά προσδιορίζουμε το πλήθος των απαιτούμενων ψηφίων για την έκφραση των αριθμών σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2. Αυτό ισούται με το πλήθος δυαδικών ψηφίων που απαιτούνται για την έκφραση του μέτρου των αριθμών σε δυαδική μορφή, πλέον ενός ψηφίου για το πρόσημο. Στην περίπτωσή μας έχουμε: $4_{10} = 100_2$ και $11_{10} = 1011_2$

Παρατηρούμε ότι για την έκφραση του μεγέθους σε δυαδική μορφή, οι δύο αριθμοί απαιτούν διαφορετικό πλήθος ψηφίων.

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Για την εκτέλεση πράξεων μεταξύ αριθμών σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους ή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 και οι δύο αριθμοί θα πρέπει να εκφραστούν με το ίδιο πλήθος ψηφίων, άρα ο μεγαλύτερος κατά μέτρο αριθμός καθορίζει και το πλήθος των ψηφίων με το οποίο θα παρασταθούν.

Επομένως, σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους, οι αριθμοί μας θα πρέπει να εκφραστούν με 5 δυαδικά ψηφία, 4 ψηφία για το μέτρο και ένα ψηφίο πρόσημο.

Ο αριθμός A είναι θετικός, άρα η έκφρασή σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 είναι ίδια με αυτήν σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους και, με 5 δυαδικά ψηφία συμπεριλαμβανομένου του ψηφίου προσήμου, θα είναι:

A = +4 = **0**0100

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Η παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 του αρνητικού αριθμού B = –11 προκύπτει από τον υπολογισμό του συμπληρώματος ως προς 2 του αντίστοιχου θετικού αριθμού (01011).

$$B = \Sigma_2(01011) = \Sigma_1(01011) + 1 = 10100 + 1 = 10101$$

A + B

$$\begin{array}{cccccc|l} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{A} = +4 \\ + & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \boldsymbol{B} = -11 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & (-7)_{10} \end{array}$$

$\Sigma_2(11001) = 00111 = +7$

A – B

$$\begin{array}{cccccc|l} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{A} = +4 \\ + & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -\boldsymbol{B} = +11 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & (+15)_{10} \end{array}$$

– A + B

$$\begin{array}{cccccc|l} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\boldsymbol{A} = -4 \\ + & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \boldsymbol{B} = -11 \\ \hline \cancel{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & (-15)_{10} \end{array}$$

$\Sigma_2(10001) = 01111 = +15$

– A – B

$$\begin{array}{cccccc|l} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\boldsymbol{A} = -4 \\ + & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -\boldsymbol{B} = +11 \\ \hline \cancel{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & (+7)_{10} \end{array}$$

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

- Κατά την πρόσθεση ή αφαίρεση δύο προσημασμένων αριθμών n δυαδικών ψηφίων, υπάρχει πιθανότητα το αποτέλεσμα να απαιτεί για την ορθή παράστασή του n + 1 ψηφία.

  Στην περίπτωση αυτή συμβαίνει μετατόπιση του ψηφίου-προσήμου από την αναμενόμενη θέση και η κατάσταση αυτή αναφέρεται ως υπερχείλιση (overflow).

  Η υπερχείλιση αποτελεί πρόβλημα στα ψηφιακά συστήματα, στα οποία το πλήθος των θέσεων μνήμης όπου αποθηκεύονται οι αριθμοί είναι συγκεκριμένο, με συνέπεια να μην μπορεί να αποθηκευτεί το αποτέλεσμα μιας πράξης που το πλήθος των ψηφίων του υπερβαίνει το πλήθος των διαθέσιμων θέσεων μνήμης.

  Στους ψηφιακούς επεξεργαστές, το πρόβλημα της υπερχείλισης αντιμετωπίζεται με χρήση ειδικής θέσης μνήμης, που το περιεχόμενό της υποδεικνύει την υπερχείλιση στην πράξη που εκτελέστηκε.

Πράξεις προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Υπερχείλιση κατά την πρόσθεση 2 προσημασμένων αριθμών συμβαίνει όταν οι αριθμοί είναι ομόσημοι και το αποτέλεσμα που προκύπτει έχει διαφορετικό πρόσημο από αυτούς.

Κατά την πρόσθεση των θετικών δυαδικών αριθμών 0111 = $(+7)_{10}$ και 0100 = $(+4)_{10}$ προκύπτει λανθασμένο αρνητικό αποτέλεσμα, δηλαδή 1011 = $(-5)_{10}$, λόγω της υπερχείλισης.

Αυτό συμβαίνει διότι το ορθό αποτέλεσμα 01011 = $(+11)_{10}$ είναι μεγαλύτερο από το μεγαλύτερο δυνατό θετικό αριθμό που μπορεί να παρασταθεί με 4 δυαδικά ψηφία, δηλαδή τον αριθμό $(+7)_{10}$.

Επίσης, κατά την πρόσθεση των αρνητικών δυαδικών αριθμών 1100 = $(-4)_{10}$ και 1010 = $(-6)_{10}$ προκύπτει λανθασμένο θετικό αποτέλεσμα, δηλαδή 0110 = $(+6)_{10}$, λόγω της υπερχείλισης.

Αυτό συμβαίνει διότι το ορθό αποτέλεσμα 10110 = $(-10)_{10}$ είναι μικρότερο από το μικρότερο αρνητικό αριθμό με 4 ψηφία $(-8)_{10}$.

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Στην παράσταση αριθμών με ακέραιο και κλασματικό μέρος που μελετήσαμε, η θέση της υποδιαστολής είναι προκαθορισμένη και σταθερή. Οι αριθμοί που ακολουθούν αυτή την παράσταση χαρακτηρίζονται ως αριθμοί σταθερής υποδιαστολής.

Το εύρος τιμών που μπορεί να εκφραστεί με αυτόν τον τρόπο παράστασης είναι σχετικά μικρό. Για παράδειγμα, ο μεγαλύτερος ακέραιος μη προσημασμένος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με 32 δυαδικά ψηφία (bits) είναι:

$$2^{32} - 1 \approx 4.3 \times 10^{9}.$$

Όμως στους επιστημονικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούμαι αριθμούς πολύ μεγαλύτερης τάξης (π.χ. αριθμός Avogadro = 6.022×10^{23} mole^{-1}), καθώς και αριθμούς με πολύ μικρό κλασματικό μέρος (π.χ. σταθερά Boltzmann = 1.38×10^{-23} Joule/^{o}K), για την παράσταση των οποίων θα απαιτούνταν πολύ μεγάλο πλήθος δυαδικών ψηφίων.

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Για να καλυφθεί αυτή η ανάγκη, στα ψηφιακά συστήματα έχει υιοθετηθεί η παράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής, στην οποία η θέση της υποδιαστολής των αριθμών δεν είναι προκαθορισμένη αλλά μεταβλητή, για να προσαρμόζεται στις υπολογιστικές ανάγκες.

Για την παράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής ακολουθείται το πρότυπο του IEEE 754 (Institute of Electrical & Electronic Engineering).

Σύμφωνα με αυτό, οι αριθμοί κινητής υποδιαστολής παριστάνονται με 32 δυαδικά ψηφία (παράσταση απλής ακρίβειας) ή με 64 δυαδικά ψηφία (παράσταση διπλής ακρίβειας) και περιλαμβάνουν 3 τμήματα:

- το ψηφίο πρόσημο **S** (που έχει τιμή 0 για θετικούς και τιμή 1 για αρνητικούς αριθμούς),
- τον εκθέτη **E**, και
- το κλασματικό μέρος **M** (mantissa).

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

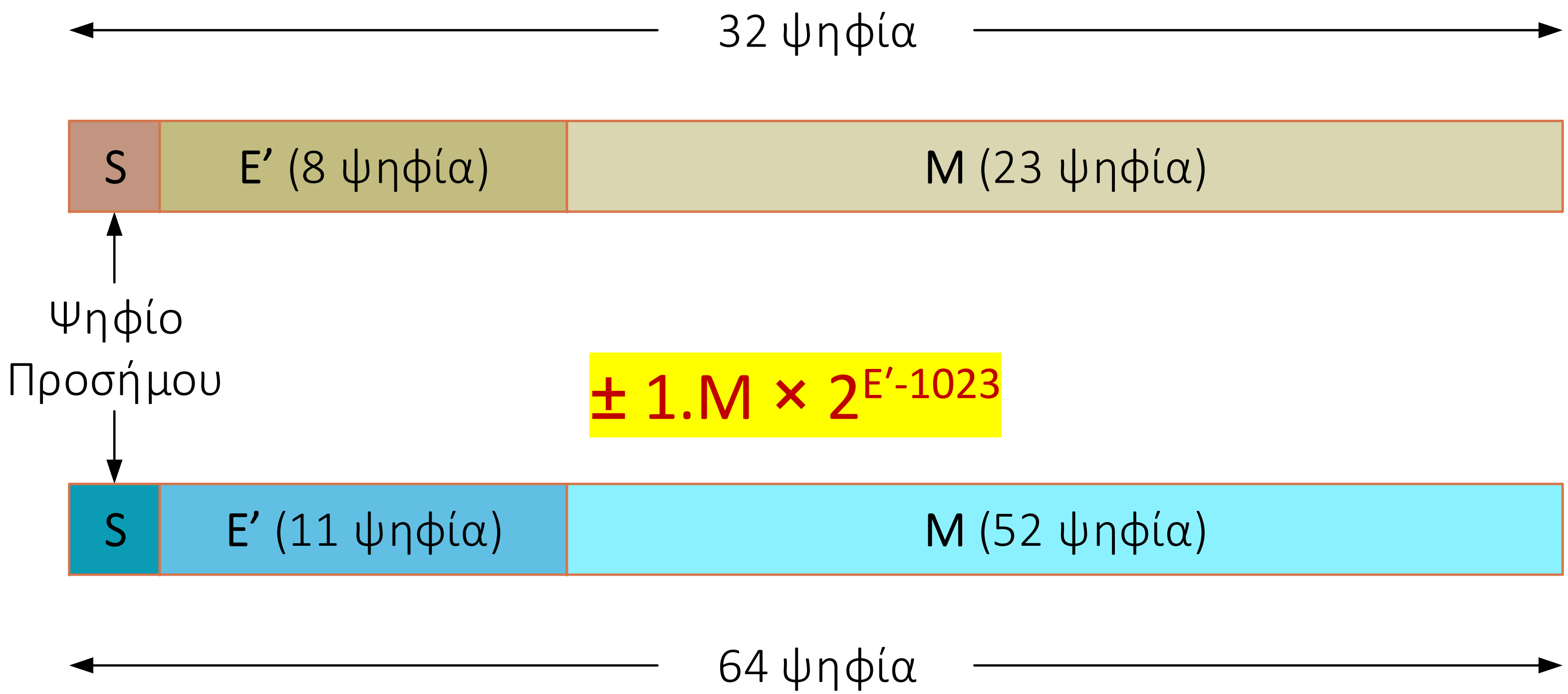
Στην παράσταση απλής ακρίβειας, ο εκθέτης εκφράζεται με 8 δυαδικά ψηφία που ακολουθούν μετά το πρόσημο και το κλασματικό μέρος εκφράζεται με τα 23 λιγότερο σημαντικά ψηφία.

Στην πραγματικότητα, στην παράσταση αυτή, αντί για τον προσημασμένο εκθέτη E, χρησιμοποιείται ένας μη προσημασμένος αριθμός E', τέτοιος ώστε: $E' = E + 127$ και λαμβάνει τιμές από 0 έως 255.

Στην παράσταση διπλής ακρίβειας (64 bits), ο εκθέτης εκφράζεται με 11 δυαδικά ψηφία που ακολουθούν μετά το πρόσημο και το κλασματικό μέρος εκφράζεται με 52 δυαδικά ψηφία. Ο αριθμός E' είναι τέτοιος ώστε: $E' = E + 1023$ και λαμβάνει τιμές από 0 έως 2047.

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

$$\pm 1.M \times 2^{E'-127}$$



$$\pm 1.M \times 2^{E'-1023}$$

Δομή των αριθμών κινητής υποδιαστολής απλής και διπλής ακρίβειας, σύμφωνα με το πρότυπο IEEE 754

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Παράδειγμα: Παράσταση κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας του δεκαδικού αριθμού 25.75.

Ο αριθμός είναι θετικός, επομένως S = 0.

Το ακέραιο μέρος του αριθμού σε δυαδική μορφή είναι $25_{10} = 11001_2$

Το κλασματικό μέρος του αριθμού είναι $0.75_{10} = 0.11_2$
Άρα, $25.75 \times 2^0{}_{10} = 11001.11 \times 2^0{}_2$
Μετατοπίζουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά, αφήνοντας μόνο μια μονάδα αριστερά της, δηλαδή, στην περίπτωσή μας, μετατοπίζουμε την υποδιαστολή 4 θέσεις (ψηφία) προς τα αριστερά, αυξάνοντας αντίστοιχα τον εκθέτη. Επομένως ο δυαδικός αριθμός γίνεται 1.100111×2^4.

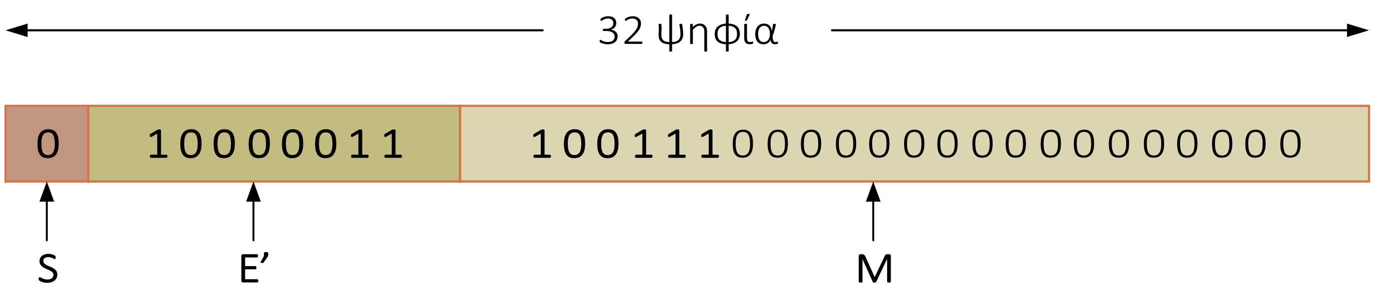
Ο εκθέτης του αριθμού είναι E = 4, οπότε E’ = E + 127 = 131, επομένως E’ = 10000011.

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Η πρώτη μονάδα (ακέραιο μέρος του αριθμού) δεν παριστάνεται και δεν αποθηκεύεται, αλλά πάντα υπονοείται ότι υπάρχει.

Τα υπόλοιπα ψηφία αποτελούν το κλασματικό μέρος του αριθμού M (mantissa), που συμπληρώνεται με μηδενικά προς τα δεξιά, ώστε να περιλαμβάνει συνολικά 23 bits.

Έτσι το κλασματικό μέρος είναι M = 10011100000000000000000 (συμπληρώνουμε 17 μηδενικά).



Παράσταση του δεκαδικού αριθμού 25.75 σύμφωνα με το πρότυπο IEEE 754 απλής ακρίβειας

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Αφού η μονάδα που βρίσκεται αριστερά της υποδιαστολής (ακέραιο μέρος) δεν παριστάνεται, αλλά θεωρείται ότι υπάρχει στη θέση αυτή, οι αριθμοί που παριστάνονται σύμφωνα με το πρότυπο IEEE 754 θα πρέπει να διαμορφώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει μόνο μια μονάδα στη θέση αριστερά της υποδιαστολής (ακέραιο μέρος πάντα ίσο με 1).

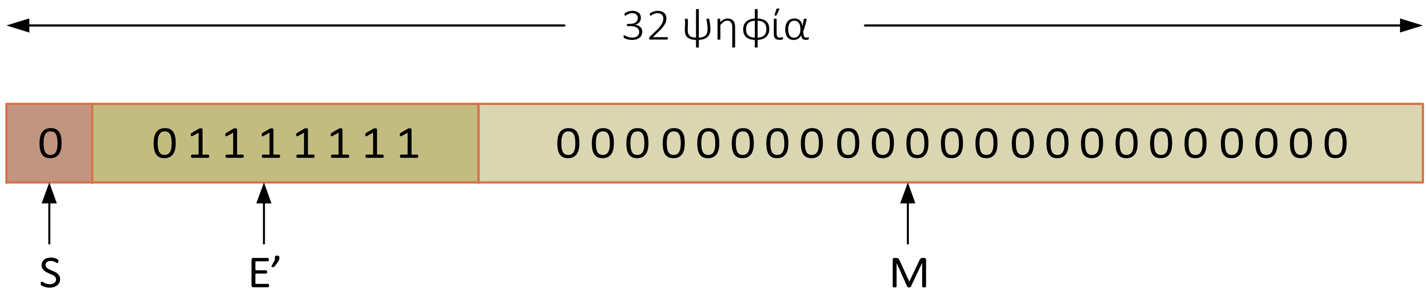
Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως κανονικοποίηση.

Σύμφωνα με τα παραπάνω βήματα, για να παραστήσουμε τον αριθμό $+1_{10}$ στο πρότυπο αυτό, θα πρέπει να γράψουμε τον αριθμό σε μορφή με ακέραιο και κλασματικό μέρος, π.χ. 1.00.

Το πεδίο προσήμου είναι S = 0.

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Το κλασματικό μέρος Μ του αριθμού παριστάνεται με 23 μηδενικά ψηφία και η τιμή του εκθέτη είναι Ε = 0 (αφού $1 = 1 \times 2^0$), οπότε θα είναι Ε’ = Ε + 127 = 0 + 127 = 127, με το πεδίο του εκθέτη θα έχει τιμή 01111111.

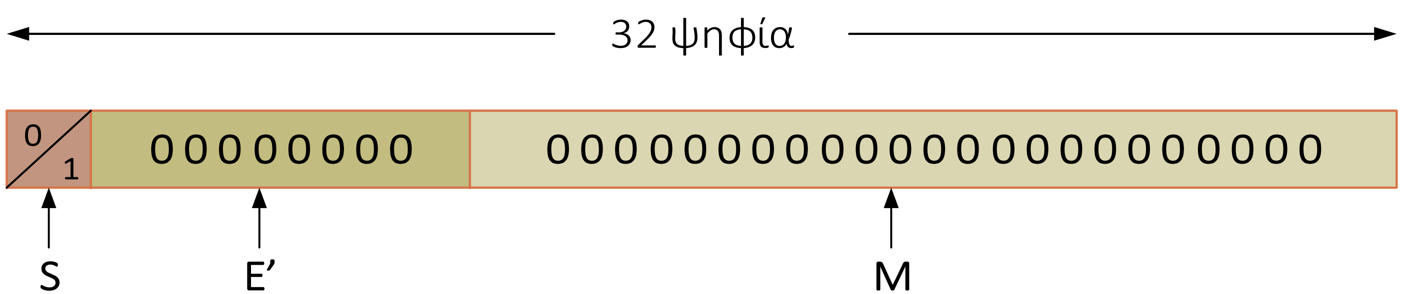


Παράσταση του δεκαδικού αριθμού 1 σύμφωνα
με το πρότυπο IEEE 754 απλής ακρίβειας

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Αν προσπαθήσουμε να παραστήσουμε τον αριθμό 0 σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, προκύπτει πρόβλημα, αφού θα έχουμε την ίδια ακριβώς παράσταση όπως και για τον αριθμό 1.

Για το λόγο αυτό, έχει καθοριστεί στο πρότυπο IEEE 754, η τιμή του 0 να αναπαριστάνεται με τις τιμές E’ = 0 (8 bits) και M = 0 (23 bits), ενώ το πρόσημο μπορεί να είναι 0 ή 1



Παράσταση του αριθμού 0 σύμφωνα
με το πρότυπο IEEE 754 απλής ακρίβειας

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Υπάρχουν ακόμα δύο σημαντικές συμβάσεις για τις παραστάσεις αριθμών κινητής υποδιαστολής στο πρότυπο IEEE 754.

Η πρώτη αφορά την περίπτωση που είναι $E' = 255$ (και τα 8 ψηφία έχουν τιμή 1) και $M \neq 0$.

Τότε, η παράσταση θεωρείται ως μη-αριθμός (Not a Number – NaN) και αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα μιας άκυρης πράξης (π.χ. η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού).

Η δεύτερη αφορά την περίπτωση που είναι $E' = 255$ και $M = 0$. Η παράσταση αυτή αντιστοιχεί στη διαίρεση ενός αριθμού με το 0, το αποτέλεσμα της οποίας είναι η τιμή του απείρου (∞).

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι ακραίες τιμές του εκθέτη (0 ή 255) χρησιμοποιούνται κατά σύμβαση στο πρότυπο IEEE για την παράσταση ειδικών τιμών.

Επομένως, το πραγματικό εύρος του εκθέτη Ε' για τις υπόλοιπες (εκτός των ακραίων) τιμών είναι από 1 έως και 254, δηλαδή ο πραγματικός εκθέτης Ε λαμβάνει τιμές από -126 έως και 127.

Όλα τα προαναφερθέντα για την παράσταση αριθμών σύμφωνα με το πρότυπο κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας IEEE 754, ισχύουν παρομοίως και στην παράσταση διπλής ακρίβειας, με τις αντίστοιχες βεβαίως προσαρμογές ως πρός τις ακραίες τιμές του εκθέτη, που στην περίπτωση αυτή αποτελείται από 11 bits και λαμβάνει τιμές στο διάστημα 0 έως 2047.

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

Για να εκτελέσουμε την πρόσθεση ή την αφαίρεση δύο αριθμών σε παράσταση κινητής υποδιαστολής ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Θα πρέπει και οι δύο αριθμοί να έχουν τον ίδιο εκθέτη. Αν έχουν διαφορετικό εκθέτη, υπολογίζουμε τη διαφορά των εκθετών των 2 αριθμών και μετατοπίζουμε προς τα δεξιά τον αριθμό με τον μικρότερο εκθέτη (το κλασματικό μέρος του και το ψηφίο που βρίσκεται αριστερά της υποδιαστολής) τόσες θέσεις όσες είναι η διαφορά. Ως εκθέτης του αποτελέσματος λαμβάνεται ο μεγαλύτερος από τους εκθέτες των δύο αριθμών.
2. Εκτελούμε την πρόσθεση ή αφαίρεση των κλασματικών μερών των δύο αριθμών και καθορίζουμε το πρόσημο του αθροίσματος ή της διαφοράς.
3. Κανονικοποιούμε το αποτέλεσμα, εάν χρειάζεται.

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

Παράδειγμα: Δίνονται οι αριθμοί $A = 28.625_{10}$ και $B = 118.5_{10}$. Να εκφραστούν σε παράσταση κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας και να εκτελεστούν οι πράξεις A + B και A – B.

$A = (28.625)_{10} = (11100.101)_2 \times 2^0$

Μετακινούμε την υποδιαστολή 4 θέσεις αριστερά, ώστε να έχουμε μόνο μια μονάδα αριστερά της (ακέραιο μέρος), οπότε θα έχουμε $A = 1.1100101 \times 2^4$.

Επομένως, σε παράσταση κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας, θα έχουμε: S = 0, E = 4, άρα E' = 4 + 127 = 131 = 10000011, και M = 11001010000000000000000.

Το κλασματικό μέρος του αριθμού συμπληρώνεται με 16 μηδενικά, ώστε να περιλαμβάνει συνολικά 23 ψηφία.

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για τον αριθμό B.

$B = (118.5)_{10} = (1110110.1)_2 \text{ x } 2^0 = 1.1101101 \text{ x } 2^6$

Άρα, $S = 0$, $E = 6$, $E' = 6 + 127 = 133 = 100000101$,
$M = 11011010000000000000000$

	S	E’	M
$(28.625)_{10}$	0	1 0 0 0 0 0 1 1	1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
$(118.5)_{10}$	0	1 0 0 0 0 1 0 1	1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Παράσταση των δεκαδικών αριθμών 28.625 και 118.5 σύμφωνα με το πρότυπο IEEE 754 απλής ακρίβειας

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

Για να εκτελεστούν οι πράξεις πρέπει οι δύο αριθμοί να έχουν τον ίδιο εκθέτη. Επειδή ο Α έχει εκθέτη 4 και ο Β έχει εκθέτη 6, θα πρέπει να εκφραστεί και ο Α με τον μεγαλύτερο εκθέτη, δηλαδή 6.

Η διαφορά των εκθετών είναι 6 – 4 = 2. Άρα, μετατοπίζουμε κατά 2 θέσεις προς τα δεξιά τα ψηφία του αριθμού Α, συνεπώς η μετατοπισμένη μορφή του είναι 0.011100101×2^6.

Ακολούθως, εκτελούμε τις ζητούμενες αριθμητικές πράξεις.

Πρόσθεση Α + Β

$$\begin{array}{r} 0\,.\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ +\,1\,.\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ \hline 10\,.\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1 \end{array}$$

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

Παρατηρούμε ότι προκύπτει τελικό κρατούμενο με αποτέλεσμα το άθροισμα να μην είναι σε κανονική μορφή με μόνο μια μονάδα αριστερά της υποδιαστολής.

Επομένως, απαιτείται κανονικοποίηση του.

Αυτό γίνεται μετατοπίζοντας την υποδιαστολή κατά μία θέση προς τα αριστερά, που ισοδυναμεί με την αύξηση της τιμής του εκθέτη κατά μία μονάδα, δηλαδή Ε= 6 + 1 =7, οπότε το τελικό αποτέλεσμα, που ήταν 10.010011001×2^6, θα γίνει

1.0010011001×2^7, και θα έχει

S = 0, E = 7, E' = 7 + 127 = 134 = 100000110

M = 00100110010000000000000

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

$(28.625)_{10}$	0	1 0 0 0 0 0 1 1	1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
+ $(118.5)_{10}$	0	1 0 0 0 0 1 0 1	1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
= $(147.125)_{10}$	0	1 0 0 0 0 1 1 0	0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Παράσταση των δεκαδικών αριθμών 28.625, 118.5
και του αθροίσματός τους (147.125), σύμφωνα
με το πρότυπο IEEE 754 απλής ακρίβειας

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

Αφαίρεση A – B: Αφαιρούμε τα κλασματικά μέρη των δύο αριθμών. Αυτό ανάγεται σε πρόσθεση του κλασματικού μέρους του A με το συμπλήρωμα ως προς 2 του κλασματικού μέρους του B.

Επειδή το κλασματικό μέρος του B είναι μεγαλύτερο από εκείνο του A, η διαφορά A – B θα είναι ένας αρνητικός αριθμός, συνεπώς S = 1.

Στο παράδειγμά μας, το κλασματικό μέρος του B είναι 1101101, επομένως το συμπλήρωμά του ως προς 2 θα είναι:

$$\Sigma_2(1101101) = \Sigma_1(1101101) + 1 = 0010010 + 1 = 0010011$$

$$\begin{array}{r} 0\,.\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ +\,0\,.\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ \hline 0\,.\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1 \end{array}$$

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

Επειδή το κλασματικό μέρος του B είναι μεγαλύτερο από εκείνο του A, το παραπάνω αποτέλεσμα παριστάνεται σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2, άρα, για λάβουμε την κανονική μορφή του, θα πρέπει να υπολογίσουμε το συμπλήρωμά του ως προς 2:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_2(0.100110001) &= \Sigma_1(0.100110001) + 1 \\
&= 1.011001110 + 1 \\
&= 1.011001111
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η διαφορά που προκύπτει είναι 1.011001111×2^6 και παριστάνεται ως αριθμός κινητής υποδιαστολής απλής ακρίβειας.

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

1	1 0 0 0 0 1 0 1	0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
S	E’	M

Παράσταση του δεκαδικού αριθμού A – B = $(28.625)_{10} – (118.5)_{10}$ = $(– 89.875)_{10}$ σύμφωνα με το πρότυπο IEEE 754 απλής ακρίβειας

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

Για να εκτελέσουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού δύο αριθμών εκφρασμένων σε παράσταση κινητής υποδιαστολής ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Προσθέτουμε τους εκθέτες των δύο αριθμών και από το άθροισμα που προκύπτει αφαιρούμε τον αριθμό 127, όταν πρόκειται για αριθμούς απλής ακρίβειας, ή τον αριθμό 1023, όταν πρόκειται για αριθμούς διπλής ακρίβειας.
2. Ακολούθως, εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό των δύο αριθμών (το κλασματικό μέρος συν το ψηφίο που βρίσκεται αριστερά της υποδιαστολής).
3. Στη συνέχεια, καθορίζουμε το πρόσημο του γινομένου.
4. Τέλος, κανονικοποιούμε το αποτέλεσμα, εάν χρειάζεται.

Πράξεις αριθμών κινητής υποδιαστολής

Αντίστοιχα, για να εκτελέσουμε την πράξη της διαίρεσης δύο αριθμών εκφρασμένων σε παράσταση κινητής υποδιαστολής ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Αφαιρούμε τους εκθέτες των δύο αριθμών και στη διαφορά που προκύπτει προσθέτουμε τον αριθμό 127, όταν πρόκειται για αριθμούς απλής ακρίβειας, ή τον αριθμό 1023, όταν πρόκειται για αριθμούς διπλής ακρίβειας.
2. Ακολούθως, εκτελούμε τη διαίρεση των δύο αριθμών (το κλασματικό μέρος συν το ψηφίο που βρίσκεται αριστερά της υποδιαστολής).
3. Στη συνέχεια, καθορίζουμε το πρόσημο του πηλίκου.
4. Τέλος, κανονικοποιούμε το αποτέλεσμα, εάν χρειάζεται.

Δυαδικοί κώδικες

Στα ψηφιακά συστήματα, εκτός από τους δυαδικούς αριθμούς, παριστάνονται, επεξεργάζονται, αποθηκεύονται και μεταδίδονται διακριτά στοιχεία πληροφορίας, όπως γράμματα, αριθμοί, χαρακτήρες, σύμβολα κλπ.

Κάθε διακριτό στοιχείο πληροφορίας μπορεί να παρασταθεί με τη χρήση ενός δυαδικού κώδικα, δηλαδή, με τη μορφή ενός μοναδικού συνδυασμού δυαδικών ψηφίων 0 και 1.

Από έναν δυαδικό κώδικα με n bits προκύπτουν 2^n διαφορετικοί συνδυασμοί από n bits ο καθένας.

Κάθε συνδυασμός παριστάνει ένα και μοναδικό (διακριτό) στοιχείο της πληροφορίας που κωδικοποιείται.

Απαγορεύεται η χρήση του ίδιου συνδυασμού ψηφίων για περισσότερα από ένα στοιχεία, γιατί τότε θα είχαμε έναν ασαφώς ορισμένο κώδικα.

Δυαδικοί κώδικες

Αν και ο ελάχιστος αριθμός ψηφίων που απαιτείται για την κωδικοποίηση 2^n διακριτών στοιχείων είναι n, δεν τίθεται μέγιστο πλήθος ψηφίων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία ενός δυαδικού κώδικα.

Για παράδειγμα, τα 10 ψηφία του δεκαδικού συστήματος (0, 1, 2, ..., 9) μπορούν να κωδικοποιηθούν με 10 δυαδικά ψηφία το καθένα, δηλαδή κάθε δεκαδικό ψηφίο να παριστάνεται με ένα συνδυασμό από δέκα δυαδικά ψηφία 0 και 1.

Το ψηφίο 6 θα μπορούσε να αντιστοιχεί στο συνδυασμό 0001000000, το ψηφίο 3 στο συνδυασμό 0000001000 και το ψηφίο 0 στο συνδυασμό 0000000001.

Οι 3 κύριοι τύποι δυαδικών κωδίκων είναι οι αριθμητικοί, οι αλφαριθμητικοί και οι κώδικες ανίχνευσης / διόρθωσης σφαλμάτων.

Κώδικας BCD

Στον αριθμητικό κώδικα BCD, Binary Coded Decimal (δυαδικά κωδικοποιημένοι δεκαδικοί) κάθε ψηφίο ενός δεκαδικού αριθμού εκφράζεται ξεχωριστά σε δυαδική μορφή.

Η παράσταση ενός δεκαδικού αριθμού σε κώδικα BCD απαιτεί περισσότερα δυαδικά ψηφία από την αντίστοιχη δυαδική.

Το πλεονέκτημα, ωστόσο, της κωδικοποίησης αυτής είναι η εξοικείωση του ανθρώπου με τους δεκαδικούς αριθμούς, σε συνδυασμό με τη χρήση του δυαδικού συστήματος που χρησιμοποιείται στα ψηφιακά συστήματα.

Στα ψηφιακά υπολογιστικά συστήματα εισάγουμε (π.χ. πληκτρολογούμε) δεκαδικούς αριθμούς, αυτοί μετατρέπονται σε δυαδική μορφή, εκτελούνται οι αριθμητικοί υπολογισμοί με δυαδικό τρόπο και τα αποτελέσματα μετατρέπονται και λαμβάνονται σε δεκαδική μορφή.

Κώδικας BCD

Επειδή το μεγαλύτερο δεκαδικό ψηφίο (9), εκφράζεται με 4 δυαδικά ψηφία (1001), όλα τα δεκαδικά ψηφία θα εκφράζονται επίσης με 4 δυαδικά ψηφία, όπως παρουσιάζεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Κώδικας BCD	
Δεκαδικό ψηφίο	Κωδικοποίηση BCD
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1

Κώδικας BCD

Από τους 16 δυνατούς συνδυασμούς 4 δυαδικών ψηφίων, στην κωδικοποίηση BCD χρησιμοποιούνται μόνο οι 10 πρώτοι (0000 έως 1001), ενώ οι υπόλοιποι 6 συνδυασμοί (1010 έως 1111, δεν χρησιμοποιούνται.

Ένας δεκαδικός αριθμός με n ψηφία, σε κωδικοποίηση BCD περιλαμβάνει n × 4 δυαδικά ψηφία (4 δυαδικά ψηφία για κάθε δεκαδικό ψηφίο)

Για παράδειγμα, ο αριθμός 295_{10} σε δυαδική παράσταση και σε κωδικοποίηση BCD κωδικοποίηση είναι:

$$(295)_{10} = (100100111)_2 = (\ 0010\ 1001\ 0101\ )_{BCD}.$$

Παρατηρούμε ότι, η κωδικοποίηση BCD απαιτεί 12 bits, ενώ ο ισοδύναμος δυαδικός αριθμός αποτελείται από 9 bits, δηλαδή η κωδικοποίηση BCD απαιτεί περισσότερα δυαδικά ψηφία.

Κώδικας BCD

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι οι αριθμοί BCD αναπαριστούν δεκαδικούς αριθμούς και δεν είναι δυαδικοί αριθμοί.

Ωστόσο, επειδή εκφράζονται σε δυαδική μορφή, μπορούμε να εφαρμόζουμε τους κανόνες που ισχύουν στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα, λαμβάνοντας φυσικά υπόψη μας τους περιορισμούς που τίθενται από τον τρόπο που γίνεται η κωδικοποίηση.

Κατά την πρόσθεση δύο δεκαδικών ψηφίων κωδικοποιημένων κατά BCD, όταν το δυαδικό άθροισμα είναι ίσο ή μικρότερο του 1001 (δηλαδή του 9), τότε ταυτίζεται με το άθροισμα κατά BCD.

Κώδικας BCD

Στην περίπτωση όμως που το δυαδικό άθροισμα είναι μεγαλύτερο του 1001 (και προφανώς δεν περιλαμβάνεται στον κώδικα BCD), για να ληφθεί το σωστό άθροισμα κατά BCD, θα πρέπει να προσθέσουμε στο δυαδικό άθροισμα τον αριθμό 0110 (= 6_{10}), που είναι ίσος με το πλήθος των μη χρησιμοποιούμενων στον κώδικα BCD συνδυασμών των 4 δυαδικών ψηφίων.

Αυτό θα έχει αποτέλεσμα τη δημιουργία κρατούμενου, το οποίο θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την πρόσθεση των κωδικοποιημένων κατά BCD ψηφίων της αμέσως επόμενης πιο σημαντικής θέσης.

Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως διόρθωση κρατούμενου.

Κώδικας BCD

Παράδειγμα: Να εκφραστούν οι δεκαδικοί αριθμοί 53 και 38 σε κώδικα BCD και να εκτελεστεί η πράξη της πρόσθεσης.

Η BCD κωδικοποίηση των δύο αριθμών είναι: 53_{10} = 0101 0011 και 38_{10} = 0011 1000

Η πρόσθεση των δυαδικών ψηφίων γίνεται σύμφωνα με τους κανόνες του δυαδικού αριθμητικού συστήματος. Επομένως:

	0	1	0	1			0	0	1	1	53_{10}
+	0	0	1	1	+		1	0	0	0	38_{10}
	1	0	0	0			1	0	1	1	Μη αποδεκτή παράσταση BCD
+				**1**	+		0	1	1	0	+ 6_{10}
	1	**0**	**0**	**1**		**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**91_{10}**

Κώδικας Gray

Ο κώδικας Gray κωδικοποιεί αριθμούς με δυαδικά ψηφία κατά τέτοιο τρόπο ώστε, κατά τη μετάβαση μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών να αλλάζει τιμή μόνο ένα δυαδικό ψηφίο.

Ο κώδικας Gray για τέσσερα δυαδικά ψηφία, παρουσιάζεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Κώδικας Gray

Δεκαδικό ψηφίο	Κωδικοποίηση GRAY			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0
8	1	1	0	0
9	1	1	0	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	0
12	1	0	1	0
13	1	0	1	1
14	1	0	0	1
15	1	0	0	0

Κώδικας Gray

Ένας πρακτικός τρόπος συμπλήρωσης του παραπάνω πίνακα στηρίζεται στην ανακλαστική ιδιότητα.

Κατά τη δημιουργία της πρώτης από δεξιά στήλης ξεκινάμε με ένα μηδενικό και μία μονάδα.

Κατά τη δημιουργία της δεύτερης στήλης ξεκινάμε με δύο μηδενικά και δύο μονάδες.

Κατά τη δημιουργία της τρίτης στήλης με τέσσερα μηδενικά και τέσσερις μονάδες κ.ο.κ.

Δημιουργώντας, λοιπόν, τον κώδικα ανά στήλη, στην πρώτη στήλη τοποθετούμε τα υπόλοιπα ψηφία ανά 2 σε αντίστροφη σειρά, στη δεύτερη στήλη ανά 4 σε αντίστροφη σειρά, στην τρίτη στήλη ανά 8 σε αντίστροφη σειρά κ.ο.κ.

Κώδικας Gray

Ο κώδικας Gray χρησιμοποιείται σε εφαρμογές όπου η κανονική ακολουθία δυαδικών αριθμών μπορεί να οδηγήσει σε σφάλμα κατά τη μετάβαση μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τη μετάβαση από τον αριθμό 0111 (7_{10}) στον επόμενο 1000 (8_{10}) μιας κανονικής δυαδικής ακολουθίας, κατά την οποία, εάν η αλλαγή τιμής του λιγότερο σημαντικού ψηφίου γίνει καθυστερημένα, θα προκύψει προσωρινά η λανθασμένη τιμή 1001 (9_{10}).

Με χρήση της ακολουθίας του κώδικα Gray αυτό αντιμετωπίζεται, αφού αλλάζει η τιμή μόνο ενός ψηφίου κατά τη μετάβαση μεταξύ διαδοχικών αριθμών.

Αλφαριθμητικός κώδικας ASCII

Με δεδομένο ότι, η επεξεργασία οποιαδήποτε πληροφορίας στα ψηφιακά συστήματα πραγματοποιείται αποκλειστικά με τη χρήση των δυαδικών ψηφίων 0 και 1, προέκυψε η ανάγκη κωδικοποίησης χαρακτήρων, όπως γράμματα και σύμβολα, αλλά και εντολών για την εκτέλεση συγκεκριμένων ενεργειών, όπως, για παράδειγμα, την αλλαγή γραμμής ή παραγράφου σε ένα κείμενο.

Η πλέον χρησιμοποιούμενη κωδικοποίηση είναι η ASCII (American Standard Code for Information Interchange), ένας δυαδικός κώδικας αλφαριθμητικών χαρακτήρων που χρησιμοποιεί 7 δυαδικά ψηφία για την κωδικοποίηση 128 χαρακτήρων, 94 εκτυπώσιμων (26 κεφαλαία και 26 μικρά λατινικά γράμματα, τα 10 δεκαδικά ψηφία και 32 ειδικά σύμβολα), καθώς και 34 μη εκτυπώσιμων (για πράξεις ελέγχου).

Αλφαριθμητικός κώδικας ASCII

Παραδείγματα κωδικοποιήσεων ASCII:

- η φράση yes!: 1111001 1100101 1110011 0100001
- το δεκαδικό ψηφίο 7 σαν χαρακτήρας (όχι ο αριθμός): 0110111
- η αλλαγή παραγράφου (Enter/CR – carriage return): 0001101
- η διαγραφή ενός χαρακτήρα (DEL – delete): 1111111

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η κωδικοποίηση ASCII για τους 94 εκτυπώσιμους χαρακτήρες και τους χαρακτήρες ελέγχου.

Αλφαριθμητικός κώδικας ASCII

$b_4 b_3 b_2 b_1$	$b_7 b_6 b_5$ 000	$b_7 b_6 b_5$ 001	$b_7 b_6 b_5$ 010	$b_7 b_6 b_5$ 011	$b_7 b_6 b_5$ 100	$b_7 b_6 b_5$ 101	$b_7 b_6 b_5$ 110	$b_7 b_6 b_5$ 111
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	“	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	g	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	−	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	–	o	DEL

Αλφαριθμητικός κώδικας ASCII

Χαρακτήρες ελέγχου

NUL	Null	DLE	Data link escape
SOH	Start of heading	DC1	Device control 1
STX	Start of text	DC2	Device control 2
ETX	End of text	DC3	Device control 3
EOT	End of transmission	DC4	Device control 4
ENQ	Enquiry	NAK	Negative acknowledge
ACK	Acknowledge	SYN	Synchronize
BEL	Bell	ETB	End transmitted block
BS	Backspace	CAN	Cancel
HT	Horizontal tab	EM	End of medium
LF	Line feed	SUB	Substitute
VT	Vertical tab	ESC	Escape
FF	Form feed	FS	File separator
CR	Carriage return	GS	Group separator
SO	Shift out	RS	Record separator
SI	Shift in	US	Unit separator
SP	Space	DEL	Delete or rubout

Αλφαριθμητικός κώδικας ASCII

Ο Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης (ΕΛΟΤ) έχει αναπτύξει τον κώδικα ΕΛΟΤ-928 (επέκταση του ASCII) που χρησιμοποιεί 8 δυαδικά ψηφία και παρέχει ενιαία κωδικοποίηση λατινικών και ελληνικών χαρακτήρων.

Έως σήμερα έχουν γίνει πολλές προσπάθειες ανάπτυξης κωδίκων αλφαριθμητικών χαρακτήρων, με σημαντικότερη αυτήν της κοινοπραξίας Unicode, η οποία αναπτύσσει το ομώνυμο πρότυπο, για την κωδικοποίηση των χαρακτήρων όλων των υπαρχόντων συστημάτων γραφής, χρησιμοποιώντας έως και 32 δυαδικά ψηφία ανά χαρακτήρα.

Κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων

Κατά τη μετάδοση ή την επεξεργασία ψηφιακής πληροφορίας είναι πιθανό, λόγω ηλεκτρονικού θορύβου, δηλαδή ανεπιθύμητων διακυμάνσεων των ψηφιακών σημάτων, να συμβεί αλλοίωση της τιμής ενός ή περισσότερων δυαδικών ψηφίων.

Σφάλματα τέτοιου είδους είναι δυνατό να εντοπισθούν και να διορθωθούν χρησιμοποιώντας κώδικες ανίχνευσης ή κώδικες ανίχνευσης και διόρθωσης σφαλμάτων.

Ένας τρόπος ανίχνευσης των σφαλμάτων είναι η προσθήκη ενός επιπλέον ψηφίου (ψηφίο ισοτιμίας, parity bit) σε κάθε κωδικοποιημένο χαρακτήρα ή αριθμό, έτσι ώστε το πλήθος των ψηφίων 1 που περιέχονται σε αυτόν να είναι περιττό ή άρτιο, δηλαδή να δημιουργείται κώδικας με περιττή ή άρτια ισοτιμία, αντίστοιχα.

Κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων

Στα συστήματα που χρησιμοποιούν κωδικοποίηση ASCII (στην οποία, όπως είδαμε, χρησιμοποιούνται 7 δυαδικά ψηφία για την αναπαράσταση 128 χαρακτήρων), αυτό γίνεται με την προσθήκη ενός επιπλέον ψηφίου στην πιο σημαντική θέση κάθε κωδικοποιημένου χαρακτήρα.

Αυτό το όγδοο ψηφίο αναφέρεται ως ψηφίο ισοτιμίας (parity bit).

Ο έλεγχος ισοτιμίας (parity check) είναι ένας τρόπος ανίχνευσης σφαλμάτων.

Το ψηφίο ισοτιμίας μπορεί να πάρει τιμή 1 ή 0, και τοποθετείται στη δυαδική ακολουθία έτσι ώστε, το πλήθος των 1 στα 8 συνολικά ψηφία της ακολουθίας να γίνεται είτε άρτιο, οπότε γίνεται λόγος για άρτια ισοτιμία (even parity), είτε περιττό, οπότε προκύπτει περιττή ισοτιμία (odd parity).

Κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων

Παράδειγμα: Η λέξη TO (με λατινικά κεφαλαία γράμματα) συνίσταται από τους χαρακτήρες T και O των οποίων η κωδικοποίηση σε κώδικα ASCII είναι 1010100 και 1001111, αντίστοιχα.

Στην πιο σημαντική θέση προσθέτουμε ένα ψηφίο ισοτιμίας (1), για να υποδηλώσουμε άρτια ισοτιμία (το πλήθος των 1 είναι άρτιος αριθμός), οπότε θα έχουμε **1**1010100 και **1**1001111.

Στη συνέχεια, οι κωδικοποιημένοι χαρακτήρες 8 ψηφίων μεταδίδονται και η ισοτιμία τους ελέγχεται από το δέκτη. Εάν η ισοτιμία των χαρακτήρων που ελήφθησαν δεν είναι άρτια, αυτό σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια της μετάδοσης έχει αλλάξει η τιμή (σφάλμα) τουλάχιστον ενός ψηφίου.

Ωστόσο, όταν έχουμε άρτιο πλήθος σφαλμάτων (π.χ. 2 σφάλματα), δεν εξασφαλίζεται η ανίχνευσή τους, οπότε απαιτούνται άλλου είδους κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων.

Κώδικες ανίχνευσης και διόρθωσης σφαλμάτων

Όλοι οι κώδικες διόρθωσης / ανίχνευσης σφαλμάτων προσθέτουν πλεονασματική πληροφορία στα δεδομένα που αποστέλλονται.

Πληρέστερος κώδικας ανίχνευσης σφαλμάτων είναι ο κώδικας Hamming, ο οποίος εκτός από τη δυνατότητα ανίχνευσης της ύπαρξης σφαλμάτων, έχει τη δυνατότητα προσδιορισμού της θέσης των σφαλμάτων σε έναν χαρακτήρα, έτσι ώστε να μπορούν να ανακτηθούν τα αρχικά δεδομένα.

Με τον κώδικα αυτό, δημιουργούνται κωδικοποιημένοι χαρακτήρες όπου τα ψηφία ισοτιμίας συνδυάζονται με επιλεγμένες ομάδες ψηφίων των αρχικών χαρακτήρων.

Κατά τη λήψη κάθε χαρακτήρα, ανιχνεύονται τυχόν σφάλματα μέσω ελέγχου ισοτιμίας και σχηματίζεται ένας δυαδικός αριθμός με ψηφία ελέγχου που δηλώνει τη θέση του ψηφίου του οποίου η τιμή έχει αλλάξει, ώστε αυτό να μπορεί να διορθωθεί.