

4.3 Χρονική Επίλυση Δικτύων Έργου

Χρονική Επίλυση Δικτύου Έργου

Ερωτήματα που τίθενται:

- Ποια είναι η προβλεπόμενη διάρκεια του έργου;
- Ποιες θα είναι οι επιπτώσεις στη διάρκεια του έργου από τυχούσες υπερβάσεις της διάρκειας κάποιας ή κάποιων δραστηριοτήτων;

Απαντήσεις σε τέτοιου είδους ερωτήματα δίνει η χρονική επίλυση του δικτύου έργου.

Ημερολόγιο έργου (1)

Βασικό προαπαιτούμενο για τη χρονική επίλυση του δικτύου είναι ο καθορισμός της μονάδας μέτρησης του χρόνου.

- Εάν ως μονάδα χρόνου τίθεται η ώρα, δεν υφίσταται κανένα πρόβλημα.
- Εάν ως μονάδα χρόνου τίθεται η ημέρα, η εβδομάδα, ο μήνας κλπ. τότε τίθεται θέμα ορισμού τους.

Ημερολόγιο έργου (2)

Εάν ως μονάδα χρόνου τίθεται η εργάσιμη ημέρα, θα πρέπει να καθορίζονται για κάθε δραστηριότητα:

- η ώρα έναρξής της,
- η χρονική διάρκειά της σε ώρες,

για τους εξής λόγους:

- Υπάρχουν δραστηριότητες που μπορεί να διαρκούν ημερησίως μόνο μερικές ώρες και άλλες που μπορεί να διαρκούν ολόκληρο το 24ωρο. Για παράδειγμα, η επιθεώρηση ενός εργοταξίου μπορεί να διαρκεί τρεις ώρες, ενώ οι κατασκευαστικές δραστηριότητες μπορεί να διαρκούν όλο το 24ωρο (σε βάρδιες).
- Όταν λέμε ότι μια δραστηριότητα ολοκληρώνεται π.χ. την πέμπτη εργάσιμη ημέρα, αυτό σημαίνει ότι ολοκληρώνεται το πολύ μέχρι τη λήξη της καθορισμένης πέμπτης εργάσιμης ημέρας, ενώ η έκτη εργάσιμη ημέρα ξεκινά τουλάχιστον την ώρα έναρξης της έκτης καθορισμένης εργάσιμης ημέρας.

Ημερολόγιο έργου (3)

Εάν ως μονάδα χρόνου τίθεται η εργάσιμη εβδομάδα, θα πρέπει να καθορίζονται για κάθε δραστηριότητα:

- η εργάσιμη ημέρα,
- οι ημέρες της εβδομάδας που θεωρούνται εργάσιμες.

Και αυτό γιατί ορισμένες δραστηριότητες μπορεί να ακολουθούν άλλη εργάσιμη εβδομάδα και άλλες άλλη.

Για παράδειγμα, οι μελετητικές εργασίες να διεξάγονται πέντε ημέρες την εβδομάδα, ενώ οι εργασίες στο εργοτάξιο να πραγματοποιούνται όλες τις ημέρες της εβδομάδας (και το Σαββατοκύριακο).

Ομοίως, εάν ως μονάδα χρόνου τίθεται ο εργάσιμος μήνας, θα πρέπει να καθορίζονται για κάθε δραστηριότητα:

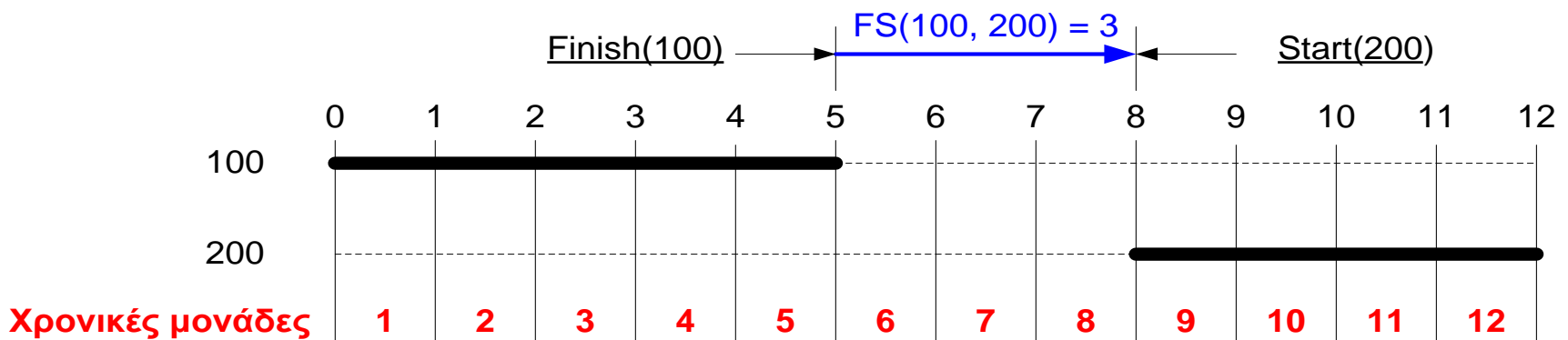
- η εργάσιμη ημέρα,
- οι ημέρες του μήνα που θεωρούνται εργάσιμες.

Ο καθορισμός της εργάσιμης ημέρας, εβδομάδας, μήνα κλπ. για κάθε δραστηριότητα, κατά τη διάρκεια εξέλιξης του έργου, παράγει το **Ημερολόγιο του Έργου (Project Calendar)**.

Ημερολόγιο έργου (4)

Ο χρονικός προγραμματισμός του έργου μπορεί να γίνεται με δύο τρόπους:

1. Με ελεύθερο από ημερολογιακές αναφορές τρόπο, δηλ. χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι αργίες. Στην περίπτωση αυτή η αρχή του έργου σηματοδοτείται από τη χρονική στιγμή ΜΗΔΕΝ, που σημαίνει την έναρξη της πρώτης εργάσιμης μονάδας του έργου. Αν, για παράδειγμα, η δραστηριότητα 100 αρχίζει τη χρονική στιγμή μηδέν και διαρκεί 5 εργάσιμες χρονικές μονάδες και η 200 αρχίζει 3 χρονικές μονάδες μετά το τέλος της 100 και διαρκεί 4 χρονικές μονάδες [$FS(100, 200) = 3$], αυτό σημαίνει ότι:
 - ✓ η 100 αρχίζει στην αρχή της πρώτης εργάσιμης μονάδας του έργου ($0 + 1 = 1$) και τελειώνει στο τέλος της πέμπτης εργάσιμης μονάδας ($0 + 5 = 5$),
 - ✓ η 200 ξεκινά στην αρχή της ένατης χρονικής μονάδας ($5 + 3 + 1 = 9$) και τελειώνει στο τέλος της δωδέκατης χρονικής μονάδας ($5 + 3 + 4 = 12$). Η πρόσθεση του 1 που γίνεται στην έναρξη κάθε δραστηριότητας, δηλώνει ακριβώς ότι η δραστηριότητα ξεκινά στην αρχή της επόμενης χρονικής μονάδας.



Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής (1) (Critical Path Method – CPM)

Η **μέθοδος κρίσιμης διαδρομής** (critical path method, CPM) είναι ένας αλγόριθμος για τον προγραμματισμό των δραστηριοτήτων ενός έργου. Αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την αποτελεσματική διαχείριση των έργων.

Η βασική τεχνική για τη χρήση της CPM είναι η κατασκευή ενός μοντέλου του έργου που περιλαμβάνει τα ακόλουθα:

- τον κατάλογο όλων των δραστηριοτήτων που απαιτούνται για την ολοκλήρωση του έργου (δομική ανάλυση εργασιών),
- το χρόνο (διάρκεια) που κάθε δραστηριότητα θα χρειαστεί για να ολοκληρωθεί,
- τις εξαρτήσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα δεδομένα, η CPM υπολογίζει τη μεγαλύτερη σε διάρκεια “διαδρομή” των προγραμματισμένων δραστηριοτήτων από την αρχή μέχρι το τέλος του έργου, καθώς και τον νωρίτερο και βραδύτερο χρόνο που κάθε δραστηριότητα μπορεί να ξεκινήσει και να τελειώσει χωρίς να επιφέρει αύξηση της διάρκειας του έργου.

Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής – CPM (2)

Η διαδικασία αυτή καθορίζει ποιες δραστηριότητες είναι “κρίσιμες” (δηλ. μπορεί να έχουν επίπτωση στη διάρκεια του έργου) και ποιες χαρακτηρίζονται από “περιθώριο χρόνου” (δηλ. μπορούν να καθυστερήσουν χωρίς να επιμηκύνουν το έργο).

Κρίσιμη διαδρομή σε ένα δίκτυο έργου είναι η διαδρομή από συνδεδεμένες μεταξύ τους δραστηριότητες που (αθροιστικά) δίνουν τη μεγαλύτερη χρονική διάρκεια από την έναρξη μέχρι το τέλος του έργου.

- Ο χρόνος ολοκλήρωσης του έργου θα ισούται με το άθροισμα των διαρκειών των δραστηριοτήτων, που ανήκουν στην κρίσιμη διαδρομή.
- Αυτό καθορίζει και το συντομότερο δυνατό χρονικό διάστημα για την ολοκλήρωση του έργου.
- Οποιαδήποτε καθυστέρηση μιας δραστηριότητας στην κρίσιμη διαδρομή επιφέρει χρονική επιμήκυνση στην ολοκλήρωση του συνολικού έργου.

Ένα έργο μπορεί να έχει πολλές, παράλληλες διαδρομές. Μια πρόσθετη παράλληλη διαδρομή μέσω του δικτύου με συνολική διάρκεια μικρότερη από την κρίσιμη διαδρομή ονομάζεται υπο-κρίσιμη ή μη-κρίσιμη διαδρομή.

Πολλές φορές σε κάποια περισσότερο πολύπλοκα δίκτυα, προκύπτουν περισσότερες από μία κρίσιμες διαδρομές.

Εννοείται ότι ο συνολικός χρόνος των κρίσιμων διαδρομών είναι ο ίδιος και φυσικά μεγαλύτερος από τον συνολικό χρόνο οποιαδήποτε άλλης διαδρομής του δικτύου.

Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής – CPM (3)

Συμπερασματικά, με τη μέθοδο CPM μπορεί να προσεγγισθεί:

- **ο συνολικός χρόνος του έργου,**
- **το πόσο μπορούν να καθυστερήσουν ή όχι** οι επιμέρους δραστηριότητες του έργου,
- ποιες από αυτές είναι **κρίσιμες** (που ανήκουν στην κρίσιμη διαδρομή), **οπότε δεν υπάρχει περιθώριο καθυστέρησής τους,**
- **πόσες είναι οι κρίσιμες διαδρομές** για το έργο (αν υπάρχουν περισσότερες από μία),
- **σε ποιες από τις δραστηριότητες πρέπει να δώσει ιδιαίτερη προσοχή** (π.χ. με μεταφορά επιπλέον πόρων) η διοίκηση του έργου και γενικά να προγραμματίσει έτσι το έργο ώστε να ολοκληρωθεί ομαλά μέσα στους επιθυμητούς χρόνους.

Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία που προκύπτουν από την μέθοδο μπορεί να κάνει αλλαγές στο σχεδιασμό του έργου, αν οι χρόνοι που προκύπτουν είναι μεγαλύτεροι από τους επιθυμητούς, με το να αναθεωρήσει την κρίσιμη διαδρομή, ελέγχοντας και συμπιέζοντας χρονικά τις δράσεις της αν γίνεται (π.χ. με την χρήση επιπλέον πόρων).

Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής – CPM (4)

Είναι δυνατόν σε ένα δίκτυο δραστηριοτήτων να υπάρξουν περισσότερες κρίσιμες διαδρομές.

Οποιαδήποτε άλλη διαδρομή στο δίκτυο που οδηγεί από την έναρξη του έργου στο τέλος του, περιλαμβάνει δραστηριότητες των οποίων η συνολική διάρκεια είναι μικρότερη από αυτήν της κρίσιμης διαδρομής.

Φυσικά αν για κάποιο λόγο αυξηθεί πάνω από κάποιο όριο η διάρκεια μιας ή περισσότερων δραστηριοτήτων μιας μη κρίσιμης διαδρομής, η διαδρομή αυτή καθίσταται κρίσιμη, αντικαθιστώντας την προηγούμενη κρίσιμη.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η αύξηση αυτή να είναι μεγαλύτερη της διαφοράς, μεταξύ της διάρκειας της κρίσιμης διαδρομής και της συνολικής διάρκειας των δραστηριοτήτων της μη κρίσιμης διαδρομής.

Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής - CPM (5)

Ορισμοί (1)

Ενωρίτεροι χρόνοι

Ενωρίτερος Χρόνος Έναρξης (EXE) ή Ενωρίτερη Έναρξη (Early Start – ES): Η νωρίτερη χρονική στιγμή (ή ημερομηνία) που μπορεί να ξεκινήσει η δραστηριότητα, με την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται οι υφιστάμενοι περιορισμοί.

Εάν αυτός ο χρόνος αναφέρεται στην πρώτη χρονικά δραστηριότητα του δικτύου, δηλώνει και τη νωρίτερη χρονική στιγμή (ή ημερομηνία) έναρξης του έργου.

Ενωρίτερος Χρόνος Τέλους (EXT) ή Ενωρίτερη Λήξη (Early Finish – EF): Η νωρίτερη χρονική στιγμή (ή ημερομηνία) που μπορεί να τελειώσει η δραστηριότητα, με την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται οι υφιστάμενοι περιορισμοί.

Εάν αυτός ο χρόνος αναφέρεται στην τελευταία χρονικά δραστηριότητα του δικτύου, δηλώνει και τη νωρίτερη χρονική στιγμή (ή ημερομηνία) λήξης του έργου.

Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής - CPM (5)

Ορισμοί (2)

Βραδύτεροι χρόνοι

Βραδύτερος Χρόνος Έναρξης (BΧΕ) ή Βραδύτερη Έναρξη (Late Start – LS): Η βραδύτερη (πιο καθυστερημένη) χρονική στιγμή (ή ημερομηνία) που μπορεί να ξεκινήσει η δραστηριότητα, με την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται οι υφιστάμενοι περιορισμοί.

Εάν αυτός ο χρόνος αναφέρεται στην πρώτη χρονικά δραστηριότητα του δικτύου, δηλώνει και τη βραδύτερη χρονική στιγμή (ή ημερομηνία) έναρξης του έργου.

Βραδύτερος Χρόνος Τέλους (BΧΤ) ή Βραδύτερη Λήξη (Late Finish – LF): Η βραδύτερη χρονική στιγμή (ή ημερομηνία) που μπορεί να τελειώσει η δραστηριότητα, με την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται οι υφιστάμενοι περιορισμοί.

Εάν αυτός ο χρόνος αναφέρεται στην τελευταία χρονικά δραστηριότητα του δικτύου, δηλώνει και τη βραδύτερη χρονική στιγμή (ή ημερομηνία) λήξης του έργου.

Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής - CPM (5)

Ορισμοί (3)

Περιθώριο Χρόνου (Float) ή Χαλαρός Χρόνος (Slack)

Αποτελεί μέτρο της (χρονικής) ευελιξίας του έργου και υποδηλώνει το εγγενές πλεόνασμα χρόνου που υπάρχει στον προγραμματισμό των δραστηριοτήτων. Υποδηλώνει, δηλαδή, για πόσες χρονικές μονάδες μπορεί να καθυστερήσει η έναρξη ή να επεκταθεί η διάρκεια κάποιας δραστηριότητας στο δίκτυο του έργου χωρίς αυτό να επηρεάσει:

- την ημερομηνία ολοκλήρωσης του έργου (Συνολικό Περιθώριο Χρόνου – Total Float)
- την ημερομηνία έναρξης επόμενων δραστηριοτήτων (Ελεύθερο Περιθώριο Χρόνου – Free Float)

Γενικά, το περιθώριο χρόνου υπολογίζεται ως η διαφορά των βραδύτερων χρόνων μείον τους ενωρίτερους χρόνους:

Χρονικό περιθώριο = Βραδύτερος Χρόνος Έναρξης – Ενωρίτερος Χρόνος Έναρξης

ή

Χρονικό περιθώριο = Βραδύτερος Χρόνος Τέλους – Ενωρίτερος Χρόνος Τέλους

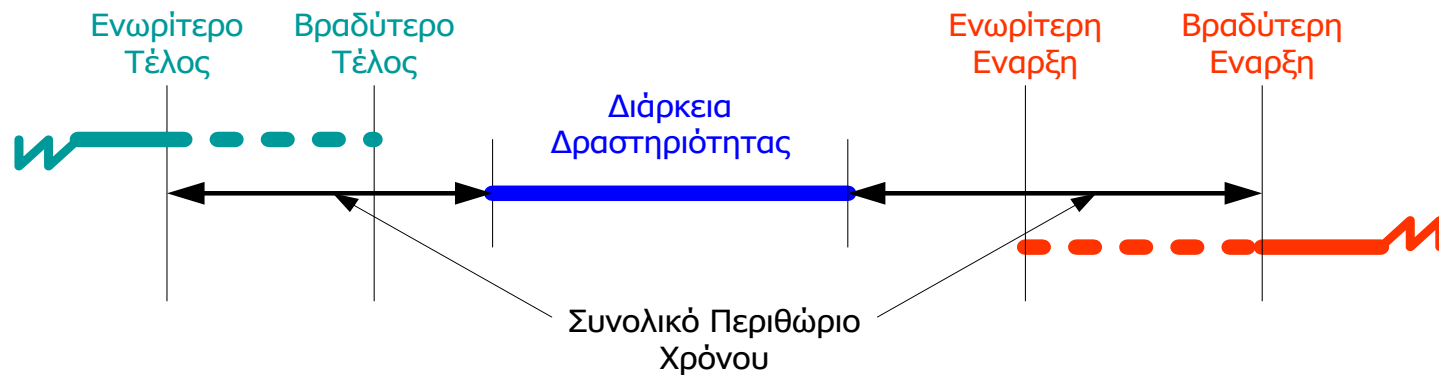
Όταν μία δραστηριότητα έχει μηδενικό χρονικό περιθώριο, αυτό σημαίνει ότι βρίσκεται πάνω στην κρίσιμη διαδρομή.

Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής - CPM (5)

Ορισμοί (4)

Το Συνολικό Περιθώριο Χρόνου - ΣΠΧ (Total Float, Total Slack) αφορά όλες τις δραστηριότητες που βρίσκονται στην ίδια διαδρομή και δηλώνει το μεγαλύτερο δυνατό χρονικό διάστημα που μπορεί να υπερβεί την προβλεπόμενη διάρκειά της μια δραστηριότητα χωρίς να αυξηθεί η συνολική διάρκεια του έργου.

Αυτό το περιθώριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απορρόφηση καθυστερήσεων, είτε από την ίδια τη δραστηριότητα, είτε συνολικά από όλες τις δραστηριότητες της διαδρομής που ανήκει η συγκεκριμένη δραστηριότητα. Αν κάποια δραστηριότητα καταναλώσει αυτό το συνολικό χρονικό περιθώριο, αυτό σημαίνει ότι θα μειωθεί το χρονικό περιθώριο καθεμιάς από τις υπόλοιπες δραστηριότητες της διαδρομής.



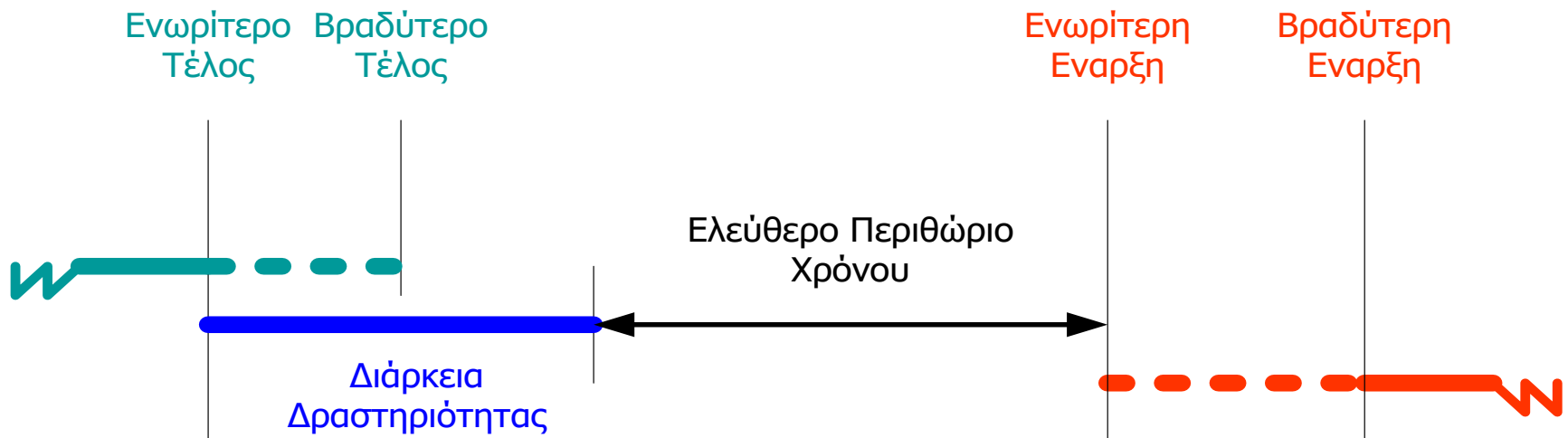
Προσοχή: Πολλές φορές γίνεται η παρανόηση ότι καθεμιά από τις δραστηριότητες έχει αυτό το χρονικό περιθώριο για τον εαυτό της, ενώ αυτό αφορά στο σύνολο των δραστηριοτήτων της διαδρομής.

Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής - CPM (5)

Ορισμοί (5)

Ελεύθερο Περιθώριο Χρόνου - ΕΠΧ (Free Float, Free Slack) είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο μπορεί να υπερβεί την προβλεπόμενη διάρκεια της μια δραστηριότητα χωρίς να επηρεασθεί ο ενωρίτερος χρόνος έναρξης (EXE - ES) των επόμενων δραστηριοτήτων, με δεδομένο ότι οι προηγούμενες δραστηριότητες ξεκινούν στον ενωρίτερο χρόνο τους.

Εάν μια δραστηριότητα διαθέτει ελεύθερο περιθώριο χρόνου ($ΕΠΧ > 0$), αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί συνολικά από τις προηγούμενες δραστηριότητες της διαδρομής που ανήκει η συγκεκριμένη δραστηριότητα.



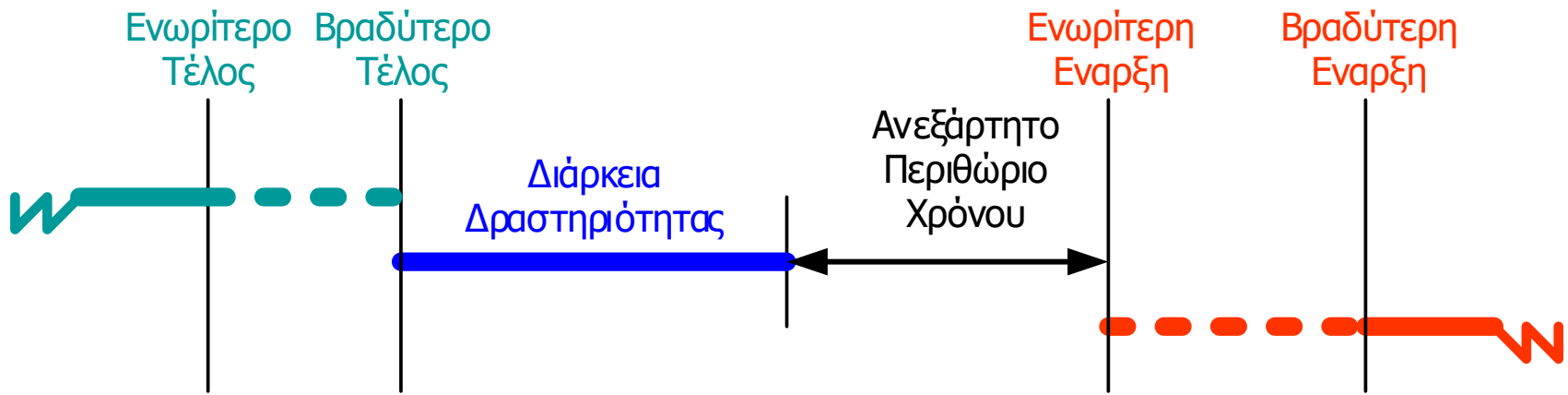
Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής - CPM (5)

Ορισμοί (6)

Ανεξάρτητο Περιθώριο Χρόνου - ΕΠΧ (Independent Float, Independent Slack)

είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο μπορεί να υπερβεί την προβλεπόμενη διάρκειά της μια δραστηριότητα όταν οι προηγούμενες δραστηριότητες ολοκληρώνονται στο βραδύτερο τέλος τους (BXT – LF) και οι επόμενες ξεκινούν στην ενωρίτερη έναρξή τους (EXE - ES).

Το ανεξάρτητο περιθώριο χρόνου μπορεί να καταναλωθεί μόνο από την ίδια τη δραστηριότητα, ενώ δεν επηρεάζει προηγούμενες και επόμενες δραστηριότητες. Αποτελεί ένα απόθεμα χρόνου της δραστηριότητας για τις “δύσκολες” στιγμές.



Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής - CPM (6)

Ένα δίκτυο έργου δημιουργείται κάτω από την πίεση δύο διαφορετικών αναγκών:

1. Την ανάγκη να προβλεφθεί η διάρκεια του έργου χωρίς την ύπαρξη καταληκτικής ημερομηνίας (Deadline) για την υλοποίηση του έργου. Αυτό συμβαίνει όταν τίθεται το ερώτημα "αυτό το έργο πόσο μπορεί να διαρκέσει;".

Στην περίπτωση αυτή ο BXT (LF) του έργου τίθεται ίσος με τον EXT (EF) του έργου ($BXT = EXT$ ή $LF = EF$).

2. Την ανάγκη να προσαρμοστεί το δίκτυο σε συγκεκριμένο επιβαλλόμενο χρόνο υλοποίησης, για παράδειγμα "το έργο πρέπει να υλοποιηθεί μέσα σε 3 μήνες".

Τότε ο BXT (LF) του έργου πρέπει να είναι ίσος με τον διαθέσιμο ("τακτό") χρόνο ($BXT = LF = \text{τακτός χρόνος} = 3 \text{ μήνες}$).

- Εάν $EXT > BXT$ ($EF > LF$), το συγκεκριμένο δίκτυο είναι ανεπαρκές και πρέπει να γίνει νέα προσέγγιση.
- Εάν $EXT < BXT$ ($EF < LF$), τότε δεν υφίστανται κρίσιμες διαδρομές, κάθε δραστηριότητα διαθέτει θετικό ΣΠΧ και το δίκτυο ικανοποιεί με ευχέρεια τον επιβαλλόμενο τακτό χρόνο (διαθέσιμο χρόνο υλοποίησης) του έργου.
- Εάν $EXT = BXT$ ($EF = LF$), υπάρχουν κρίσιμες διαδρομές και το δίκτυο ικανοποιεί οριακά τον επιβαλλόμενο τακτό χρόνο (διαθέσιμο χρόνο υλοποίησης) του έργου.

Μέθοδος της Κρίσιμης Διαδρομής - CPM (7)

Ένα ακόμα ενδιαφέρον σημείο:

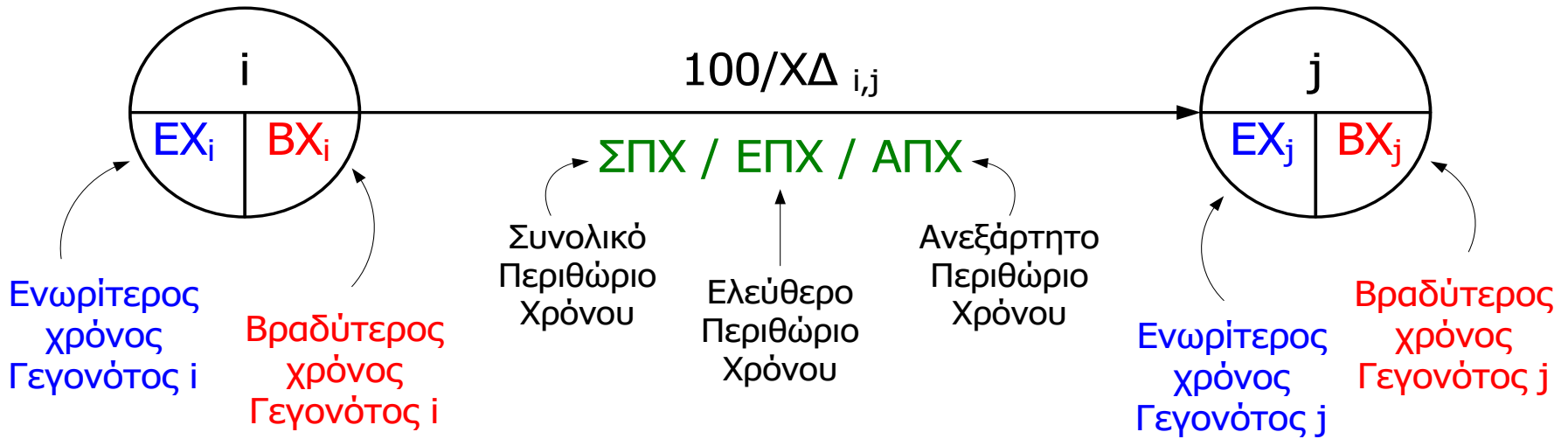
Μείωση του συνολικού απαιτούμενου χρόνου για την υλοποίηση ενός έργου επιτυγχάνεται αν στο δίκτυο μειωθεί ο αριθμός των διαδοχικών δραστηριοτήτων και αυξηθεί ο αριθμός των παράλληλων δραστηριοτήτων (αν αυτό είναι εφικτό).

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα:

- τη δημιουργία περισσότερων διαδρομών στο δίκτυο έργου,
- τη συντόμευση της κρίσιμης διαδρομής σε χρόνο και σε πλήθος δραστηριοτήτων (όμως με κίνδυνο να προκύψουν περισσότερες από μία κρίσιμες διαδρομές),
- τη δημιουργία σε αρκετές δραστηριότητες θετικού Συνολικού Περιθωρίου Χρόνου, με συνέπεια τη μείωση του άμεσου κινδύνου χρονικής υπέρβασης του έργου σε περιορισμένο αριθμό δραστηριοτήτων.

Γενικά, είναι επιθυμητό σε ένα έργο να υπάρχουν πολλές διαδρομές στο δίκτυο, και μία μόνο σύντομη (μικρός αριθμός διαδοχικών δραστηριοτήτων) κρίσιμη διαδρομή.

Επίλυση Τοξωτού Δικτύου



Ο **ενωρίτερος** και **βραδύτερος** χρόνος ενός **γεγονότος έναρξης (i)** μιας δραστηριότητας, ταυτίζονται με τον αντίστοιχο **ενωρίτερο** και **βραδύτερο** χρόνο έναρξης της δραστηριότητας:

$$EX_i = EXE_i \quad \text{και} \quad BX_i = BXE_i$$

Ομοίως, ο **ενωρίτερος** και **βραδύτερος** χρόνος ενός **γεγονότος τέλους (j)** μιας δραστηριότητας, ταυτίζονται με τον αντίστοιχο **ενωρίτερο** και **βραδύτερο** χρόνο τέλους της δραστηριότητας:

$$EX_j = EXT_j \quad \text{και} \quad BX_j = BXT_j$$

Επίλυση Τοξωτού Δικτύου

Ενωρίτεροι χρόνοι Γεγονότων

Ο υπολογισμός των ενωρίτερων χρόνων **των γεγονότων του δικτύου** γίνεται με σάρωση του δικτύου από την αρχή προς το τέλος, θέτοντας ως **ενωρίτερο χρόνο** του **πρώτου γεγονότος** του δικτύου την τιμή **μηδέν**.

Για τα υπόλοιπα γεγονότα του δικτύου, ο ενωρίτερος χρόνος προκύπτει ως εξής:

- Εάν σε αυτό το γεγονός καταλήγει μόνο μία διαδρομή, ο ενωρίτερος χρόνος του γεγονότος είναι ο ενωρίτερος χρόνος του προηγούμενου γεγονότος συν τη διάρκεια της δραστηριότητας:

$$EX_j = EX_i + X\Delta_{i,j} \quad (\text{σχέση 1})$$

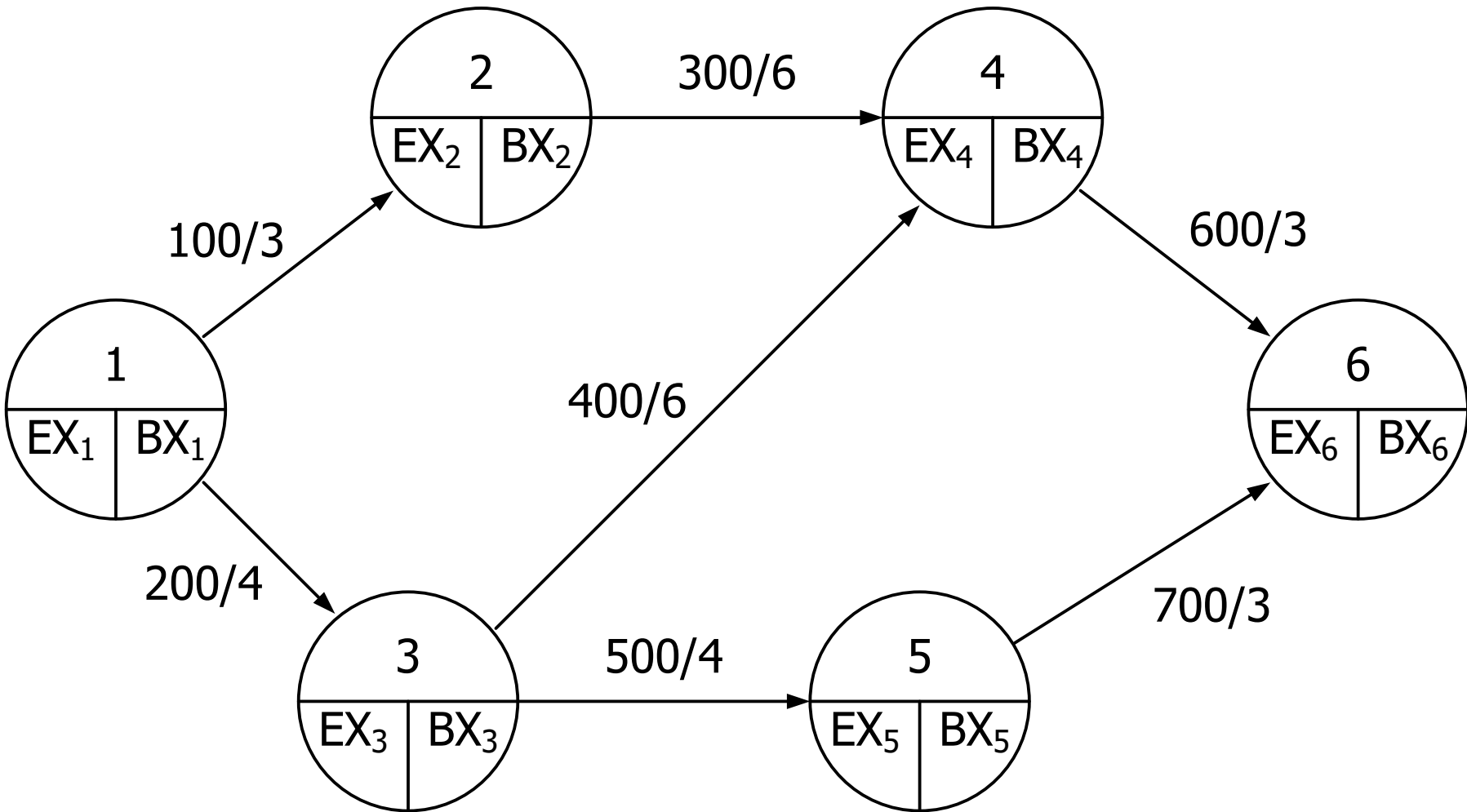
- Εάν σε αυτό το γεγονός καταλήγουν περισσότερες από μία διαδρομές, υπολογίζουμε (σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση) τον ενωρίτερο χρόνο του γεγονότος για κάθε μία διαδρομή που καταλήγει στο γεγονός και επιλέγουμε ως ενωρίτερο χρόνο του γεγονότος τον **μεγαλύτερο** ενωρίτερο χρόνο που προκύπτει:

$$\text{Έστω: } EX_j(1) = EX_a + X\Delta_{a,j} , EX_j(2) = EX_b + X\Delta_{b,j} , \dots , EX_j(v) = EX_n + X\Delta_{n,j}$$

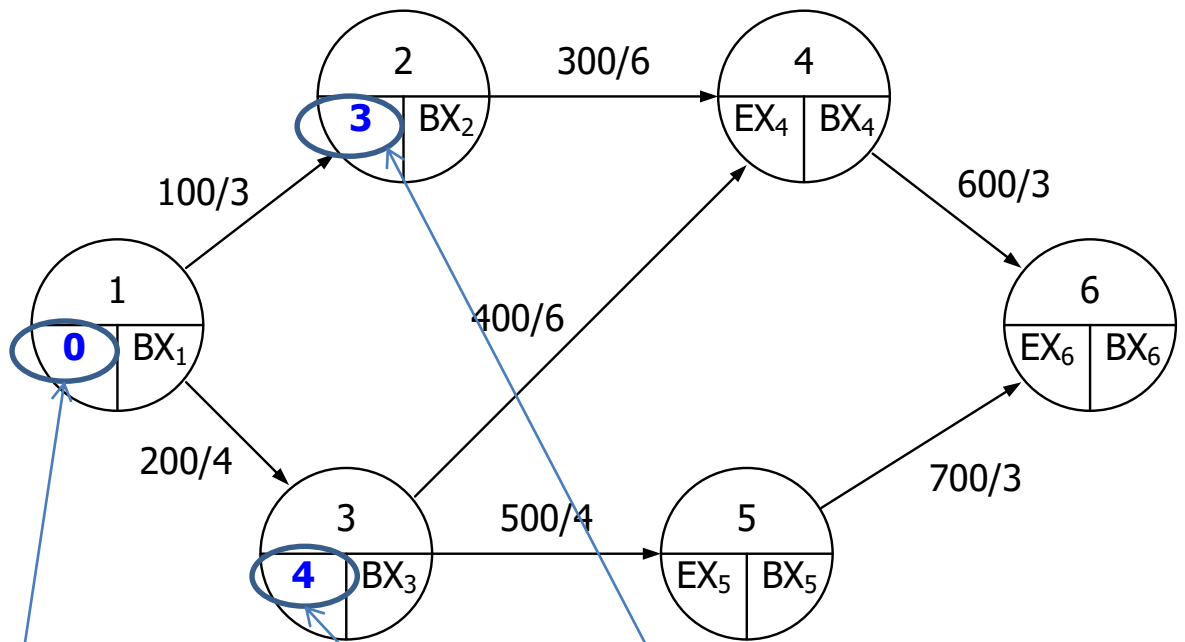
$$\text{Τότε: } EX_j = \max \{EX_j(1), EX_j(2), \dots , EX_j(v)\}$$

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου

Έστω το τοξωτό δίκτυο του σχήματος, στο οποίο ως χρονική μονάδα λαμβάνεται η εργάσιμη ημέρα.



Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου (συν.)



Υπολογίζουμε τους **ενωρίτερους χρόνους των γεγονότων**:

Γεγονός 1:

$EX_1 = 0$ (γεγονός αρχής του δικτύου – γεγονός έναρξης)

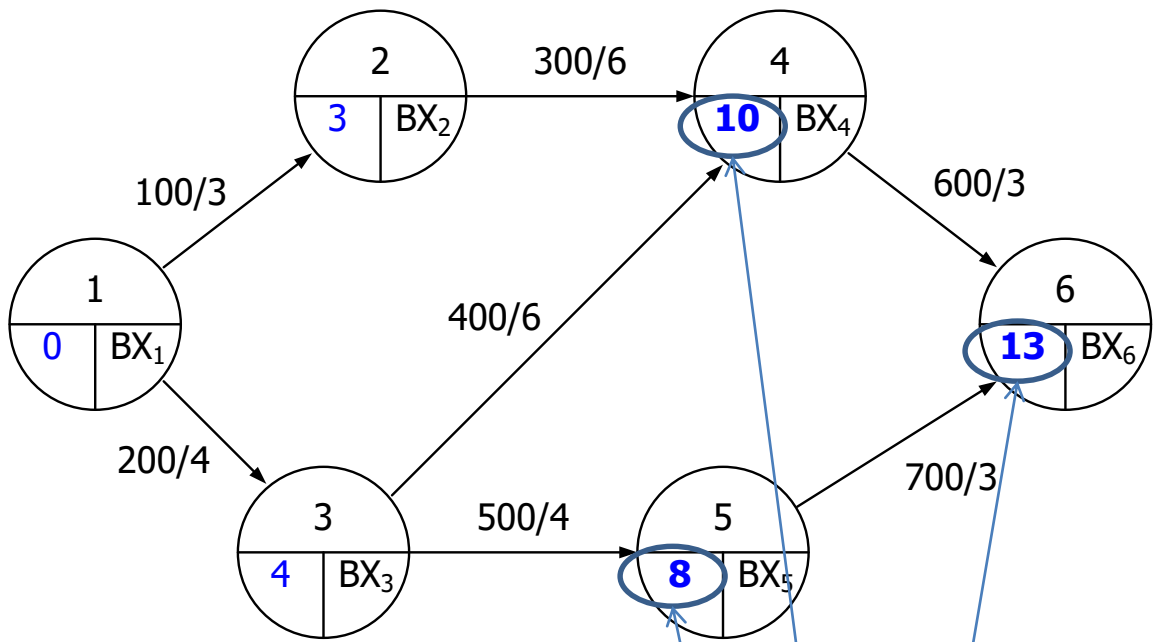
Γεγονός 2:

$EX_2 = EX_1 + X\Delta_{1,2} = EX_1 + X\Delta_{100} = 0 + 3 = 3$

Γεγονός 3:

$EX_3 = EX_1 + X\Delta_{1,3} = EX_1 + X\Delta_{200} = 0 + 4 = 4$

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου (συν.)



Στο Γεγονός 4 καταλήγουν δύο δραστηριότητες (300 και 400). Επομένως:

$EX_4(1) = EX_2 + X\Delta_{300} = 3 + 6 = 9$ και $EX_4(2) = EX_3 + X\Delta_{400} = 4 + 6 = 10$

$EX_4 = \max\{EX_4(1), EX_4(2)\} = \max\{9, 10\} = 10$

Γεγονός 5:

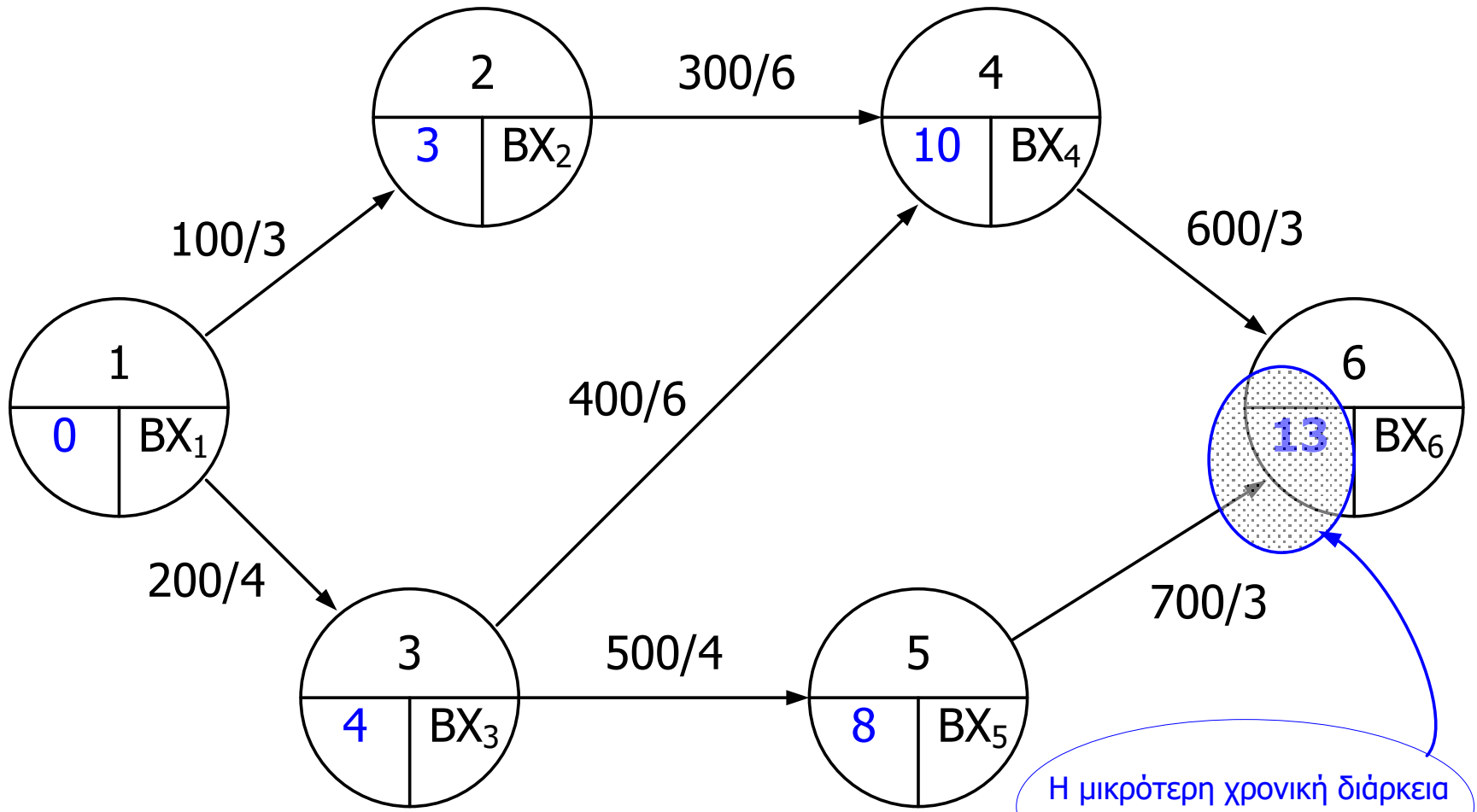
$EX_5 = EX_3 + X\Delta_{3,5} = EX_3 + X\Delta_{500} = 4 + 4 = 8$

Στο Γεγονός 6 καταλήγουν δύο δραστηριότητες (600 και 700). Επομένως:

$EX_6(1) = EX_4 + X\Delta_{600} = 10 + 3 = 13$ και $EX_6(2) = EX_5 + X\Delta_{700} = 8 + 3 = 11$

$EX_6 = \max\{EX_6(1), EX_6(2)\} = \max\{13, 11\} = 13$

Παράδειγμα 1: Τοξωτό Δίκτυο με **Ενωρίτερους Χρόνους**



Η μικρότερη χρονική διάρκεια του έργου είναι 13 ημέρες

Επίλυση Τοξωτού Δικτύου

Βραδύτεροι Χρόνοι Γεγονότων

Ο υπολογισμός των βραδύτερων χρόνων **των γεγονότων του δικτύου** γίνεται με σάρωση του δικτύου από το τέλος προς την αρχή.

Βραδύτερος χρόνος για το τελικό γεγονός τίθεται , είτε ο “τακτός” χρόνος (εφόσον δίνεται), είτε ο ενωρίτερος χρόνος που προσδιορίστηκε στο προηγούμενο στάδιο (η μικρότερη χρονική διάρκεια του έργου).

Για τα υπόλοιπα γεγονότα του δικτύου, ο βραδύτερος χρόνος προκύπτει ως εξής:

- Εάν σε αυτό το γεγονός καταλήγει μόνο μία διαδρομή (πηγαίνοντας από το τέλος προς την αρχή) ο βραδύτερος χρόνος του γεγονότος είναι ο βραδύτερος χρόνος του αμέσως προηγούμενου γεγονότος μείον τη διάρκεια της δραστηριότητας:

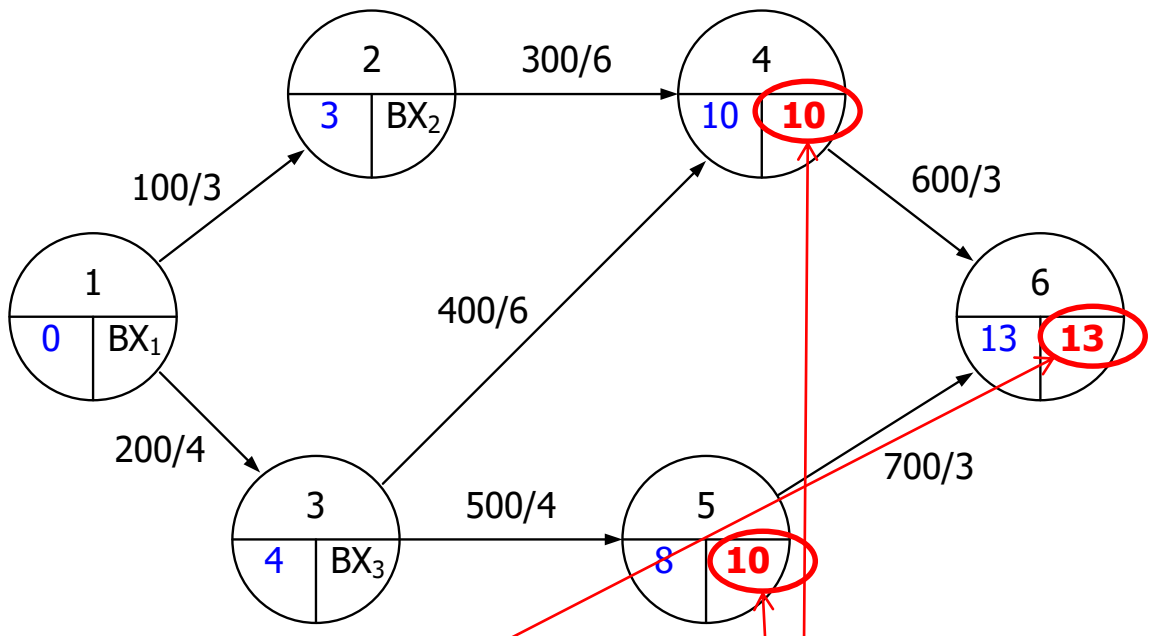
$$\mathbf{BX}_i = \mathbf{BX}_j - \mathbf{X}\Delta_{i,j} \quad (\text{σχέση 2})$$

- Εάν σε αυτό το γεγονός καταλήγουν (πηγαίνοντας από το τέλος προς την αρχή) περισσότερες από μία διαδρομές, υπολογίζουμε (σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση) τον βραδύτερο χρόνο του γεγονότος για κάθε μία διαδρομή που καταλήγει στο γεγονός και επιλέγουμε ως βραδύτερο χρόνο του γεγονότος τον **μικρότερο** βραδύτερο χρόνο που προκύπτει:

$$\text{Έστω: } \mathbf{BX}_i(1) = \mathbf{BX}_a + \mathbf{X}\delta_{i,a} , \mathbf{BX}_i(2) = \mathbf{BX}_b + \mathbf{X}\delta_{i,b} , \dots , \mathbf{BX}_i(v) = \mathbf{BX}_n + \mathbf{X}\delta_{i,n}$$

$$\text{Τότε: } \mathbf{BX}_i = \min \{ \mathbf{BX}_i(1), \mathbf{BX}_i(2), \dots , \mathbf{BX}_i(v) \}$$

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου (συν.)



Έστω ότι δεν δίνεται "τακτός" χρόνος.
 Υπολογίζουμε τους βραδύτερους χρόνους των γεγονότων:

Γεγονός 6:

$BX_6 = 13$

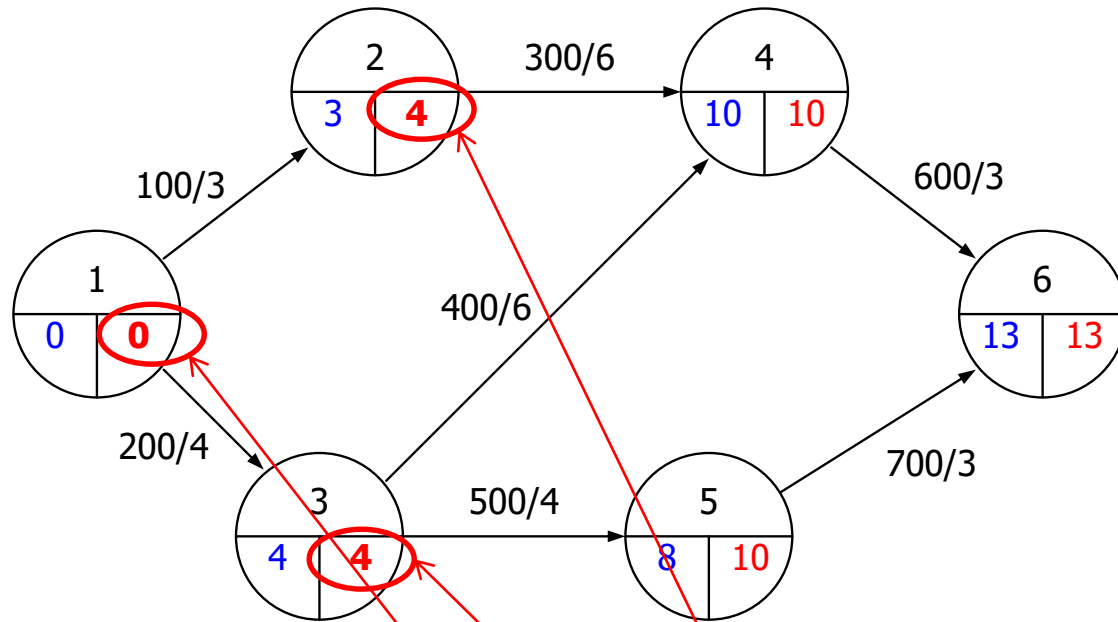
Γεγονός 5:

$BX_5 = BX_6 - \chi\Delta_{5,6} = BX_1 - \chi\Delta_{700} = 13 - 3 = 10$

Γεγονός 4:

$BX_4 = BX_6 - \chi\Delta_{4,6} = BX_1 - \chi\Delta_{600} = 13 - 3 = 10$

Παρ. 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου (συν.)



Στο Γεγονός 3 καταλήγουν δύο δραστηριότητες (400 και 500). Επομένως:

$$\mathbf{BX}_3(1) = \mathbf{BX}_4 - \mathbf{X}\Delta_{400} = 10 - 6 = 4 \quad \text{και} \quad \mathbf{BX}_3(2) = \mathbf{BX}_5 - \mathbf{X}\Delta_{500} = 10 - 4 = 6$$

$$\mathbf{BX}_3 = \min\{\mathbf{BX}_3(1), \mathbf{BX}_3(2)\} = \min\{4, 6\} = 4$$

Γεγονός 2:

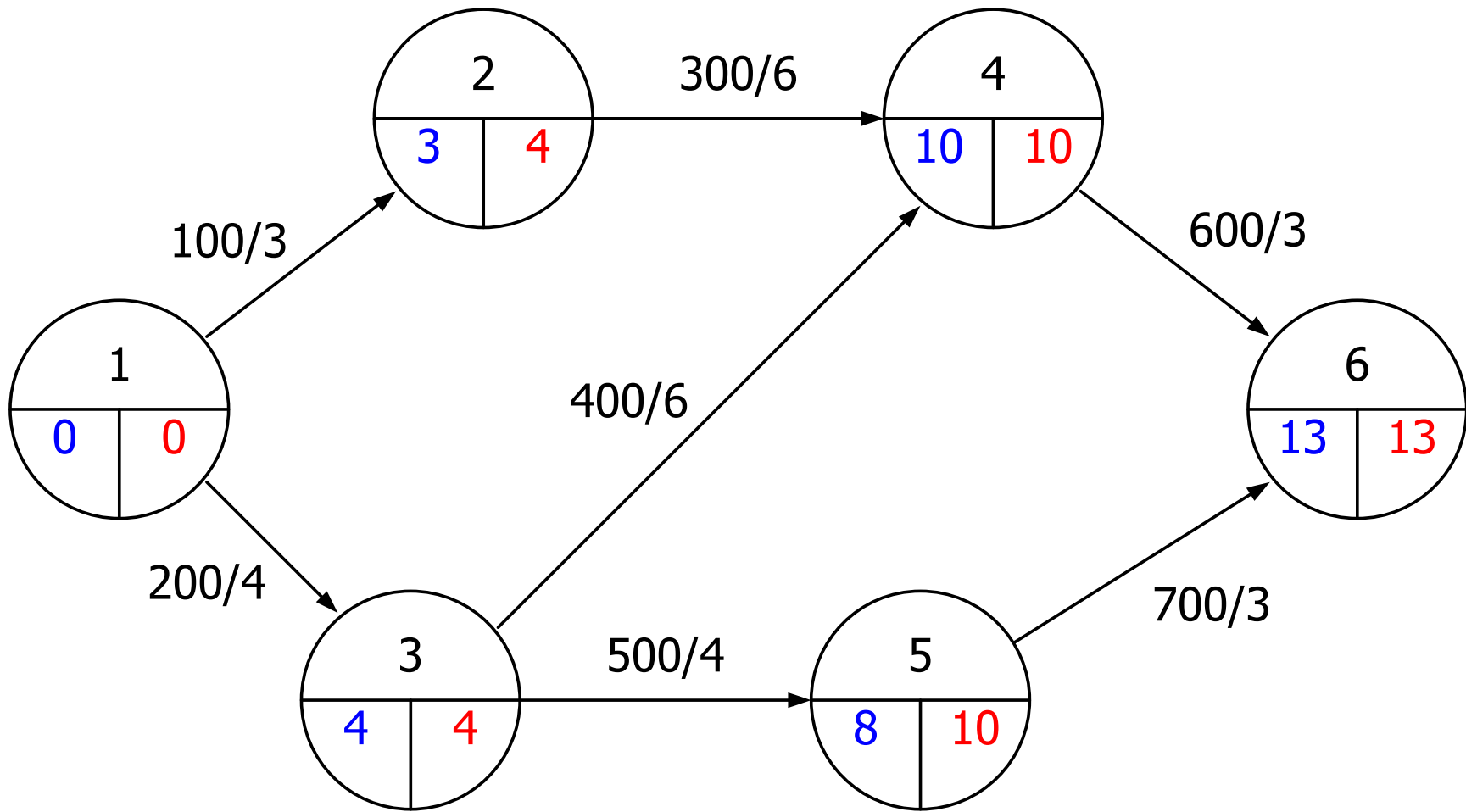
$$\mathbf{BX}_2 = \mathbf{BX}_4 - \mathbf{X}\Delta_{2,4} = \mathbf{BX}_4 - \mathbf{X}\Delta_{300} = 10 + 6 = 4$$

Στο Γεγονός 1 καταλήγουν δύο δραστηριότητες (100 και 200). Επομένως:

$$\mathbf{BX}_1(1) = \mathbf{BX}_2 - \mathbf{X}\Delta_{100} = 4 - 3 = 1 \quad \text{και} \quad \mathbf{BX}_1(2) = \mathbf{BX}_3 - \mathbf{X}\Delta_{200} = 4 - 4 = 0$$

$$\mathbf{BX}_1 = \min\{\mathbf{BX}_1(1), \mathbf{BX}_1(2)\} = \max\{1, 0\} = 0$$

Παράδειγμα 1: Τοξωτό Δίκτυο με **Ενωρίτερους** και **Βραδύτερους** Χρόνους



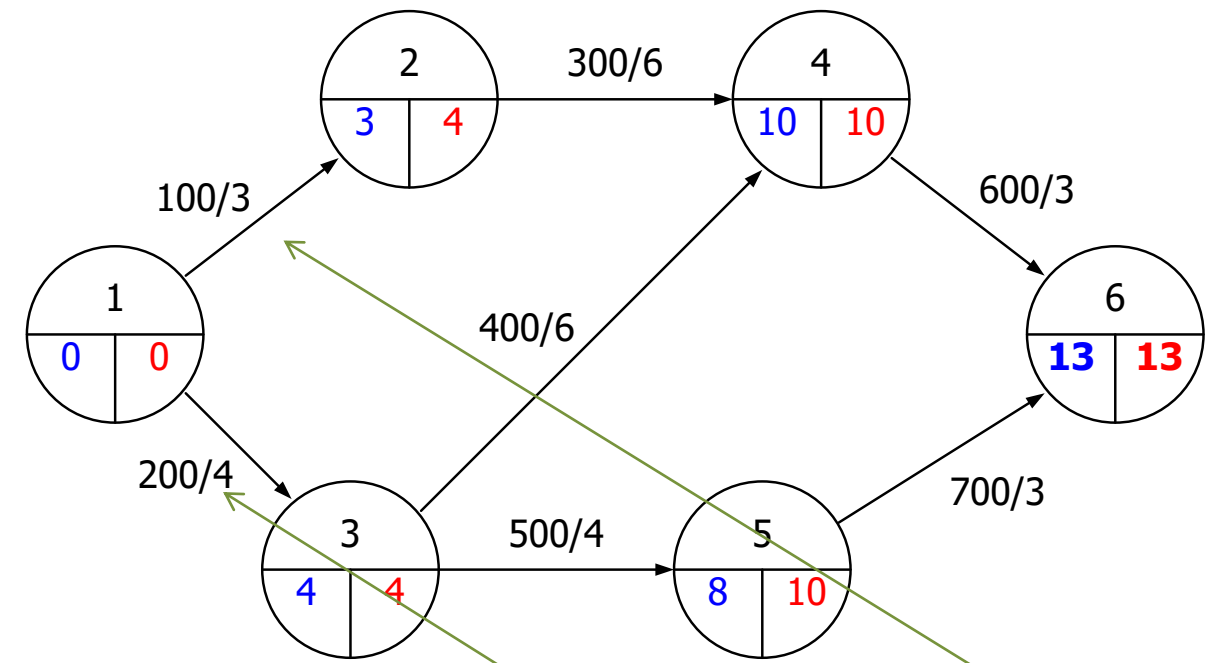
Επίλυση Τοξωτού Δικτύου

Περιθώρια Χρόνου

Τα **Περιθώρια Χρόνου** υπολογίζονται για τις **δραστηριότητες** και ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

- **Συνολικό Περιθώριο Χρόνου:** $\Sigma\Pi\chi = B\chi_j - E\chi_i - \chi\Delta_{i,j}$ (σχέση 3)
 - Όταν $\Sigma\Pi\chi = 0$, τότε η δραστηριότητα αυτή είναι **κρίσιμη**.
 - Όταν σε ένα τοξωτό δίκτυο **υπάρχει μια κρίσιμη δραστηριότητα**, τότε **θα ανήκει σε μια διαδρομή**, στην οποία **όλες οι δραστηριότητες θα είναι επίσης κρίσιμες** και η διαδρομή αυτή θα είναι **Κρίσιμη Διαδρομή (Critical Path)**.
- **Ελεύθερο Περιθώριο Χρόνου:** $E\Pi\chi = E\chi_j - E\chi_i - \chi\Delta_{i,j}$ (σχέση 4)
- **Ανεξάρτητο Περιθώριο Χρόνου:** $A\Pi\chi = E\chi_j - B\chi_i - \chi\Delta_{i,j}$ (σχέση 5)

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου - Υπολογισμός Περιθωρίων Χρόνου



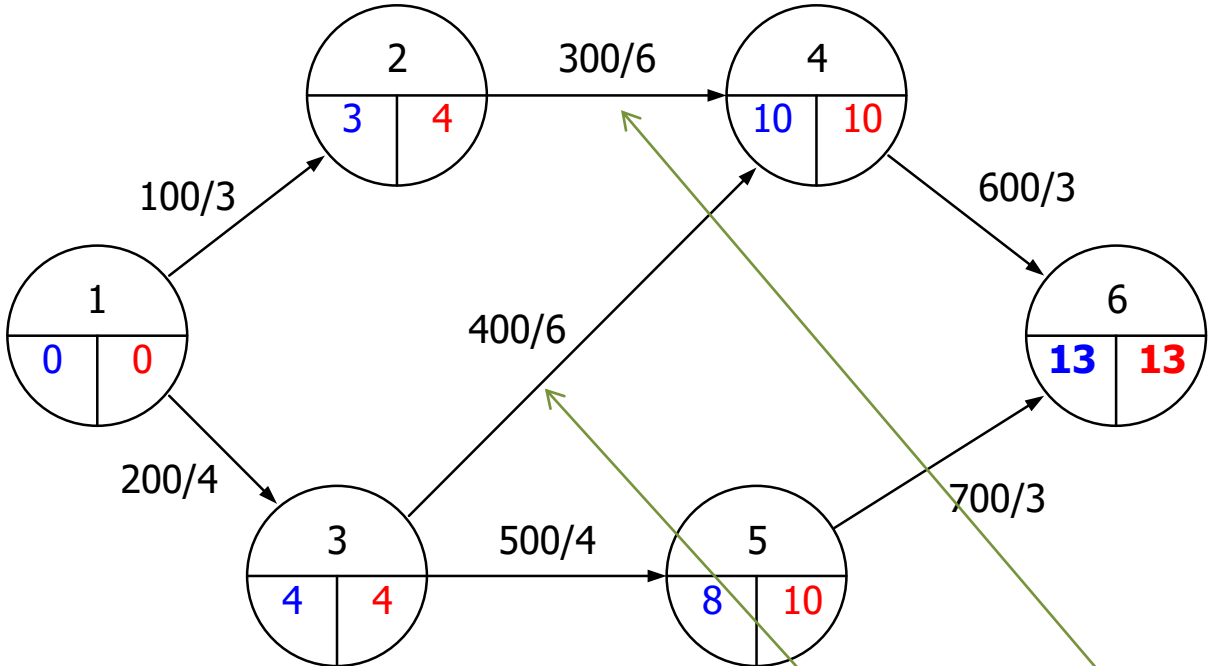
Δραστηριότητα 100:

$$\begin{aligned} \text{ΣΠΧ}_{100} &= \text{ΒΧ}_2 - \text{ΕΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{1,2} = \text{ΒΧ}_2 - \text{ΕΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{100} = 4 - 0 - 3 = \mathbf{1} \\ \text{ΕΠΧ}_{100} &= \text{ΕΧ}_2 - \text{ΕΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{1,2} = \text{ΕΧ}_2 - \text{ΕΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{100} = 3 - 0 - 3 = \mathbf{0} \\ \text{ΑΠΧ}_{100} &= \text{ΕΧ}_2 - \text{ΒΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{1,2} = \text{ΕΧ}_2 - \text{ΒΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{100} = 3 - 0 - 3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 200:

$$\begin{aligned} \text{ΣΠΧ}_{200} &= \text{ΒΧ}_3 - \text{ΕΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{1,3} = \text{ΒΧ}_3 - \text{ΕΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{200} = 4 - 0 - 4 = \mathbf{0} \\ \text{ΕΠΧ}_{200} &= \text{ΕΧ}_3 - \text{ΕΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{1,3} = \text{ΕΧ}_3 - \text{ΕΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{200} = 4 - 0 - 4 = \mathbf{0} \\ \text{ΑΠΧ}_{200} &= \text{ΕΧ}_3 - \text{ΒΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{1,3} = \text{ΕΧ}_3 - \text{ΒΧ}_1 - \text{ΧΔ}_{200} = 4 - 0 - 4 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου - Υπολογισμός Περιθωρίων Χρόνου



Δραστηριότητα 300:

$$\Sigma\text{ΠΧ}_{300} = \text{BX}_4 - \text{EX}_2 - \text{Χ}\Delta_{2,4} = \text{BX}_4 - \text{EX}_2 - \text{Χ}\Delta_{300} = 10 - 3 - 6 = 1$$

$$\text{ΕΠΧ}_{300} = \text{EX}_4 - \text{EX}_2 - \text{Χ}\Delta_{2,4} = \text{EX}_4 - \text{EX}_2 - \text{Χ}\Delta_{300} = 10 - 3 - 6 = 1$$

$$\text{ΑΠΧ}_{300} = \text{EX}_4 - \text{BX}_2 - \text{Χ}\Delta_{2,4} = \text{EX}_4 - \text{BX}_2 - \text{Χ}\Delta_{300} = 10 - 4 - 6 = 0$$

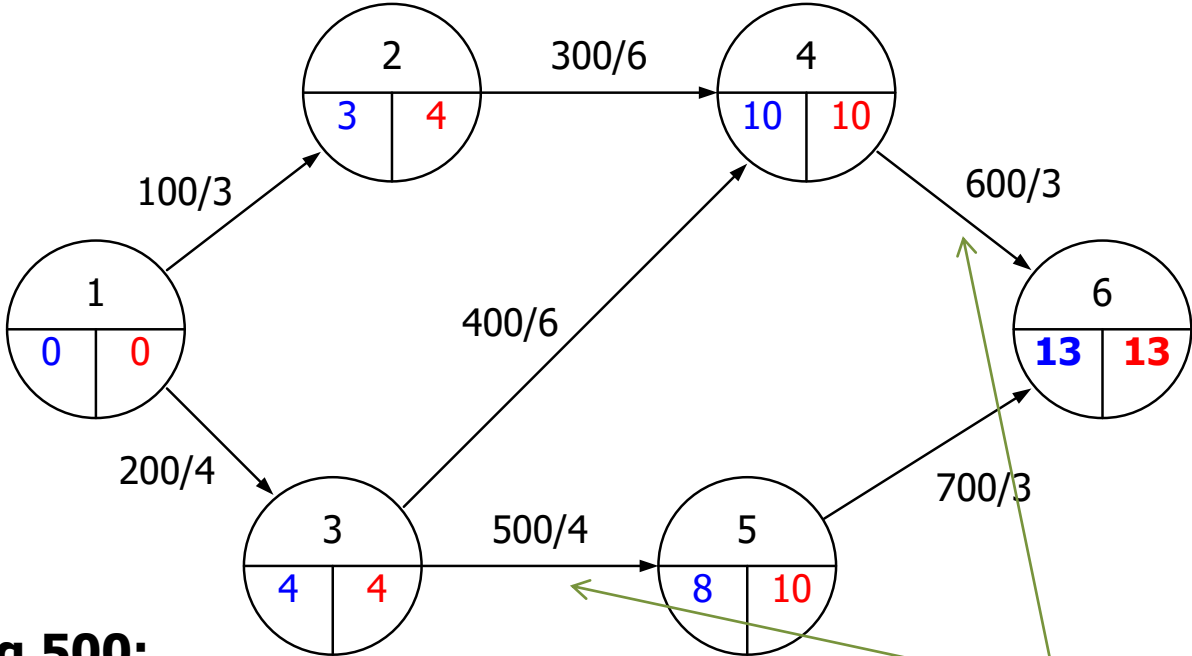
Δραστηριότητα 400:

$$\Sigma\text{ΠΧ}_{400} = \text{BX}_4 - \text{EX}_3 - \text{Χ}\Delta_{3,4} = \text{BX}_4 - \text{EX}_3 - \text{Χ}\Delta_{400} = 10 - 4 - 6 = 0$$

$$\text{ΕΠΧ}_{400} = \text{EX}_4 - \text{EX}_3 - \text{Χ}\Delta_{3,4} = \text{EX}_4 - \text{EX}_3 - \text{Χ}\Delta_{400} = 10 - 4 - 6 = 0$$

$$\text{ΑΠΧ}_{400} = \text{EX}_4 - \text{BX}_3 - \text{Χ}\Delta_{3,4} = \text{EX}_4 - \text{BX}_3 - \text{Χ}\Delta_{400} = 10 - 4 - 6 = 0$$

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου - Υπολογισμός Περιθωρίων Χρόνου



Δραστηριότητα 500:

$$\text{ΣΠΧ}_{500} = \text{ΒΧ}_5 - \text{ΕΧ}_3 - \text{ΧΔ}_{3,5} = \text{ΒΧ}_5 - \text{ΕΧ}_3 - \text{ΧΔ}_{500} = 10 - 4 - 4 = 2$$

$$\text{ΕΠΧ}_{500} = \text{ΕΧ}_5 - \text{ΕΧ}_3 - \text{ΧΔ}_{3,5} = \text{ΕΧ}_5 - \text{ΕΧ}_3 - \text{ΧΔ}_{500} = 8 - 4 - 4 = 0$$

$$\text{ΑΠΧ}_{500} = \text{ΕΧ}_5 - \text{ΒΧ}_3 - \text{ΧΔ}_{3,5} = \text{ΕΧ}_5 - \text{ΒΧ}_3 - \text{ΧΔ}_{500} = 8 - 4 - 4 = 0$$

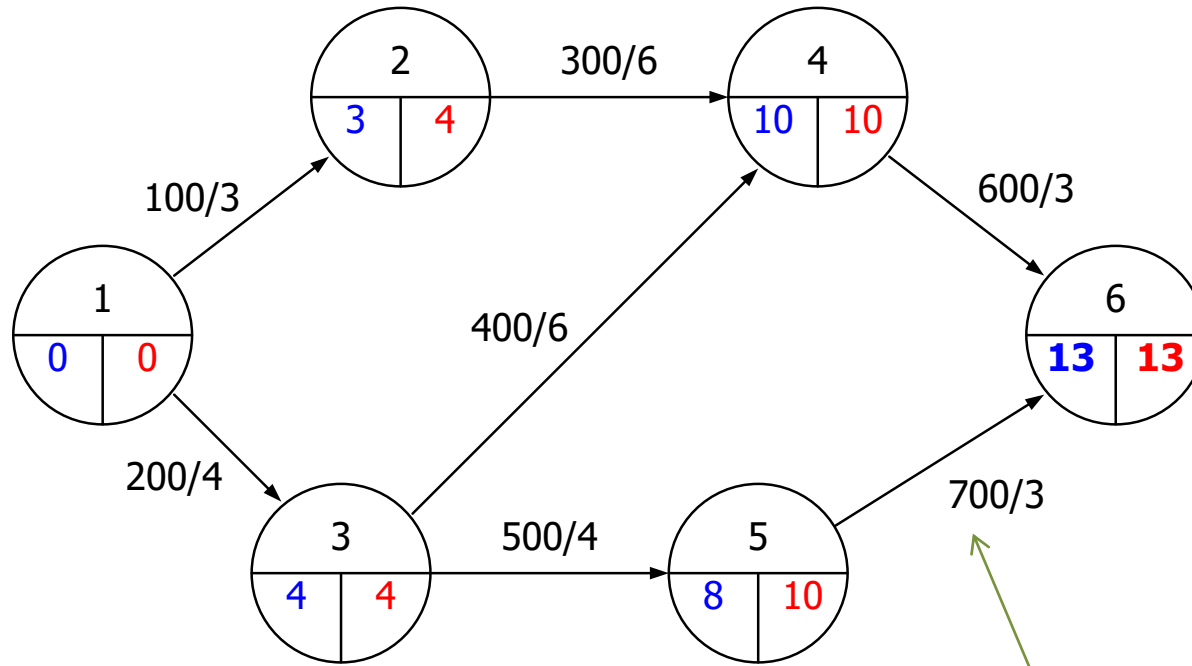
Δραστηριότητα 600:

$$\text{ΣΠΧ}_{600} = \text{ΒΧ}_6 - \text{ΕΧ}_4 - \text{ΧΔ}_{4,6} = \text{ΒΧ}_6 - \text{ΕΧ}_4 - \text{ΧΔ}_{600} = 13 - 10 - 3 = 0$$

$$\text{ΕΠΧ}_{600} = \text{ΕΧ}_6 - \text{ΕΧ}_4 - \text{ΧΔ}_{4,6} = \text{ΕΧ}_6 - \text{ΕΧ}_4 - \text{ΧΔ}_{600} = 13 - 10 - 3 = 0$$

$$\text{ΑΠΧ}_{600} = \text{ΕΧ}_6 - \text{ΒΧ}_4 - \text{ΧΔ}_{4,6} = \text{ΕΧ}_6 - \text{ΒΧ}_4 - \text{ΧΔ}_{600} = 13 - 10 - 3 = 0$$

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου - Υπολογισμός Περιθωρίων Χρόνου



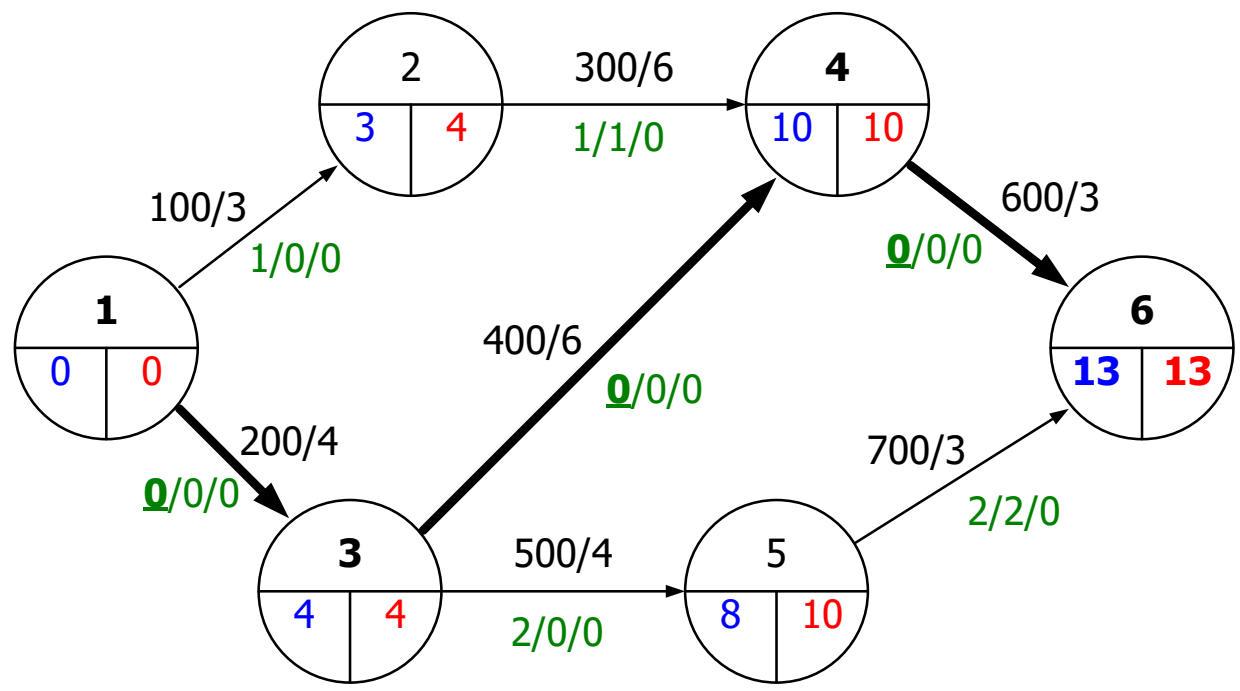
Δραστηριότητα 700:

$$\mathbf{ΣΠΧ}_{700} = \mathbf{B}X_6 - \mathbf{E}X_5 - \mathbf{X}\Delta_{5,6} = \mathbf{B}X_6 - \mathbf{E}X_5 - \mathbf{X}\Delta_{700} = 13 - 8 - 3 = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{ΕΠΧ}_{700} = \mathbf{E}X_6 - \mathbf{E}X_5 - \mathbf{X}\Delta_{5,6} = \mathbf{E}X_6 - \mathbf{E}X_5 - \mathbf{X}\Delta_{700} = 13 - 8 - 3 = \mathbf{2}$$

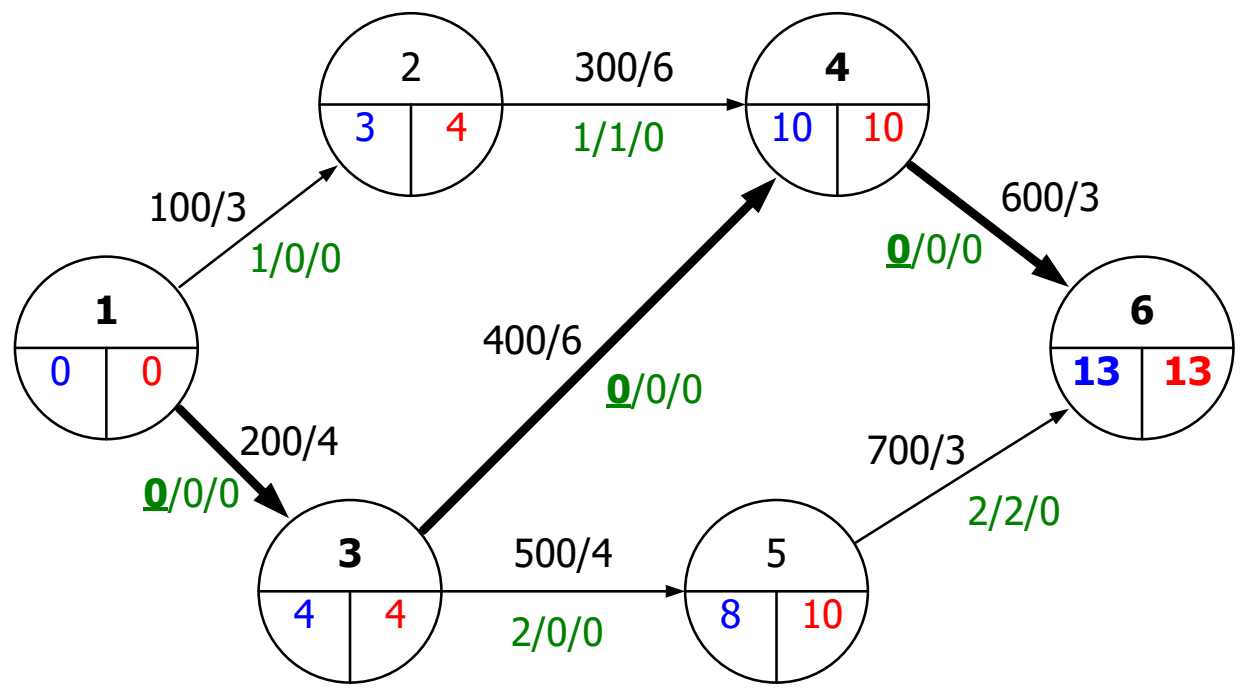
$$\mathbf{ΑΠΧ}_{700} = \mathbf{E}X_6 - \mathbf{B}X_5 - \mathbf{X}\Delta_{5,6} = \mathbf{E}X_6 - \mathbf{B}X_5 - \mathbf{X}\Delta_{700} = 13 - 10 - 3 = \mathbf{0}$$

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου



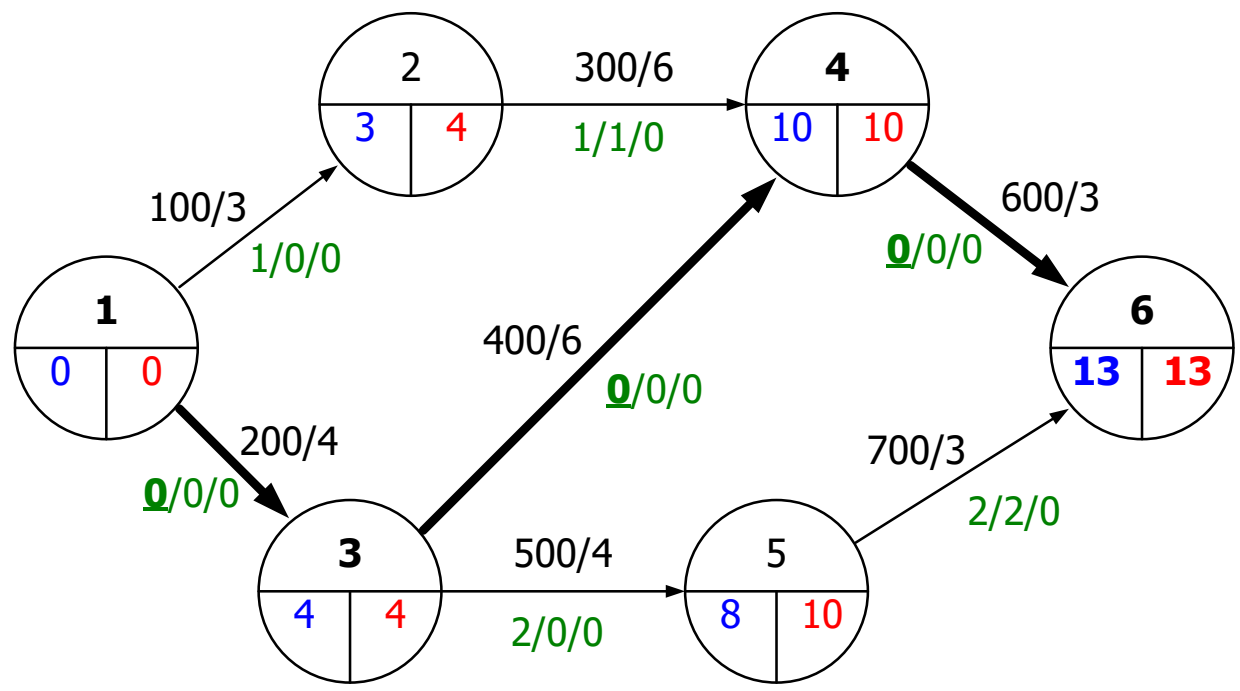
- Επειδή οι δραστηριότητες **200**, **400** και **600** έχουν **ΣΠΧ = 0**, έχουμε μόνο μία **Κρίσιμη Διαδρομή: 1, 3, 4, 6**
- Επειδή οι δραστηριότητες **100** και **300** έχουν **ΣΠΧ = 1**, παρουσιάζουν “χρονική ελαστικότητα” μιας ημέρας. Αυτό δηλώνει ότι:
 - είτε μόνο η 100 μπορεί να καθυστερήσει 1 ημέρα,
 - είτε μόνο η 300 μπορεί να καθυστερήσει 1 ημέρα,
 - είτε μπορούν να καθυστερήσουν από μισή ημέρα και η 100 και η 300.

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου



- Επειδή οι δραστηριότητες **500** και **700** έχουν **ΣΠΧ = 2**, παρουσιάζουν "χρονική ελαστικότητα" δύο ημερών. Αυτό δηλώνει ότι:
 - είτε μόνο η 500 μπορεί να καθυστερήσει 2 ημέρες,
 - είτε μόνο η 700 μπορεί να καθυστερήσει 2 ημέρες,
 - είτε μπορούν να καθυστερήσουν από μία ημέρα και η 500 και η 700 κλπ.

Παράδειγμα 1: Επίλυση Τοξωτού Δικτύου



- Η δραστηριότητα **300** έχει **ΕΠΧ = 1**. Αυτό δηλώνει ότι αν η **100** ξεκινήσει στον ενωρίτερο χρόνο της, η **300** μπορεί να καθυστερήσει κατά 1 ημέρα, χωρίς αυτό να επηρεάσει τον ενωρίτερο χρόνο έναρξης της **600** (ενωρίτερο χρόνο τέλους του έργου).
- Η δραστηριότητα **700** έχει **ΕΠΧ = 2**. Αυτό δηλώνει ότι αν η **500** ξεκινήσει στον ενωρίτερο χρόνο της, η **700** μπορεί να καθυστερήσει κατά 2 ημέρες, χωρίς αυτό να επηρεάσει τον ενωρίτερο χρόνο έναρξης της **600** (ενωρίτερο χρόνο τέλους του έργου).

Επίλυση Κομβικού Δικτύου

Στα κομβικά δίκτυα τα **χρονικά στοιχεία αναφέρονται σε δραστηριότητες** και όχι σε γεγονότα.

Οι **δραστηριότητες** αναπαριστούνται με **ορθογώνια**, τα οποία περιέχουν κελιά.

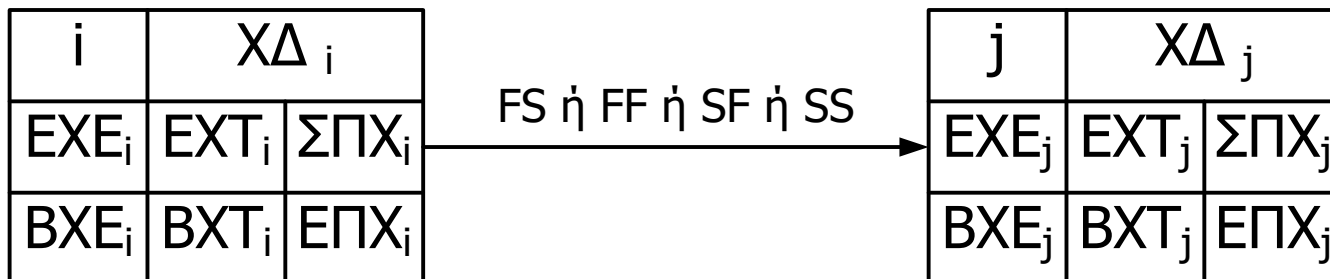
Το πάνω αριστερό κελί περιέχει τον κωδικό της δραστηριότητας.

Το πάνω δεξί κελί περιέχει τη χρονική της διάρκεια.

Στα άλλα κελιά καταγράφονται τα χρονικά στοιχεία της δραστηριότητας.

Οι **σχέσεις αλληλεξαρτήσεων** που διέπουν τις δραστηριότητες καταγράφονται πάνω στα **βέλη** που συνδέουν τα τετράγωνα των δραστηριοτήτων.

Οι δείκτες ***i*** και ***j*** είναι οι κωδικοί της **προηγούμενης** και της **επόμενης** δραστηριότητας αντίστοιχα, **όπως εμφανίζονται στο γράφο** του δικτύου και όχι χρονικά.



Επίλυση Κομβικού Δικτύου

Ενωρίτεροι Χρόνοι Δραστηριοτήτων

Στα **Κομβικά Δίκτυα** μπορούν να υπάρξουν **όλοι οι τύποι σχέσεων** (SF, FS, FF, SS) μεταξύ των δραστηριοτήτων (ενώ στα τοξωτά δίκτυα υπάρχει μόνο ο τύπος FS).

Για τον υπολογισμό των **ενωρίτερων χρόνων έναρξης** ισχύουν τα εξής (απαιτείται διαφορετικός υπολογισμός για κάθε τύπο σχέσης):

$$\text{Σχέσεις Start-to-Start (SS)} : \text{EXE}_j = \text{EXE}_i + \text{SS}(i,j) \quad (\text{σχέση 6})$$

$$\text{Σχέσεις Finish-to-Start (FS)} : \text{EXE}_j = \text{EXT}_i + \text{FS}(i,j) \quad (\text{σχέση 7})$$

$$\text{Σχέσεις Start-to-Finish (SF)} : \text{EXE}_j = \text{EXE}_i + \text{SF}(i,j) - \chi\Delta_j \quad (\text{σχέση 8})$$

$$\text{Σχέσεις Finish-to-Finish (FF)} : \text{EXE}_j = \text{EXT}_i + \text{FF}(i,j) - \chi\Delta_j \quad (\text{σχέση 9})$$

όπου, $\text{SS}(i,j)$, $\text{FS}(i,j)$, $\text{SF}(i,j)$ και $\text{FF}(i,j)$ είναι οι χρονικές υστερήσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων, αντίστοιχες για κάθε τύπο σχέσης.

Επίλυση Κομβικού Δικτύου

Ενωρίτεροι Χρόνοι Δραστηριοτήτων

Εάν σε έναν κόμβο (δραστηριότητα) καταλήγουν περισσότερες από μία διαδρομές, υπολογίζουμε (σύμφωνα με τις σχέσεις 6, 7, 8, 9) τον ενωρίτερο χρόνο έναρξης της δραστηριότητας για κάθε μία διαδρομή που καταλήγει στον κόμβο (δραστηριότητα) και επιλέγουμε ως ενωρίτερο χρόνο έναρξης της δραστηριότητας τον **μεγαλύτερο** ενωρίτερο χρόνο έναρξης που προκύπτει:

$$EXE_j = \max \{EXE_j(1), EXE_j(2), \dots, EXE_j(v)\}.$$

Για τον υπολογισμό των ενωρίτερων χρόνων τέλους ισχύει το εξής:

$$EXT_j = EXE_j + XD_j \quad (\text{σχέση 10})$$

Το έργο **ξεκινά** με τη δραστηριότητα που έχει **μηδενικό ενωρίτερο χρόνο έναρξης**.

Το έργο **τελειώνει** με τη δραστηριότητα που έχει το **μεγαλύτερο ενωρίτερο χρόνο τέλους**.

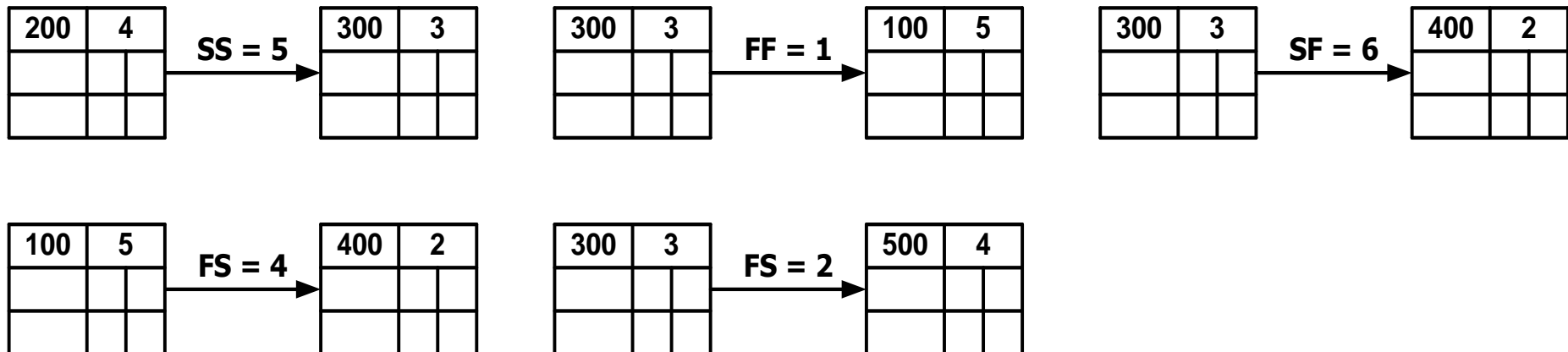
Η **μικρότερη διάρκεια του έργου** ταυτίζεται με το **μεγαλύτερο ενωρίτερο χρόνο τέλους του έργου**.

Παράδειγμα 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου

Να σχεδιαστεί και να επιλυθεί το κομβικό δίκτυο του έργου που περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας Δραστηριοτήτων Έργου		
Δρ/τα	Διάρκεια	Σχέσεις
100	5	Τελειώνει 1 μέρα μετά το τέλος της 300
200	4	Αρχή του έργου
300	3	Ξεκινά 5 μέρες μετά την έναρξη της 200
400	2	Τελειώνει 6 μέρες μετά την αρχή της 300 και ξεκινά 4 μέρες μετά το τέλος της 100
500	4	Ξεκινά 2 μέρες μετά το τέλος της 300

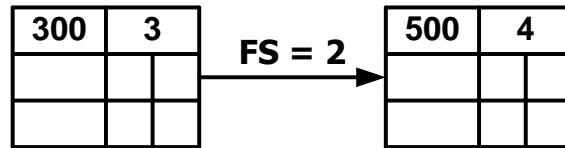
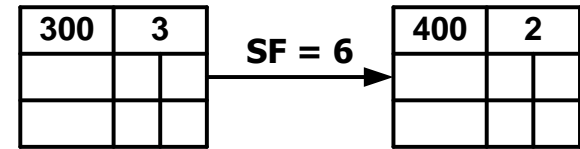
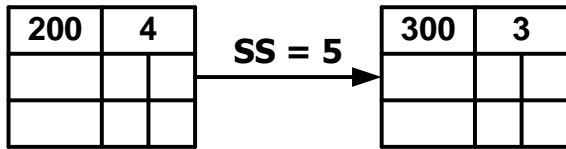
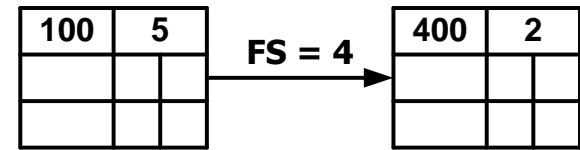
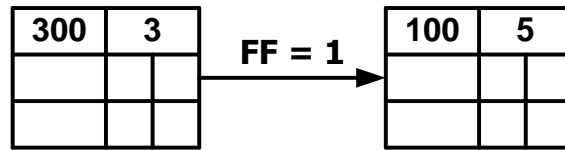
Ο πίνακας καθορίζει τις ακόλουθες σχέσεις δραστηριοτήτων:



Παράδειγμα 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

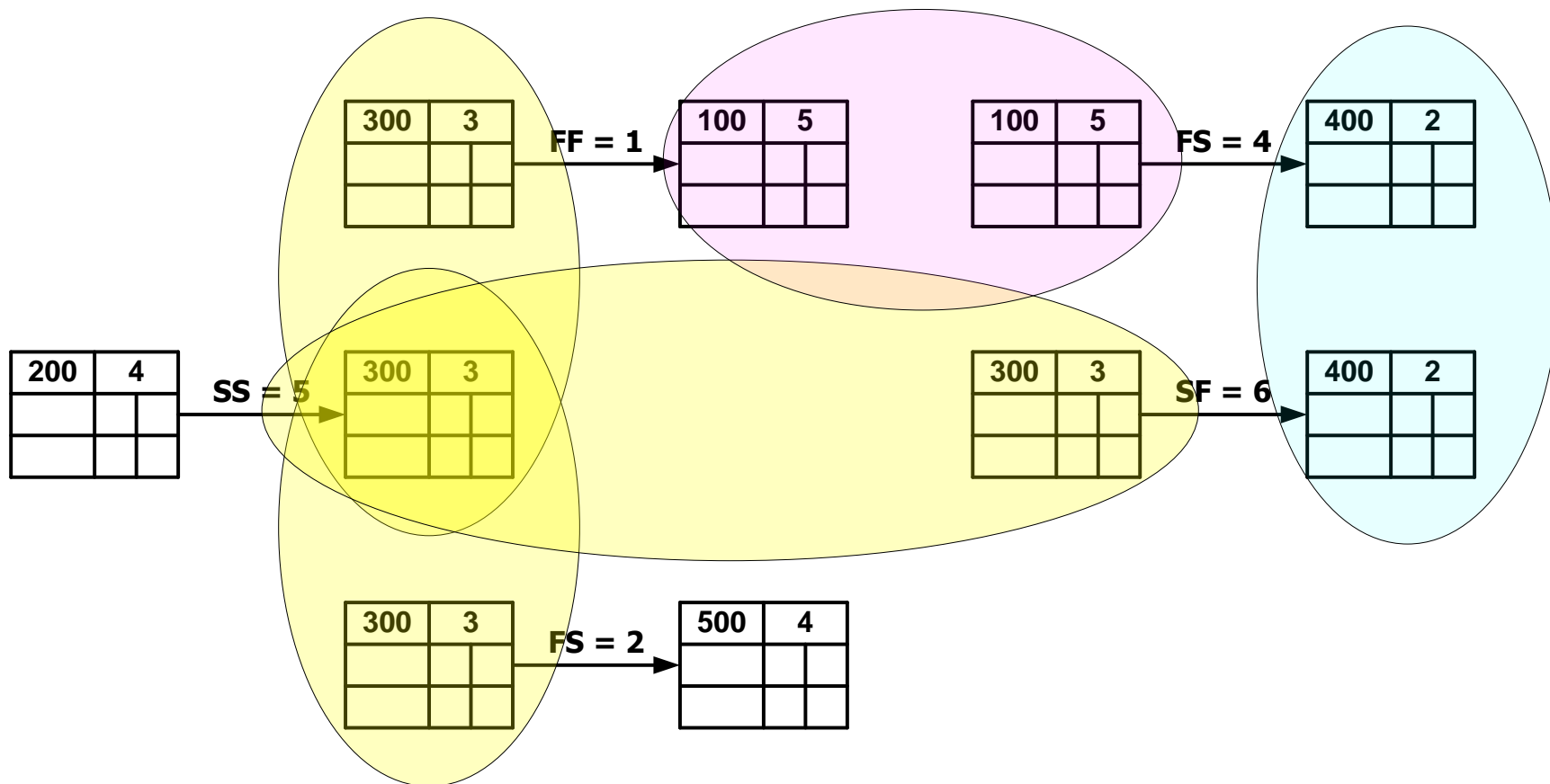
Σχεδίαση Δικτύου

Για να σχεδιάσουμε το δίκτυο, αναδιατάσσουμε τις σχέσεις αυτές, ομαδοποιώντας τις με βάση τις δραστηριότητες, ξεκινώντας από τη δραστηριότητα έναρξης:



Παράδειγμα 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.) Σχεδίαση Δικτύου

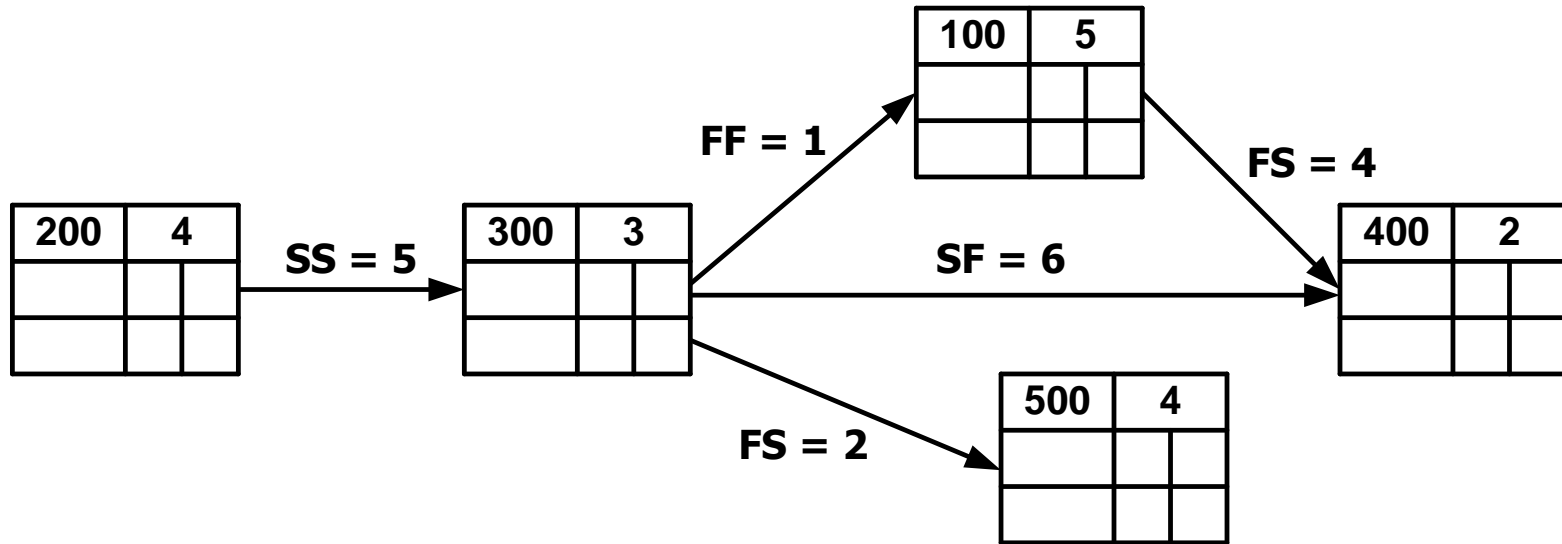
Για να σχεδιάσουμε το δίκτυο, αναδιατάσσουμε τις σχέσεις αυτές, ομαδοποιώντας τις με βάση τις δραστηριότητες, ξεκινώντας από τη δραστηριότητα έναρξης:



Παράδειγμα 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

Σχεδίαση Δικτύου

Επομένως το κομβικό δίκτυο του έργου είναι το ακόλουθο:



Παρατηρούμε ότι το δίκτυο αρχίζει, γραφικά και χρονικά, με τη δραστηριότητα 200 και τελειώνει, γραφικά, με τις δραστηριότητες 400 και 500.

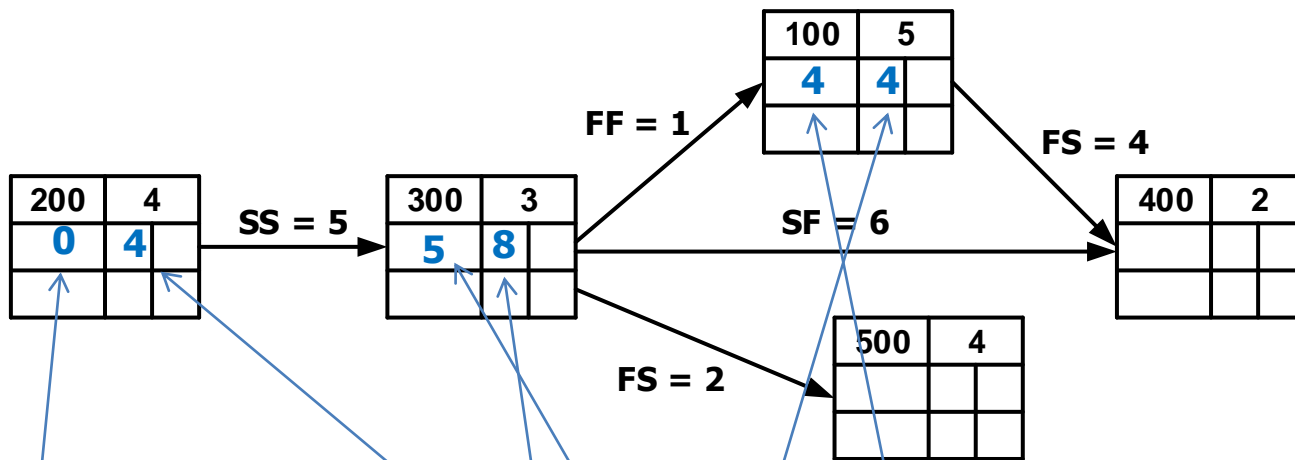
Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε για τη χρονική διάταξη του δικτύου, δηλαδή:

- δεν μπορούμε να πούμε για τη χρονική αλληλουχία των δραστηριοτήτων του έργου, πλην της 200 η έναρξη της οποίας αποτελεί και την αρχή του έργου,
- δεν μπορούμε να πούμε με το τέλος ποιας δραστηριότητας τελειώνει το έργο.

Για να προσδιοριστούν αυτά απαιτείται η επίλυση του δικτύου.

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

Ενωρίτεροι Χρόνοι Δραστηριοτήτων



Δραστηριότητα 200:

$$\mathbf{EXE}_{200} = \mathbf{0}$$

(η έναρξη της δραστηριότητας 200 είναι και η αρχή του έργου)

$$\mathbf{EXT}_{200} = \mathbf{EXE}_{200} + \mathbf{XD}_{200} = \mathbf{0} + \mathbf{4} = \mathbf{4}$$

(από τη σχέση 10)

Δραστηριότητα 300:

$$\mathbf{EXE}_{300} = \mathbf{EXE}_{200} + \mathbf{SS}(200,300) = \mathbf{0} + \mathbf{5} = \mathbf{5}$$

(από τη σχέση 6)

$$\mathbf{EXT}_{300} = \mathbf{EXE}_{300} + \mathbf{XD}_{300} = \mathbf{5} + \mathbf{3} = \mathbf{8}$$

(από τη σχέση 10)

Δραστηριότητα 100:

$$\mathbf{EXE}_{100} = \mathbf{EXT}_{300} + \mathbf{FF}(300,100) - \mathbf{XD}_{100} = \mathbf{8} + \mathbf{1} - \mathbf{5} = \mathbf{4}$$

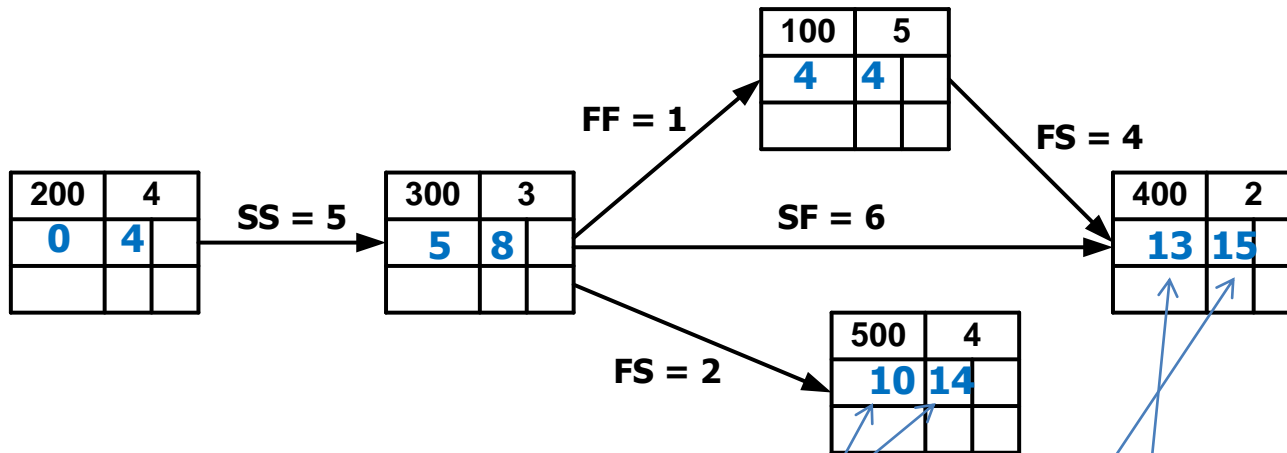
(από τη σχέση 9)

$$\mathbf{EXT}_{100} = \mathbf{EXE}_{100} + \mathbf{XD}_{100} = \mathbf{4} + \mathbf{0} = \mathbf{4}$$

(από τη σχέση 10)

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

Ενωρίτεροι Χρόνοι Δραστηριοτήτων



Δραστηριότητα 500:

$$EXE_{500} = EXT_{300} + FS(300,500) = 8 + 2 = 10$$

$$EXT_{500} = EXE_{500} + XD_{500} = 10 + 4 = 14$$

Στη Δραστηριότητα 400 καταλήγουν δύο διαδρομές. Επομένως:

$$EXE_{400}(1) = EXT_{100} + FS(100,400) = 9 + 4 = 13, \text{ και}$$

$$EXE_{400}(2) = EXE_{300} + SF(300,400) - XD_{400} = 5 + 6 - 2 = 9$$

$$EXE_{400} = \max\{EXE_{400}(1), EXE_{400}(2)\} = \max\{13, 9\} = 13$$

$$EXT_{400} = EXE_{400} + XD_{400} = 13 + 2 = 15$$

(από σχέση 7)

(από σχέση 10)

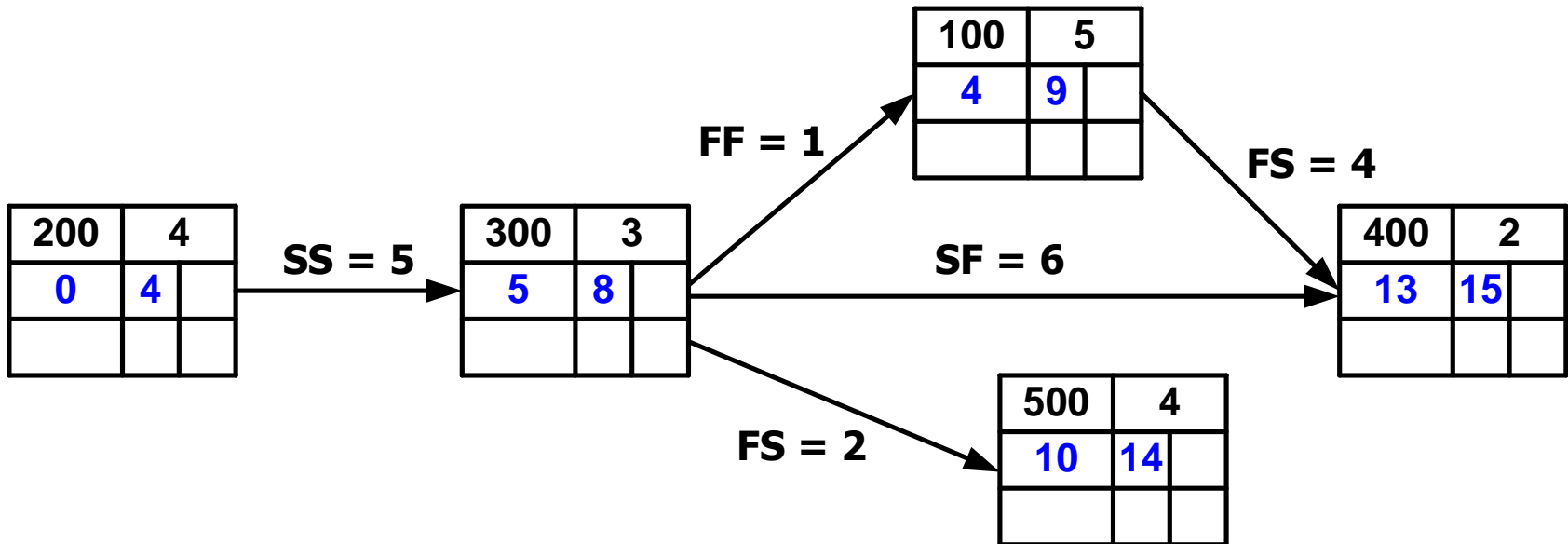
(από σχέση 7)

(από σχέση 8)

(από σχέση 10)

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

Ενωρίτεροι Χρόνοι Δραστηριοτήτων



Από τους χρόνους αυτούς φαίνεται ότι:

- Το έργο ξεκινά με την έναρξη της δραστηριότητας 200.
- Το έργο τελειώνει με τη λήξη της δραστηριότητας 400.
- Η μικρότερη διάρκεια του έργου προβλέπεται να είναι 15 χρονικές μονάδες.

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

Βραδύτεροι Χρόνοι Δραστηριοτήτων

Βραδύτερος χρόνος τέλους του έργου τίθεται , είτε ο “τακτός” χρόνος (εφόσον δίνεται), είτε ο **μεγαλύτερος από τους ενωρίτερους χρόνους τέλους όλων των δραστηριοτήτων** του έργου που προσδιορίστηκαν στο προηγούμενο στάδιο και **ταυτίζεται με τη συνολική χρονική διάρκεια του έργου.**

Ο υπολογισμός των βραδύτερων χρόνων γίνεται ξεκινώντας από τη δραστηριότητα με το μεγαλύτερο βραδύτερο χρόνο τέλους και προχωρώντας προς τα πίσω, λαμβάνοντας υπόψη τις υπάρχουσες σχέσεις.

Εάν σε μια δραστηριότητα καταλήγουν (προς τα πίσω) περισσότερες από μία σχέσεις, υπολογίζουμε τον βραδύτερο χρόνο τέλους της δραστηριότητας για κάθε μία σχέση που καταλήγει στη δραστηριότητα και επιλέγουμε ως βραδύτερο χρόνο τέλους της δραστηριότητας τον **μικρότερο** βραδύτερο χρόνο τέλους που προκύπτει:

$$\mathbf{BXT}_i = \min \{ \mathbf{BXT}_i(1), \mathbf{BXT}_i(2), \dots, \mathbf{BXT}_i(v) \}$$

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

Βραδύτεροι Χρόνοι Δραστηριοτήτων

Για τον υπολογισμό των **βραδύτερων χρόνων τέλους** για τη δραστηριότητα i , της οποίας η επόμενη (γραφικά) δραστηριότητα είναι η j , ισχύουν τα εξής (απαιτείται διαφορετικός υπολογισμός για κάθε τύπο σχέσης):

$$\text{Σχέσεις Start-to-Start (SS)} \quad : \quad \text{BXT}_i = \text{BXE}_j - \text{SS}(i,j) + \text{X}\Delta_i \quad (\text{σχέση 11})$$

$$\text{Σχέσεις Finish-to-Start (FS)} \quad : \quad \text{BXT}_i = \text{BXE}_j - \text{FS}(i,j) \quad (\text{σχέση 12})$$

$$\text{Σχέσεις Start-to-Finish (SF)} \quad : \quad \text{BXT}_i = \text{BXT}_j - \text{SF}(i,j) + \text{X}\Delta_i \quad (\text{σχέση 13})$$

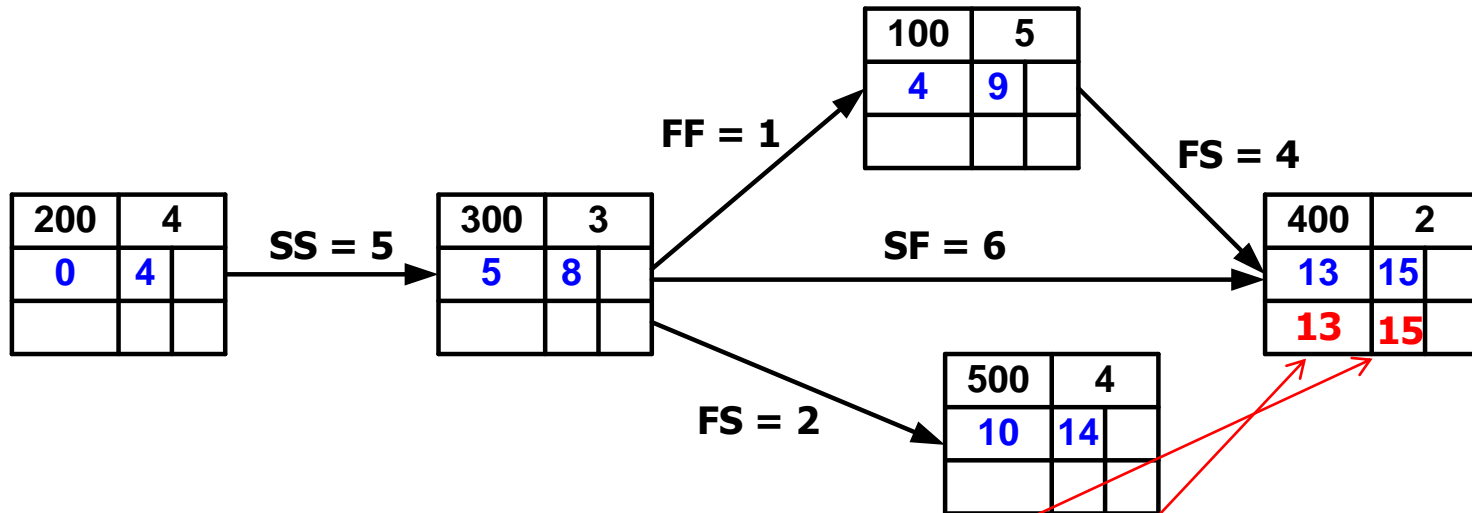
$$\text{Σχέσεις Finish-to-Finish (FF)} \quad : \quad \text{BXT}_i = \text{BXT}_j - \text{FF}(i,j) \quad (\text{σχέση 14})$$

Ο βραδύτερος χρόνο έναρξης δίνεται από τη σχέση:

$$\text{BXE}_i = \text{BXT}_i - \text{X}\Delta_i \quad (\text{σχέση 15})$$

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

Υπολογισμός Βραδύτερων Χρόνων Δραστηριοτήτων



Εφόσον δεν έχει δοθεί "τακτός" χρόνος για το έργο, η Δραστηριότητα 400 έχει το μεγαλύτερο ενωρίτερο χρόνο τέλους στο δίκτυο. Επομένως:

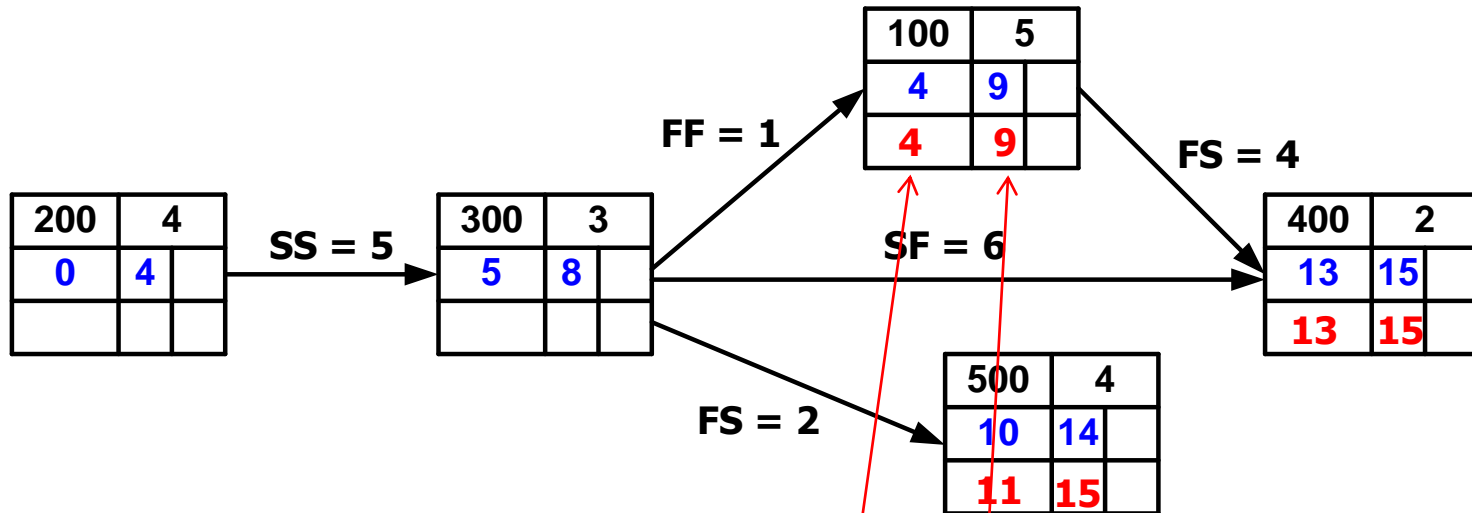
$$\mathbf{BXT}_{400} = 15$$

$$\mathbf{BXE}_{400} = \mathbf{BXT}_{400} - \mathbf{XD}_{400} = 15 - 2 = \mathbf{13}$$

(από σχέση 15)

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

Υπολογισμός Βραδύτερων Χρόνων Δραστηριοτήτων



Η Δραστηριότητα 500 δεν σχετίζεται με τη δραστηριότητα 400, άρα ο βραδύτερος χρόνος τέλους της θα είναι ο μεγαλύτερος βραδύτερος χρόνος τέλους στο δίκτυο:

$$\mathbf{BXT}_{500} = \mathbf{BXT}_{400} = \mathbf{15}$$

$$\mathbf{BXE}_{500} = \mathbf{BXT}_{500} - \mathbf{ΧΔ}_{500} = \mathbf{15} - \mathbf{4} = \mathbf{11}$$

(από σχέση 15)

Για τη Δραστηριότητα 100 προκύπτει:

$$\mathbf{BXT}_{100} = \mathbf{BXE}_{100} - \mathbf{FS}(100,400) = \mathbf{13} - \mathbf{4} = \mathbf{9}$$

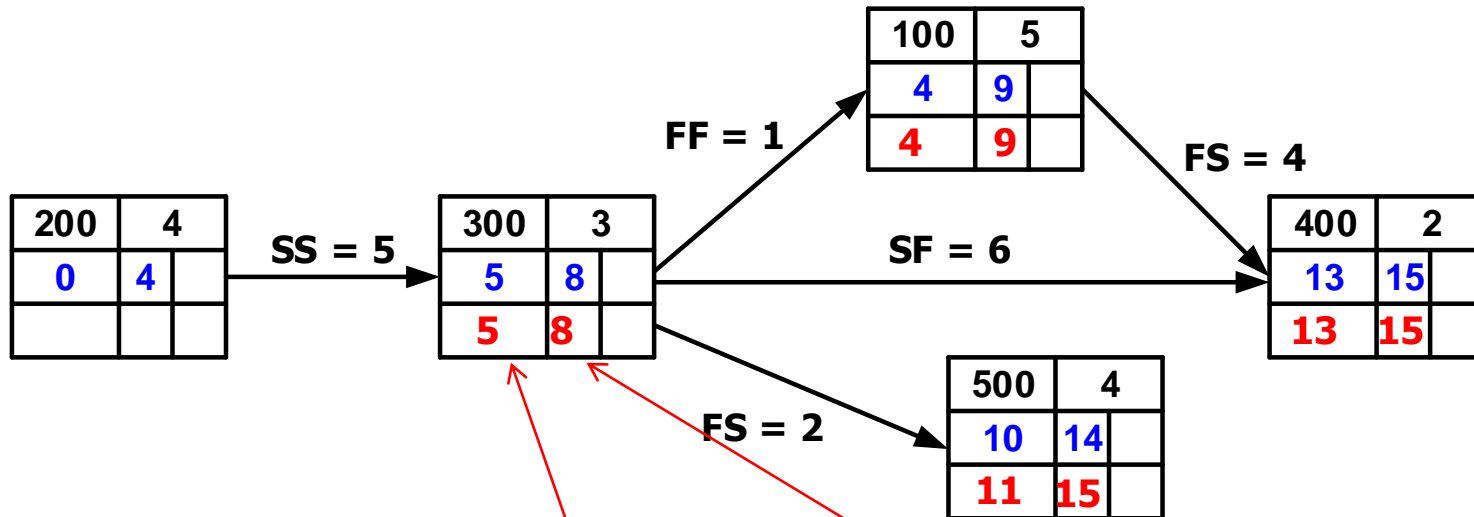
(από σχέση 12)

$$\mathbf{BXE}_{100} = \mathbf{BXT}_{100} - \mathbf{ΧΔ}_{100} = \mathbf{9} - \mathbf{5} = \mathbf{4}$$

(από σχέση 15)

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

Υπολογισμός Βραδύτερων Χρόνων Δραστηριοτήτων



Στη Δραστηριότητα 300 καταλήγουν (προς τα πίσω) 3 σχέσεις. Άρα θα υπολογιστούν τρεις χρόνοι και θα "κρατηθεί" ο μικρότερος:

$$\mathbf{BXT}_{300} (1) = \mathbf{BXT}_{400} - \mathbf{SF}(300,400) + \mathbf{ΧΔ}_{300} = 15 - 6 + 3 = \mathbf{12} \quad (\text{από σχέση 13})$$

$$\mathbf{BXT}_{300} (2) = \mathbf{BXE}_{500} - \mathbf{FS}(300,500) = 11 - 2 = \mathbf{9} \quad (\text{από σχέση 12})$$

$$\mathbf{BXT}_{300} (3) = \mathbf{BXT}_{100} - \mathbf{FF}(300,100) = 9 - 1 = \mathbf{8} \quad (\text{από σχέση 14})$$

$$\text{Άρα: } \mathbf{BXT}_{300} = \min\{\mathbf{BXT}_{300} (1), \mathbf{BXT}_{300} (2), \mathbf{BXT}_{300} (3)\} = \min\{\mathbf{12}, \mathbf{9}, \mathbf{8}\} = \mathbf{8}$$

και

$$\mathbf{BXE}_{300} = \mathbf{BXT}_{300} - \mathbf{ΧΔ}_{300} = 8 - 3 = \mathbf{5} \quad (\text{από σχέση 15})$$

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου (συν.)

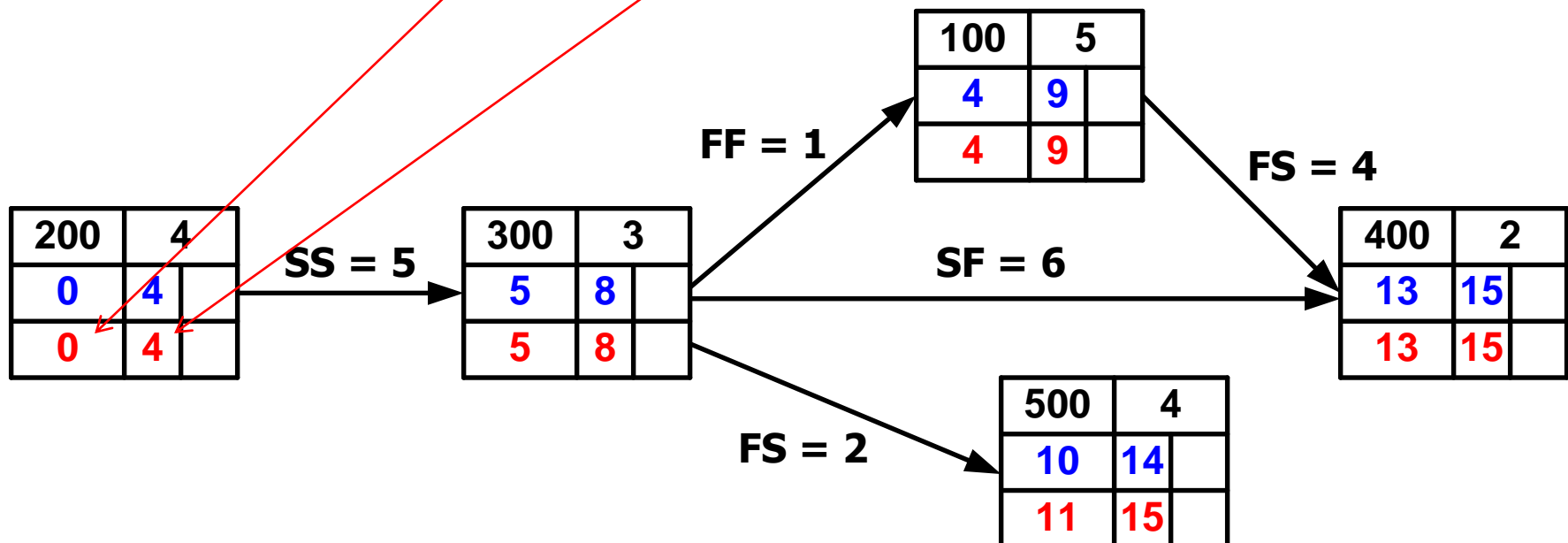
Υπολογισμός Βραδύτερων Χρόνων Δραστηριοτήτων

Για τη Δραστηριότητα 200 προκύπτει:

$$\mathbf{BXT}_{200} = \mathbf{BXT}_{300} - \mathbf{SS}(200,300) + \mathbf{ΧΔ}_{200} = 5 - 5 + 4 = 4 \quad (\text{από σχέση 11})$$

$$\mathbf{BΧΕ}_{200} = \mathbf{BXT}_{200} - \mathbf{ΧΔ}_{200} = 4 - 4 = 0 \quad (\text{από σχέση 15})$$

Κομβικό δίκτυο του έργου
με **ενωρίτερος** και **βραδύτερος** χρόνους



Επίλυση Κομβικού Δικτύου

Περιθώρια Χρόνου

Το **Συνολικό Περιθώριο Χρόνου** κάθε δραστηριότητας i , δίνεται από τη σχέση:

$$\text{ΣΠΧ}_i = \text{ΒΧΤ}_i - \text{ΕΧΕ}_i - \text{ΧΔ}_i \quad (\text{σχέση 16})$$

Μια **δραστηριότητα** είναι **κρίσιμη** εάν $\text{ΣΠΧ}_i = 0$.

Ένα κομβικό δίκτυο μπορεί να αρχίζει και να τελειώνει (γραφικά) με πολλές δραστηριότητες.

Η παραστατική αλληλουχία των δραστηριοτήτων δεν ταυτίζεται υποχρεωτικά με τη χρονική τους αλληλουχία.

Όταν ο ενωρίτερος χρόνος τέλους του έργου ταυτίζεται με το βραδύτερο χρόνο τέλους του έργου, θα υπάρχει **τουλάχιστον μία “αλυσίδα” κρίσιμων δραστηριοτήτων** του δικτύου που συνδέονται με σχέσεις μεταξύ τους και η οποία περιλαμβάνει **οπωσδήποτε τουλάχιστον μία από τις πρώτες και μία από τις τελευταίες (χρονικά) δραστηριότητες** του δικτύου.

Κάθε μία από αυτές τις “αλυσίδες” δραστηριοτήτων αποτελεί μια κρίσιμη διαδρομή του κομβικού δικτύου

Επίλυση Κομβικού Δικτύου

Περιθώρια Χρόνου

Το Ελεύθερο Περιθώριο Χρόνου μιας δραστηριότητας υπολογίζεται για κάθε τύπο σχέσης, ως ακολούθως:

$$\text{Σχέσεις Start-to-Start (SS)} : \text{ΕΧΠ}_i = \text{ΕΧΕ}_j - \text{ΕΧΕ}_i - \text{SS}(i,j) \quad (\text{σχέση 17})$$

$$\text{Σχέσεις Finish-to-Start (FS)} : \text{ΕΧΠ}_i = \text{ΕΧΕ}_j - \text{ΕΧΕ}_i - \text{FS}(i,j) \quad (\text{σχέση 18})$$

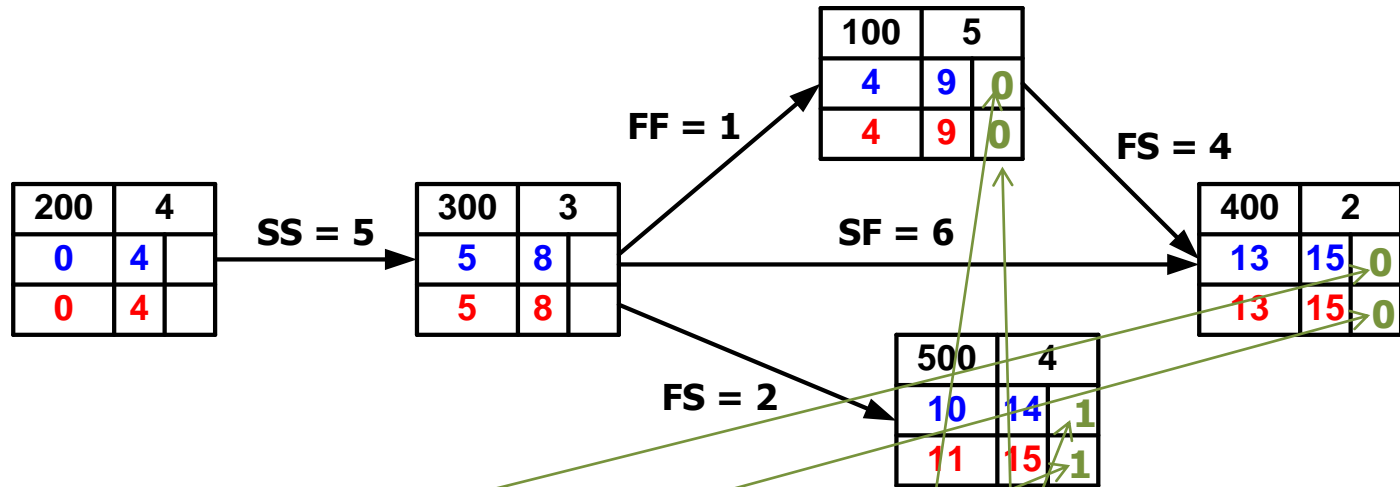
$$\text{Σχέσεις Start-to-Finish (SF)} : \text{ΕΧΠ}_i = \text{ΕΧΕ}_j - \text{ΕΧΕ}_i - \text{SF}(i,j) + \text{ΧΔ}_j \quad (\text{σχέση 19})$$

$$\text{Σχέσεις Finish-to-Finish (FF)} : \text{ΕΧΠ}_i = \text{ΕΧΕ}_j - \text{ΕΧΕ}_i - \text{FF}(i,j) + \text{ΧΔ}_j \quad (\text{σχέση 20})$$

Εάν σε μια δραστηριότητα i καταλήγουν (προς τα πίσω) **περισσότερες** από μια σχέσεις, τότε υπολογίζουμε το **Ελεύθερο Περιθώριο Χρόνου για κάθε μία** από αυτές τις σχέσεις και **“κρατάμε”** ως **Ελεύθερο Περιθώριο Χρόνου της δραστηριότητας i το ελάχιστο (min) των Ελεύθερων Περιθωρίων Χρόνου** των σχέσεων που υπολογίσαμε.

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου

Υπολογισμός Περιθωρίων Χρόνου



Με τη Δραστηριότητα 400 τελειώνει το έργο. Επομένως:

$$\Sigma\text{ΠΧ}_{400} = 0$$

$$\text{ΕΠΧ}_{400} = 0$$

Δραστηριότητα 500:

$$\Sigma\text{ΠΧ}_{500} = \text{BXT}_{500} - \text{EXE}_{500} - \text{ΧΔ}_{500} = 15 - 10 - 4 = 1 \quad (\text{σχέση 16})$$

$$\text{ΕΠΧ}_{500} = 1 \quad (\text{επειδή δεν έχει σχέση με τη δραστηριότητα 400})$$

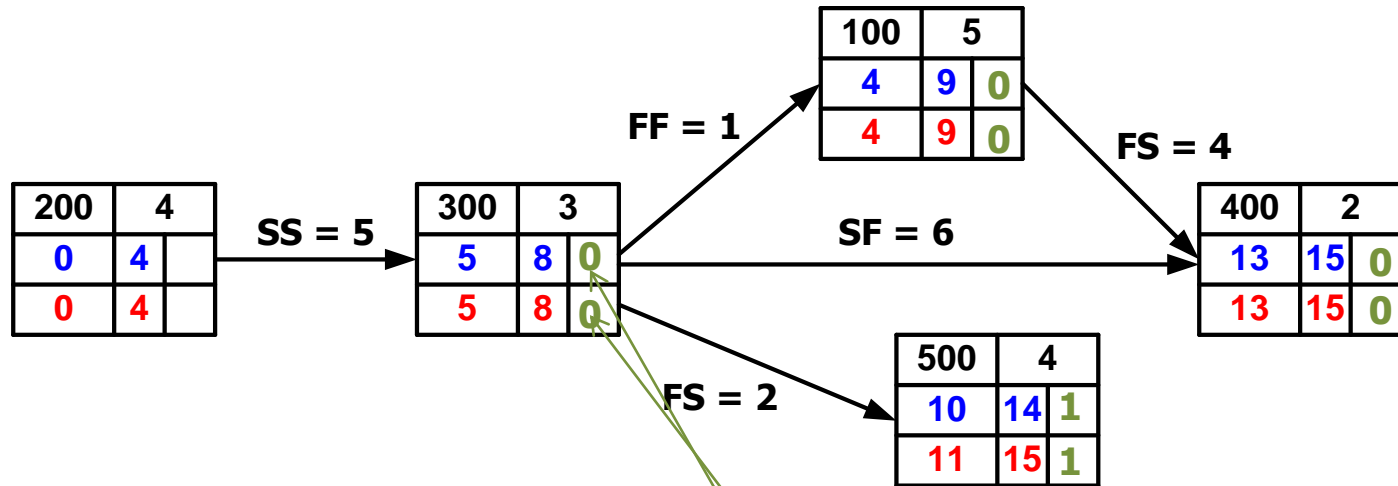
Δραστηριότητα 100:

$$\Sigma\text{ΠΧ}_{100} = \text{BXT}_{100} - \text{EXE}_{100} - \text{ΧΔ}_{100} = 9 - 4 - 5 = 0 \quad (\text{σχέση 16})$$

$$\text{ΕΠΧ}_{100} = \text{EXE}_{400} - \text{EXT}_{100} - \text{FS}(100,400) = 13 - 9 - 4 = 0 \quad (\text{σχέση 18})$$

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου

Υπολογισμός Περιθωρίων Χρόνου



Δραστηριότητα 300:

$$\Sigma\text{ΠΧ}_{300} = \text{BXT}_{300} - \text{EXE}_{300} - \text{ΧΔ}_{300} = 8 - 5 - 3 = 0 \quad (\text{σχέση 16})$$

Επειδή στη Δραστηριότητα 300 καταλήγουν (προς τα πίσω) 3 σχέσεις, θα υπολογιστούν τρία ελεύθερα περιθώρια χρόνου και θα "κρατηθεί" το μικρότερο:

$$\text{ΕΠΧ}_{300}(1) = \text{EXE}_{400} - \text{EXT}_{300} - \text{SF}(300,400) + \text{ΧΔ}_{400} = 13 - 5 - 6 + 2 = 4 \quad (\text{σχέση 19})$$

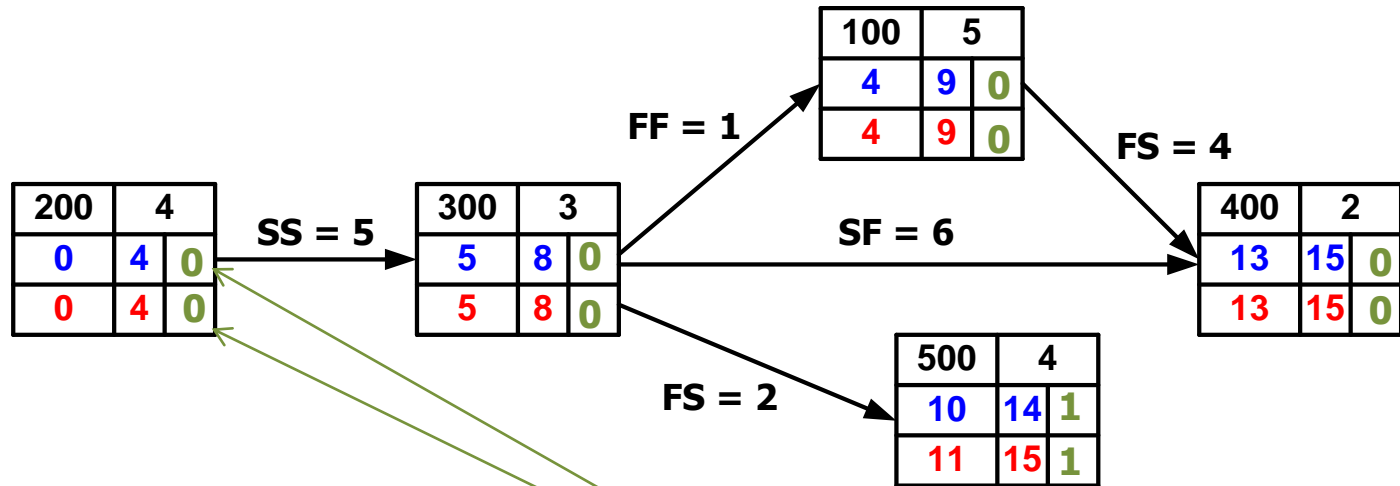
$$\text{ΕΠΧ}_{300}(2) = \text{EXE}_{500} - \text{EXT}_{300} - \text{FS}(300,500) = 10 - 8 - 2 = 0 \quad (\text{σχέση 18})$$

$$\text{ΕΠΧ}_{300}(3) = \text{EXE}_{100} - \text{EXT}_{300} - \text{FF}(300,100) + \text{ΧΔ}_{100} = 4 - 8 - 1 + 5 = 0 \quad (\text{σχέση 20})$$

$$\text{ΕΠΧ}_{300} = \min\{\text{ΕΠΧ}_{300}(1), \text{ΕΠΧ}_{300}(2), \text{ΕΠΧ}_{300}(3)\} = \min\{4, 0, 0\} = 0$$

Παρ. 2: Επίλυση Κομβικού Δικτύου

Υπολογισμός Περιθωρίων Χρόνου



Δραστηριότητα 200:

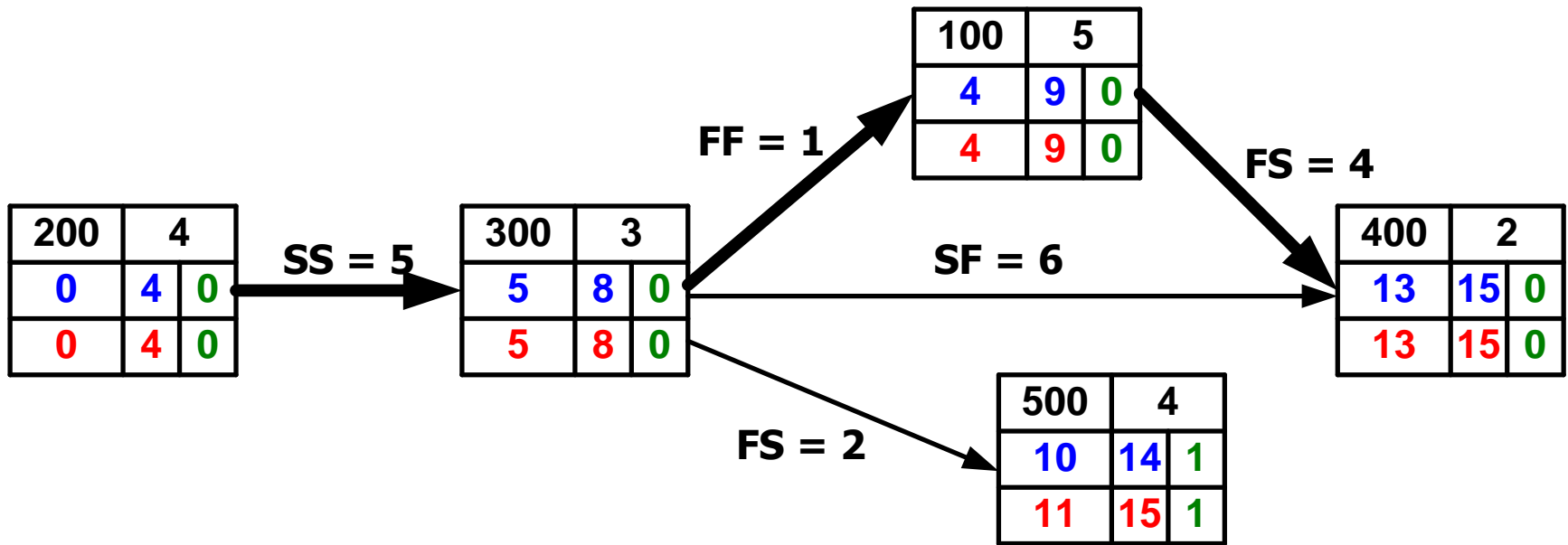
$$\Sigma\text{ΠΧ}_{200} = \text{BΧΤ}_{200} - \text{ΕΧΕ}_{200} - \text{ΧΔ}_{200} = 5 - 0 - 4 = 0$$

(σχέση 16)

$$\text{ΕΠΧ}_{200} = \text{ΕΧΕ}_{300} - \text{ΕΧΕ}_{200} - \text{SS}(200,300) = 5 - 0 - 5 = 0$$

(σχέση 17)

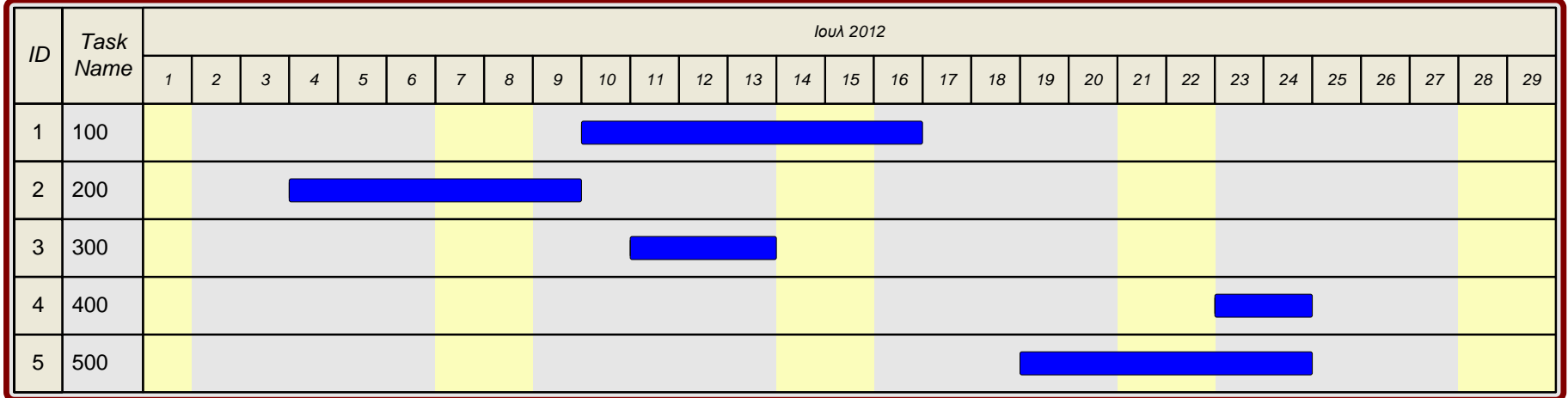
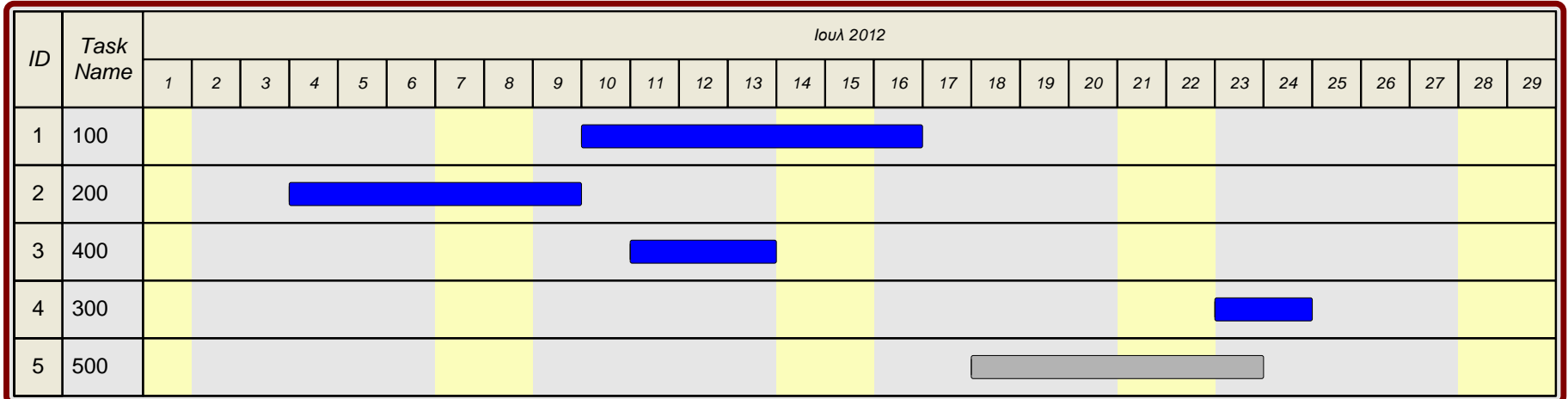
Παρ. 2: Τελική μορφή Επίλυσης Κομβικού Δικτύου



Υπάρχει μία κρίσιμη διαδρομή: **200, 300, 100, 400**

Ελεύθερο Περιθώριο Χρόνου διαθέτει μόνο η δραστηριότητα 500 (**ΕΠΧ₅₀₀ = 1**)

Παρ. 2: Διαγράμματα Gantt για το Κομβικό Δίκτυο (Ενωρίτεροι και Βραδύτεροι Χρόνοι)



Πηγές:

Διοίκηση – Διαχείριση Έργου, Α. Δημητριάδη

Διαχείριση Έργου – Τεχνικές Σχεδιασμού και Ελέγχου, Rory Burke

Διοίκηση Παραγωγής και Συστημάτων Υπηρεσιών, Κεφ. 10: Προγραμματισμός Έργων, Εργαστήριο Συστημάτων Αποφάσεων και Διοίκησης, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ, ΕΜΠ, <http://academics.epu.ntua.gr/LinkClick.aspx?fileticket=hKTbizomAM0%3D&...>

Quantitative Techniques in Management, N. D. Vohra, <http://books.google.gr/books?id=T-707YzDBSYC>

ΟΔΗΓΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΨΗ ΚΑΙ ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΔΗΜΟΣΙΩΝ ΣΥΜΒΑΣΕΩΝ, Διεύθυνση Δημοσίων Συμβάσεων, Γενικό Λογιστήριο της Κυπριακής Δημοκρατίας, <http://www.publicprocurementguides.treasury.gov.cy/OHS-GR/HTML/>