ΕΚΤΙΜΗΣΗ, ΥΠΟΘΕΣΗ, ΣΦΑΛΜΑ
(ESTIMATION, HYPOTHESIS, ERROR)
Κεφάλαιο 10

Αντώνης Κ. Τραυλός (B.A., M.A., Ph.D.)
Καθηγητής
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
Σχολή Επιστημών Ανθρώπινης Κίνησης και Ποιότητας Ζωής
Τμήμα Οργάνωσης και Διαχείρισης Αθλητισμού

Η διάλεξη βασίζεται στο Κεφάλαιο 10 του συγγράμματος «Βαγενάς, Γ. Κ. (2019). *Στατιστικές εφαρμογές στην αθλητική επιστήμη με παραδείγματα στο SPSS* (7η Έκδοση). Αθήνα: Τζιόλας.

1

1

Εκτίμηση & Τυπικό Σφάλμα (SE)

- Η στατιστική εκτίμηση αποτελεί σημαντικό τομέα της **στατιστικής επαγωγής** και ασχολείται με την **εκτίμηση** των πληθυσμιακών παραμέτρων μέσω των δειγματικών στατιστικών.
  - Η στατιστική αυτή διαδικασία δε διαφέρει εννοιολογικά από τη διαδικασία εκτίμησης ενός πραγματικού μεγέθους μέσω κάποιας τεχνικής μέτρησης, που εμπεριέχει αναπόφευκτα **το σφάλμα μέτρησης** ή αλλιώς το **σφάλμα εκτίμησης**.
  - Κάτι ανάλογο ισχύει και στην περίπτωση της εκτίμησης στην στατιστική επαγωγή.
- Αν, για παράδειγμα, ένα δειγματικό στατιστικό έχει τιμή ίση με την τιμή της αντίστοιχης πληθυσμιακής παραμέτρου, τότε το στατιστικό αποτελεί μια **αμερόληπτη εκτιμήτρια** της παραμέτρου και η τιμή του μια **αμερόληπτη εκτίμηση** της τιμής της.
  - Σε αντίθετη περίπτωση το στατιστικό αυτό αποτελεί μια **μεροληπτική εκτιμήτρια** της παραμέτρου και η τιμή του μια **μεροληπτική εκτίμηση** της τιμής της παραμέτρου.

2

2

Εκτίμηση & Τυπικό Σφάλμα (SE) ... συνέχεια

- Παράδειγμα αμερόληπτης εκτίμησης της πληθυσμιακής μέσης τιμής (μ) είναι η μέση τιμή του δείγματος, ενώ κλασικό παράδειγμα μεροληπτικής εκτίμησης της πληθυσμιακής διασποράς (σ^2) είναι η μη διορθωμένη δειγματική διασπορά (S^2).
  - Η **διορθωμένη δειγματική διασπορά υπολογίζεται με N-1** βαθμούς ελευθερίας και είναι $s^2=(\Sigma x^2)/(N-1)$. Αυτή η διόρθωση έχει πρακτική αξία μόνο για δειγματικά πλήθη $N<30$.
  - Σε αρκετά βιβλία στατιστικής η **μεροληπτική διασπορά** (με N) διαχωρίζεται από την **αμερόληπτη** (με N-1) με τη χρήση των συμβολισμών **S^2 και s^2** αντίστοιχα.

3

3

Εκτίμηση & Τυπικό Σφάλμα (SE) ... συνέχεια

- Χρησιμοποιώντας λοιπόν την εκτίμηση του τυπικού σφάλματος (SE) μαζί με τον μέσο (Μ) του δείγματος και βασισμένοι στις ιδιότητες της κανονικής καμπύλης **μπορούμε να προβούμε σε εκτίμηση του πιθανού διαστήματος (ορίων της κλίμακας μέτρησης) μέσα στο οποίο πέφτει ο πληθυσμιακός μέσος μ.**
- Το διάστημα αυτό λέγεται **διάστημα εμπιστοσύνης**.

$$SE = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

4

4

$$SE = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Παράδειγμα

- Για **παράδειγμα,** αν ο μέσος ενός τυχαίου δείγματος πλήθους N=25 είναι M=100 και η αμερόληπτη τυπική απόκλιση είναι s = 15 τότε, σύμφωνα με τον τύπο, το **τυπικό σφάλμα** είναι

$$SE = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

- Με βάση λοιπόν τα τυποποιημένα διαστήματα πιθανοτήτων της κανονικής καμπύλης (κεφ. 8), αν υποθέσουμε ότι ο πληθυσμιακός μέσος ανήκει στο διάστημα

  M ± 1 (SE) = 100 ± 1 (3) = 100 ± 3 —> διάστημα : 97 - 103

  έχουμε περίπου 68% πιθανότητα η υπόθεση αυτή να είναι σωστή.

5

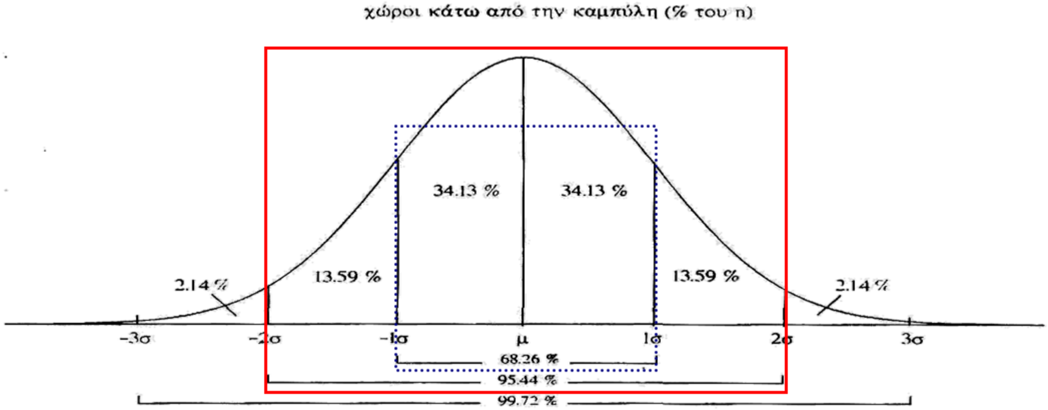
5

Παράδειγμα

- Με τον ίδιο τρόπο, αν υποθέσουμε ότι ο πληθυσμιακός μέσος ανήκει στο διάστημα

  M ± 2 (SE) = 100 ± 2 (3) = 100 ± 6 —> διάστημα : 94 - 106

  έχουμε περίπου 95% πιθανότητα η υπόθεση αυτή να είναι σωστή.



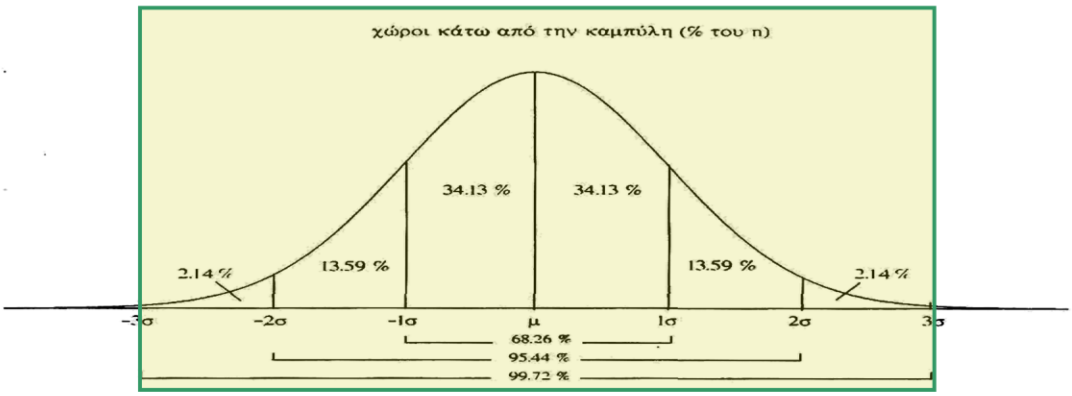
Κανονική καμπύλη : κατανομή %f κατά σ

6

6

Παράδειγμα

- Τέλος, αν υποθέσουμε ότι ο πληθυσμιακός μέσος ανήκει στο διάστημα **$M \pm 3$ (SE) = 100 ± 3 (3) = 100 ± 9 —> διάστημα : 91 - 109** έχουμε περίπου 99.7% πιθανότητα η υπόθεση αυτή να είναι σωστή.



Κανονική καμπύλη : κατανομή %f κατά σ

Επισημάνσεις

- Από το παράδειγμα αυτό γίνεται φανερό ότι **όσο μικρότερο είναι το τυπικό σφάλμα** (**SE**) τόσο ακριβέστερη εκτίμηση γίνεται στον πληθυσμιακό μέσο. Από τον τύπο

$$SE = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

προκύπτει ότι το μέγεθος του τυπικού σφάλματος επηρεάζεται κατά κύριο λόγο από το πλήθος Ν του δείγματος και κατά δεύτερο λόγο από το μέγεθος της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού, όπως αυτή εκτιμάται από τη διορθωμένη (με Ν-1) τυπική απόκλιση s του δείγματος.

- Το Ν επηρεάζει το SE με δύο τρόπους :
  - άμεσα ως διαιρέτης της s και έμμεσα ως διαιρέτης (Ν-1) του αθροίσματος των τετραγώνων των αποκλίσεων (υπολογισμός της s).
  - Όσο το Ν μεγαλώνει τόσο μικραίνει το SE. **Γενικά, τα μεγάλα δείγματα είναι πιο αντιπροσωπευτικά από τα μικρά δείγματα**.

Στατιστική Υπόθεση & Σφάλματα

Παράδειγμα για διερεύνηση:

- **ένας αθλητικός ερευνητής** μπορεί να υποθέσει ότι η Α δρομική τεχνική είναι αποτελεσματικότερη από τη Β δρομική τεχνική.

9

9

Στατιστική Υπόθεση & Σφάλματα … συνέχεια

- **Η μηδενική υπόθεση** και συμβολίζεται με το H_0 και η **εναλλακτική υπόθεση** με το H_α ή H_A
- Η μηδενική υπόθεση του παραπάνω υποθετικού παραδείγματος θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής :

  δεν υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά μεταξύ της δρομικής τεχνικής Α και της δρομικής τεχνικής Β

  (H_0: $\mu_A = \mu_B$).
- Η εναλλακτική υπόθεση του παραπάνω υποθετικού παραδείγματος θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής :

  υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά μεταξύ της δρομικής τεχνικής Α και της δρομικής τεχνικής Β

  (H_α: $\mu_A \neq \mu_B$).

10

10

- Σημειώνουμε επίσης ότι η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ***μας οδηγεί στην αποδοχή της ερευνητικής υπόθεσης*** εναλλακτικά και για τον λόγο αυτό στις περιπτώσεις αυτές η ερευνητική υπόθεση λέγεται **εναλλακτική υπόθεση** και συμβολίζεται με το $\mathbf{H_\alpha}$.
- Η διαδικασία είναι σχετικά απλή.
  - Αν **απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση**, αποδεχόμαστε την εναλλακτική, οπότε έχουμε την απαραίτητη στατιστική βάση, για να αξιολογήσουμε την ερευνητική μας υπόθεση.
  - Αν **αποδεχτούμε τη μηδενική υπόθεση** τότε απορρίπτουμε την εναλλακτική και επανεξετάζουμε τη δομή και τη βάση της ερευνητικής μας υπόθεσης.
- Σημειώνεται ότι οι στατιστικές υποθέσεις αφορούν πάντα πληθυσμιακές ιδιότητες (παραμέτρους) και ποτέ δειγματικά στατιστικά.

11

11

Στατιστική Υπόθεση & Σφάλματα ... συνέχεια

- Ορισμένες φορές οι στατιστικές υποθέσεις αφορούν **εκτιμήσεις σημείου,** όπως π.χ.

$$H_0: \mu_A = 70 \quad H_A: \mu_A \neq 70$$

- ενώ άλλες φορές αφορούν **εκτιμήσεις διαστήματος,** όπως π.χ.

$$H_0: \mu_A - \mu_B = 0$$

$$H_A: \mu_A - \mu_B \neq 0$$

12

12

Στατιστική Υπόθεση & Σφάλματα

(έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας)

- Ο έλεγχος της στατιστικής σημαντικότητας γίνεται με βάση ένα προαποφασισμένο **επίπεδο πιθανότητας,** που συμβολίζεται με το ***ελληνικό α*** και ονομάζεται πρακτικά **επίπεδο σημαντικότητας.**
  - Τα πιο συνήθη επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας είναι το $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ και **το** $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$**,** που προσδιορίζουν πιθανότητα 5% και 1%, αντίστοιχα, να είναι εσφαλμένη η απόρριψη της H_0 και κατά συνέπεια η αποδοχή της H_A.
- Το επίπεδο σημαντικότητας $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ σημαίνει ότι, αν εκτελούσαμε μία πειραματική έρευνα 100 φορές, δεχόμαστε εκ των προτέρων ότι σε 5 από τις 100 αυτές επαναλήψεις θα μπορούσαμε να είχαμε βρει σημαντικά αποτελέσματα οφειλόμενα μόνο στην τύχη, δηλαδή με πιθανότητα εσφαλμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης H_0 5%.
- Παρόμοια μπορούμε να μιλήσουμε και για $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$.

13

13

Στη στατιστική πρακτική υπάρχουν 4 διαφορετικοί συνδυασμοί στη διαδικασία της απόρριψης ή μη της μηδενικής υπόθεσης (H_0).

Αυτές είναι ……

Possible Hypothesis Test Outcomes		
Decision	Accept H_0	Reject H_0
H_0 is true	Correct Decision (No error)	Type I Error
	Probability = 1 - α	Probability = α
H_0 is false	Type II Error	Correct Decision (No error)
	Probability = β	Probability = 1 - β

14

14

ΑΠΟΦΑΣΗ ↓	ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ της H_0 στον Πληθυσμό	
	Αληθής	Εσφαλμένη
Αποδοχή της H_0 →	Ορθή Απόφαση	Σφάλμα Τύπου II (β)
Απόρριψη της H_0 →	Σφάλμα Τύπου I (α)	Ορθή Απόφαση

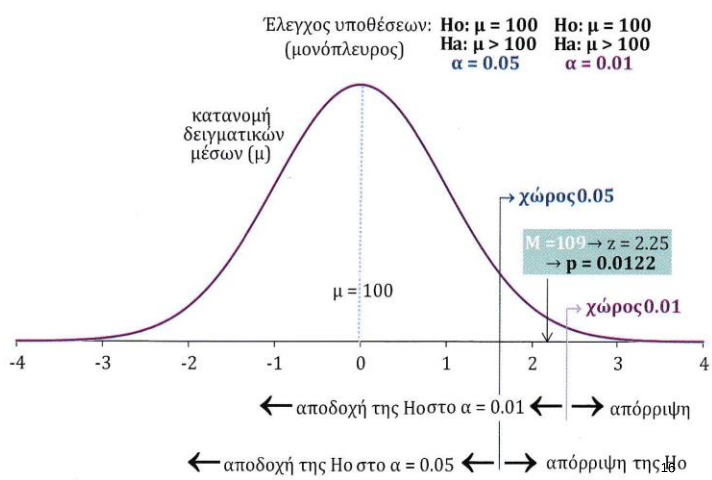
1. Αν η μηδενική υπόθεση (H_0) είναι αληθής, ισχύει δηλαδή στον πληθυσμό, και ο ερευνητής την απορρίψει, τότε κάνει το λεγόμενο **σφάλμα τύπου I** με πιθανότητα ίση με **α** (επίπεδο σημαντικότητας).
2. Αν η μηδενική υπόθεση (H_0) είναι λαθεμένη, δεν ισχύει δηλαδή στον πληθυσμό, και ο ερευνητής την αποδεχτεί, τότε κάνει το λεγόμενο **σφάλμα τύπου II** με πιθανότητα **β**.
3. Αν η μηδενική υπόθεση (H_0) είναι αληθής, ισχύει δηλαδή στον πληθυσμό, και ο ερευνητής την αποδεχτεί, τότε πήρε την **ορθή απόφαση**.
4. Αν η μηδενική υπόθεση (H_0) είναι λαθεμένη, δεν ισχύει δηλαδή στον πληθυσμό, και ο ερευνητής την απορρίψει, τότε και πάλι πήρε την **ορθή απόφαση**.

15

15

Σφάλμα Τύπου I (α)

- ***Το σφάλμα τύπου I*** *συμβαίνει όταν η μηδενική υπόθεση (H_0) ισχύει σε πληθυσμιακό επίπεδο (είναι αληθής), αλλά απορρίπτεται με βάση την εκτίμηση που προκύπτει από τη δειγματική ανάλυση.*
- **Για παράδειγμα,** ας θεωρήσουμε τον στατιστικό πληθυσμό μιας μεταβλητής X με υπαρκτό *μέσο* μ=100 αλλά *άγνωστο* σε μας και ας διατυπώσουμε σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ τις στατιστικές υποθέσεις
- H_0: $\mu = 100$ H_A: $\mu \neq 100$
- δηλαδή τη μηδενική υπόθεση (H_0) ότι ο μέσος της X στον πληθυσμό είναι 100 έναντι στην εναλλακτική υπόθεση (H_A) ότι είναι μεγαλύτερος του 100.



16

16

Σφάλμα Τύπου Ι (α)

- Προκειμένου λοιπόν **να ελέγξουμε την ισχύ της μηδενικής υπόθεσης (H_0)** παίρνουμε από τον πληθυσμό της Χ ένα δείγμα Ν = 25 τιμών, λογαριάζουμε τον μέσο Μ και την (αμερόληπτη, δηλαδή με Ν-1) τυπική απόκλιση s και βρίσκουμε Μ = 109 και s = 20.

Υπολογίζουμε το τυπικό σφάλμα του μέσου με τον τύπο 10.1

$$SE = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

Μετασχηματίζουμε το δειγματικό μέσο M=109 σε τιμή z

$$z = \frac{M - \mu}{SE} = \frac{109 - 100}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

- Σύμφωνα με τη στήλη Γ του Πίνακα 21.Γ, η τιμή z=2.25 ορίζει για το διάστημα [z --> +] συνολική πιθανότητα p=0.01223 (1.223%).
- Η πιθανότητα αυτή είναι μικρότερη από την πιθανότητα κριτήριο α = 0.05 που τέθηκε ως προϋπόθεση προκειμένου να θεωρηθεί ο Μ = 109 ότι οφείλεται σε τύχη, δηλαδή σε αριθμητική σύμπτωση.

17

17

Σφάλμα Τύπου Ι (α)

- Κατά συνέπεια

  υπάρχει επαρκής στατιστική απόδειξη για την απόρριψη της H_0.
- *Έτσι,* καταλήγουμε στη διατύπωση:

  " Με στατιστική βεβαιότητα 95% μπορούμε να δεχτούμε την εναλλακτική υπόθεση H_A

  ότι η πληθυσμιακή μέση τιμή της Χ είναι μεγαλύτερη του 100. Στην περίπτωση αυτή έχει γίνει σφάλμα τύπου Ι. "
- Ας θεωρήσουμε τώρα το προηγούμενο **παράδειγμα** αλλά αυτή τη φορά με επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας το α = 0.01.
- Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, η πιθανότητα p = 0.01223 (1.22%) που ορίζει συνολικά η z = 2.25 για το διάστημα [z —> +] είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα κριτήριο α = 0.01.
- Κατά συνέπεια ο Μ = 109 πρέπει να αποδοθεί απλά σε τυχαία αριθμητική διακύμανση του δειγματικού μέσου, δηλαδή δεν αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό.

18

18

Έτσι καταλήγουμε ……

- …. στην **ορθή απόφαση,** να δεχτούμε την H_0 και να απορρίψουμε την H_A. Στην περίπτωση αυτή *δεν υπήρξε επαρκής στατιστική απόδειξη για να απορριφθεί η* H_0.
- Γι' αυτό καταλήγουμε στη διατύπωση ότι με *στατιστική βεβαιότητα 99% μπορούμε να δεχτούμε τη μηδενική υπόθεση* H_0 ότι η πληθυσμιακή μέση τιμή της Χ είναι 100.

19

19

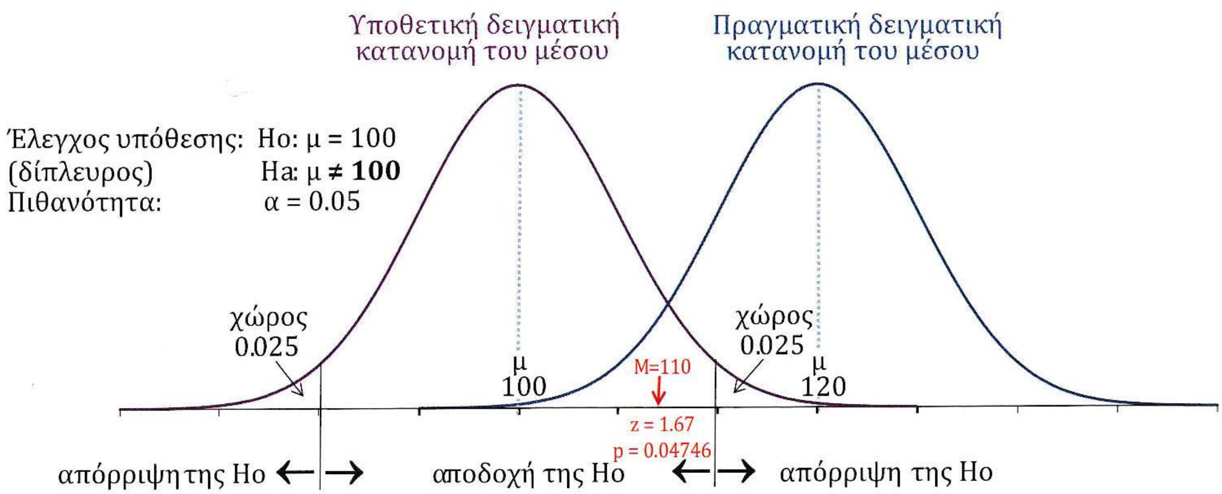
Σφάλμα Τύπου ΙΙ (β)

- *Το **σφάλμα τύπου ΙΙ** γίνεται όταν η μηδενική υπόθεση (H_0) δεν ισχύει σε πληθυσμιακό επίπεδο (είναι λανθασμένη), αλλά γίνεται τελικά αποδεκτή με βάση την εκτίμηση που προκύπτει από τη δειγματική ανάλυση.*
- Για **παράδειγμα,** ας θεωρήσουμε **τον στατιστικό πληθυσμό μιας μεταβλητής Υ με υπαρκτό *μέσο* $\mu = 120$** αλλά *άγνωστο σε μας* και ας διατυπώσουμε σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ τις στατιστικές υποθέσεις **H_0: $\mu = 100$ H_A : $\mu \neq 100$**
- δηλαδή τη μηδενική υπόθεση (H_0) ότι ο μέσος της Υ στον πληθυσμό είναι 100 ενάντια στην εναλλακτική υπόθεση (H_A) ότι είναι διάφορος του 100 (Σχήμα 10.2).

΄Ελεγχος υπόθεσης :	Ho : $\mu = 100$
διπλή κατεύθυνση	H_A : $\mu \neq 100$
(δύο άκρων)	$\alpha = 0.05$

20

Έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\mu = 100$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης H_A: $\mu \neq 100$



21

Σφάλμα Τύπου ΙΙ (β)

- Προκειμένου λοιπόν να ελέγξουμε την ισχύ της μηδενικής υπόθεσης (H_0), παίρνουμε από τον πληθυσμό της Υ ένα δείγμα Ν = 16 τιμών, λογαριάζουμε τον μέσο (Μ) και την αμερόληπτη (με Ν-1) τυπική απόκλιση (s) και βρίσκουμε Μ = 110 και s = 24.

Υπολογίζουμε το τυπικό σφάλμα του μέσου με τον τύπο 10.1

$$SE = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{24}{\sqrt{16}} = \frac{24}{\sqrt{4}} = 6$$

Μετασχηματίζουμε το δειγματικό μέσο Μ=110 σε τιμή z

$$z = \frac{M - \mu}{SE} = \frac{110 - 100}{6} = \frac{10}{6} = 1.67$$

- Σύμφωνα με τη στήλη Γ του Πίνακα 21.Γ, η τιμή z = 1.67 ορίζει για το διάστημα [z —> +∞] συνολική πιθανότητα p = 0.04746 (4.75%).
- Η πιθανότητα αυτή είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα **α/2 = 0.05 / 2 = 0.025**
- Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος Μ = 110 έχει μεγαλύτερη πιθανότητα από αυτή που ορίσαμε, για να θεωρηθεί ότι οφείλεται σε τύχη, δηλαδή σε αριθμητική σύμπτωση.

22

Σφάλμα Τύπου ΙΙ (β)

- Κατά συνέπεια

  δεν υπάρχει επαρκής στατιστική απόδειξη για να απορριφθεί η H_0.
- Έτσι καταλήγουμε στη διατύπωση:

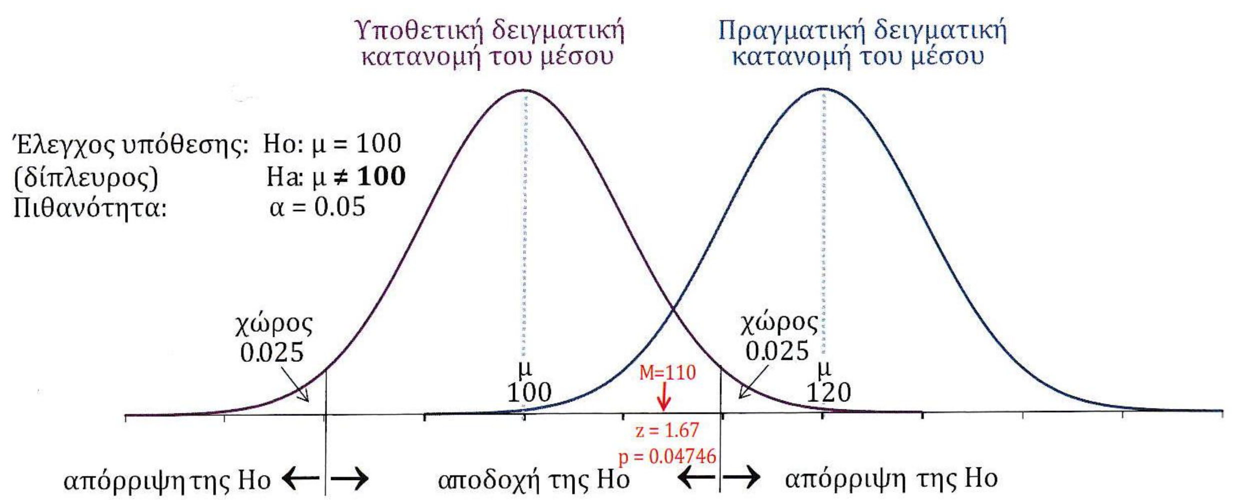
  "**Με στατιστική βεβαιότητα 95% δεν μπορούμε να δεχτούμε την εναλλακτική υπόθεση H_A** ότι

  η πληθυσμιακή μέση τιμή της Χ είναι διάφορη του 100."
- Με απλά λόγια, η ανάλυση του δείγματος και η εκτίμηση του τυπικού σφάλματος του μέσου μας οδήγησε στο στατιστικό συμπέρασμα ότι η H_0 είναι σωστή και δεν πρέπει να απορριφθεί, ενώ η πραγματική πληθυσμιακή τιμή του μέσου ήταν $\mu = 120$, δηλαδή διαφορετική του υποθετικού μ.
- **Στην περίπτωση αυτή έχει γίνει σφάλμα τύπου ΙΙ.**

23

23

Σφάλμα Τύπου ΙΙ (β)



24

Ερμηνεία Σφαλμάτων Τύπου Ι & ΙΙ

- Η <u>απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης δε σημαίνει αναγκαστικά και απόδειξη της ερευνητικής υπόθεσης</u>.
- Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η ερευνητική υπόθεση υπεισέρχεται μερικές φορές και στις αιτίες που ίσως προκαλούν διαφορές ή ισότητες πληθυσμιακών παραμέτρων.
- Η **μηδενική υπόθεση είναι απλά μια τυποποιημένη** στατιστική διατύπωση ελέγχου της σημαντικότητας και δεν έχει καμία σχέση με τους λόγους πίσω από τις διαφοροποιήσεις των στατιστικών μεγεθών.

25

25

Ερμηνεία Σφαλμάτων Τύπου Ι & ΙΙ … συνέχεια

- Γενικά, όσο **πιο έγκυρος και λεπτομερής είναι ο σχεδιασμός** μιας πειραματικής έρευνας τόσο πιο ισχυρές είναι οι προεκτάσεις των στατιστικών ευρημάτων, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι η απόρριψη ή μη της μηδενικής υπόθεσης, που προκαλεί αυτές τις προεκτάσεις.

26

26

Έλεγχοι Απλής & Διπλής Κατεύθυνσης

- Σε αναρίθμητες περιπτώσεις της ερευνητικής πρακτικής συναντάμε συγκρίσεις δύο μέσων (π.χ. μ_1 & μ_2) χωρίς να έχουμε κάποιο θεωρητικό ή λογικό προϊδεασμό για το ποιος από τους δύο μέσους είναι μεγαλύτερος.
- Στις περιπτώσεις αυτές διατυπώνουμε μια μηδενική υπόθεση, που σε συνδυασμό με την εναλλακτική υπόθεση, αφήνουν ανοιχτό το ενδεχόμενο να είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από τον άλλον όποιος από τους δύο μέσους (εικ. 10.3b) :

$$\mathrm{H}_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$\mathrm{H}_A: \mu_1 \neq \mu_2$$

- Έτσι ο **έλεγχος σημαντικότητας** γίνεται **διπλής κατεύθυνσης (δίπλευρος)** και οι πιθανές εκβάσεις είναι τρεις:

  $\mu_1 = \mu_2$ ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0

  $\mu_1 > \mu_2$ ισχύει η εναλλακτική υπόθεση H_A (ένα άκρο καμπύλης)

  $\mu_1 < \mu_2$ ισχύει η εναλλακτική υπόθεση H_A (άλλο άκρο καμπύλης).

27

27

Έλεγχοι Απλής & Διπλής Κατεύθυνσης

- Από τη άλλη μεριά, ο έλεγχος απλής κατεύθυνσης προϋποθέτει η διαφορά των μέσων να συμβεί σε ένα από τα δύο άκρα (ουρές) της κανονικής καμπύλης (εικ. 10.3a).
  - Η απόφαση του ερευνητή να θέσει μονόπλευρο έλεγχο σημαντικότητας σε μια μηδενική υπόθεση διαφορών βασίζεται κατά κύριο λόγο στο θεωρητικό υπόβαθρο της ερευνητικής υπόθεσης και στη λογική σύμφωνα με την οποία η διαφορά είναι υπέρ ενός εκ των μέσων.
- Στις περιπτώσεις αυτές διατυπώνεται μια μηδενική υπόθεση (H_0), που σε συνδυασμό με την εναλλακτική υπόθεση (H_A), δεν αφήνουν ανοιχτό το ενδεχόμενο να είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από τον άλλον όποιος από τους δύο μέσους, αλλά προσδιορίζουν μονόπλευρα την ενδεχόμενη ανισότητα: ένας από τους δύο μέσους θεωρείται εξαρχής μεγαλύτερος.

28

28

Έλεγχοι Απλής & Διπλής Κατεύθυνσης

Οι δύο πιθανές στατιστικές υποθέσεις στην περίπτωση αυτή θα είναι :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_A : \mu_1 > \mu_2$ υπέρ του μέσου μ_1

ή

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_A : \mu_1 < \mu_2$ υπέρ του μέσου μ_2.

Έτσι, ο **έλεγχος σημαντικότητας** γίνεται **απλής κατεύθυνσης (μονόπλευρος)** και τα πιθανά ενδεχόμενα είναι δύο :

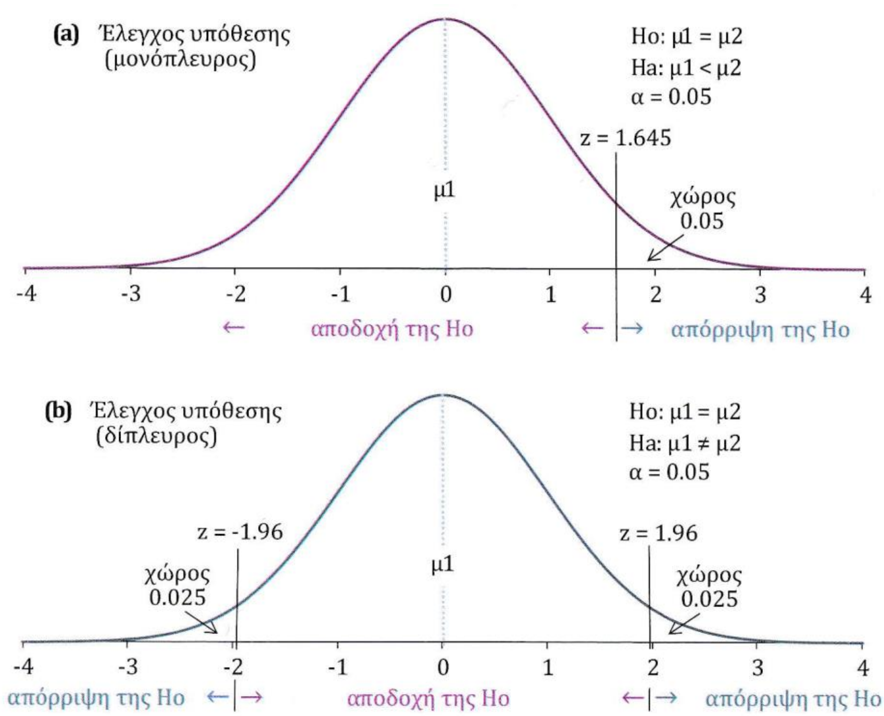
$\mu_1 = \mu_2$ ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0 ή
$\mu_1 > \mu_2$ ισχύει η εναλλακτική υπόθεση H_A (ένα άκρο καμπύλης)

υπέρ του μέσου μ_1 ή

$\mu_1 = \mu_2$ ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0 ή
$\mu_1 < \mu_2$ ισχύει η εναλλακτική υπόθεση H_A (άλλο άκρο καμπύλης)

υπέρ του μέσου μ_2 (εικ. 10.3a).

Σχήμα 10.3. Μονόπλευρος & δίπλευρος έλεγχος σημαντικότητας



Ένα παράδειγμα

Ένας αθλητικός ερευνητής θέλει να εξετάσει την (αρνητική) επίδραση της κόπωσης στη διατήρηση της ολικής σωματικής ισορροπίας

- Προκειμένου λοιπόν να διερευνήσει το πρόβλημα αυτό επιλέγει με τυχαία δειγματοληψία μία ομάδα αθλητών της γυμναστικής και τους υποβάλλει σε μέτρηση του μέγιστου χρόνου ισορροπίας στο *τεστ γραμμής* (πάνω σε δοκό πλάτους 1 cm) κάτω από δύο ελεγχόμενες πειραματικές συνθήκες:
  - **(1) χωρίς μυϊκή κόπωση και**
  - **(2) με μυϊκή κόπωση.**

31

31

- Με τον σχεδιασμό της έρευνας, ο ερευνητής θέτει την ερευνητική υπόθεση ότι ***η μυϊκή κόπωση μειώνει την ικανότητα των αθλητών να διατηρούν την ολική ισορροπία του σώματος***. Η ερευνητική αυτή υπόθεση μετασχηματίζεται και διατυπώνεται στις εξής στατιστικές υποθέσεις:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_A: \mu_1 > \mu_2$$

όπου μ_1 και μ_2 οι μέσες πληθυσμιακές τιμές των αντίστοιχων συνολικών χρόνων ισορροπίας.

- Με απλά λόγια ο ερευνητής υποθέτει ότι
  - H_0: δε θα υπάρξει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο μέσων (ολικών) χρόνων διατήρησης ισορροπίας ή ότι
  - H_A: ο μέσος (ολικός) χρόνος ισορροπίας θα είναι μεγαλύτερος για την πειραματική συνθήκη *χωρίς μυϊκή κόπωση*.

32

32

Παραδείγματος …. συνέχεια

- Αυτό σημαίνει ότι **<u>ο ερευνητής προαποφασίζει έλεγχο απλής κατεύθυνσης</u>** στη στατιστική σημαντικότητα της διαφοράς μεταξύ των δύο πειραματικών συνθηκών.
- Κριτήριο για την απόφαση του αυτή μπορεί να αποτέλεσε επαρκώς η λογική ότι γενικά όταν ο αθλητής είναι ξεκούραστος, μπορεί να εκτελεί ευκολότερα κινητικές δεξιότητες.
- Βέβαια, σε ερευνητικά προβλήματα τέτοιου είδους συνήθως υπάρχει και **θεωρητική βάση**, που διευκολύνει τη λήψη της σωστής απόφασης ως προς την κατεύθυνση του ελέγχου της στατιστικής σημαντικότητας.
- Αν λοιπόν ο ερευνητής είχε αποφασίσει ως επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας το κλασικό $\alpha = 0.05$, αυτό, σε συνδυασμό με τον μονόπλευρο έλεγχο σημαντικότητας, θα σήμαινε ότι η πιθανότητα διάπραξης του σφάλματος τύπου Ι είναι 5%.

33

33

Για να γίνουν κατανοητές οι διαφορές μεταξύ των δύο τρόπων ελέγχου της στατιστικής σημαντικότητας, ας δούμε το εξής υποθετικό παράδειγμα

- Ας υποθέσουμε ότι γίνεται μια έρευνα σε εθνικό επίπεδο για να διαπιστωθεί αν το μέσο ύψος των αγοριών ηλικίας 15 χρόνων, που σε μελέτη μιας δεκαετίας πριν ήταν $\mu = 170$ cm, έχει βελτιωθεί ή έχει επιδεινωθεί.
- Οι ερευνητές θέτουν ως επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας το $\alpha = 0.05$ και αντιμετωπίζουν το δίλημμα αν θα εφαρμόσουν μονόπλευρο ή δίπλευρο έλεγχο σημαντικότητας.
- Για να εφαρμοστεί ο μονόπλευρος έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας (απλής κατεύθυνσης), θα πρέπει να αποφασιστεί από τους ερευνητές προς ποια κατεύθυνση θα ισχύσει ο έλεγχος:

$$\mu > 170 \text{ ή } \mu < 170;$$

34

34

Παραδείγματος .... συνέχεια

- Έστω ότι μετά από συνεκτίμηση συναφών στοιχείων αποφασίζεται ότι λογικά το μέσο ύψος των αγοριών ηλικίας 15 ετών θα πρέπει να έχει αυξηθεί συγκριτικά με το μέσο ύψος τους πριν 10 χρόνια.
- Διατυπώνονται έτσι οι στατιστικές υποθέσεις

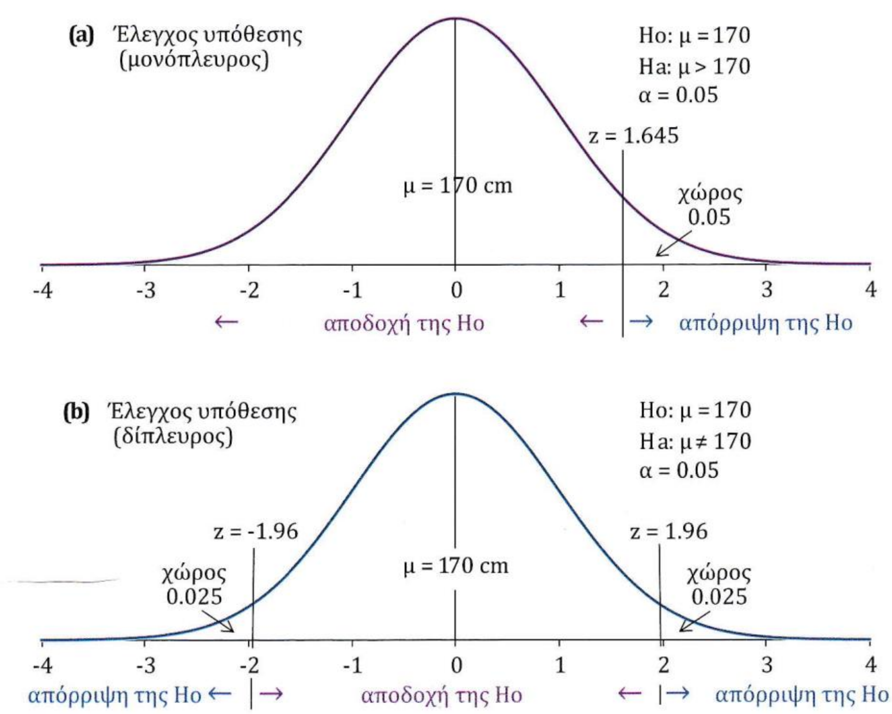
$$\mathbf{H_0: \mu = 170\ cm}$$
$$\mathbf{H_A: \mu > 170\ cm}$$

- και με βάση το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ καθορίζεται το διάστημα (χώρος) πιθανότητας.
- Για να εφαρμοστεί ο δίπλευρος έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας (διπλής κατεύθυνσης), δε χρειάζεται να αποφασιστεί από τους ερευνητές προς ποια κατεύθυνση θα ισχύσει ο έλεγχος ($\mu > 170$ ή $\mu < 170$).

35

35

Σχήμα 10.4. Μονόπλευρος & δίπλευρος έλεγχος σημαντικότητας

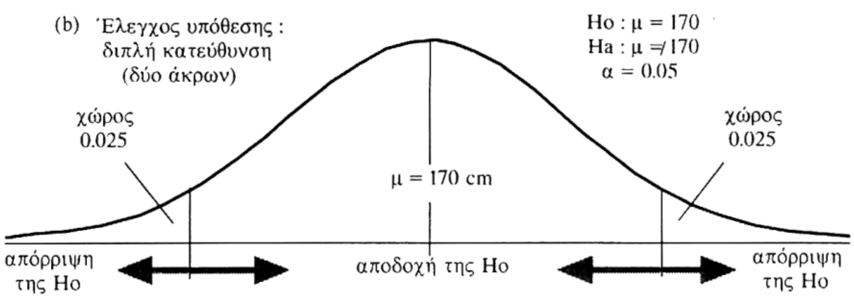


36

- Έστω, λοιπόν, ότι μετά από συνεκτίμηση συναφών στοιχείων αποφασίζεται ότι λογικά το μέσο ύψος των αγοριών ηλικίας 15 ετών δε θα πρέπει να έχει μεταβληθεί σημαντικά σε σύγκριση με το μέσο ύψος πριν 10 χρόνια.
- Διατυπώνονται έτσι οι στατιστικές υποθέσεις

$$\mathbf{H_0: \mu = 170\ cm}$$
$$\mathbf{H_A: \mu \neq 170\ cm}$$

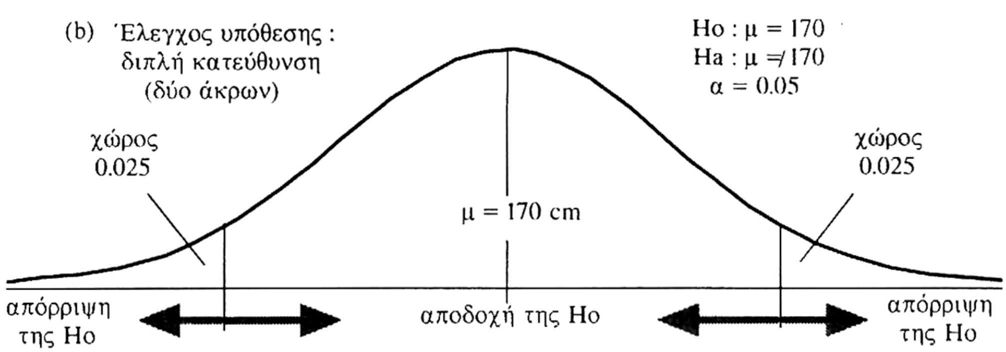
- και με βάση το επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ καθορίζονται δύο συμμετρικά διαστήματα (χώροι) πιθανότητας 0.025 το κάθε ένα.



37

37

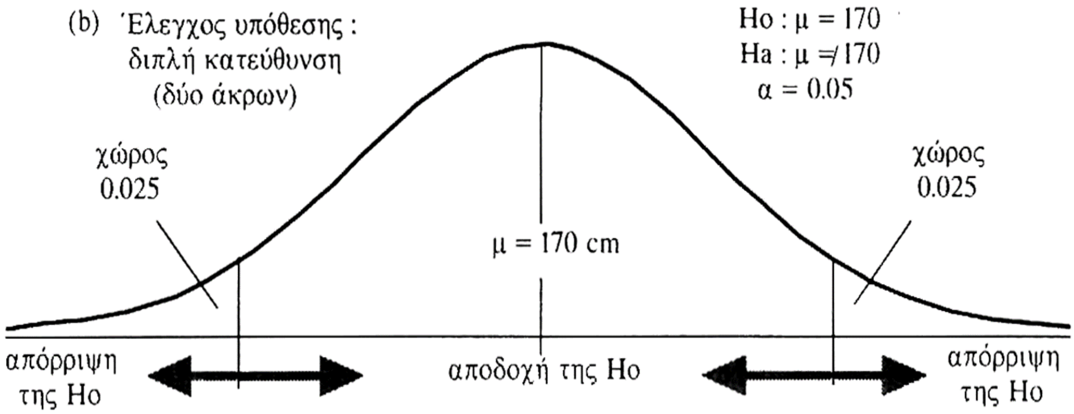
- Ανεξάρτητα τώρα από το ποια από τις δύο υποθετικές περιπτώσεις ελέγχου της στατιστικής σημαντικότητας θα ήταν προτιμότερη ερευνητικά, η εύρεση στατιστικά σημαντικής διαφοράς "διευκολύνεται" με τον έλεγχο απλής κατεύθυνσης.
- Με απλά λόγια μια διαφορά μεταξύ των δύο μέσων για να αποδειχθεί στατιστικά σημαντική δε χρειάζεται να είναι ***τόσο μεγάλη*** στον έλεγχο απλής κατεύθυνσης όσο στον έλεγχο διπλής κατεύθυνσης.



38

38

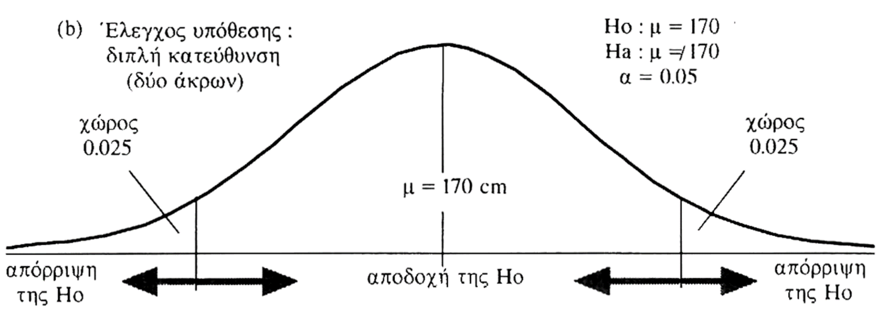
- Αυτό συμβαίνει επειδή η συνολική πιθανότητα (χώρος κάτω από την κανονική καμπύλη των δειγματικών διαφορών) που ορίζεται με το επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ είναι διπλάσια στον έλεγχο απλής κατεύθυνσης από αυτή που ορίζεται με τον συμμετρικό χώρο $\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025$ στον έλεγχο διπλής κατεύθυνσης.



39

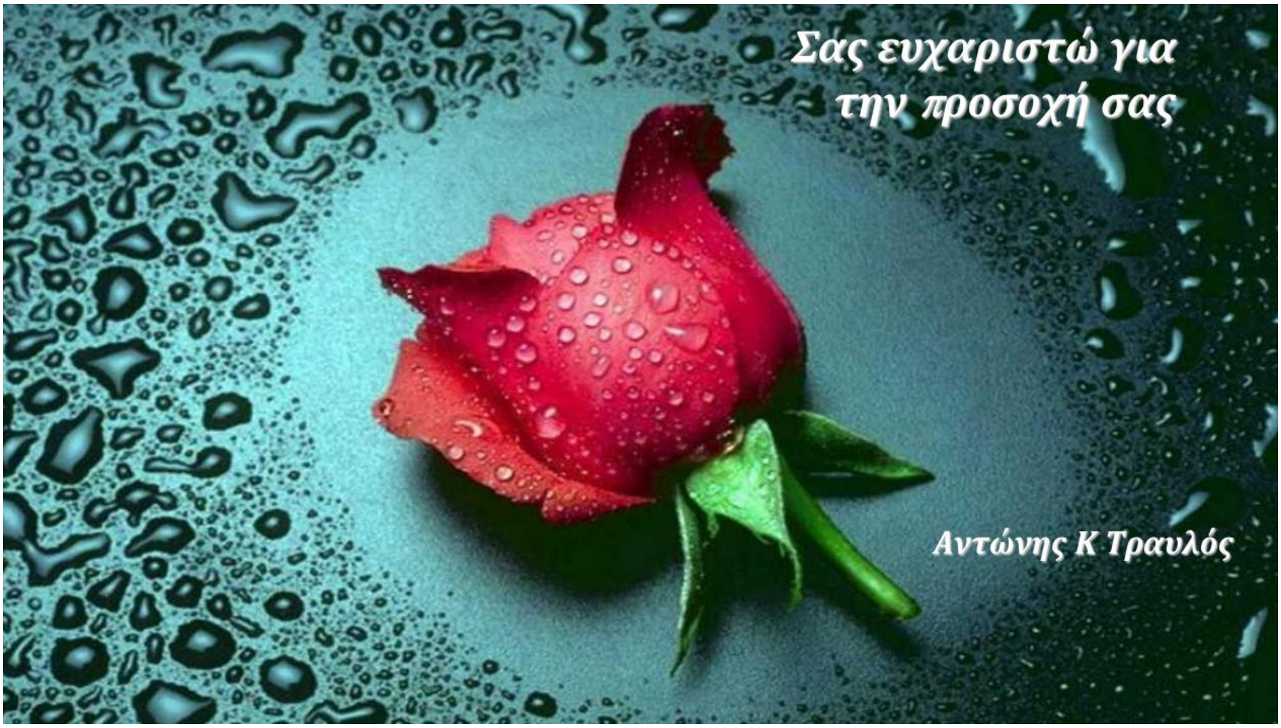
39

- Έτσι, η πιθανότητα, που ορίζεται από την τιμή του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας (α), ενώ στον μονόπλευρο έλεγχο συγκεντρώνεται στη μια πλευρά (ουρά) της κανονικής καμπύλης, στο δίπλευρο έλεγχο μοιράζεται συμμετρικά και στις δύο πλευρές (από μισή σε κάθε πλευρά), δηλαδή $\alpha/2$ στην αριστερή πλευρά και $\alpha/2$ στη δεξιά πλευρά.
- Για παράδειγμα, αν $\alpha = 0.01$, σε μονόπλευρο έλεγχο η συνολική πιθανότητα είναι 1% ενώ σε δίπλευρο έλεγχο είναι $\alpha/2 = 0.01/2 = 0.005$ στην αριστερή πλευρά και 0.005 στη δεξιά πλευρά.



40

40



41