

Νικόλαος Α. Τσίτσας

# Εφαρμοσμένα Μαθηματικά



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα  
[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

**HEALLINK**  
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Λ. ΤΣΙΤΣΑΣ  
Επίκουρος Καθηγητής  
Τμήματος Πληροφορικής Α.Π.Θ.

# *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*

Διαφορικές Εξισώσεις, Μιγαδικές Συναρτήσεις  
και Ανάλυση Fourier



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά  
Συγγράμματα και Βοηθήματα  
[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

# Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

## Συγγραφή

Νικόλαος Λ. Τσίτσας

## Κριτικός αναγνώστης

Δημήτριος Φραντζεσκάκης

ISBN: 978-960-603-257-8

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά / Νικόλαος Λ. Τσίτσας

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 3.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/gr/>

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)



*Στον πατέρα μου*

# Πρόλογος

Το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού αποτελεί μία ενοποιημένη παρουσίαση των εννοιών, των μεθόδων και των αποτελεσμάτων των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, των Μιγαδικών Συναρτήσεων, των Σειρών και των Μετασχηματισμών Fourier, όπου διαμορφώνονται τα γενικά πλαίσια εντός των οποίων διατυπώνονται, ερμηνεύονται και αναλύονται διάφορες σχετικές σημαντικές εφαρμογές στις Φυσικές και Τεχνολογικές επιστήμες και στην επιστήμη της Πληροφορικής.

Το κείμενο αυτό προέρχεται από πανεπιστημιακές παραδόσεις του συγγραφέα στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π. και στο Τμήμα Πληροφορικής του Α.Π.Θ. και απευθύνεται κυρίως σε φοιτητές οι οποίοι σπουδάζουν Θετικές και Τεχνολογικές επιστήμες και επιστήμες Πληροφορικής. Για την πληρέστερη κατανόηση του κειμένου και την καλύτερη τεχνική εξοικείωση χρησιμοποιείται συστηματικά η γεωμετρική ε-ποπτεία και περιέχονται πολλά χρήσιμα επεξεργασμένα παραδείγματα. Εξάλλου, αναφέρονται αρκετές αντιπροσωπευτικές εφαρμογές. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου παραθέτουμε ασκήσεις, οι οποίες είναι εν γένει απλές συνέπειες των αποτελεσμάτων και της μεθοδολογίας του κειμένου του κεφαλαίου καθώς επίσης και γενικές ασκήσεις μεταξύ των οποίων συγκαταλέγονται και διάφορες εφαρμογές.

Το κείμενο του βιβλίου υποδιαιρείται σε τρία μέρη: το πρώτο περιέχει τις Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις και τις εφαρμογές τους, το δεύτερο τη Μιγαδική Ανάλυση και το τρίτο την Ανάλυση Fourier.

Οι Διαφορικές Εξισώσεις αποτελούν ένα εκτεταμένο πεδίο στα θεωρητικά και στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά καθώς και στις εφαρμογές τους. Στο θεωρητικό πλαίσιο εντάσσεται η μελέτη ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων ενώ στο εφαρμοσμένο οι μεθοδολογίες επίλυσης. Οι Διαφορικές Εξισώσεις παίζουν επίσης σπουδαίο ρόλο στη μαθηματική μοντελοποίηση φυσικών, τεχνολογικών και βιολογικών διαδικασιών.

Η Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων είναι μία από τις πιο ελκυστικές περιοχές των Μαθηματικών, στα πλαίσια της οποίας αναπτύσσονται πολλές από τις πιο ισχυρές τεχνικές, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διατύπωση και τη μελέτη εφαρμογών. Μεταξύ των σκοπών του βιβλίου είναι η παρουσίαση μίας ευρείας κλάσης εφαρμογών και η διεξοδική επεξεργασία τεχνικών των Μιγαδικών Συναρτήσεων, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίησή τους.

Αντικείμενο της Ανάλυσης Fourier αποτελεί η μελέτη των αναπαράστασεων συναρτήσεων με τη βοήθεια τριγωνομετρικών σειρών και ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Βασικές έννοιες είναι η σειρά Fourier και ο μετασχηματισμός Fourier. Η σειρά Fourier χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση περιοδικών συναρτήσεων, ενώ ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται για την απεικόνιση συναρτήσεων από το πεδίο του χρόνου ή του χώρου στο πεδίο των συχνοτήτων. Οι τεχνικές και τα αποτελέσματα της Ανάλυσης Fourier ευρίσκουν σημαντικές εφαρμογές στις εφαρμοσμένες θετικές και τεχνολογικές επιστήμες.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου καταχωρείται κατάλογος συγγραμμάτων, τα οποία συμβουλεύτηκε ο συγγραφέας.

Ο συγγραφέας με ιδιαίτερη χαρά εκφράζει τις θερμές του ευχαριστίες προς τον αγαπητό φίλο Δημήτρη Φραντζεσκάκη, Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής του Ε.Κ.Π.Α., για τη μελέτη των χειρογράφων, τις εποικοδομητικές συζητήσεις και τις πολύτιμες παρατηρήσεις του, οι οποίες είχαν ουσιαστική συμβολή στη διαμόρφωση του περιεχομένου υπό την παρούσα μορφή.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 2015

Νικόλαος Λ. Τσίτσας

# Περιεχόμενα

<b>I</b>	<b>Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις</b>	<b>14</b>
<b>1</b>	<b>Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις: Εισαγωγικές Έννοιες, Ορισμοί και Μοντελοποιήσεις Προβλημάτων</b>	<b>15</b>
1.1	Βασικές εισαγωγικές έννοιες . . . . .	15
1.2	Μοντελοποιήσεις προβλημάτων . . . . .	18
1.3	Ασκήσεις . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης</b>	<b>29</b>
2.1	Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών . . . . .	29
2.2	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις . . . . .	34
2.3	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις . . . . .	37
2.4	Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις . . . . .	41
2.5	Διαφορική εξίσωση Bernoulli . . . . .	56
2.6	Διαφορική εξίσωση Ricatti . . . . .	59
2.7	Ασκήσεις . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών πρώτης τάξης</b>	<b>65</b>
3.1	Εισαγωγικές έννοιες . . . . .	66
3.2	Επαναλήψεις Picard . . . . .	68
3.3	Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης . . . . .	71



3.4	Ασκήσεις . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης</b>	<b>82</b>
4.1	Γενική θεωρία . . . . .	82
4.2	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές . . . . .	92
4.3	Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές . . . . .	98
4.4	Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των δυναμοσειρών	110
4.5	Διαφορική εξίσωση Euler . . . . .	114
4.6	Υποβιβασμός τάξης . . . . .	118
4.7	Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων . . . . .	120
4.8	Ασκήσεις . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης</b>	<b>131</b>
5.1	Γενική θεωρία . . . . .	131
5.2	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές	135
5.3	Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές	139
5.4	Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων . . . . .	144
5.5	Ασκήσεις . . . . .	147
<b>6</b>	<b>Συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης</b>	<b>150</b>
6.1	Εισαγωγικές έννοιες και μοντελοποιήσεις προβλημάτων . . . . .	150
6.2	Γενική θεωρία γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων . . . . .	158
6.3	Γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές . . .	165
6.4	Μη ομογενή γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές . . . . .	181
6.5	Ασκήσεις . . . . .	184
<b>7</b>	<b>Μετασχηματισμός Laplace με εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις</b>	<b>187</b>
7.1	Γενικευμένα ολοκληρώματα . . . . .	187

7.2	Ορισμός του μετασχηματισμού Laplace . . . . .	193
7.3	Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace . . . . .	198
7.4	Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace . . . . .	212
7.5	Λύση προβλημάτων αρχικών τιμών με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace . . . . .	217
7.6	Συνέλιξη και εφαρμογές . . . . .	227
7.7	Πίνακες μετασχηματισμών Laplace . . . . .	233
7.8	Ασκήσεις . . . . .	235
<b>II</b>	<b>Μιγαδικές συναρτήσεις</b>	<b>238</b>
<b>8</b>	<b>Μιγαδικοί αριθμοί</b>	<b>239</b>
8.1	Ορισμός και αλγεβρικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών . . . . .	239
8.2	Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών . . . . .	248
8.3	Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο . . . . .	251
8.4	Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού . . . . .	255
8.5	$n$ -οστές ρίζες μιγαδικού αριθμού . . . . .	262
8.6	Ασκήσεις . . . . .	268
<b>9</b>	<b>Ακολουθίες και σειρές μιγαδικών αριθμών</b>	<b>271</b>
9.1	Ακολουθίες μιγαδικών αριθμών . . . . .	271
9.2	Σειρές μιγαδικών αριθμών . . . . .	276
9.3	Ασκήσεις . . . . .	280
<b>10</b>	<b>Μιγαδικές συναρτήσεις</b>	<b>282</b>
10.1	Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής . . . . .	282
10.2	Στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις . . . . .	284
10.3	Ειδικά υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου . . . . .	297
10.4	Όρια μιγαδικών συναρτήσεων . . . . .	299

10.5	Συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις . . . . .	302
10.6	Ασκήσεις . . . . .	304
<b>11</b>	<b>Παραγωγίσιμες μιγαδικές συναρτήσεις</b>	<b>307</b>
11.1	Μιγαδική παράγωγος . . . . .	307
11.2	Συνθήκες Cauchy-Riemann . . . . .	312
11.3	Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων . . . . .	320
11.4	Ολόμορφες συναρτήσεις . . . . .	324
11.5	Ασκήσεις . . . . .	327
<b>12</b>	<b>Ολοκληρώσιμες μιγαδικές συναρτήσεις</b>	<b>329</b>
12.1	Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής . . . . .	329
12.2	Καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου . . . . .	331
12.3	Μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα . . . . .	336
12.4	Θεώρημα Cauchy . . . . .	343
12.5	Ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy . . . . .	349
12.6	Συνέπειες των ολοκληρωτικών τύπων Cauchy . . . . .	355
12.7	Ασκήσεις . . . . .	359
<b>13</b>	<b>Μιγαδικές δυναμοσειρές και εφαρμογές</b>	<b>362</b>
13.1	Ακολουθίες μιγαδικών συναρτήσεων . . . . .	362
13.2	Σειρές μιγαδικών συναρτήσεων . . . . .	372
13.3	Ορισμός και ιδιότητες μιγαδικής δυναμοσειράς . . . . .	378
13.4	Μιγαδικές σειρές Taylor . . . . .	387
13.5	Σειρές Laurent . . . . .	394
13.6	Αναλυτική συνέχιση . . . . .	407
13.7	Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία . . . . .	410
13.8	Ολοκληρωτικά υπόλοιπα . . . . .	416

13.9 Υπολογισμός πραγματικών ολοκληρωμάτων . . . . .	421
13.10 Ασκήσεις . . . . .	432
<b>III Ανάλυση Fourier</b>	<b>437</b>
<b>14 Σειρές Fourier</b>	<b>438</b>
14.1 Περιοδικές συναρτήσεις . . . . .	438
14.2 Τριγωνομετρικές σειρές . . . . .	441
14.3 Ορισμός σειράς Fourier . . . . .	445
14.4 Σύγκλιση σειράς Fourier . . . . .	455
14.5 Ολοκλήρωση και παραγωγή σειράς Fourier . . . . .	463
14.6 Ασκήσεις . . . . .	467
<b>15 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier</b>	<b>469</b>
15.1 Ορισμός DFT . . . . .	469
15.2 Ο DFT ως γινόμενο πινάκων . . . . .	472
15.3 Ιδιότητες DFT . . . . .	475
15.4 Εφαρμογές DFT . . . . .	478
15.5 Ασκήσεις . . . . .	482
<b>16 Μετασχηματισμός Fourier</b>	<b>485</b>
16.1 Ορισμός μετασχηματισμού Fourier . . . . .	485
16.2 Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier . . . . .	491
16.3 Εφαρμογές μετασχηματισμού Fourier . . . . .	497
16.4 Ασκήσεις . . . . .	502

## Πίνακας συντομεύσεων–ακρωνύμια

Σ.Δ.Ε.	Συνήθης Διαφορική Εξίσωση
Μ.Δ.Ε.	Μερική Διαφορική Εξίσωση
Δ.Ε.	Διαφορική Εξίσωση
Π.Α.Τ.	Πρόβλημα Αρχικών Τιμών
DFT	Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

## Μέρος Ι

# Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

# Κεφάλαιο 1

## Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις: Εισαγωγικές Έννοιες, Ορισμοί και Μοντελοποιήσεις Προβλημάτων

Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση και τη μελέτη εξελικτικών φαινομένων όπου συσχετίζουν τους ρυθμούς μεταβολής διαφόρων μεγεθών.

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί. Ειδικότερα ορίζονται οι έννοιες συνήθεις διαφορική εξίσωση, τάξη, γενική λύση, μερική λύση και γενικό ολοκλήρωμα. Επίσης, καταγράφονται μοντελοποιήσεις προβλημάτων του πραγματικού κόσμου ως προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Μεταξύ των μοντελοποιήσεων συγκαταλέγονται αντιπροσωπευτικές μοντελοποιήσεις προβλημάτων στη Μηχανική, στα ηλεκτρικά κυκλώματα, στη δυναμική πληθυσμών, στην Οικονομία, στη Βιολογία και στην Πληροφορική.

### 1.1 Βασικές εισαγωγικές έννοιες

Μια εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και παραγώγους της μέχρι μία ορισμένη τάξη ονομάζεται *διαφορική εξίσωση*. Ειδικότερα, όταν η άγνωστη συνάρτηση είναι μιας μεταβλητής τότε η εξίσωση ονομάζεται *συνήθεις διαφορική εξίσωση* (Σ.Δ.Ε.) ενώ όταν η άγνωστη συνάρτηση είναι πολλών μεταβλητών τότε η εξίσωση ονομάζεται *μερική διαφορική εξίσωση* (Μ.Δ.Ε.).

Όπως φαίνεται και από τον τίτλο, το αντικείμενο του κεφαλαίου αναφέρεται σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και ως εκ τούτου αντί Σ.Δ.Ε. θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφική

αναφορά Δ.Ε.

Ως τάξη μιας Δ.Ε. εννοούμε την τάξη της ανώτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης που εμφανίζεται στη Δ.Ε.

Η γενική μορφή Δ.Ε. τάξης  $n$  είναι

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1.1)$$

όπου  $y = y(x)$ ,  $x \in I \subseteq \mathbb{R}$  και  $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση  $n + 2$  μεταβλητών.

Όταν η (1.1.1) επιλύεται ως προς τη μεταβλητή  $y^{(n)}$ , δηλαδή έχουμε

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.1.2)$$

τότε η (1.1.2) αναφέρεται ως κανονική μορφή της (1.1.1).

Όταν η συνάρτηση  $F$  είναι γραμμική ως προς  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , τότε η Δ.Ε. (1.1.1) ονομάζεται γραμμική. Έτσι, η γενική μορφή γραμμικής Δ.Ε. τάξης  $n$  είναι η εξής

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = f(x), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}. \quad (1.1.3)$$

Οι συναρτήσεις  $a_i(x)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) αναφέρονται ως οι συντελεστές της γραμμικής Δ.Ε.

Πιο συγκεκριμένα, όταν η συνάρτηση  $f$  είναι μη μηδενική τότε η (1.1.3) αναφέρεται ως μη ομογενής Δ.Ε., ενώ όταν η  $f$  είναι η μηδενική συνάρτηση (δηλαδή  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in I$ ), τότε η (1.1.3) αναφέρεται ως ομογενής Δ.Ε.

Στην ειδική περίπτωση όπου οι συντελεστές  $a_i$  της (1.1.3) είναι σταθερές συναρτήσεις (δηλαδή  $a_i(x) \equiv a_i \in \mathbb{R}$ ,  $x \in I$ ,  $i = 0, \dots, n$ ), τότε η (1.1.3) ονομάζεται γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

Επί παραδείγματι, η εξίσωση  $y' = x$  είναι πρώτης τάξης, μη ομογενής, γραμμική με σταθερούς συντελεστές Δ.Ε., ενώ η εξίσωση  $(y'')^4 + 3y(y')^5 + y^3y' = 3x$  είναι δεύτερης τάξης μη γραμμική Δ.Ε.

Μία συνάρτηση  $y = y(x) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με πεδίο ορισμού ένα διάστημα  $I$ , η οποία είναι  $n$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο  $I$  (δηλαδή  $y \in C^n(I)$ ) και για την οποία ισχύουν

$$\begin{aligned} (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) &\in D, \forall x \in I \\ F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) &= 0, \forall x \in I \end{aligned}$$

(δηλαδή επαληθεύει την (1.1.1) για κάθε  $x \in I$ ) ονομάζεται κλασική λύση της Δ.Ε. (1.1.1).

Εξάλλου, η οικογένεια των συναρτήσεων

$$y = y(x) = \varphi(x, c_1, \dots, c_n) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1.4)$$

όπου  $c_1, \dots, c_n$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, και κάθε συνάρτηση της οικογένειας επαληθεύει την (1.1.1), για κάθε  $x \in I$ , ονομάζεται γενική λύση της Δ.Ε. (1.1.1).



Επί παραδείγματι, η Δ.Ε.

$$y'' - y' - 2y = 0$$

έχει ως γενική λύση

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

διότι η  $y(x)$  είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των  $y(x)$ ,  $y'(x)$  και  $y''(x)$  στη Δ.Ε. διαπιστώνουμε ότι αυτή πληρείται για κάθε  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Κάθε συνάρτηση της οικογένειας της γενικής λύσης, δηλαδή κάθε συνάρτηση που προκύπτει από τη γενική λύση για συγκεκριμένη επιλογή των σταθερών  $c_1, \dots, c_n$ , αναφέρεται ως *μερική ή ειδική λύση* της Δ.Ε. (1.1.1).

*Γενικό ολοκλήρωμα* της Δ.Ε. (1.1.1) λέγεται μια εξίσωση της μορφής

$$G(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0, \quad (1.1.5)$$

η οποία περιέχει (υπό πεπλεγμένη μορφή) τη λύση  $y$  της (1.1.1) και  $c_1, \dots, c_n$  είναι αυθαίρετες σταθερές. Στην ειδική περίπτωση που η εξίσωση (1.1.5) επιλύεται ως προς τη λύση  $y$  τότε το γενικό ολοκλήρωμα ανάγεται στη γενική λύση (1.1.4).

Η Δ.Ε.

$$(1 + xe^{xy})y' + 1 + ye^{xy} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

έχει γενικό ολοκλήρωμα

$$G(x, y, c_1) \equiv x + y + e^{xy} + c_1 = 0,$$

όπως διαπιστώνεται με παραγωγή της  $G$  ως προς  $x$  και αντικατάσταση στη Δ.Ε.

Οι συναρτήσεις της γενικής λύσης (1.1.4) και του γενικού ολοκληρώματος (1.1.5) περιέχουν  $n$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Έτσι, για τον προσδιορισμό των σταθερών απαιτούνται επιπλέον συνθήκες, οι οποίες αναφέρονται ως αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Αυτό μας οδηγεί στη θεώρηση των προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών.

Πιο συγκεκριμένα, στο πεδίο των Δ.Ε., ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) συνίσταται από μία Δ.Ε. συνδυασμένη με δεσμεύσεις της λύσεως, οι οποίες εκφράζονται από δοσμένες τιμές της άγνωστης συνάρτησης ή/και παραγώγων της σε μία επιλεγμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Λύση του Π.Α.Τ. είναι μία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη Δ.Ε. και τις δοθείσες δεσμεύσεις. Οι δεσμεύσεις αναφέρονται ως αρχικές τιμές ή αρχικές συνθήκες. Στις Επιστήμες και την Τεχνολογία, η μοντελοποίηση ενός συστήματος συχνά οδηγεί στη διατύπωση και επίλυση ενός Π.Α.Τ. Σε αυτό το πλαίσιο, η Δ.Ε. είναι μία εξίσωση εξέλιξης ενός φαινομένου η οποία προσδιορίζει πως υπό δοθείσες αρχικές συνθήκες το σύστημα εξελίσσεται με το χρόνο.

Έτσι, η γενική Δ.Ε. (1.1.1) συνδυασμένη με τις  $n$  αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (1.1.6)$$

σε ένα σημείο  $x_0 \in I$ , όπου  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$  δοσμένοι αριθμοί, αποτελούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.).

Από τη γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα, με εφαρμογή των (1.1.6) προκύπτει η μερική λύση της (1.1.1), η οποία πληρεί και τις αρχικές συνθήκες.

Επί παραδείγματι, αναφερόμενοι στο Π.Α.Τ.

$$y' - 2y = -4x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 2,$$

ευρίσκουμε (χρησιμοποιώντας τεχνικές που θα διατυπώσουμε παρακάτω) ότι η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η συνάρτηση

$$y(x) = 1 + 2x + ce^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη  $y(0) = 2$  στην τελευταία, ευρίσκουμε  $c = 1$ . Έτσι, η συνάρτηση

$$y(x) = 1 + 2x + e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

είναι η λύση του δοσμένου Π.Α.Τ.

Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (Π.Σ.Τ.) συνίσταται από μία Δ.Ε. με δεσμεύσεις της λύσεως οι οποίες εκφράζονται από δοσμένες τιμές της άγνωστης συνάρτησης ή/και παραγώγων της σε δύο τουλάχιστον επιλεγμένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Εναλλακτικά, μπορούμε να μην απαιτήσουμε επιλεγμένες τιμές στα δύο σημεία αλλά ότι οι τιμές της λύσεως στα σημεία αυτά συσχετίζονται κατά κάποιο τρόπο. Οι δεσμεύσεις αναφέρονται ως συνοριακές τιμές ή συνοριακές συνθήκες.

Ο όρος *επίλυση* Δ.Ε. είναι συνώνυμος με τις μεθοδολογίες ευρέσεως της λύσης της Δ.Ε. Εξάλλου, *επιλυσιμότητα* σημαίνει την έρευνα ύπαρξης μοναδικής λύσης. Αποτελέσματα επιλυσιμότητας θα καταγράφονται στις διάφορες μορφές Δ.Ε.

## 1.2 Μοντελοποιήσεις προβλημάτων

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται διάφορες αντιπροσωπευτικές μοντελοποιήσεις προβλημάτων του πραγματικού κόσμου ως προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

### Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

Ένα σώμα μάζας  $m$  κινείται υπό την επίδραση διανυσματικής δύναμης  $\mathbf{F}$ , η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$ , του διανύσματος θέσης  $\mathbf{r}(t)$  και της ταχύτητας  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , δηλαδή  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt})$ . Η κίνηση του σώματος διέπεται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα: η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνσή του, δηλαδή

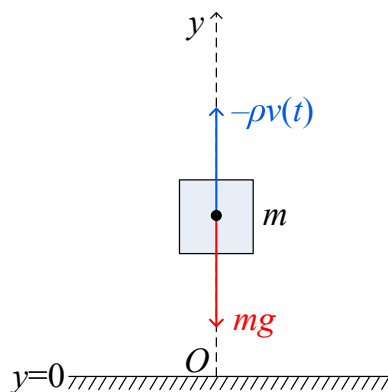
$$\mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (1.2.1)$$

όπου  $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  είναι η επιτάχυνση του σώματος. Η (1.2.1) αποτελεί ένα σύστημα τριών (εν γένει) μη γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης.

Ως ειδική περίπτωση περιγράφουμε τη μονοδιάστατη (κατακόρυφη) ελεύθερη πτώση σώματος μάζας  $m$  υπό την επίδραση της βαρύτητας και της αντίστασης του αέρα, όπου η κίνηση λαμβάνει χώρα κατά μήκος του (κατακόρυφου)  $Oy$  άξονα με τη θετική φορά προς τα άνω, δηλαδή η επιφάνεια της γης βρίσκεται στο  $y = 0$  (Σχήμα 1.1). Στην προκειμένη περίπτωση, στο σώμα ασκούνται η δύναμη της βαρύτητας  $-mg\hat{y}$ , όπου  $g$  είναι η (σταθερή) επιτάχυνση της βαρύτητας, και η αντίσταση του αέρα  $-\rho v(t)\hat{y}$ , όπου  $\rho$  θετική σταθερά και  $v(t)$  το προσημασμένο μέτρο της ταχύτητας, η οποία είναι αντίρροπη του διανύσματος της ταχύτητας. Εδώ, εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα (1.2.1) οδηγεί στο ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + \frac{\rho}{m}y'(t) &= -g \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= v_0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.2)$$

το οποίο μοντελοποιεί την κίνηση και περιγράφει τη μεταβολή της θέσης  $y(t)$  του σώματος για  $t \geq t_0$ . Στο Π.Α.Τ. αυτό η Δ.Ε. είναι γραμμική, μη ομογενής δεύτερης τάξης, ενώ οι αρχικές τιμές  $y_0$  και  $v_0$  είναι η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα του σώματος στο χρόνο  $t_0$ . Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $v(t) = y'(t)$ , το προηγούμενο Π.Α.Τ. εκφράζεται ως



Σχήμα 1.1: Οπτικοποίηση μονοδιάστατης (κατακόρυφης) ελεύθερης πτώσης σώματος.

$$\left. \begin{aligned} v'(t) + \frac{\rho}{m}v(t) &= -g \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.3)$$

στο οποίο η άγνωστη συνάρτηση είναι η ταχύτητα  $v(t)$  του σώματος και όπου η Δ.Ε. είναι πρώτης τάξης. Για να βρούμε τη θέση  $y(t)$ , επιλύουμε το τελευταίο Π.Α.Τ., ολοκληρώνουμε τη λύση  $v(t)$  αυτού και χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη  $y(t_0) = y_0$  για τον προσδιορισμό της σταθεράς ολοκλήρωσης.

*Ραδιενεργός διάσπαση*

Ένα από τα απλούστερα και αντιπροσωπευτικότερα παραδείγματα μοντελοποίησης με Δ.Ε. είναι η ραδιενεργός διάσπαση, η οποία βασίζεται στην αρχή: ο στιγμιαίος ρυθμός αποσύνθεσης ως προς το χρόνο μιας ραδιενεργού ουσίας είναι ανάλογος της ποσότητας της ουσίας κατά τη θεωρούμενη χρονική στιγμή. Αν  $N(t)$  είναι η ποσότητα της ραδιενεργού ουσίας στο χρόνο  $t$  και αν η συνάρτηση  $N(t)$  είναι παραγωγίσιμη, τότε η προηγούμενη αρχή εκφράζεται ως  $N'(t) = -kN(t)$ , όπου  $k$  είναι θετική σταθερά, η οποία αναφέρεται ως σταθερά αποσύνθεσης, και έτσι η ραδιενεργός διάσπαση μοντελοποιείται από το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\left. \begin{array}{l} N'(t) = -kN(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{array} \right\}, \quad (1.2.4)$$

όπου  $N_0$  είναι η ποσότητα της ουσίας στο χρόνο  $t_0$ .

Η Δ.Ε. του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι γραμμική, ομογενής, πρώτης τάξης και επιλύεται εύκολα με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών η οποία παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2. Η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$N(t) = N_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο προσδιορισμός της διάρκειας ημιζωής του υλικού, δηλαδή του χρόνου  $T$  που απαιτείται για να μειωθεί στο μισό η ποσότητα της ουσίας, ο οποίος προσδιορίζεται από την εξίσωση  $N(t+T) = \frac{1}{2}N(t)$  που έχει ως λύση

$$T = \frac{\ln 2}{k},$$

ανεξάρτητη του χρόνου  $t$  και της αρχικής ποσότητας  $N_0$  αλλά εξαρτώμενη από τον τύπο του υλικού.

*Ανατοκισμός*

Ένα χρηματικό κεφάλαιο κατατίθεται σε μία τράπεζα, η οποία προσφέρει ετήσιο επιτόκιο  $k$ . Η αξία  $I(t)$  της επένδυσης σε χρόνο  $t$  εξαρτάται από το επιτόκιο αλλά και από τη συχνότητα ανατοκισμού. Αν ο ανατοκισμός γίνεται συνεχώς τότε ο ρυθμός μεταβολής  $I'(t)$  της αξίας της επένδυσης ως προς το χρόνο ισούται με το επιτόκιο επί την τρέχουσα αξία της επένδυσης. Έτσι, η διαδικασία περιγράφεται από το Π.Α.Τ.

$$\left. \begin{array}{l} I'(t) = kI(t) \\ I(0) = I_0 \end{array} \right\}, \quad (1.2.5)$$

όπου  $I_0$  η αρχική αξία του κεφαλαίου στο χρόνο  $t = 0$ .

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στο πρόβλημα ραδιενεργούς διάσπασης, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$I(t) = I_0 e^{kt},$$

δηλαδή ένας λογαριασμός με συνεχή ανατοκισμό αυξάνεται εκθετικά.

Τα αποτελέσματα του συνεχούς ανατοκισμού είναι χρήσιμο να συγκριθούν με εκείνα του ανατοκισμού, ο οποίος γίνεται σε προκαθορισμένα πεπερασμένα χρονικά διαστήματα. Επί παραδείγματι, αν το ποσό ανατοκίζεται μία φορά το χρόνο τότε στο τέλος του πρώτου χρόνου θα είναι  $I(t) = I_0(1+k)$  ενώ μετά από  $t$  χρόνια  $I(t) = I_0(1+k)^t$ . Αν ο ανατοκισμός γίνεται δύο φορές το χρόνο τότε στο τέλος των πρώτων έξι μηνών το ποσό θα είναι  $I(t) = I_0(1 + \frac{k}{2})$ , στο τέλος του χρόνου  $I(t) = I_0(1 + \frac{k}{2})^2$  και μετά από  $t$  χρόνια  $I(t) = I_0(1 + \frac{k}{2})^{2t}$ . Έτσι, αν το αρχικό ποσό ανατοκίζεται  $m$  φορές το χρόνο τότε μετά από  $t$  χρόνια θα είναι

$$I(t) = I_0 \left(1 + \frac{k}{m}\right)^{mt}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ισχύει η ακόλουθη ασυμπτωτική κατάσταση

$$I_0 \left(1 + \frac{k}{m}\right)^{mt} \simeq I_0 e^{kt}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ως προς το συνεχή ανατοκισμό (όπως προκύπτει χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης ως όριο ακολουθίας).

Περαιτέρω, μπορούμε να εμπλουτίσουμε το μοντέλο, θεωρώντας, πέραν της συσσώρευσης τόκων με συνεχή ανατοκισμό, ότι πραγματοποιούνται και καταθέσεις ή αναλήψεις με σταθερό ρυθμό  $s$ . Στις περιπτώσεις αυτές, το Π.Α.Τ. (1.2.5) παίρνει τη μορφή

$$\left. \begin{aligned} I'(t) &= kI(t) + s \\ I(0) &= I_0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.6)$$

όπου η σταθερά  $s$  είναι θετική για καταθέσεις και αρνητική για αναλήψεις.

Το Π.Α.Τ. (1.2.6) έχει ως λύση τη συνάρτηση

$$I(t) = I_0 e^{kt} + \frac{s}{k}(e^{kt} - 1),$$

όπου ο πρώτος όρος οφείλεται στο συνεχή ανατοκισμό και ο δεύτερος στις αναλήψεις ή καταθέσεις. Γενικότεροι εμπλουτισμοί του μοντέλου επιτυγχάνονται στις περιπτώσεις όπου τα  $k$  και  $s$  είναι συναρτήσεις του  $t$ .

### Δυναμική πληθυσμών

Η δυναμική πληθυσμών είναι ένας κλάδος της Βιολογίας, ο οποίος μελετάει τις αλλαγές βραχείας και μακράς διάρκειας του μεγέθους ενός πληθυσμού συναρτήσει των βιολογικών και περιβαλλοντικών διαδικασιών που επηρεάζουν τις αλλαγές αυτές. Ως πληθυσμός ορίζεται ένα σύνολο ατόμων του ίδιου είδους που καταλαμβάνουν μία γεωγραφική περιοχή σε συγκεκριμένο χρόνο. Με την πάροδο του χρόνου, το μέγεθος ενός πληθυσμού μεταβάλλεται συναρτήσει των ρυθμών γεννήσεων, θανάτων, και μεταναστεύσεων καθώς επίσης και των περιβαλλοντικών συνθηκών και των αλληλεπιδράσεων με άλλα είδη.

Η έρευνα της δυναμικής πληθυσμών αποτέλεσε παραδοσιακά κυρίαρχο κλάδο της Μαθηματικής Βιολογίας, ενώ, πρόσφατα, εφαρμόζεται στη μοντελοποίηση φαινομένων στην

Επιδημιολογία, στην Οικονομία αλλά και σε περιοχές, φαινομενικά διαφορετικές, όπως η μετάδοση πληροφορίας στα κοινωνικά δίκτυα στην Επιστήμη των Υπολογιστών.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε το μοντέλο εκθετικής αύξησης (μοντέλο Malthus) και το λογιστικό μοντέλο (μοντέλο Verhulst) της δυναμικής πληθυσμών. Στη μελέτη τους υπεισέρχονται Δ.Ε. πρώτης τάξης.

(α) Μοντέλο εκθετικής αύξησης

Περιγράφει ανεξέλεγκτη ανάπτυξη, η οποία είναι γενικά ασυνήθιστο να παρατηρηθεί στη φύση τουλάχιστον για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Η διατύπωση του μοντέλου βασίζεται στη βιολογική αρχή: ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού ανά άτομο είναι σταθερός και η αύξηση δεν περιορίζεται από έλλειψη πόρων ή άλλους παράγοντες.

Έστω  $P(t)$  ο αριθμός των ατόμων σε ένα πληθυσμό στο χρόνο  $t$ . Για τη μελέτη υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $P(t)$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Η παράγωγος  $P'(t)$  παριστά το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού ως προς το χρόνο. Στο απλό μοντέλο, το οποίο αναλύουμε, υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού σε χρόνο  $t$  είναι ανάλογος του πληθυσμού στο χρόνο αυτό, δηλαδή, το μοντέλο περιγράφεται από το Π.Α.Τ.

$$\left. \begin{aligned} P'(t) &= rP(t) \\ P(0) &= P_0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.7)$$

όπου  $P_0$  ο αρχικός πληθυσμός κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0$  και  $r$  ο εγγενής συντελεστής μεταβολής του πληθυσμού (συντελεστής αύξησης αν  $r > 0$  και μείωσης αν  $r < 0$ ). Το Π.Α.Τ. έχει τη λύση

$$P(t) = P_0 e^{rt}, \quad (1.2.8)$$

όπως προκύπτει με τη διαδικασία που αναφέρεται στο πρόβλημα ραδιενεργούς διάσπασης, για την οποία ισχύουν

- $P(t) = P_0$  αν  $r = 0$ ,
- $P(t)$  αύξουσα αν  $r > 0$ ,
- $P(t)$  φθίνουσα αν  $r < 0$ .

Στην περίπτωση όπου  $r > 0$  ο πληθυσμός αυξάνει εκθετικά ως προς το χρόνο και ο χρόνος διπλασιασμού  $T = \frac{\ln 2}{r}$  αυτού υπολογίζεται όπως και στο πρόβλημα ραδιενεργού διάσπασης.

Η λύση (1.2.8) του μοντέλου εκθετικής αύξησης είναι ακριβής για πολλούς πληθυσμούς αλλά μόνο για περιορισμένες χρονικές περιόδους που ο πληθυσμός παρουσιάζει αύξηση χωρίς περιορισμούς. Για μεγάλη χρονική περίοδο, όμως, περιορισμοί στον χώρο και στην τροφή του πληθυσμού αναμένεται να μειώσουν το ρυθμό αύξησης και έτσι να εμποδίσουν τη συνεχιζόμενη εκθετική αύξηση.

## (β) Λογιστικό μοντέλο

Οι προηγούμενοι περιοριστικοί παράγοντες επιβάλλουν την πρόσθεση ενός δευτέρου όρου στο δεύτερο μέλος της Δ.Ε. του μοντέλου εκθετικής αύξησης, ο οποίος έχει μικρή επίδραση όταν ο πληθυσμός είναι μικρός και οδηγεί στη μείωση του ρυθμού αύξησης όταν ο πληθυσμός γίνει κατάλληλα μεγάλος. Το απλούστερο μοντέλο που ικανοποιεί αυτές τις προϋποθέσεις είναι το λογιστικό μοντέλο, το οποίο περιγράφεται από το Π.Α.Τ.

$$\left. \begin{aligned} P'(t) &= r \left( 1 - \frac{P(t)}{C} \right) P(t) \\ P(0) &= P_0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.9)$$

όπου  $C$  η περιβαλλοντική χωρητικότητα του συστήματος, η οποία εκφράζει το μέγεθος του πληθυσμού που μπορεί να αναπτυχθεί στο συγκεκριμένο σύστημα.

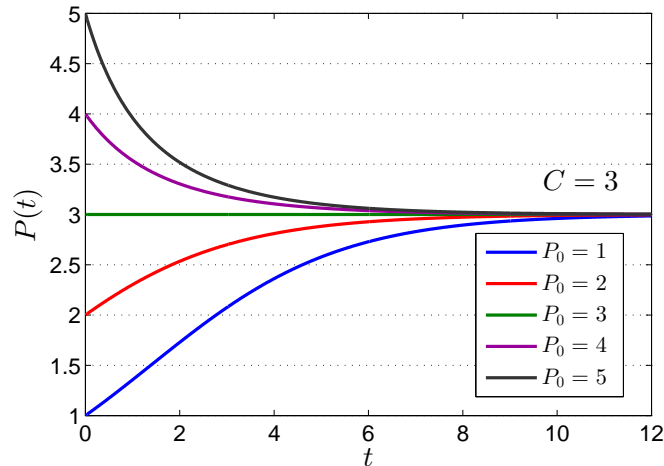
Στο λογιστικό αυτό μοντέλο ισχύει  $P'(t) \simeq rP(t)$ , αν  $P(t) \ll C$ , δηλαδή ο ρυθμός αύξησης  $P'(t)$  είναι ασυμπτωτικά ανάλογος του πληθυσμού  $P(t)$  όταν ο πληθυσμός είναι πολύ μικρότερος του  $C$ . Όμως, αν  $P(t) > C$  τότε  $P'(t) < 0$ , δηλαδή αν ο πληθυσμός είναι δυσανάλογα μεγάλος για τα περιβαλλοντικά δεδομένα, τότε ο ρυθμός μεταβολής του είναι αρνητικός και ο πληθυσμός ελαττώνεται.

Μπορούμε να μελετήσουμε ποιοτικά τη μεταβολή του πληθυσμού που διέπεται από το λογιστικό μοντέλο αν εξετάσουμε τη συνάρτηση  $f(P) = r \left( 1 - \frac{P}{C} \right) P$  του δεξιού μέλους της Δ.Ε. Η  $f(P)$  μηδενίζεται στα σημεία  $P = 0$  και  $P = C$ , τα οποία ονομάζονται σημεία ισορροπίας. Αν η αρχική συνθήκη είναι  $P_0 = 0$  ή  $P_0 = C$  τότε η λύση του Π.Α.Τ. είναι η σταθερή συνάρτηση  $P(t) = P_0$ . Από την (1.2.9) έχουμε  $f(P) > 0$  για  $0 < P < C$  και  $f(P) < 0$  για  $P > C$ , οπότε ο πληθυσμός αυξάνεται και πλησιάζει το σημείο ισορροπίας  $P = C$  αν  $0 < P_0 < C$  ενώ μειώνεται και πλησιάζει το  $P = C$  αν  $P_0 > C$ . Έτσι, το σημείο ισορροπίας  $P = C$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και ο πληθυσμός πλησιάζει την τιμή  $C$  στο όριο για  $t \rightarrow \infty$ , ανεξάρτητα από τον αρχικό πληθυσμό  $P_0 > 0$ . Για αυτό το λόγο, η χωρητικότητα  $C$  ονομάζεται και οριακός πληθυσμός του μοντέλου. Αντίθετα, το σημείο ισορροπίας  $P = 0$  είναι ασταθές διότι οι λύσεις αποκλίνουν από το σημείο αυτό.

Τα παραπάνω ποιοτικά χαρακτηριστικά των λύσεων προκύπτουν από τη μελέτη της συνάρτησης  $f(P)$ . Ωστόσο, αν χρειαζόμαστε μια λεπτομερή περιγραφή της πληθυσμιακής μεταβολής, τότε λύνουμε την πρώτης τάξης μη γραμμική Δ.Ε. του Π.Α.Τ. με χωρισμό μεταβλητών (που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2) και λαμβάνουμε τη λύση του Π.Α.Τ.

$$P(t) = \frac{P_0 C}{P_0 + (C - P_0)e^{-rt}}. \quad (1.2.10)$$

Πράγματι, επαληθεύεται ότι αν  $P_0 = 0$  τότε  $P(t) = 0$  για κάθε  $t > 0$ . Αν  $P_0 > 0$  τότε  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = C$ , δηλαδή για κάθε αρχική συνθήκη  $P_0 > 0$  η λύση  $P(t)$  πλησιάζει ασυμπτωτικά τη λύση ισορροπίας  $P(t) = C$ , η οποία είναι η μέγιστη τιμή του πληθυσμού που το περιβάλλον μπορεί να διατηρήσει για μεγάλους χρόνους (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Γράφημα της συνάρτησης  $P(t)$  του τύπου (1.2.10) συναρτήσεως του  $t$  για  $C = 3$  και  $r = \frac{1}{2}$ .

### Κοινωνικά δίκτυα

Η διαδικασία μετάδοσης (διάχυσης) της πληροφορίας στα κοινωνικά δίκτυα μπορεί να περιγραφεί (σε μία πρώτη προσέγγιση) από το Π.Α.Τ. του λογιστικού μοντέλου

$$\left. \begin{aligned} I'(t) &= r \left( 1 - \frac{I(t)}{C} \right) I(t) \\ I(0) &= I_0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.11)$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση  $I(t)$  είναι η πυκνότητα των επηρεαζόμενων χρηστών του δικτύου σε χρόνο  $t$ ,  $r$  ο εσωτερικός ρυθμός ανάπτυξης του δικτύου και  $C$  η χωρητικότητα του δικτύου.

Από τη Δ.Ε. του (1.2.11) προκύπτει ότι ο ρυθμός αναπαραγωγής  $I'(t)$  της πυκνότητας χρηστών  $I(t)$  εκφράζεται ως διαφορά δύο όρων, όπου ο πρώτος είναι ανάλογος με την πυκνότητα  $I(t)$  και ο δεύτερος μη γραμμικός όρος εξαρτάται από τους διαθέσιμους πόρους και τη δομή του δικτύου.

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα γενικά χαρακτηριστικά της λύσης του λογιστικού μοντέλου, η πυκνότητα χρηστών για  $0 < I_0 < C$  αυξάνεται και πλησιάζει ασυμπτωτικά το σημείο ισορροπίας  $I = C$ , ενώ για  $I_0 > C$  μειώνεται και πλησιάζει πάλι ασυμπτωτικά το  $I = C$ .

Πιο ρεαλιστικές μοντελοποιήσεις του προβλήματος μετάδοσης πληροφορίας σε κοινωνικά δίκτυα προϋποθέτουν τη χρήση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η έρευνα της περιοχής αυτής έχει αρχίσει να αναπτύσσεται πολύ πρόσφατα.

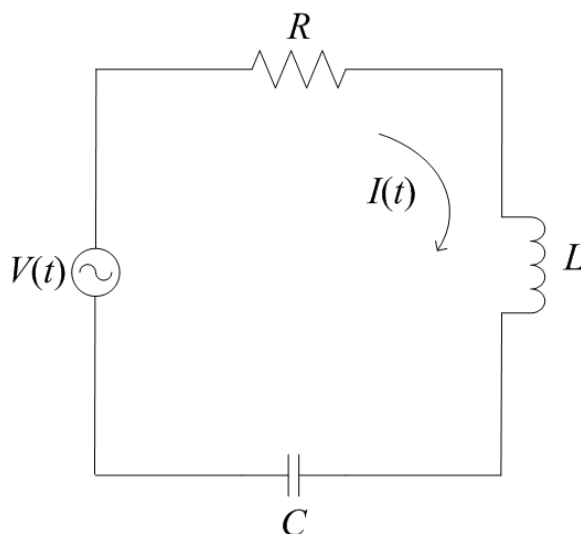


### Ηλεκτρικά κυκλώματα

Οι Δ.Ε. αποτελούν παραδοσιακό μαθηματικό εργαλείο μοντελοποίησης της ροής ρεύματος ή της συγκέντρωσης φορτίου σε κλασικά ηλεκτρικά κυκλώματα. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αναφέρεται εδώ. Θεωρούμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που τροφοδοτείται από μία χρονικά μεταβαλλόμενη πηγή τάσης  $V(t)$  και περιλαμβάνει συνδεδεμένα σε σειρά μία σταθερή ωμική αντίσταση  $R$ , ένα πηνίο αυτεπαγωγής  $L$  και έναν πυκνωτή χωρητικότητας  $C$  (Σχήμα 1.3). Σύμφωνα με το νόμο του Kirchhoff, το συνολικό άθροισμα τάσεων στα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος είναι ίσο με τη χρονικά μεταβαλλόμενη τάση της πηγής τροφοδοσίας. Έτσι, η εφαρμογή του νόμου στο μοναδικό βρόχο του κυκλώματος οδηγεί στη Δ.Ε.

$$RI(t) + LI'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V(t), \quad (1.2.12)$$

όπου  $I(t)$  το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα,  $Q(t)$  το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή, ενώ  $RI(t)$ ,  $LI'(t)$  και  $\frac{1}{C}Q(t)$  οι διαφορές δυναμικού στα άκρα της αντίστασης, του πηνίου και του πυκνωτή αντιστοίχως. Η εξίσωση (1.2.12) συνδυαζόμενη με την  $I(t) = Q'(t)$  οδηγεί



Σχήμα 1.3:  $RLC$  ηλεκτρικό κύκλωμα τροφοδοτούμενο από πηγή τάσης  $V(t)$ .

στο ακόλουθο Π.Α.Τ. με άγνωστη τη συνάρτηση φορτίου

$$\left. \begin{aligned} LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) &= V(t) \\ Q(0) &= Q_0 \\ Q'(0) &= I_0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.13)$$

όπου  $Q_0$  το αρχικό φορτίο και  $I_0$  το αρχικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα σε χρόνο  $t = 0$ .

Τέλος, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα προσδιορίζεται ως λύση του Π.Α.Τ.

$$\left. \begin{aligned} LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C} I(t) &= V'(t) \\ I(0) &= I_0 \\ I'(0) &= I_1 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.14)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η  $V(t)$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και όπου  $I_1$  η αρχική τιμή της  $I'(t)$  για  $t = 0$ .

### 1.3 Ασκήσεις

**Άσκηση 1.3.1** Βρείτε τις Δ.Ε., οι οποίες έχουν ως γενικές λύσεις τις συναρτήσεις

(i) 
$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2$$

(ii) 
$$y(x) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$$

(iii) 
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

**Άσκηση 1.3.2** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

σε κάθε διάστημα  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Βρείτε τη μερική λύση όταν  $y(0) = 1$  και  $y'(0) = 1$ .

**Άσκηση 1.3.3** Επαληθεύστε ότι κάθε μία από τις συναρτήσεις

$$y_1(x) = 1 \quad \text{και} \quad y_2(x) = \ln x$$

είναι λύσεις της μη γραμμικής Δ.Ε.

$$y'' + (y')^2 = 0,$$

αλλά η  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  είναι λύση της μόνον όταν  $c_2 = 0$  ή  $c_2 = 1$ .

**Άσκηση 1.3.4** Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση

$$y(x) = \frac{1}{1 - ce^x},$$

όπου  $c$  αυθαίρετη πραγματική σταθερά, είναι η γενική λύση της μη γραμμικής Δ.Ε.

$$y' = y^2 - y.$$

**Άσκηση 1.3.5** Ένα σώμα μάζας  $m$  ολισθαίνει χωρίς τριβή σε οριζόντια επιφάνεια. Η μάζα συνδέεται με ένα ελατήριο με σταθερά  $k$ , ενώ υπόκειται σε αντίσταση αέρα με συντελεστή  $\rho$ . Βρείτε τη Δ.Ε. την οποία ικανοποιεί η μετατόπιση  $y(t)$  της μάζας από τη θέση ισορροπίας της.

**Άσκηση 1.3.6** Μία μπάλα μάζας  $m$ , η οποία βρίσκεται αρχικά στο οριζόντιο επίπεδο, εκτοξεύεται κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα  $v_0 > 0$ . Υποθέτουμε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Δείξτε ότι η μπάλα φτάνει σε μέγιστο ύψος  $H = \frac{v_0^2}{2g}$  σε χρόνο  $\frac{v_0}{g}$ , όπου  $g$  η (σταθερή) επιτάχυνση της βαρύτητας. Προσδιορίστε το χρόνο που χρειάζεται για να επιστρέψει από το ύψος  $H$  στο οριζόντιο επίπεδο.

**Άσκηση 1.3.7** Ένα ραδιενεργό στοιχείο αποσυντίθεται στο χρονικό διάστημα  $t_0 \leq t \leq t_1$  με σταθερά αποσύνθεσης  $k_1$ , ενώ για  $t > t_1$  αποσυντίθεται με σταθερά αποσύνθεσης  $k_2$ . Αν η αρχική ποσότητα του στοιχείου τη χρονική στιγμή  $t_0$  είναι  $N(t_0) = N_0$ , βρείτε την ποσότητα αυτού  $N(t_2)$  για  $t_2 > t_1$ .

**Άσκηση 1.3.8** Ένας πληθυσμός υπακούει στο μοντέλο εκθετικής αύξησης (Malthus) με συντελεστή μεταβολής  $r > 0$ . Αν στους χρόνους  $t_0$  και  $t_1$  ( $t_0 < t_1$ ), ο πληθυσμός είναι  $P_0$  και  $P_1$  ( $P_0 < P_1$ ), αντιστοίχως, τότε δείξτε ότι ισχύουν

$$r = \frac{\ln \frac{P_1}{P_0}}{t_1 - t_0}$$

και

$$P(t) = P_0 \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}}, \quad t \geq 0,$$

όπου  $P(t)$  ο πληθυσμός για  $t \geq 0$ .

**Άσκηση 1.3.9** Ο νόμος ψύξης του Newton διατυπώνεται ως εξής

$$T'(t) = -k(T(t) - A(t)),$$

όπου  $t$  είναι ο χρόνος,  $T(t)$  η συνάρτηση της θερμοκρασίας,  $A(t)$  η συνάρτηση της θερμοκρασίας περιβάλλοντος και  $k > 0$  σταθερά. Έστω ότι  $A(t) = A_0 \cos(\omega t)$  (λόγω των μεταβολών της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου) και η αρχική θερμοκρασία είναι  $T(0) = T_0$ . Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση

$$T(t) = \left( T_0 - \frac{A_0 k^2}{k^2 + \omega^2} \right) e^{-kt} + \frac{A_0 k}{k^2 + \omega^2} (k \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))$$

αποτελεί τη μερική λύση της Δ.Ε. η οποία πληρεί την αρχική συνθήκη. Σχολιάστε την επίδραση της αρχικής συνθήκης στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης για μεγάλους χρόνους.

# Βιβλιογραφία

- [1] Ν. Δ. Αλικιάκος και Γ. Η. Καλογερόπουλος, *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2007.
- [2] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.
- [3] Ν. Μ. Σταυρακάκης, *Διαφορικές Εξισώσεις: Συνήθειες και Μερικές. Θεωρία και Εφαρμογές από τη Φύση και τη Ζωή*, Έκδοση: Οκτώβριος 2015.
- [4] H. Wang, F. Wang, K. Xu, “Modeling Information Diffusion in Online Social Networks with Partial Differential Equations,” arXiv:1310.0505v1 [cs.SI] 1 Oct 2013.

## Κεφάλαιο 2

# Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται στοιχειώδεις μέθοδοι για τον αναλυτικό προσδιορισμό των λύσεων απλών συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης της γενικής μορφής

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I, \quad (2.0.1)$$

και αναφέρονται ορισμένες βασικές εφαρμογές των εξισώσεων αυτών. Οι αναπτυσσόμενες μέθοδοι αφορούν την επίλυση διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών, ομογενών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, ακριβών διαφορικών εξισώσεων καθώς επίσης και διαφορικών εξισώσεων Bernoulli και Ricatti.

### 2.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Μία Δ.Ε. πρώτης τάξης της μορφής

$$y' = g(x)h(y), \quad (2.1.1)$$

ονομάζεται *διαχωρίσιμη Δ.Ε.* ή *Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών*. Ο διαχωρισμός των μεταβλητών  $x$  και  $y$  στα μέλη της εξίσωσης καθιστά δυνατή την αόριστη ολοκλήρωση κάθε μέλους της εξίσωσης χωριστά.

Η (2.1.1) αποτελεί μία ειδική κατηγορία της (2.0.1) για  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , δηλαδή όπου το δεξιό μέλος εκφράζεται ως γινόμενο μιας συνάρτησης του  $x$  επί μίας του  $y$ .

Για να λύσουμε τη Δ.Ε. (2.1.1) ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

(i) Πρώτα λύνουμε την εξίσωση  $h(y) = 0$ . Μία ρίζα  $\rho$  της  $h(y) = 0$  οδηγεί στη λύση  $y(x) = \rho$  της Δ.Ε. (2.1.1). Οι σταθερές λύσεις της (2.1.1) που αντιστοιχούν στις ρίζες της  $h(y) = 0$  αναφέρονται ως *ιδιάζουσες λύσεις* της Δ.Ε.

(ii) Για  $h(y) \neq 0$ , διαιρούμε και τα δύο μέλη με την  $h(y)$  και οδηγούμαστε στην

$$\frac{y'(x)}{h(y)} = g(x), \quad h(y) \neq 0. \quad (2.1.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $y = y(x)$ , οπότε  $dy = y'(x)dx$ , ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ως προς  $x$ , έχουμε

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx = \int g(x) dx, \quad (2.1.3)$$

δηλαδή

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx. \quad (2.1.4)$$

Αν  $H(y)$  είναι μία παράγουσα της  $\frac{1}{h(y)}$  και  $G(x)$  μία παράγουσα της  $g(x)$  τότε το γενικό ολοκλήρωμα της (2.1.1) είναι

$$H(y) = G(x) + c, \quad (2.1.5)$$

όπου  $c$  αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των αόριστων ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων  $\frac{1}{h}$  και  $g$ .

Η διαδικασία επίλυσης της (2.1.1), που περιγράφηκε παραπάνω, αναφέρεται ως *χωρισμός μεταβλητών*.

Όταν πρόκειται για Π.Α.Τ. της μορφής

$$y'(x) = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2.1.6)$$

η αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$  χρησιμοποιείται για την κατάλληλη επιλογή της σταθεράς  $c$ .

Ιδιαίτερως, σημειώνουμε ότι οι σταθερές συναρτήσεις  $y(x) = \rho$ , που αντιστοιχούν στις ρίζες  $\rho$  της  $h(y) = 0$ , δεν μπορούν να αποτελούν λύσεις του Π.Α.Τ. αν  $y_0 \neq \rho$ .

**Παράδειγμα 2.1.1** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' - e^{x-y} = 0, \quad y(0) = 1.$$

**Λύση.**

Ακολουθώντας τη διαδικασία χωρισμού των μεταβλητών, έχουμε

$$e^y dy = e^x dx,$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int e^y dy = \int e^x dx + c,$$

προκύπτει

$$e^y = e^x + c.$$

Με εφαρμογή της αρχικής συνθήκης υπολογίζουμε ότι  $c = e - 1$ , και άρα

$$e^y = e^x + e - 1,$$

από όπου μπορούμε και να λύσουμε εκπεφρασμένα ως προς  $y$

$$y(x) = \ln(e^x + e - 1).$$

△

Σημειώνουμε ότι η λύση του τελευταίου παραδείγματος ορίζεται για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ , διότι  $e^x + e - 1 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Αυτό όμως δεν είναι πάντα έτσι, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα, και άρα πρέπει να γίνεται έλεγχος για το μεγαλύτερο διάστημα της  $x$  που ορίζεται η λύση  $y$ .

**Παράδειγμα 2.1.2** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$e^x e^y y' - e^{-y} = 0, \quad y(0) = 0.$$

**Λύση.**

Ακολουθώντας τη διαδικασία χωρισμού των μεταβλητών, λαμβάνουμε

$$e^x e^y dy = e^{-y} dx,$$

ισοδύναμα

$$e^{2y} dy = e^{-x} dx,$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int e^{2y} dy = \int e^{-x} dx + c,$$

προκύπτει

$$\frac{1}{2} e^{2y} = -e^{-x} + c.$$

Θέτοντας  $c_1 = 2c$ , έχουμε

$$e^{2y} = -2e^{-x} + c_1.$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη  $y(0) = 0$ , βρίσκουμε  $c_1 = 3$ , και έτσι τελικά η λύση του Π.Α.Τ. προκύπτει να είναι

$$e^{2y} = 3 - 2e^{-x},$$

η οποία σε εκπεφρασμένη μορφή γράφεται ως

$$y(x) = \frac{1}{2} \ln(3 - 2e^{-x}).$$

Η τελευταία λύση ορίζεται για  $3 - 2e^{-x} > 0 \Rightarrow x > \ln(2/3)$ . Υπενθυμίζουμε ότι η λύση ενός Π.Α.Τ. πρέπει πάντα να ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το αρχικό σημείο  $x_0$ . Εδώ, πράγματι είναι έτσι διότι  $0 \in (\ln(\frac{2}{3}), +\infty)$ .

△

Στα προηγούμενα παραδείγματα βρήκαμε τις γενικές λύσεις των Δ.Ε., δηλαδή τις συναρτήσεις  $y(x)$  σε εκπεφρασμένη μορφή που τις επαληθεύουν. Αυτό, όμως δεν είναι πάντα εφικτό, όπως δείχνεται στο ακόλουθο παράδειγμα στο οποίο μπορούμε να βρούμε μόνο το γενικό ολοκλήρωμα.

**Παράδειγμα 2.1.3** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$(1 + x^4)y y' - x^3(y^2 + 1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

**Λύση.**

Έχουμε διαδοχικά ότι

$$(1 + x^4)y dy - x^3(y^2 + 1)dx = 0,$$

ισοδύναμα

$$\frac{y}{y^2 + 1} dy = \frac{x^3}{1 + x^4} dx,$$

από όπου με αόριστη ολοκλήρωση

$$\int \frac{y}{y^2 + 1} dy = \int \frac{x^3}{1 + x^4} dx + c_1,$$

έχουμε

$$\frac{1}{2} \ln |y^2 + 1| = \frac{1}{4} \ln |1 + x^4| + c.$$

Γράφοντας τη σταθερά  $c$  στη μορφή  $\frac{1}{4} \ln c_1$ ,  $c_1 > 0$ , έχουμε

$$(y^2 + 1)^2 = c_1(x^4 + 1),$$



που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.

Για να βρούμε τη μερική λύση, η οποία ικανοποιεί τη δοσμένη αρχική συνθήκη  $y(1) = 1$ , θέτουμε  $x = 1$  και  $y = 1$  στη γενική λύση και λαμβάνουμε  $c_1 = 2$ . Έτσι, η ζητούμενη λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$(y^2 + 1)^2 = 2(x^4 + 1),$$

η οποία μπορεί να απλοποιηθεί στη μορφή

$$y^2 = -1 + \sqrt{2(x^4 + 1)}.$$

△

Τέλος, στο ακόλουθο παράδειγμα διασαφηνίζεται ότι πρέπει να γίνεται κατάλληλος έλεγχος στις ρίζες της συνάρτησης  $h(y)$ , οι οποίες (σύμφωνα με το βήμα (i) της γενικής μεθοδολογίας) πάντα αποτελούν λύσεις της Δ.Ε.

**Παράδειγμα 2.1.4** Λύστε τη Δ.Ε.

$$(x^2 - 1)y y' + 2x(y + y^2) = 0, \quad x > 1.$$

**Λύση.**

Εφαρμόζουμε τη διαδικασία χωρισμού μεταβλητών

$$(x^2 - 1)y dy = -2x(y + y^2)dx,$$

και για  $y + y^2 \neq 0$ , δηλαδή  $y \neq 0$  και  $y \neq -1$ , έχουμε

$$\frac{1}{y+1} dy = -\frac{2x}{x^2-1} dx,$$

οπότε με αόριστη ολοκλήρωση

$$\int \frac{1}{y+1} dy = -\int \frac{2x}{x^2-1} dx + c,$$

λαμβάνουμε

$$\ln |y+1| = -\ln |x^2-1| + c.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $x > 1$  και θέτοντας  $c_1 = e^c$ , προκύπτει

$$|y+1|(x^2-1) = c_1,$$

από την οποία παίρνουμε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y(x) = -1 + \frac{c_2}{x^2-1}, \quad c_2 \neq 0.$$

Πρέπει να εξετάσουμε ξεχωριστά τις  $y = 0$  και  $y = -1$  που είναι και οι δύο λύσεις της Δ.Ε. και τις οποίες είχαμε εξαιρέσει νωρίτερα στη διαδικασία χωρισμού μεταβλητών. Η  $y = -1$  μπορεί να προκύψει από τη γενική λύση για  $c_2 = 0$ . Όμως, η  $y = 0$  δεν λαμβάνεται από τη γενική λύση για καμία τιμή της σταθεράς  $c_2$ .

Άρα, τελικά, όλες οι λύσεις της Δ.Ε. δίνονται από

$$y(x) = -1 + \frac{c_2}{x^2 - 1}, \quad c_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{και} \quad y(x) = 0.$$

△

## 2.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Μια Δ.Ε. της μορφής

$$y'(x) = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0, \quad (2.2.1)$$

δηλαδή της οποίας η συνάρτηση δευτέρου μέλους εξαρτάται μόνο από το πηλίκο  $\frac{y}{x}$  και όχι από τις μεταβλητές  $x$  και  $y$  ξεχωριστά, ονομάζεται *ομογενής*. Η ορολογία ομογενής, η οποία χρησιμοποιείται εδώ, είναι διαφορετική εκείνης της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. (1.1.3).

Για να λύσουμε την (2.2.1) κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$y(x) = xu(x), \quad (2.2.2)$$

οπότε

$$y'(x) = u(x) + xu'(x),$$

και έτσι η (2.2.1) γράφεται

$$xu' + u = F(u),$$

ή ισοδύναμα

$$u' = \frac{F(u) - u}{x}. \quad (2.2.3)$$

Η (2.2.3) είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται, σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην προηγούμενη παράγραφο. Έτσι, λαμβάνουμε

$$\int \frac{du}{F(u) - u} = \int \frac{dx}{x}, \quad (2.2.4)$$

οπότε

$$G(u) = \ln|x| + c, \quad (2.2.5)$$

οπου  $G(u)$  είναι μία παράγουσα της  $\frac{1}{F(u)-u}$ .

Εισάγοντας στην (2.2.5) το μετασχηματισμό (2.2.2), λαμβάνουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$G\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c, \quad (2.2.6)$$

της αρχικής Δ.Ε. (2.2.1).

**Παράδειγμα 2.2.1** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

**Λύση.** Η Δ.Ε. είναι της μορφής (2.2.1) με

$$f(x, y) = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \equiv F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Για τη λύση της κάνουμε την αντικατάσταση (2.2.2) και ευρίσκουμε

$$xu' + u = e^{2u} + u,$$

οπότε

$$xu' = e^{2u}.$$

Η τελευταία είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, η οποία επίσης γράφεται

$$e^{-2u}u' = \frac{1}{x},$$

και μετά από αόριστη ολοκλήρωση ευρίσκουμε

$$-\frac{1}{2}e^{-2u} = \ln|x| + c.$$

Από την τελευταία θέτοντας  $u = \frac{y}{x}$  και  $c = \ln c_1$ , λαμβάνουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$-\frac{1}{2}e^{-2\frac{y}{x}} = \ln|c_1x|,$$

από το οποίο προκύπτει η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y(x) = -\frac{x}{2} \ln(-2 \ln|c_1x|).$$

△

Με την ίδια διαδικασία επιλύονται και Δ.Ε. της μορφής

$$y'(x) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}, \quad x \neq 0, \quad (2.2.7)$$

όπου οι συναρτήσεις  $p(x, y)$  και  $q(x, y)$  είναι ομογενείς ως προς  $x$  και  $y$  του ίδιου βαθμού ομογένειας  $m$ , δηλαδή ισχύουν

$$p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m p(x, y) \quad \text{και} \quad q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m q(x, y), \quad (2.2.8)$$

οπότε

$$p(x, y) = x^m p\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{και} \quad q(x, y) = x^m q\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad (2.2.9)$$

και έτσι η (2.2.7) γράφεται

$$y'(x) = \frac{p\left(1, \frac{y}{x}\right)}{q\left(1, \frac{y}{x}\right)} = \frac{P\left(\frac{y}{x}\right)}{Q\left(\frac{y}{x}\right)}. \quad (2.2.10)$$

Για τη λύση της (2.2.10) ακολουθούμε τη διαδικασία επίλυσης της (2.2.1).

**Παράδειγμα 2.2.2** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'(x) = -\frac{x^2 + y^2}{3xy}, \quad x \neq 0.$$

**Λύση.** Η Δ.Ε. είναι της μορφής (2.2.7), όπου

$$p(x, y) = x^2 + y^2 = x^2 \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

και

$$q(x, y) = -3xy = -x^2 \left(3\frac{y}{x}\right),$$

είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού 2.

Έτσι, θέτουμε

$$P\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

και

$$Q\left(\frac{y}{x}\right) = -3\frac{y}{x},$$

και οδηγούμαστε στη Δ.Ε.

$$y'(x) = -\frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{3\frac{y}{x}}.$$

Εφαρμόζοντας στην τελευταία την αντικατάσταση (2.2.2), λαμβάνουμε

$$u'x + u = -\frac{1 + u^2}{3u},$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{3u}{4u^2 + 1} u' = -\frac{1}{x},$$

και η οποία είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών.

Έτσι, με αόριστη ολοκλήρωση ευρίσκουμε

$$\frac{3}{8} \ln(4u^2 + 1) = -\ln|x| + c,$$

από την οποία έχουμε

$$\ln[(4u^2 + 1)^3 x^8] = 8c.$$

Από την τελευταία για  $u = \frac{y}{x}$  και  $8c = \ln c_1$ , λαμβάνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.

$$x^2(4y^2 + x^2)^3 = c_1.$$

△

## 2.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Μια Δ.Ε. της μορφής

$$y' = -p(x)y + q(x), \quad (2.3.1)$$

όπου οι συναρτήσεις  $p, q : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχείς σε ένα διάστημα  $I$ , λέγεται γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης.

Η γενική λύση της Δ.Ε. (2.3.1) ευρίσκεται με εφαρμογή της λεγόμενης μεθόδου ολοκληρωτικού παράγοντα, η οποία περιγράφεται ως εξής.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2.3.1) με μία άγνωστη (αρχικά) παραγωγίσιμη συνάρτηση  $\mu : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\mu(x) \neq 0, \forall x \in I$ , η οποία αναφέρεται ως ολοκληρωτικός παράγοντας, και λαμβάνουμε

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x). \quad (2.3.2)$$

Αναζητούμε συνάρτηση  $\mu$  για την οποία το αριστερό μέλος της τελευταίας Δ.Ε. να είναι η παράγωγος της συνάρτησης  $\mu(x)y$ . Αυτό συμβαίνει τότε και μόνο τότε όταν η  $\mu$  ικανοποιεί τη Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\mu'(x) = \mu(x)p(x), \quad (2.3.3)$$

η οποία έχει τη λύση

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \quad (2.3.4)$$

Συνδυάζοντας τις (2.3.2) και (2.3.3), αναγόμεσθε στην

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)q(x), \quad (2.3.5)$$

από την οποία με αόριστη ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx + c, \quad (2.3.6)$$

οπότε με τη βοήθεια και της (2.3.4), ευρίσκουμε τελικά τη γενική λύση

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c \right] \quad (2.3.7)$$

της Δ.Ε. (2.3.1).

Όταν πρόκειται για Π.Α.Τ. της μορφής

$$y' = -p(x)y + q(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2.3.8)$$

τότε προσδιορίζουμε τη λύση του, υπολογίζοντας από την (2.3.7) την τιμή της σταθερά  $c$  με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης  $y(x_0) = y_0$ .

Εναλλακτικά, για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της Δ.Ε. (2.3.1), μπορούμε να εφαρμόσουμε και τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, η οποία περιγράφεται ως εξής.

Θεωρούμε αρχικά την αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε.

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2.3.9)$$

της (2.3.1). Με τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών ευρίσκουμε τη γενική λύση

$$y = ce^{-\int p(x)dx} \quad (2.3.10)$$

της Δ.Ε. (2.3.9).

Για την επίλυση της Δ.Ε. (2.3.1), αναζητούμε λύση της μορφής (2.3.10), υποθέτοντας ότι η αυθαίρετη σταθερά  $c$  είναι συνάρτηση του  $x$ , δηλαδή  $c = c(x)$ , οπότε έχουμε

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (2.3.11)$$

Αντικαθιστώντας την (2.3.11) στην (2.3.1), οδηγούμαστε στη Δ.Ε.

$$c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}, \quad (2.3.12)$$

από την οποία με αόριστη ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + d, \quad (2.3.13)$$

οπου  $d$  αυθαίρετη σταθερά.

Εισάγοντας την (2.3.13) στην (2.3.11), επανευρίσκουμε (για  $d = c$ ) τη γενική λύση (2.3.7) της Δ.Ε. (2.3.1).

**Παρατήρηση 2.3.1** Από την (2.3.7) προκύπτει ότι η γενική λύση της (2.3.1) εκφράζεται ως άθροισμα της γενικής λύσης

$$c e^{-\int p(x)dx}$$

της ομογενούς Δ.Ε. (2.3.9) και μίας ειδικής λύσης

$$e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

της μη ομογενούς Δ.Ε. (2.3.7). Όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω (βλ. Κεφάλαιο 4, Παράγραφος 4.1), η ιδιότητα αυτή είναι χαρακτηριστική των λύσεων γραμμικών Δ.Ε. ανώτερης τάξης.

△

**Σημείωση 2.3.1** Η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων εφαρμόζεται επίσης στα επόμενα και για την επίλυση Δ.Ε. δεύτερης τάξης (βλ. Κεφάλαιο 4, Παράγραφος 4.7).

△

**Παράδειγμα 2.3.1** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' - \frac{y}{x} = x^\alpha, \quad x > 0.$$

**Λύση.** Από την (2.3.4), ευρίσκουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int (-\frac{1}{x})dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x},$$

και έτσι η Δ.Ε. ανάγεται στην

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x^{\alpha-1},$$

η οποία επίσης γράφεται

$$\left(\frac{1}{x}y\right)' = x^{\alpha-1}.$$

Στη συνέχεια με αόριστη ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$\frac{1}{x}y = \int x^{\alpha-1} dx + c,$$

από την οποία ευρίσκουμε τη γενική λύση

$$y = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha} + cx, & \alpha \neq 0 \\ x \ln x + cx, & \alpha = 0 \end{cases}.$$

△

**Παράδειγμα 2.3.2** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' + \frac{y}{x} = e^{3x}, \quad x > 0.$$

**Λύση.** Εφαρμόζοντας τον (2.3.7), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[ \int e^{3x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right] \\ &= e^{-\ln|x|} \left[ \int e^{3x} e^{\ln|x|} dx + c \right] \\ &= e^{\ln \frac{1}{x}} \left[ \int e^{3x} x dx + c \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[ \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[ \frac{e^{3x}}{3} \left( x - \frac{1}{3} \right) + c \right]. \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 2.3.3** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' + \frac{2}{\tan x} y = \frac{1}{\sin x}, \quad 0 < x < \pi.$$

**Λύση.** Η γενική λύση της Δ.Ε. ευρίσκεται από τη (2.3.7)

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{\tan x} dx} \left[ \int \frac{1}{\sin x} e^{\int \frac{2}{\tan x} dx} dx + c \right] \\ &= e^{-2 \ln|\sin x|} \left[ \int \frac{1}{\sin x} e^{2 \ln|\sin x|} dx + c \right] \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} \left[ \int \sin x dx + c \right] \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} (c - \cos x). \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 2.3.4** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' + 3x^2 y = 3x^2 e^{-x^3}.$$



**Λύση.** Εφαρμόζοντας την (2.3.7), ευρίσκουμε τη γενική λύση

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 3x^2 dx} \left[ \int 3x^2 e^{-x^3} e^{\int 3x^2 dx} dx + c \right] \\ &= e^{-x^3} \left[ \int 3x^2 e^{-x^3} e^{x^3} dx + c \right] \\ &= e^{-x^3} \left[ \int 3x^2 dx + c \right] \\ &= e^{-x^3} (x^3 + c). \end{aligned}$$

△

## 2.4 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις

Στην παράγραφο αυτή ασχολούμαστε με την επίλυση Δ.Ε. πρώτης τάξης της μορφής

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, \quad (2.4.1)$$

όπου  $P$  και  $Q$  είναι συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ .

Ως μία εισαγωγή στη διαδικασία επίλυσης των Δ.Ε. αυτών επεξεργαζόμαστε αρχικά τη Δ.Ε.

$$(4x^3y + 3x^2y^2) + (x^4 + 2x^3y)y' = 0.$$

Η εξίσωση αυτή δεν είναι γραμμική ούτε χωριζομένων μεταβλητών. Όμως, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν

$$4x^3y + 3x^2y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(x^4y + x^3y^2)$$

και

$$x^4 + 2x^3y = \frac{\partial}{\partial y}(x^4y + x^3y^2).$$

Έτσι, η Δ.Ε. γράφεται

$$(α) \quad \Phi_x(x, y) + \Phi_y(x, y)y' = 0,$$

όπου

$$\Phi(x, y) = x^4y + x^3y^2.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για τη συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  με  $y = y(x)$ , παρατηρούμε ότι η (α) επίσης γράφεται

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y(x)) = 0,$$

οπότε έχουμε

$$\Phi(x, y) = c,$$

δηλαδή

$$x^4y + x^3y^2 = c,$$

όπου  $c$  σταθερά. Η τελευταία εξίσωση ορίζει υπό πεπλεγμένη μορφή τη γενική λύση (γενικό ολοκλήρωμα) της Δ.Ε.

Η παραπάνω ανάλυση οδηγεί στη διατύπωση της ακόλουθης πρότασης.

**Πρόταση 2.4.1** Αν υπάρχει μία  $C^1$  συνάρτηση  $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν

$$\Phi_x = P \quad \text{και} \quad \Phi_y = Q \quad \text{στο } D, \quad (2.4.2)$$

τότε η

$$\Phi(x, y) = c$$

ορίζει υπό πεπλεγμένη μορφή τη γενική λύση (το γενικό ολοκλήρωμα) της Δ.Ε. (2.4.1).

**Απόδειξη.** Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για τη συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  με  $y = y(x)$  και λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (2.4.2) και τη Δ.Ε. (2.4.1), ευρίσκουμε

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y(x)) = \Phi_x(x, y(x)) + \Phi_y(x, y(x))y'(x) = 0,$$

από την οποία προκύπτει η  $\Phi(x, y) = c$ .

□

Η τελευταία πρόταση διακρίνει την ακόλουθη ειδική κατηγορία των Δ.Ε. (2.4.1).

**Ορισμός 2.4.1** Η Δ.Ε. (2.4.1) ονομάζεται *ακριβής* όταν υπάρχει μία  $C^1$  συνάρτηση  $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν

$$\Phi_x = P \quad \text{και} \quad \Phi_y = Q \quad \text{στο } D.$$

Δηλαδή η Δ.Ε. (2.4.1) είναι ακριβής όταν το σύστημα (2.4.2) των μερικών διαφορικών εξισώσεων έχει μία  $C^1$  λύση  $\Phi(x, y)$ .

□

Για την πληρέστερη κατανόηση επεξεργαζόμαστε αρχικά δύο συγκεκριμένα παραδείγματα, όπου περιγράφεται η διαδικασία επίλυσης του συστήματος (2.4.2).

**Παράδειγμα 2.4.1** Θεωρούμε τη Δ.Ε.

$$(2x + y^2) + 2xyy' = 0$$

και εξετάζουμε αν το αντίστοιχο αυτής σύστημα (2.4.2) έχει λύση.

**Λύση.** Το σύστημα (2.4.2) για τη Δ.Ε. είναι

$$\Phi_x = 2x + y^2, \quad \Phi_y = 2xy.$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ως προς  $x$

$$\Phi(x, y) = \int (2x + y^2) dx = x^2 + xy^2 + g(y),$$

όπου  $g(y)$  αυθαίρετη συνάρτηση του  $y$ .

Παραγωγίζουμε την τελευταία ως προς  $y$

$$\Phi_y = 2xy + g'(y),$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, ευρίσκουμε

$$2xy + g'(y) = 2xy,$$

οπότε  $g'(y) = 0$  και άρα  $g(y) = c$ .

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι

$$\Phi(x, y) = x^2 + xy^2 + c.$$

△

Εδώ, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy).$$

Η συνθήκη αυτή, όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω, είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το σύστημα λύση.

**Παράδειγμα 2.4.2** Θεωρούμε τη Δ.Ε.

$$(x^2 + y) + xyy' = 0$$

και εξετάζουμε αν το αντίστοιχο αυτής σύστημα (2.4.2) έχει λύση.

**Λύση.** Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος, ευρίσκουμε διαδοχικά

$$\Phi(x, y) = \int (x^2 + y) dx = \frac{x^3}{3} + xy + g(y),$$

όπου  $g(y)$  αυθαίρετη συνάρτηση του  $y$ ,

$$\Phi_y = x + g'(y),$$

και έτσι

$$x + g'(y) = xy,$$

το οποίο είναι αδύνατο (διότι η  $g$  είναι συνάρτηση του  $y$  ενώ η παράγωγός της ευρίσκεται συνάρτηση των  $x$  και  $y$ ).

Κατά συνέπεια, το σύστημα δεν έχει λύση, δηλαδή η Δ.Ε. δεν είναι ακριβής.

△

Εδώ, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = 1 \neq y = \frac{\partial}{\partial x}(xy).$$

Η διαδικασία επίλυσης του συστήματος (2.4.2), η οποία περιγράφεται στα δύο τελευταία παραδείγματα, είναι γενική και διατυπώνεται με λεπτομέρειες ως εξής.

Ολοκληρώνουμε την  $\Phi_x = P$  ως προς  $x$  και έχουμε

$$(α) \quad \Phi(x, y) = \int P(x, y) dx + g(y),$$

όπου  $g(y)$  είναι αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση του  $y$ .

Υπολογίζουμε την μερική παράγωγο της (α) ως προς  $y$

$$(β) \quad \Phi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + g'(y) = \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx + g'(y).$$

Επειδή ισχύει  $\Phi_y = Q$ , από την (β) ευρίσκουμε

$$(γ) \quad g'(y) = Q(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx.$$

Ολοκληρώνουμε την (γ) ως προς  $y$  και έχουμε

$$(δ) \quad g(y) = \int \left( Q(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx \right) dy.$$

Συνδυάζοντας τις (α) και (δ), λαμβάνουμε

$$\Phi(x, y) = \int P(x, y) dx + \int \left( Q(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx \right) dy. \quad (2.4.3)$$

Σημειώνουμε ότι αν σε κάποιο βήμα της προηγούμενης διαδικασίας οδηγηθούμε σε αντίφαση, τότε το σύστημα δεν έχει λύση, δηλαδή η Δ.Ε. δεν είναι ακριβής.

Στη Δ.Ε. (2.4.1) αντιστοιχεί το διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (Δ.Ε.Ο.)

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy$$

κατά μήκος μιας οποιασδήποτε παραμετρικής καμπύλη  $\Gamma$  του  $D$ , η δε ακρίβεια της Δ.Ε. έχει στενή συσχέτιση (είναι ισοδύναμη) προς την ανεξαρτησία του Δ.Ε.Ο. από την καμπύλη ολοκλήρωσης. Δηλαδή, πιο συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα της Διανυσματικής Ανάλυσης, το οποίο έχει αξιοσημείωτες εφαρμογές στις Δ.Ε. και στη Μιγαδική Ανάλυση.

**Θεώρημα 2.4.1** Έστω  $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό (ισοδύναμα ανοικτό και παραμετρικά συνεκτικό) υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(i) Η Δ.Ε. (2.4.1) είναι ακριβής.

(ii) Το Δ.Ε.Ο.

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy$$

είναι ανεξάρτητο της (τμηματικά  $C^1$ ) καμπύλης, δηλαδή για κάθε δύο σημεία  $A(a_1, a_2)$  και  $B(b_1, b_2)$  του  $D$  και για κάθε δύο τμηματικά  $C^1$  παραμετρικές καμπύλες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  με αρχή το  $A$  και πέρασ το  $B$ , ισχύει

$$\int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy.$$

(iii) Για κάθε τμηματικά  $C^1$  κλειστή παραμετρική καμπύλη  $C$  ισχύει

$$\int_C Pdx + Qdy = 0.$$

□

Όταν το Δ.Ε.Ο.  $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy$  είναι ανεξάρτητο της καμπύλης ολοκλήρωσης  $\Gamma$ , τότε για κάθε δύο σημεία  $A(a_1, a_2)$  και  $B(b_1, b_2)$  του  $D$  ορίζεται το Ε.Ο.  $\int_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)}$  από το  $A$  στο  $B$  από τον τύπο

$$\int_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} Pdx + Qdy := \int_{\Gamma} Pdx + Qdy,$$

όπου  $\Gamma$  τυχούσα τμηματικά  $C^1$  παραμετρική καμπύλη του  $D$  με αρχή το  $A(a_1, a_2)$  και πέρασ το  $B(b_1, b_2)$ .

Αναφερόμενοι τώρα, στο Θεώρημα 2.4.1, σημειώνουμε ότι όταν ισχύει ένας από τους ισοδύναμους ισχυρισμούς (i)-(iii) (άρα ισχύουν και οι υπόλοιποι δύο), τότε η αναζητούμενη συνάρτηση  $\Phi$  του Ορισμού 2.4.1 εκφράζεται από τον τύπο

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy, \quad (x, y) \in D,$$

όπου  $(x_0, y_0)$  αυθαίρετο σταθεροποιημένο σημείο του  $D$ .

Όταν οι συναρτήσεις  $P$  και  $Q$  της Δ.Ε. (2.4.1) ορίζονται σε ειδικά ανοικτά και παραμετρικά συνεκτικά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$ , αναφερόμενα ως απλά συνεκτικά σύνολα, τότε καθένας από τους ισχυρισμούς (i)-(iii) του Θεωρήματος 2.4.1 είναι επίσης ισοδύναμος και προς τη συνθήκη  $P_y = Q_x$ .

Προτού όμως διατυπώσουμε το σχετικό θεώρημα, υπενθυμίζουμε τον ορισμό του απλά συνεκτικού συνόλου. Έτσι, ένα ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό (ισοδύναμα ανοικτό και παραμετρικά συνεκτικό) υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  ονομάζεται *απλά συνεκτικό*, όταν για κάθε απλή, κλειστή και τμηματικά  $C^1$  παραμετρική καμπύλη  $\Gamma$  του  $D$  έχουμε ότι το εσωτερικό  $\epsilon\sigma\Gamma$  της καμπύλης  $\Gamma$  περιέχεται στο  $D$  (δηλαδή όταν το  $D$  δεν έχει «οπές»).

Στο επόμενο θεώρημα διατυπώνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι ακριβής η Δ.Ε. (2.4.1).

**Θεώρημα 2.4.2** Έστω  $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  δύο  $C^1$  συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και απλά συνεκτικό σύνολο  $D$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(i) Η Δ.Ε. (2.4.1) είναι ακριβής.

(ii) Ισχύει

$$P_y = Q_x \quad \text{στο } D. \quad (2.4.4)$$

**Απόδειξη.** (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω  $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία  $C^1$  συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι (2.4.2). Επειδή οι  $P$  και  $Q$  είναι  $C^1$  συναρτήσεις στο  $D$ , οι (2.4.2) συνεπάγονται ότι η  $\Phi$  είναι  $C^2$  συνάρτηση και άρα ισχύει

$$\Phi_{xy} = \Phi_{yx},$$

οπότε έχουμε

$$P_y = \Phi_{xy} = \Phi_{yx} = Q_x.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Αρχικά αναζητούμε συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  για την οποία ισχύει

$$(\alpha) \quad \Phi_x(x, y) = P(x, y), \quad \forall x \in D.$$

Ολοκληρώνοντας την  $(\alpha)$  ως προς  $x$  λαμβάνουμε

$$(\beta) \quad \Phi(x, y) = \int P(x, y) dx + g(y),$$

όπου η  $g(y)$  είναι αυθαίρετη συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $y$ , η οποία επιλέγεται να είναι παραγωγίσιμη.

Από την (β) με μερική παραγωγή ως προς  $y$  ευρίσκουμε

$$(γ) \quad \Phi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + g'(y) = \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx + g'(y)$$

(Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της συνέχειας της συνάρτησης  $P$ ).

Απαιτούμε τώρα για τη συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  να ισχύει

$$(δ) \quad \Phi_y(x, y) = Q(x, y), \quad \forall x \in D,$$

οπότε από την (γ) λαμβάνουμε

$$(ε) \quad g'(y) = Q(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( Q(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx \right) &= Q_x(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int P_y(x, y) dx \\ &= Q_x(x, y) - P_y(x, y) = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή η συνάρτηση  $Q(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx$  είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $y$ .

Κατά συνέπεια, η συνάρτηση  $g(y)$  προσδιορίζεται από την (ε) με ολοκλήρωση ως προς  $y$ , δηλαδή

$$g(y) = \int \left[ Q(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx \right] dy,$$

και άρα από την (β) η αναζητούμενη συνάρτηση  $\Phi$  είναι η

$$\Phi(x, y) = \int P(x, y) dx + \int \left[ Q(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx \right] dy. \quad (2.4.5)$$

Εναλλακτικά, επίσης ευρίσκουμε

$$\Phi(x, y) = \int Q(x, y) dx + \int \left[ P(x, y) - \int \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dy \right] dx. \quad (2.4.6)$$

□

Στην πράξη όμως είναι προτιμότερο να επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αναζήτησης της  $\Phi$  παρά να απομνημονεύσουμε τους δύο τελευταίους τύπους.

*Δεύτερη απόδειξη της συνεπαγωγής (ii)  $\Rightarrow$  (i) του Θεωρήματος 2.4.2.*

Μία απλούστερη και συντομότερη απόδειξη της συνεπαγωγής επιτυγχάνεται με εφαρμογή του τύπου του Green: Έστω ένα σταθεροποιημένο σημείο  $A(x_0, y_0)$  του  $D$ . Θεωρούμε

τυχόν σημείο  $B(x, y)$  του  $D$ , δύο πολυγωνικές καμπύλες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  του  $D$  με αρχή το  $A$  και πέρασ το  $B$ , την κλειστή καμπύλη  $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$  του  $D$  και το υποσύνολο  $S = \epsilon\sigma\Gamma$  του  $D$ . Εφαρμόζοντας τον τύπο του Green, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) - \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy) &= \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) \\ &= \int_S \int (P_y - Q_x) dx dy = 0, \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι το Δ.Ε.Ο.  $\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy)$  είναι ανεξάρτητο της πολυγωνικής καμπύλης  $\Gamma$  του  $D$ . Συνεπώς, ορίζεται (καλά) η συνάρτηση

$$\Phi(x, y) = \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy), \quad (2.4.7)$$

όπου  $\Gamma$  τυχούσα πολυγωνική καμπύλη του  $D$  με αρχή το  $A$  και πέρασ το  $B$ , για την οποία διαπιστώνουμε εύκολα ότι ισχύουν

$$\Phi_x = P \quad \text{και} \quad \Phi_y = Q.$$

□

**Παρατήρηση 2.4.1** Η υπόθεση ότι το  $D$  είναι απλά συνεκτικό δεν χρειάζεται στην απόδειξη της συνεπαγωγής (i)  $\Rightarrow$  (ii) αλλά είναι απαραίτητη για την απόδειξη της συνεπαγωγής (ii)  $\Rightarrow$  (i), όπως συμπεραίνουμε από το ακόλουθο παράδειγμα.

△

**Παράδειγμα 2.4.3** Για τις συναρτήσεις

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

ισχύει  $P_y = Q_x$  αλλά δεν υπάρχει συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  με  $\Phi_x = P$  και  $\Phi_y = Q$ .

**Λύση.** Υπολογίζουμε

$$P_y = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = Q_x.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την περιφέρεια  $\Gamma$  του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο το  $(0, 0)$  που έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

και υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$



Εφόσον το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της κλειστής καμπύλης  $\Gamma$  είναι διάφορο του μηδενός δεν είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη  $\Gamma$  το οποίο, ως γνωστόν, είναι ισοδύναμο με το ότι δεν υπάρχει συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  με  $\Phi_x = P$  και  $\Phi_y = Q$ .

Στο παράδειγμα αυτό ισχύει η υπόθεση του ισχυρισμού (ii) αλλά το πεδίο ορισμού  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  των συναρτήσεων  $P$  και  $Q$  δεν είναι απλά συνεκτικό, αφού δεν περιέχει το σημείο  $(0, 0)$ .

△

Όταν το πεδίο ορισμού  $D$  των συναρτήσεων  $P$  και  $Q$  είναι ένα ανοικτό ορθογώνιο (ή ανοικτός δίσκος) του  $\mathbb{R}^2$ , τότε ισχύει το ακόλουθο

**Θεώρημα 2.4.3** Έστω  $P$  και  $Q$  δύο  $C^1$  συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό ορθογώνιο

$$R^0 = (a, b) \times (c, d), \quad -\infty \leq a < b, c < d \leq +\infty,$$

ή έναν ανοικτό δίσκο  $D$  με κέντρο το  $(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $r$ . Αν ισχύει  $P_y = Q_x$  στο  $R^0$  (ή στο  $D$ ) τότε η Δ.Ε.

$$P + Qy' = 0$$

είναι ακριβής και μία  $C^1$  συνάρτηση  $\Phi(x, y)$ , για την οποία ισχύουν  $\Phi_x = P$  και  $\Phi_y = Q$ , δίνεται από τον τύπο

$$\Phi(x, y) = \int_{\alpha}^x P(t, \beta) dt + \int_{\beta}^y Q(x, t) dt, \quad (2.4.8)$$

όπου  $(\alpha, \beta)$  είναι ένα (τυχόν σταθεροποιημένο) σημείο του  $R^0$  (ή του  $D$ ), και συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται υπό πεπλεγμένη μορφή από την

$$\Phi = c.$$

**Απόδειξη.** Έστω  $A(\alpha, \beta)$  σταθεροποιημένο σημείο του  $R^0$  και  $B(x, y)$  τυχόν σημείο του  $R^0$ . Θεωρούμε τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma(x, \beta)$  και την πολυγωνική γραμμή  $C = A\Gamma \cup \Gamma B$ , όπου τα ευθύγραμμα τμήματα  $A\Gamma$  και  $\Gamma B$  είναι παράλληλα προς του  $x$  και  $y$  άξονες αντιστοίχως και έχουν παραμετρικές παραστάσεις

$$(t, \beta), \quad \alpha \leq t \leq x \quad \text{και} \quad (x, t), \quad \beta \leq t \leq y.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο (2.4.7) στη (δεύτερη) απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2 και υπολογίζουμε το Δ.Ε.Ο.

□

**Παράδειγμα 2.4.4** Εξετάστε αν η Δ.Ε.

$$e^y + y \cos x + (xe^y + \sin x)y' = 0$$

είναι ακριβής και αν είναι βρείτε τη λύση της.

**Λύση.** Οι συναρτήσεις

$$P(x, y) = e^y + y \cos x \quad \text{και} \quad Q(x, y) = xe^y + \sin x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

είναι  $C^1$  στο (ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και) απλά συνεκτικό σύνολο  $\mathbb{R}^2$  και επιπλέον ισχύει

$$P_y = e^y + \cos x = Q_x.$$

Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα 2.4.2 η Δ.Ε. είναι πράγματι ακριβής. Έτσι, εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο (2.4.8) για το σημείο  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ , βρίσκουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_0^x dt + \int_0^y (xe^t + \sin x) dt = x + [xe^t + t \sin x]_{t=0}^y \\ &= x + xe^y + y \sin x - x = xe^y + y \sin x, \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει (υπό πεπλεγμένη μορφή) η γενική λύση

$$xe^y + y \sin x = c$$

της Δ.Ε.

△

**Παράδειγμα 2.4.5** Λύστε τη Δ.Ε.

$$e^x + y + \sin y + (e^y + x + x \cos y)y' = 0.$$

**Λύση.** Οι συναρτήσεις

$$P(x, y) = e^x + y + \sin y \quad \text{και} \quad Q(x, y) = e^y + x + x \cos y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

είναι  $C^1$  στο  $\mathbb{R}^2$  και ισχύει

$$P_y = 1 + \cos y = Q_x,$$

οπότε η Δ.Ε. είναι ακριβής, και άρα εφαρμόζοντας την (2.4.8) για το  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ , ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_0^x e^t dt + \int_0^y (e^t + x + x \cos t) dt = [e^t]_{t=0}^x + [e^t + xt + x \sin t]_{t=0}^y \\ &= e^x - 1 + e^y + xy + x \sin y - 1, \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει (υπό πεπλεγμένη μορφή) η γενική λύση

$$e^x + e^y + xy + x \sin y = c.$$

△

### Ολοκληρωτικός παράγοντας

Η κατηγορία των ακριβών Δ.Ε. δεν είναι αρκετά περιεκτική διότι η συνθήκη  $P_y = Q_x$  απαιτεί ισχυρή συσχέτιση των συναρτήσεων  $P$  και  $Q$ . Ακόμη και πολύ απλές Δ.Ε., όπως είναι επί παραδείγματι η  $(3x + 2y) + xy' = 0$ , δεν είναι ακριβείς. Όμως, όταν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση επί  $x$  τότε η νέα εξίσωση  $(3x^2 + 2yx) + x^2y' = 0$  γίνεται ακριβής.

Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο

**Ορισμός 2.4.2** Έστω μία μη ακριβής Δ.Ε.

$$P + Qy' = 0.$$

Μία συνάρτηση  $\mu = \mu(x, y)$  για την οποία η Δ.Ε.

$$\mu P + \mu Qy' = 0 \quad (2.4.9)$$

είναι ακριβής, ονομάζεται ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε.

□

Τώρα τίθεται το ερώτημα, κάτω από ποιές συνθήκες για μία μη ακριβή Δ.Ε.  $P + Qy' = 0$  υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας. Ως απάντηση στο ερώτημα, μία ικανή συνθήκη ύπαρξης ολοκληρωτικού παράγοντα αποτελεί η υπόθεση ότι η Δ.Ε. έχει μία γενική λύση  $\Phi(x, y) = c$ . Πράγματι, υποθέτουμε ότι η Δ.Ε. (2.4.1) έχει μία λύση  $\Phi(x, y) = c$ , οπότε λαμβάνουμε

$$(α) \quad \Phi_x + \Phi_y y' = 0.$$

Επιλύοντας την (α) και την (2.4.1) ως προς  $y'$ , ευρίσκουμε

$$y' = -\frac{P}{Q} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y},$$

από όπου προκύπτει

$$\frac{\Phi_y}{Q} = \frac{\Phi_x}{P} \equiv \mu,$$

η οποία επίσης γράφεται

$$\Phi_x = \mu P \quad \text{και} \quad \Phi_y = \mu Q, \quad (2.4.10)$$

δηλαδή η Δ.Ε. (2.4.9) είναι ακριβής και ισοδύναμη με την ακριβή εξίσωση (α) και κατά συνέπεια η Δ.Ε. (2.4.1) έχει έναν (τουλάχιστον) ολοκληρωτικό παράγοντα.

Υποθέτουμε τώρα ότι μία μη ακριβής Δ.Ε. έχει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα  $\mu$ . Τότε, υπάρχει μία συνάρτηση  $\Phi$  έτσι ώστε η εξίσωση  $\Phi(x, y) = c$  να περιέχει υπό πεπλεγμένη μορφή τη γενική λύση της (2.4.9). Απαλείφοντας τώρα τον ολοκληρωτικό παράγοντα  $\mu$  από την (2.4.9), παρατηρούμε ότι η  $\Phi(x, y) = c$  περιέχει επίσης τη γενική λύση της αρχικής (2.4.1). Κατά συνέπεια η συνθήκη είναι και αναγκαία.

Τα συμπεράσματα της παραπάνω ανάλυσης συνοψίζονται στην ακόλουθη

**Πρόταση 2.4.2** Έστω μία μη ακριβής Δ.Ε.  $P + Qy' = 0$ , όπου οι  $P$  και  $Q$  είναι  $C^1$  συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

- (i) Η Δ.Ε. έχει μία γενική λύση  $\Phi(x, y) = c$ .
- (ii) Υπάρχει ένας ολοκληρωτικός παράγοντας  $\mu \neq 0$  της Δ.Ε.

□

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.2, μία συνάρτηση  $\mu = \mu(x, y)$  είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε. (2.4.1) τότε και μόνο τότε όταν ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

από την οποία προκύπτει

$$\mu P_y + \mu_y P = \mu Q_x + \mu_x Q,$$

η οποία για  $\mu \neq 0$  επίσης γράφεται

$$\frac{1}{\mu}(Q\mu_x - P\mu_y) = P_y - Q_x. \quad (2.4.11)$$

Επομένως, οι ολοκληρωτικοί παράγοντες της Δ.Ε. (2.4.1) αποτελούν τις λύσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης (2.4.11) η οποία συνήθως έχει δύσκολη επίλυση.

Όμως, υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις, τις οποίες καταγράφουμε παρακάτω, όπου η διαδικασία είναι σχετικά προσιτή. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται εκείνες που η αναζητούμενη συνάρτηση  $\mu$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$  ή μόνο του  $y$  ή μόνο του  $xy$ .

Εξετάζουμε αρχικά αν η μερική διαφορική εξίσωση (2.4.11) έχει ως λύση μία συνάρτηση  $\mu = \mu(x)$ . Σχετικά, ισχύει η ακόλουθη

**Πρόταση 2.4.3** Μία μη ακριβής Δ.Ε.  $P + Qy' = 0$ , όπου οι  $P$  και  $Q$  είναι  $C^1$  συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση  $\mu = \mu(x)$  τότε και μόνο τότε όταν η  $\frac{P_y - Q_x}{Q}$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ . Στην προκειμένη περίπτωση, ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}. \quad (2.4.12)$$

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε ότι η (2.4.1) έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση  $\mu = \mu(x)$ . Τότε, έχουμε

$$\mu_x = \frac{d\mu}{dx} \quad \text{και} \quad \mu_y = 0,$$

οπότε η (2.4.11) γράφεται

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{P_y - Q_x}{Q}. \quad (2.4.13)$$

Επειδή το αριστερό μέλος της (2.4.13) είναι συνάρτηση μόνο του  $x$  πρέπει και το δεξιό μέλος της να είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ . Έτσι, θέτοντας

$$g(x) \equiv \frac{P_y - Q_x}{Q},$$

αναγόμενους στη Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu g(x),$$

η οποία έχει ως λύση τη συνάρτηση

$$\mu = e^{\int g(x) dx}.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι η  $\frac{P_y - Q_x}{Q}$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ . Τότε, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int g(x) dx},$$

για την οποία ισχύει

$$\mu_x = \frac{d\mu}{dx} = \mu \frac{P_y - Q_x}{Q}, \quad \mu_y = 0,$$

και διαπιστώνουμε εύκολα ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση  $\mu$  αποτελεί λύση της (2.4.11), το οποίο σημαίνει ότι η  $\mu$  είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της Δ.Ε.  $P + Qy' = 0$ .

□

**Παράδειγμα 2.4.6** Λύστε τη Δ.Ε.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0, \quad x > 0,$$

ευρίσκοντας έναν ολοκληρωτικό παράγοντα αυτής.

**Λύση.** Η εξίσωση δεν είναι ακριβής διότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3xy + y^2) = 3x + 2y \neq 2x + y = \frac{\partial Q}{\partial x}(x^2 + xy) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Εξετάζουμε αν η Δ.Ε. έχει ολοκληρωτικό παράγοντα συνάρτηση μόνο του  $x$ . Για αυτό υπολογίζουμε τη συνάρτηση  $\frac{P_y - Q_x}{Q}$  η οποία είναι

$$\frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}.$$

Κατα συνέπεια, η Δ.Ε. έχει ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη Δ.Ε. με  $\mu(x) = x$  και λαμβάνουμε

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0,$$

η οποία είναι ακριβής Δ.Ε.

Αναζητούμε τώρα μία συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  τέτοια ώστε

$$\Phi_x = 3x^2y + xy^2 \quad \text{και} \quad \Phi_y = x^3 + x^2y.$$

Αρχίζουμε ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς  $x$

$$\Phi = \int (3x^2y + xy^2) dx = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y).$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία ως προς  $y$  και βρίσκουμε

$$\Phi_y = x^3 + x^2y + h'(y),$$

και άρα έχουμε

$$x^3 + x^2y + h'(y) = x^3 + x^2y,$$

οπότε  $h'(y) = 0$  δηλαδή  $h(y) = c$ .

Έτσι, η γενική λύση της Δ.Ε. περιέχεται υπό πεπλεγμένη μορφή στην

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c.$$

△

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η επόμενη προτάση, η οποία δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει μία μη ακριβής Δ.Ε. ολοκληρωτικό παράγοντα συνάρτηση μόνο του  $y$ , του  $xy$ , του  $y/x$  και του  $x/y$  αντιστοίχως.

**Πρόταση 2.4.4** Έστω μία μη ακριβής Δ.Ε.  $P + Qy' = 0$ , όπου οι  $P$  και  $Q$  είναι  $C^1$  συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό, πολυγωνικά συνεκτικό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ . Τότε, ισχύουν

(i) Η Δ.Ε. έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση  $\mu = \mu(y)$  τότε και μόνο τότε όταν η  $\frac{Q_x - P_y}{P}$  είναι συνάρτηση μόνο του  $y$ , οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}. \quad (2.4.14)$$

(ii) Η Δ.Ε. έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση  $\mu = \mu(xy)$  τότε και μόνο τότε όταν η  $\frac{Q_x - P_y}{xP - yQ}$  είναι συνάρτηση μόνο του  $z = xy$ , οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(z) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} dz}. \quad (2.4.15)$$

(iii) Η Δ.Ε. έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση  $\mu = \mu(y/x)$  τότε και μόνο τότε όταν η  $\frac{x^2(Q_x - P_y)}{xP + yQ}$  είναι συνάρτηση μόνο του  $z = y/x$ , οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(z) = e^{\int \frac{x^2(Q_x - P_y)}{xP + yQ} dz}. \quad (2.4.16)$$

(iv) Η Δ.Ε. έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα μία συνάρτηση  $\mu = \mu(x/y)$  τότε και μόνο τότε όταν η  $\frac{y^2(P_y - Q_x)}{xP + yQ}$  είναι συνάρτηση μόνο του  $z = x/y$ , οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(z) = e^{\int \frac{y^2(P_y - Q_x)}{xP + yQ} dz}. \quad (2.4.17)$$

□

**Παράδειγμα 2.4.7** Αποδείξτε ότι η Δ.Ε.

$$xy^2 + (x^2y - x)y' = 0, \quad (x, y) \in R^0 = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$$

έχει ολοκληρωτικό παράγοντα ο οποίος είναι συνάρτηση του  $xy$  και βρείτε τη γενική λύσης της.

**Λύση.** Η εξίσωση δεν είναι ακριβής διότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy \neq 2xy - 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - x) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Για να αποδείξουμε ότι η Δ.Ε. έχει ολοκληρωτικό παράγοντα που είναι συνάρτηση μόνο του  $xy$ , υπολογίζουμε τη συνάρτηση

$$\frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} = \frac{2xy - 1 - 2xy}{xxy^2 - y(x^2y - x)} = -\frac{1}{xy}.$$

Άρα, σύμφωνα με τον ισχυρισμό (ii) της τελευταίας πρότασης, η Δ.Ε. έχει πράγματι ολοκληρωτικό παράγοντα που είναι συνάρτηση μόνο του  $z = xy$ , ο οποίος υπολογίζεται από τον τύπο

$$\mu(z) = e^{-\int \frac{1}{z} dz} = \frac{1}{z}.$$

Έτσι, πολλαπλασιάζουμε την αρχική Δ.Ε. με  $\mu(z) = \mu(xy) = \frac{1}{xy}$  και οδηγούμαστε στην ακριβή Δ.Ε.

$$y + \left(x - \frac{1}{y}\right) y' = 0.$$

Για να βρούμε τη γενική λύση της τελευταίας, υπολογίζουμε τη συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  από τον τύπο (2.4.8) για  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  και  $(x, y) \in \mathbb{R}^0$

$$\Phi(x, y) = \int_1^x dt + \int_1^y \left(x - \frac{1}{t}\right) dt = xy - \ln y - 1,$$

οπότε η γενική λύση της Δ.Ε. περιέχεται υπό πεπλεγμένη μορφή στην

$$xy - \ln y = c.$$

△

## 2.5 Διαφορική εξίσωση Bernoulli

Ορισμένες μη γραμμικές Δ.Ε. πρώτης τάξης μπορεί να αναχθούν σε γραμμικές εξισώσεις με κατάλληλη αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής. Επί παραδείγματι, κάθε Δ.Ε. της μορφής

$$y' + p(x)y = q(x)y^r, \quad (2.5.1)$$

όπου  $r$  ακέραιος αριθμός και  $p, q$  συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα  $I$  του  $\mathbb{R}$ , η οποία είναι γνωστή ως Δ.Ε. *Bernoulli*, είναι αυτού του τύπου.

Στις ειδικές περιπτώσεις  $r = 0$  και  $r = 1$  η (2.5.1) ανάγεται σε γραμμική εξίσωση. Στην πρώτη περίπτωση ( $r = 0$ ) έχουμε

$$y' + p(x)y = q(x),$$

η οποία είναι γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης και λύνεται με τη διαδικασία που περιγράφεται στην Παράγραφο 2.3. Στη δεύτερη περίπτωση ( $r = 1$ ) η εξίσωση γίνεται

$$y' + p(x)y = q(x)y,$$

η οποία επίσης γράφεται

$$y' = (q(x) - p(x))y,$$

που είναι χωριζομένων μεταβλητών και έχει ιδιαίζουσα λύση την  $y = 0$  και γενική λύση την

$$y = \int (q(x) - p(x))dx + c.$$

Για κάθε άλλη τιμή του  $r$  η εξίσωση γίνεται γραμμική με εφαρμογή της αντικατάστασης

$$z = y^{1-r}. \quad (2.5.2)$$

Παραγωγίζοντας ως προς  $x$  την (2.5.2), ευρίσκουμε

$$z' = \frac{dz}{dx} = (1-r)y^{-r} \frac{dy}{dx},$$



από την οποία προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-r} y^r \frac{dz}{dx} \quad (r \neq 1).$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (2.5.1), λαμβάνουμε

$$\frac{1}{1-r} y^r \frac{dz}{dx} + p(x)y = q(x)y^r,$$

από την οποία, με τη βοήθεια της (2.5.2), προκύπτει

$$\frac{1}{1-r} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x), \quad (2.5.3)$$

και έτσι καταλήγουμε στη Δ.Ε.

$$\frac{dz}{dx} + (1-r)p(x)z = (1-r)q(x), \quad (2.5.4)$$

η οποία είναι μία γραμμική Δ.Ε. ως προς  $z$ .

Η τελευταία λύνεται ως προς  $z$  με τη διαδικασία της Παραγράφου 2.3. Τέλος, θέτουμε  $z = y^{1-r}$ .

**Παράδειγμα 2.5.1** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{5}{2}x^2y^3, \quad x \neq 0.$$

**Λύση.** Εδώ, έχουμε Δ.Ε. Bernoulli με  $r = 3$ . Έτσι, θέτουμε  $z = y^{-2}$ , οπότε  $z' = -2y^{-3}y'$  και οδηγούμαστε στη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης ως προς  $z$

$$z' + \frac{2z}{x} = 5x^2.$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας για αυτή τη γραμμική εξίσωση είναι

$$\mu(x) = e^{2 \int \frac{dx}{x}} = e^{2 \ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας Δ.Ε. με  $x^2$ , έχουμε

$$(x^2z)' = x^2z' + 2xz = 5x^4,$$

οπότε

$$x^2z = 5 \int x^4 dx = x^5 + c,$$

από την οποία ευρίσκουμε

$$y^{-2} = z = x^3 + cx^{-2}.$$

△

**Παράδειγμα 2.5.2** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}, \quad y(0) = 2.$$

**Λύση.** Η Δ.Ε. του Π.Α.Τ. είναι Bernoulli με  $r = -3$ . Θέτουμε  $z = y^4$ , οπότε  $z' = 4y^3y'$  και έτσι η αρχική Δ.Ε. ανάγεται στην

$$z' + 4xz = 4x.$$

Η τελευταία είναι γραμμική ως προς  $z$  και έχει ως ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int 4x dx} = e^{2x^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας Δ.Ε. με  $e^{2x^2}$ , ευρίσκουμε

$$(e^{2x^2} z)' = e^{2x^2} z' + 4xe^{2x^2} z = 4xe^{2x^2},$$

οπότε

$$e^{2x^2} z = \int 4xe^{2x^2} dx = e^{2x^2} + c,$$

δηλαδή

$$z = 1 + ce^{-2x^2}.$$

Άρα, έχουμε

$$y^4 = 1 + ce^{-2x^2}$$

και εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη  $y(0) = 2$ , ευρίσκουμε  $c = 15$ , και κατά συνέπεια η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y^4 = 1 + 15e^{-2x^2}.$$

△

**Παράδειγμα 2.5.3** Λύστε τη Δ.Ε.

$$I'(t) = \rho I(t) - \frac{\rho}{K}(I(t))^2,$$

η οποία μοντελοποιεί τη διάχυση της πληροφορίας σε κοινωνικά δίκτυα (βλ. Παράγραφο 1.2).

**Λύση.** Έχουμε Δ.Ε. Bernoulli με  $r = 2$ . Θέτουμε  $z = I^{-1}$ , οπότε  $z' = -I^{-2}I'$  και αναγόμεστε στη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης ως προς  $z$

$$z' = -\rho z + \frac{\rho}{K},$$

η οποία έχει ως λύση

$$z = \frac{1}{K} + c e^{-\rho t},$$

(όπου  $c$  αυθαίρετη πραγματική σταθερά) από όπου ευρίσκουμε

$$I(t) = \frac{K e^{\rho t}}{cK + e^{\rho t}}.$$

△

## 2.6 Διαφορική εξίσωση Ricatti

Δ.Ε. της μορφής

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x), \quad (2.6.1)$$

όπου  $p, q, r$  συνεχείς συναρτήσεις σε ένα  $I \subseteq \mathbb{R}$  καλούνται *Δ.Ε. Ricatti*.

Αν είναι γνωστή μία μερική λύση  $y_1$  της (2.6.1), τότε θα δείξουμε ότι με το μετασχηματισμό

$$y = y_1 + u, \quad (2.6.2)$$

η (2.6.1) ανάγεται σε Δ.Ε. Bernoulli ως προς  $u$ .

Πράγματι, εισάγοντας την (2.6.2) στην (2.6.1) λαμβάνουμε

$$y_1' + u' + p(x)(y_1 + u) + q(x)(y_1 + u)^2 = r(x). \quad (2.6.3)$$

Επειδή όμως η  $y_1$  ικανοποιεί την (2.6.1), ισχύει

$$y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 = r(x),$$

και άρα η (2.6.3) γράφεται

$$u' + (p(x) + 2q(x)y_1)u = -q(x)u^2, \quad (2.6.4)$$

που είναι Δ.Ε. Bernoulli της μορφής (2.5.1) ως προς  $u$ .

**Παράδειγμα 2.6.1** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' = (y - x)^2 + 1, \quad y(0) = \frac{1}{2},$$

αν μία μερική λύση της Δ.Ε. είναι η  $y_1 = x$ .

**Λύση.** Κάνουμε το μετασχηματισμό (2.6.2)

$$y = x + u,$$

οπότε

$$y' = 1 + u'$$

και η Δ.Ε. παίρνει τη μορφή

$$u' = u^2,$$

η οποία είναι Δ.Ε. Bernoulli (είναι επίσης και χωριζομένων μεταβλητών).

Η  $u = 0$  είναι λύση της τελευταίας. Αν  $u \neq 0$ , θέτουμε  $z = u^{-1}$  οπότε  $z' = -u^{-2}u'$  και η Δ.Ε. ανάγεται στην

$$z' = -1,$$

η οποία έχει τη γενική λύση

$$z = -x + c,$$

και έτσι

$$u = \frac{1}{-x + c}.$$

Επειδή η ιδιάζουσα λύση  $u = 0$  δεν περιλαμβάνεται στην τελευταία, οι λύσεις της εξίσωσης Bernoulli είναι

$$u = 0 \quad \text{και} \quad u = \frac{1}{-x + c},$$

επομένως οι λύσεις της δοθείσας Δ.Ε. Ricatti είναι

$$y = x \quad \text{και} \quad y = x + \frac{1}{-x + c}.$$

Η λύση  $y = x$  δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $y(0) = \frac{1}{2}$ . Από τη γενική λύση έχουμε

$$y(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{c},$$

οπότε  $c = 2$ , και έτσι η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y = x + \frac{1}{2 - x}.$$

△

**Παράδειγμα 2.6.2** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' + y - y^2 = -2,$$

αν μία μερική λύση της είναι η  $y_1 = 2$ .

**Λύση.** Κάνουμε το μετασχηματισμό (2.6.2)

$$y = 2 + u,$$

οπότε  $y' = u'$ , και η  $\Delta.E.$  παίρνει τη μορφή

$$u' - 3u = u^2,$$

η οποία είναι  $\Delta.E.$  Bernoulli.

Η  $u = 0$  είναι λύση της τελευταίας, η οποία οδηγεί στην ήδη γνωστή λύση  $y = y_1 = 2$ . Αν  $u \neq 0$ , θέτουμε  $z = u^{-1}$  οπότε  $z' = -u^{-2}u'$  και η  $\Delta.E.$  ανάγεται στην

$$z' = -3z - 1,$$

η οποία είναι γραμμική  $\Delta.E.$  πρώτης τάξης και, ακολουθώντας τις τεχνικές της Παραγράφου 2.3, βρίσκουμε ότι έχει τη γενική λύση

$$z = -\frac{1}{3} + ce^{-3x}.$$

Έτσι, η γενική λύση της εξίσωσης Bernoulli είναι

$$u = \frac{1}{-\frac{1}{3} + ce^{-3x}},$$

και άρα η γενική λύση της δοθείσας  $\Delta.E.$  Ricatti είναι

$$y = 2 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + ce^{-3x}}.$$

△

## 2.7 Ασκήσεις

**Άσκηση 2.7.1** Λύστε τη  $\Delta.E.$

$$x^2y' - y(x - y) = 0, \quad x \neq 0.$$

**Άσκηση 2.7.2** Λύστε τη  $\Delta.E.$

$$xyy' - (x^2 + y^2) = 0, \quad x \neq 0.$$

**Άσκηση 2.7.3** Λύστε τη  $\Delta.E.$

$$(x + y)y' - x + y = 0, \quad x \neq 0.$$

**Άσκηση 2.7.4** Λύστε τη Δ.Ε.

$$xyy' + x^2 - y^2 = 0, \quad x \neq 0.$$

**Άσκηση 2.7.5** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$(y - x)y' + 2(x + 2y) = 0, \quad x \neq 0, \quad y(1) = 0.$$

**Άσκηση 2.7.6** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' - \frac{2}{x}y = x^3, \quad x \neq 0.$$

**Άσκηση 2.7.7** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' - y = e^x.$$

**Άσκηση 2.7.8** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' - \frac{1}{x \ln x}y = x \ln x, \quad x > 0, \quad y(\sqrt{e}) = \frac{e}{4}.$$

**Άσκηση 2.7.9** Λύστε τη Δ.Ε.

$$x^2(y^2 - 1) - y(x^3 - 1)y' = 0.$$

**Άσκηση 2.7.10** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' \sin x - y \ln y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

**Άσκηση 2.7.11** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' - 2y = x.$$

**Άσκηση 2.7.12** Λύστε τη Δ.Ε.

$$(x + y)y' - (x - y) = 0.$$

**Άσκηση 2.7.13** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' + xy = xy^3.$$

Άσκηση 2.7.14 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' - \frac{1}{2x}y = x^3y^5, \quad x \neq 0.$$

Άσκηση 2.7.15 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2, \quad x > 0.$$

Άσκηση 2.7.16 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2, \quad x > 0, \quad y(2) = -1.$$

Άσκηση 2.7.17 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' - 5y = e^{-2x}y^{-2}, \quad y(0) = 2.$$

Άσκηση 2.7.18 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$6y' - 2y = xy^4, \quad y(0) = -2.$$

Άσκηση 2.7.19 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{y}, \quad x > 0, \quad y(1) = 0.$$

Άσκηση 2.7.20 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad x > 0, \quad y(1) = 2,$$

αν μία λύση της Δ.Ε. είναι η  $y_1 = \frac{1}{x}$ .

Άσκηση 2.7.21 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{y^2}{2 \cos x} + \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x}{2 \cos x}, \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = -1,$$

αν μία λύση της Δ.Ε. είναι η  $y_1 = \sin x$ .

# Βιβλιογραφία

- [1] Ν. Δ. Αλικιάκος και Γ. Η. Καλογερόπουλος, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2007.
- [2] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.
- [3] Γ. Δάσιος, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1991.
- [4] S. I. Grossman, *Multivariable Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations, 2<sup>nd</sup> Edition*, Academic Press, Orlando, 1986.
- [5] B. E. Shapiro, *Lecture Notes in Differential Equations*, California State University, Northridge, 2011.
- [6] Σ. Τραχανάς, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας, Ηράκλειο Κρήτης, 2010.
- [7] Λ. Ν. Τσίτσας, *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός, 2<sup>η</sup> Έκδοση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2003.



## Κεφάλαιο 3

# Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών πρώτης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνουμε τα βασικά θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων Π.Α.Τ. πρώτης τάξης. Εισαγωγικά, συζητούμε τη σκοπιμότητα και τη χρησιμότητα των θεωρημάτων αυτών απαντώντας στα ερωτήματα

- Γιατί χρειάζεται να διατυπώσουμε θεωρήματα ύπαρξης λύσεων, ειδικότερα αν γνωρίζουμε ότι η Δ.Ε. μοντελοποιεί φυσικό πρόβλημα το οποίο έχει μία λύση;
- Γιατί πρέπει να ελέγχουμε τη μοναδικότητα των λύσεων;

Για να απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα είναι σημαντικό να θυμηθούμε ότι μία Δ.Ε. είναι μόνο ένα μοντέλο ενός φυσικού προβλήματος. Είναι δυνατόν η Δ.Ε. να είναι κακό μοντέλο, τόσο κακό ώστε πράγματι να μην έχει λύση. Θα μπορούσαμε να δαπανήσουμε μεγάλο χρόνο αναζητώντας μία λύση, με τις τεχνικές που έχουμε αναπτύξει, η οποία μπορεί και να μην υπάρχει. Έτσι, τα θεωρήματα ύπαρξης δεν έχουν μόνο θεωρητική αξία στο να απαντούν ποιές Δ.Ε. έχουν λύση, αλλά είναι επίσης χρήσιμα στη διατύπωση σωστών μαθηματικών μοντέλων φυσικών προβλημάτων.

Ομοίως, τα θεωρήματα μοναδικότητας προσφέρουν τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά συμπεράσματα. Όταν γνωρίζουμε ότι ένα πρόβλημα έχει μοναδική λύση τότε μόλις βρούμε μία λύση, έχουμε τελειώσει. Αν η λύση δεν είναι μοναδική τότε δεν μπορούμε να μιλάμε για τη λύση, αλλά πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο ποιά λύση είναι υπό αναζήτηση. Στην πράξη αν το φυσικό πρόβλημα έχει μοναδική λύση τότε οποιοδήποτε «σωστό» μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος πρέπει να έχει και αυτό μοναδική λύση.

### 3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Έστω μία πραγματική συνάρτηση  $f = f(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  και  $(x_0, y_0)$  ένα σημείο του  $D$ . Έστω, ακόμη,  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  με  $(x_0, y_0) \in S$  και  $S \subseteq D$ . Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \text{ στο } S. \quad (3.1.1)$$

Μία παραγωγίσιμη συνάρτηση  $\phi = \phi(x) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  σε ένα διάστημα  $I$  για την οποία ισχύουν

$$\begin{aligned} \text{το γράφημα } \Gamma(\phi) &= \{(x, \phi(x)) : x \in I\} \subseteq S \\ \phi'(x) &= f(x, \phi(x)), \quad \forall x \in I \\ \phi(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

ονομάζεται λύση του Π.Α.Τ. (3.1.1) στο  $S$  (η οποία διέρχεται από το σημείο  $(x_0, y_0)$ ).

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης ενός Π.Α.Τ. εξαρτώνται τόσο από τη συνάρτηση  $f(x, y)$  όσο και από την αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ . Υπάρχουν Π.Α.Τ τα οποία έχουν λύση, έχουν μοναδική λύση ή δεν έχουν λύση, ακόμα και όταν αντιστοιχούν στην ίδια συνάρτηση  $f(x, y)$ , όπως φαίνεται στο ακόλουθο

**Παράδειγμα 3.1.1** Εξετάστε αν το Π.Α.Τ.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x, y) \in R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b],$$

όπου

$$f(x, y) = \frac{2y}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad f(0, y) = y$$

έχει λύση.

**Λύση.**

Η Δ.Ε.  $y' = \frac{2y}{x}$ ,  $x \neq 0$  είναι χωριζομένων μεταβλητών και έχει ως γενική λύση την οικογένεια

$$y = Cx^2, \quad x \neq 0 \quad \text{με } C \text{ σταθερά.}$$

Διακρίνουμε τις τρεις περιπτώσεις

(i)  $x_0 = 0$  και  $y_0 \neq 0$ . Υποθέτουμε ότι το Π.Α.Τ. έχει μία λύση  $y = \phi(x)$ ,  $x \in [-a, a]$ ,  $a > 0$ . Τότε υπάρχει σταθερά  $C_\phi$  με

$$\phi(x) = C_\phi x^2, \quad x \in (0, a].$$

Όμως, η  $\phi$  ως λύση του Π.Α.Τ. είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , οπότε

$$\phi(x_0) = \phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (C\phi x^2) = 0 \neq y_0 = \phi(x_0), \text{ αντίφαση.}$$

Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση το Π.Α.Τ. δεν έχει λύση.

(ii)  $x_0 = 0$  και  $y_0 = 0$ . Κάθε συνάρτηση

$$y = \phi(x) = Cx^2, \quad x \in [-a, a], \quad a > 0,$$

με  $C$  σταθερά, είναι λύση του Π.Α.Τ. Πράγματι, παρατηρούμε ότι ισχύουν

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad x \neq 0$$

και

$$\phi'(0) = 0 = \phi(0) = f(0, \phi(0)).$$

Έτσι, το Π.Α.Τ. έχει άπειρες λύσεις.

(iii)  $x_0 \neq 0$ . Το Π.Α.Τ. έχει στο ορθογώνιο  $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ , όπου  $0 < a \leq |x_0|$ , τη μοναδική λύση

$$y = \phi(x) = \frac{y_0}{x_0^2} x^2.$$

△

**Λήμμα 3.1.1** Έστω  $f = f(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0)$  ένα σημείο του  $D$  και ένα ορθογώνιο

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq D, \quad \text{όπου } a, b > 0.$$

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $R$ , τότε για μία πραγματική συνάρτηση  $\phi = \phi(x) : I \subseteq [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $I$  διάστημα του  $\mathbb{R}$  με  $x_0 \in I$  και  $(x, \phi(x)) \in R, \forall x \in I$ , οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

(α) Η  $\phi$  είναι λύση του Π.Α.Τ. (3.1.1) στο  $R$ , δηλαδή ισχύει

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad x \in I \text{ και } \phi(x_0) = y_0. \quad (3.1.2)$$

(β) Η  $\phi$  είναι συνεχής και επαληθεύει την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds, \quad x \in I. \quad (3.1.3)$$

**Απόδειξη.**

(α)  $\Rightarrow$  (β) Η συνάρτηση  $\phi$  ως λύση της Δ.Ε. είναι παραγωγίσιμη άρα συνεχής, οπότε και η συνάρτηση

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad x \in I$$

είναι επίσης συνεχής (ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων). Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της (3.1.2) και εφαρμόζοντας το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, λαμβάνουμε

$$\phi(x) - \phi(x_0) = \int_{x_0}^x \phi'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds, \quad x \in I,$$

από την οποία προκύπτει η (3.1.3).

(β)  $\Rightarrow$  (α) Αφού η συνάρτηση  $\phi$  είναι συνεχής από την υπόθεση, η συνάρτηση  $f(x, \phi(x))$ ,  $x \in I$  είναι επίσης συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (3.1.3) και εφαρμόζοντας το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, λαμβάνουμε την (3.1.2).

□

Η ολοκληρωτική εξίσωση (3.1.3) αναφέρεται ως η ισοδύναμη της Δ.Ε. (3.1.2) (υπό την έννοια ότι έχουν τις ίδιες συνεχείς λύσεις).

## 3.2 Επαναλήψεις Picard

Η επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.1.3) είναι συνήθως δυσκολότερη από εκείνη της Δ.Ε. Όμως, υπάρχει μία κατασκευαστική μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων, γνωστή και ως μέθοδος *Picard*, η οποία περιγράφεται παρακάτω και χρησιμοποιείται, υπό ορισμένες γενικές προϋποθέσεις, για την απόδειξη της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεων της ολοκληρωτικής εξίσωσης και υπολογίζει επίσης τη μοναδική λύση.

**Λήμμα 3.2.1** Έστω  $f = f(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  και  $(x_0, y_0)$  ένα σημείο του  $D$  και ένα ορθογώνιο

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq D.$$

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο ορθογώνιο  $R$  τότε υπάρχει  $\delta > 0$  με  $\delta \leq a$  έτσι ώστε να ορίζεται

αναδρομικά στο διάστημα  $I_\delta \equiv [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  η ακολουθία

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= y_0 \\ \phi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_0(s)) ds \\ \phi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_1(s)) ds \\ &\vdots \\ \phi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_n(s)) ds\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

των συνεχών συναρτήσεων  $\phi_n : I_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει

$$|\phi_n(x) - y_0| \leq b, \quad \forall x \in I_\delta, \quad n = 0, 1, \dots$$

### Απόδειξη.

Αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $R$  (το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο) είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή υπάρχει ένα  $M > 0$  με

$$(\alpha) \quad |f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in R.$$

Επιλέγουμε ένα  $\delta > 0$  με

$$(\beta) \quad \delta \leq \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Θα αποδείξουμε με επαγωγική διαδικασία ότι οι συναρτήσεις  $\phi_n$  είναι καλά ορισμένες στο  $I_\delta$ , είναι συνεχείς και ισχύουν οι (3.2.1).

Πράγματι, η  $\phi_0$  είναι συνεχής (ως σταθερή) και ισχύει  $|\phi_0(x) - y_0| = 0 < \delta$ . Υποθέτουμε τώρα ότι ορίζεται στο  $I_\delta$  η συνάρτηση  $\phi_n$ , είναι συνεχής και ισχύει

$$|\phi_n(x) - y_0| \leq b, \quad \forall x \in I_\delta$$

και παρατηρούμε (με τη βοήθεια των θεμελιωδών θεωρημάτων του Απειροστικού Λογισμού) ότι ορίζεται το ολοκλήρωμα  $\int_{x_0}^x f(s, \phi_n(s)) ds$  (αφού η συνάρτηση  $f(x, \phi_n(x))$ ,  $x \in I_\delta$  είναι συνεχής) και ως συνάρτηση είναι συνεχής. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ορίζεται η  $\phi_{n+1}$  και είναι συνεχής στο  $I_\delta$ .

Τώρα, για  $x \in I_\delta$ , υπολογίζουμε, λαμβάνοντας υπόψη και τις (α) και (β),

$$\begin{aligned}|\phi_{n+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, \phi_n(s)) ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, \phi_n(s))| ds \right| \\ &\leq M \left| \int_{x_0}^x ds \right| = M|x - x_0| \leq M\delta \leq M \frac{b}{M} = b.\end{aligned}$$

□

Οι συναρτήσεις  $\phi_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , οι οποίες ορίζονται από την επαναληπτική διαδικασία (3.2.1) αναφέρονται ως *επαναλήψεις Picard*. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, οι επαναλήψεις Picard  $\phi_n$  αποτελούν προσεγγίσεις της λύσης του Π.Α.Τ. στο οποίο αναφέρονται.

**Παράδειγμα 3.2.1** Προσδιορίστε την ακολουθία των επαναλήψεων Picard του Π.Α.Τ.

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1$$

σε (τυχόν) ορθογώνιο  $R = [-a, a] \times [1 - b, 1 + b] \subseteq \mathbb{R}^2$ .

**Λύση.**

Το Π.Α.Τ. έχει τη μοναδική λύση  $\phi(x) = e^x$ .

Εφαρμόζοντας την επαγωγική διαδικασία (3.2.1), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 1 \\ \phi_1(x) &= 1 + \int_0^x (1) ds = 1 + x \\ \phi_2(x) &= 1 + \int_0^x (1 + s) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\ \phi_3(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \\ &\vdots \\ \phi_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ιδιαίτερος, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

δηλαδή η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. συμπίπτει με την οριακή συνάρτηση της ακολουθίας των προσεγγίσεων Picard.

△

### 3.3 Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης

Η συνέχεια της συνάρτησης  $f(x, y)$  αποτελεί ικανή συνθήκη ύπαρξης λύσης ενός Π.Α.Τ. πρώτης τάξης, όπως συνάγεται από το ακόλουθο βασικό

#### Θεώρημα 3.3.1 (Peano). Ύπαρξης λύσης Π.Α.Τ. πρώτης τάξης

Έστω  $f = f(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  και  $(x_0, y_0)$  ένα σημείο του  $D$ . Θεωρούμε ένα ορθογώνιο

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq D,$$

όπου  $a, b > 0$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο ορθογώνιο  $R$ , τότε υπάρχει μία λύση του Π.Α.Τ. (3.1.1) στο  $R$ , δηλαδή υπάρχει μία παραγωγίσιμη συνάρτηση  $\phi = \phi(x) : I \subseteq [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\phi(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ , έτσι ώστε να ισχύουν

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad \forall x \in I \text{ και } \phi(x_0) = y_0.$$

□

Το Θεώρημα Peano δεν εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσεως, όπως προκύπτει από το ακόλουθο

#### Παράδειγμα 3.3.1 Εξετάστε αν το Π.Α.Τ.

$$y'(x) = \sqrt{y(x)}, \quad y(1) = 1, \quad (x, y) \in R = [1 - a, 1 + a] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

έχει μοναδική λύση.

#### Λύση.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, ευρίσκουμε ότι η Δ.Ε. του Π.Α.Τ. έχει τις λύσεις

$$y(x) = \frac{1}{4}(x + c)^2.$$

Από την αρχική συνθήκη, έχουμε

$$(1 + c)^2 = 4,$$

από όπου προκύπτει ότι  $c = 1$  ή  $c = -3$ .

Άρα, το Π.Α.Τ. έχει τις δύο λύσεις

$$y_1(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2 \text{ και } y_2(x) = \frac{1}{4}(x - 3)^2.$$

△

**Παράδειγμα 3.3.2** Εξετάστε αν το Π.Α.Τ.

$$y'(x) = 3(y(x))^{2/3}, \quad y(0) = 0, \quad (x, y) \in R = [-a, a] \times [-b, b] \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \text{για } b > a^3$$

έχει μοναδική λύση.

**Λύση.**

Παρατηρούμε ότι το Π.Α.Τ. έχει την ιδιάζουσα λύση  $y_1(x) = 0$ . Εξάλλου, εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών για  $y \neq 0$ , ευρίσκουμε ότι το Π.Α.Τ. έχει και τη λύση  $y_2(x) = x^3$ .

Εδώ, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει η  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$  στο  $(0,0)$ .

△

Η διαδικασία επεξεργασίας του Παραδείγματος 3.2.1 συνιστά γενική μέθοδο εύρεσης λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.1.3), η οποία διατυπώνεται με ακρίβεια στο ακόλουθο πολύ βασικό

**Λήμμα 3.3.1** Έστω  $f = f(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0)$  ένα σημείο του  $D$  και ένα ορθογώνιο

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq D.$$

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο ορθογώνιο  $R$  και υπάρχει η  $\frac{\partial f}{\partial y}$  και είναι συνεχής στο  $R$ , τότε υπάρχει  $\delta > 0$  με  $\delta \leq a$ , έτσι ώστε για την ακολουθία  $\phi_n : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , των επαναλήψεων Picard, η οποία ορίζεται στο Λήμμα 3.2.1, να ισχύουν οι ιδιότητες

(α) Η ακολουθία  $(\phi_n)$  συγκλίνει σημειακά στο  $R$ , δηλαδή

$$\text{υπάρχει το } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) \text{ στο } \mathbb{R}, \quad \forall x \in R.$$

(β) Η οριακή συνάρτηση  $\phi : R \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x)$  είναι συνεχής στο  $R$ .

(γ) Η ολοκληρωτική εξίσωση (3.1.3) έχει ως μοναδική λύση τη συνάρτηση  $\phi$  που ορίζεται στο (β).

□



**Θεώρημα 3.3.2 (Picard-Lindelöf).** Ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης Π.Α.Τ. πρώτης τάξης

Έστω  $f = f(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  και  $(x_0, y_0)$  ένα σημείο του  $D$ . Θεωρούμε ένα ορθογώνιο

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq D,$$

όπου  $a, b > 0$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο ορθογώνιο  $R$  και συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς  $y$  στο  $R$ , δηλαδή υπάρχει η μερική παράγωγος  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  για κάθε  $(x, y) \in R$  και η συνάρτηση  $\frac{\partial f}{\partial y}$  είναι συνεχής στο  $R$ , τότε το Π.Α.Τ. (3.1.1) έχει μοναδική λύση στο  $R$ .

**Απόδειξη.** Από το Λήμμα 3.3.1 συνάγεται ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (3.1.3) έχει ως μοναδική λύση την οριακή συνάρτηση

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x), \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

η οποία είναι συνεχής. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.1, το Π.Α.Τ θα έχει επίσης τη συνάρτηση  $\phi$  ως μοναδική λύση.

□

**Παρατήρηση 3.3.1** Είναι φανερό ότι μπορούμε να διατυπώσουμε επίσης δύο αντίστοιχα θεωρήματα, όταν αντικαταστήσουμε στο ορθογώνιο  $R$  το διάστημα  $[x_0 - a, x_0 + a]$  με τα διαστήματα (i)  $[x_0, x_0 + a]$  και (ii)  $[x_0 - a, x_0]$ , τα οποία εξασφαλίζουν μοναδική λύση του Π.Α.Τ. (3.1.1) στα διαστήματα  $[x_0, x_0 + a]$  και  $[x_0 - a, x_0]$ , αντιστοίχως.

△

Η υπόθεση του Θεωρήματος 3.3.2 ότι υπάρχει η  $\frac{\partial f}{\partial y}$  και είναι συνεχής δεν είναι αναγκαία, όπως φαίνεται από το ακόλουθο

**Παράδειγμα 3.3.3** Το Π.Α.Τ.

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 1, \quad (x, y) \in R = [-1, 1] \times [0, 2]$$

έχει μοναδική λύση αλλά δεν υπάρχει η  $\frac{\partial f}{\partial y}$  στο  $(x, 0)$ .

**Λύση.** Η Δ.Ε. έχει τις λύσεις  $y_1(x) = 0$  και  $y_2(x) = (x + c)^3$ , όπου  $c$  αυθαίρετη σταθερά. Άρα το Π.Α.Τ. έχει τη μοναδική λύση

$$y(x) = (x + 1)^3.$$

Όμως, πράγματι δεν υπάρχει η  $\frac{\partial f}{\partial y}$  στο  $(x, 0)$ .

△

Όταν για ένα δοσμένο Π.Α.Τ. ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.2, τότε το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση, ο προσδιορισμός της μοναδικής λύσης επιτυγχάνεται συνήθως στην πράξη είτε με επίλυση της Δ.Ε. του Π.Α.Τ. με εφαρμογή τεχνικών επίλυσης, οι οποίες έχουν αναπτυχθεί στις προηγούμενες παραγράφους, είτε με χρήση των επαναλήψεων Picard και εφαρμογή της διαδικασίας η οποία περιγράφεται στο Λήμμα 3.3.1. Η επιλογή της μεθόδου εξαρτάται από τα δεδομένα του συγκεκριμένου Π.Α.Τ. Όταν πρόκειται για πολύπλοκα Π.Α.Τ. αρκούμαστε συνήθως στην αναζήτηση επιθυμητών προσεγγίσεων της λύσης μέσω των επαναλήψεων Picard.

**Παράδειγμα 3.3.4** Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ.

$$y' = 2y, \quad y(0) = 1, \quad (x, y) \in R = [-1, 1] \times [0, 2]$$

έχει μοναδική λύση και προσδιορίστε την με επίλυση της Δ.Ε.

**Λύση.** Το Π.Α.Τ. πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.2 και επομένως έχει μοναδική λύση.

Η Δ.Ε. του Π.Α.Τ. είναι χωριζομένων μεταβλητών και έχει τις λύσεις  $y(x) = ce^{2x}$ , όπου  $c$  αυθαίρετη σταθερά. Οπότε το Π.Α.Τ. θα έχει τη μοναδική λύση  $y(x) = e^{2x}$ .

△

**Παράδειγμα 3.3.5** Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ.

$$y' = 2x(1 + y), \quad y(0) = 0, \quad (x, y) \in R = [-a, a] \times [-b, b]$$

έχει μοναδική λύση και προσδιορίστε την με τη βοήθεια των επαναλήψεων Picard.

**Λύση.** Για το Π.Α.Τ. ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.2 και άρα έχει μοναδική λύση.

Εφαρμόζοντας την επαγωγική διαδικασία (3.2.1), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= 0 \\ \phi_1(x) &= \int_0^x (2s) ds = x^2 \\ \phi_2(x) &= \int_0^x (2s(1+s^2)) ds = x^2 + \frac{x^4}{2} \\ \phi_3(x) &= \int_0^x \left( 2s \left( 1 + s^2 + \frac{s^4}{2} \right) \right) ds = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} \\ &\vdots \\ \phi_n(x) &= x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{k!}.\end{aligned}$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2} - 1,$$

οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.1, η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\phi(x) = e^{x^2} - 1.$$

△

**Παράδειγμα 3.3.6** Αποδείξτε ότι το Π.Α.Τ.

$$y' = 2x - y, \quad y(0) = 1, \quad (x, y) \in R = [-a, a] \times [1 - b, 1 + b]$$

έχει μοναδική λύση και υπολογίστε τις τέσσερις πρώτες προσεγγίσεις Picard.

**Λύση.** Το Π.Α.Τ. πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.2 και επομένως έχει μοναδική λύση.

Υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις Picard

$$\begin{aligned}
 \phi_0(x) &= 1 \\
 \phi_1(x) &= 1 + \int_0^x (2s - 1) ds \\
 &= 1 - x + x^2 \\
 \phi_2(x) &= 1 + \int_0^x (2s - (1 - s + s^2)) ds \\
 &= 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\
 \phi_3(x) &= 1 + \int_0^x \left( 2s - \left( 1 - s + \frac{3s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right) \right) ds \\
 &= 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} \\
 \phi_4(x) &= 1 + \int_0^x \left( 2s - \left( 1 - s + \frac{3s^2}{2} - \frac{s^3}{2} + \frac{s^4}{3 \cdot 4} \right) \right) ds \\
 &= 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5}.
 \end{aligned}$$

△

**Ορισμός 3.3.1** Έστω  $f = f(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  και ένα ορθογώνιο

$$R = [a, b] \times [c, d] \subseteq D.$$

Η  $f$  ονομάζεται *συνάρτηση Lipschitz* ως προς  $y$  στο  $R$ , όταν υπάρχει  $K > 0$  έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \text{ για κάθε } (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

□

**Παράδειγμα 3.3.7** Η συνάρτηση

$$f(x, y) = y^{2/3}, \quad (x, y) \in R = [-1, 1] \times [0, 2]$$

δεν είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R$ .

**Λύση.** Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό με διαδικασία αντίφασης. Έτσι, υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι Lipschitz στο  $R$ , δηλαδή υπάρχει  $K > 0$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

Επιλέγοντας  $y_2 = 0$  και  $y_1 \neq 0$ , η τελευταία ανάγεται στην

$$|y_1^{2/3}| \leq K|y_1|,$$

δηλαδή

$$\left| \frac{y_1^{2/3}}{y_1} \right| = y_1^{-1/3} \leq K,$$

οπότε έχουμε

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} y_1^{-1/3} = +\infty \leq K,$$

αντίφαση (αφού το  $K$  είναι πραγματικός αριθμός).

△

Με παρόμοια διαδικασία επεξεργαζόμαστε επίσης και το ακόλουθο

**Παράδειγμα 3.3.8** Η συνάρτηση

$$f(x, y) = x\sqrt{1-y^2}, \quad (x, y) \in R = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

δεν είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R$ .

△

**Θεώρημα 3.3.3** Έστω  $f = f(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  και ένα ορθογώνιο

$$R = [a, b] \times [c, d] \subseteq D.$$

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $R$  και συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς  $y$  στο  $R$ , τότε η  $f$  είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R$ .

**Απόδειξη.**

Η συνάρτηση  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , ως συνεχής στο κλειστό και φραγμένο ορθογώνιο  $R$ , είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει  $K \geq 0$  με

$$(\alpha) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq K, \quad \forall (x, y) \in R.$$

Έστω τώρα ένα σταθεροποιημένο σημείο  $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\phi(y) = f(x, y)$ ,  $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$  και τα σημεία  $(x, y_1)$  και  $(x, y_2)$  του ορθογωνίου  $R$ . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση  $\phi$  για τα σημεία  $y_1$  και  $y_2$ , έχουμε

$$(\beta) \quad f(x, y_1) - f(x, y_2) = \phi(y_1) - \phi(y_2) = \frac{d\phi(\hat{y})}{dy}(y_1 - y_2) = \frac{\partial f(x, \hat{y})}{\partial y}(y_1 - y_2),$$

όπου  $\hat{y}$  εσωτερικό σημείο του κλειστού διαστήματος με άκρα τα σημεία  $y_1$  και  $y_2$ . Συνδυάζοντας τις  $(\beta)$  και  $(\alpha)$ , ευρίσκουμε

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f(x, \hat{y})}{\partial y} \right| |y_1 - y_2| \leq K |y_1 - y_2|,$$

και άρα πράγματι η  $f$  είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R$ .

□

Η υπόθεση του τελευταίου θεωρήματος δεν είναι αναγκαία, όπως συνάγεται από το ακόλουθο

**Παράδειγμα 3.3.9** Η συνάρτηση

$$f(x, y) = x|y|, \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d]$$

είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R$ , αλλά δεν υπάρχει η  $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y}$ ,  $x \neq 0$ .

**Λύση.** Για  $(x, y_1), (x, y_2) \in R$  υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |x| \left| |y_1| - |y_2| \right| \leq |x| |y_1 - y_2| \\ &\leq (|a| + |b|) |y_1 - y_2| = K |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

για  $K = |a| + |b|$ .

Έτσι, επιλέγοντας π.χ. το ορθογώνιο  $R_1 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , έχουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R_1$ , αλλά δεν υπάρχει η  $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y}$  για  $x \in [-1, 1]$  με  $x \neq 0$ .

△

**Παρατήρηση 3.3.2** Αποδεικνύεται επίσης ότι οι ισχυρισμοί του Λήμματος 3.3.1 ισχύουν και υπό την ασθενέστερη υπόθεση ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R$ .

Έτσι, συνδυάζοντας την παρατήρηση αυτή με τα Θεωρήματα 3.3.2 και 3.3.3, επιτυγχάνουμε την ακόλουθη γενικότερη διατύπωση του Θεωρήματος 3.3.2.

**Θεώρημα 3.3.4 (Picard).** Ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης Π.Α.Τ. πρώτης τάξης

Έστω  $f = f(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  και  $(x_0, y_0)$  ένα σημείο του  $D$  και ένα ορθογώνιο

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq D,$$

όπου  $a, b > 0$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $R$  και συνάρτηση Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R$ , τότε το Π.Α.Τ. (3.1.1) έχει μοναδική λύση στο  $R$ .

□

Η υπόθεση ότι η  $f$  είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R$  δεν είναι αναγκαία, όπως φαίνεται στο ακόλουθο

**Παράδειγμα 3.3.10** Το Π.Α.Τ.

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 2, \quad (x, y) \in R = [-1, 1] \times [0, 4]$$

έχει μοναδική λύση, αλλά η συνάρτηση

$$f(x, y) = 3y^{2/3}, \quad (x, y) \in R$$

δεν είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς  $y$  στο  $R$ .

**Λύση.** Η Δ.Ε. έχει τις λύσεις  $y_1(x) = 0$  και  $y_2(x) = (x + c)^3$ , όπου  $c$  αυθαίρετη σταθερά. Αλλά, το Π.Α.Τ έχει τη μοναδική λύση

$$y(x) = (x + 2^{1/3})^3.$$

Όμως, η συνάρτηση  $f$  δεν είναι Lipschitz ως προς  $y$  (βλ. Παράδειγμα 3.3.7).

△

## 3.4 Ασκήσεις

**Άσκηση 3.4.1** Εξετάστε αν το Π.Α.Τ.

$$y' = xy, \quad y(0) = 1$$

έχει μοναδική λύση στο ορθογώνιο  $R = [-1, 1] \times [0, 2]$ .

**Άσκηση 3.4.2** Βρείτε τις επαναλήψεις Picard του Π.Α.Τ. και μέσω αυτών προσδιορίστε τη λύση του

(i) 
$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1$$

(ii) 
$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

(iii) 
$$y' = y - x, \quad y(0) = 2$$

(iv) 
$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

**Άσκηση 3.4.3** Εξετάστε αν υπάρχει λύση του Π.Α.Τ. στο αναφερόμενο ορθογώνιο

(i) 
$$y' = e^{-x^2} + y^2, \quad y(0) = 0, \quad R = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [-1, 1]$$

(ii) 
$$y' = e^{-5x} + y^3, \quad y(0) = \frac{2}{5}, \quad R = \left[0, \frac{3}{10}\right] \times [0, 1]$$

**Άσκηση 3.4.4** Αποδείξτε ότι η δοσμένη συνάρτηση είναι συνάρτηση Lipschitz στο αναφερόμενο ορθογώνιο.

(i) 
$$f(x, y) = xy^2, \quad R = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

(ii) 
$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad R = [-1, 1] \times [-2, 2].$$



# Βιβλιογραφία

- [1] Ν. Δ. Αλικιάκος και Γ. Η. Καλογερόπουλος, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2007.
- [2] S. I. Grossman, *Multivariable Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations, 2<sup>nd</sup> Edition*, Academic Press, Orlando, 1986.
- [3] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Θέματα Διαφορικών Εξισώσεων*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2011.
- [4] B. E. Shapiro, *Lecture Notes in Differential Equations*, California State University, Northridge, 2011.
- [5] Α. Ν. Τσίτσας, *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός, 2<sup>η</sup> Έκδοση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2003.

## Κεφάλαιο 4

# Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν παραγώγους δεύτερης τάξης της άγνωστης συνάρτησης εμφανίζονται πολύ συχνά σε προβλήματα τα οποία ανακύπτουν στις θετικές και τεχνολογικές επιστήμες. Ο κύριος σκοπός του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση ορισμένων βασικών μεθόδων για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Αρχικά, διατυπώνονται γενικές αρχές και ειδικές τεχνικές για τον υπολογισμό των λύσεων. Η πλέον θεμελιώδης και σημαντική τεχνική είναι εκείνη η οποία εφαρμόζεται για τη λύση ομογενών γραμμικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Η βασική διαδικασία για την επίλυση μη ομογενών εξισώσεων αναπτύσσεται στη συνέχεια. Επιπρόσθετα, διατυπώνονται τεχνικές επίλυσης για ειδικές κατηγορίες γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές.

### 4.1 Γενική θεωρία

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τη γενική θεωρία των γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (4.1.1)$$

όπου  $a_0, a_1, f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $I$ .

Αρχικά, μελετούμε βασικές ιδιότητες των λύσεων της αντίστοιχης της (4.1.1) ομογενούς Δ.Ε.

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (4.1.2)$$

Για τις λύσεις της (4.1.2) ισχύει το ακόλουθο

**Λήμμα 4.1.1** Αν  $y_1$  και  $y_2$  είναι δύο λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο διάστημα  $I$  τότε η συνάρτηση

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, είναι επίσης λύση της (4.1.2) στο  $I$ .

**Απόδειξη.** Επειδή οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι λύσεις της (4.1.2), ισχύουν

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0 \quad \text{και} \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0,$$

από τις οποίες για την  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_0(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + c_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) = 0. \end{aligned}$$

□

**Παρατήρηση 4.1.1** Ο ισχυρισμός του Λήμματος 4.1.1, ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός δύο λύσεων μιας γραμμικής ομογενούς Δ.Ε. είναι επίσης λύση της, αναφέρεται ως *αρχή της υπέρθεσης*.

△

Ως ένα απλό σχετικό παράδειγμα, θεωρούμε την ομογενή γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης  $y'' = 0$ , η οποία έχει ως λύσεις τις συναρτήσεις  $y_1 = 1$  και  $y_2 = x$ . Τότε, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η συνάρτηση  $y = c_1 + c_2 x$ , όπου  $c_1$  και  $c_2$  αυθαίρετες σταθερές, είναι επίσης λύση της Δ.Ε.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε (χωρίς απόδειξη) το θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για Π.Α.Τ. γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης.

**Θεώρημα 4.1.1** Για κάθε  $x_0 \in I$  και  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  υπάρχει ακριβώς μία λύση  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  του Π.Α.Τ.

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \quad (4.1.3)$$

□

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η μόνη λύση του Π.Α.Τ. (4.1.3) με  $f = 0$  και  $y_0 = y_1 = 0$  είναι η συνάρτηση  $y = 0$ .

Έστω  $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  δύο λύσεις της Δ.Ε. (4.1.2). Τότε, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης (Λήμμα 4.1.1), κάθε γραμμικός συνδυασμός  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  των λύσεων  $y_1$  και  $y_2$

είναι επίσης λύση της Δ.Ε. (4.1.2). Όμως, δεν ισχύει, χωρίς προϋποθέσεις για τις λύσεις  $y_1$  και  $y_2$ , ο (αντίστροφος) ισχυρισμός: Για κάθε λύση  $y$  της Δ.Ε. (4.1.2) υπάρχουν σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  έτσι ώστε να ισχύει  $y = c_1y_1 + c_2y_2$ .

Πράγματι, θεωρούμε, επί παραδείγματι, την πολύ απλή Δ.Ε.  $y'' = 0$ , της οποίας τρεις λύσεις είναι οι συναρτήσεις

$$y_1 = 1 + x, \quad y_2 = 2 + 2x, \quad y_3 = 1 - x,$$

και παρατηρούμε ότι η έκφραση (ισχυρισμός)

$$1 - x = y_3 = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1(1 + x) + c_2(2 + 2x)$$

οδηγεί στο σύστημα

$$c_1 + 2c_2 = 1 \quad \text{και} \quad c_1 + 2c_2 = -1,$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Στην προκειμένη περίπτωση, παρατηρούμε ότι ισχύει  $y_2 = 2y_1$ , δηλαδή οι λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά εξαρτημένες. Όμως, όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, η Δ.Ε. έχει ένα (τουλάχιστον) ζεύγος γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων και για οποιεσδήποτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  της Δ.Ε., κάθε λύση  $y$  της Δ.Ε. εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των  $y_1$  και  $y_2$ , δηλαδή η γενική λύση της Δ.Ε. (4.1.2) συμπίπτει με το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών  $\{c_1y_1 + c_2y_2\}$ .

Υπενθυμίζουμε τώρα τις έννοιες της γραμμικής εξάρτησης και γραμμικής ανεξαρτησίας δύο συναρτήσεων.

**Ορισμός 4.1.1** Δύο συναρτήσεις  $y_1, y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζονται *γραμμικά εξαρτημένες* στο διάστημα  $I$  όταν υπάρχουν σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  με  $c_1 \neq 0$  ή  $c_2 \neq 0$  έτσι ώστε

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \quad \forall x \in I. \quad (4.1.4)$$

Εξάλλου, οι συναρτήσεις  $y_1$  και  $y_2$  ονομάζονται *γραμμικά ανεξάρτητες* στο  $I$  όταν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή όταν για δύο σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  ισχύει

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \quad \forall x \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \quad (4.1.5)$$

□

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις  $y_1 = 1$  και  $y_2 = x^2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα  $I$ , διότι  $c_1 + c_2x^2 = 0$ ,  $x \in I$ , πάντα έπεται ότι  $c_1 = c_2 = 0$ . Ενώ, οι συναρτήσεις  $y_1 = \sin(2x)$  και  $y_2 = \sin x \cos x$  είναι γραμμικά εξαρτημένες σε κάθε διάστημα  $I$ , διότι ισχύει  $\sin(2x) - 2\sin x \cos x = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Σημαντικό ρόλο στην γραμμική εξάρτηση ή ανεξαρτησία των συναρτήσεων παίζει το διάστημα  $I$  που αυτές ορίζονται. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις  $y_1 = x^2$  και  $y_2 = x|x|$  είναι

γραμμικά εξαρτημένες σε οποιοδήποτε διάστημα  $I$  που δεν περιέχει το μηδέν. Όμως, σε ένα διάστημα  $I$  που περιέχει το μηδέν, οι συναρτήσεις  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο  $I$ , αφού ισχύουν

$$y_1 = y_2, \forall x \in I \text{ με } x \geq 0 \quad \text{και} \quad y_1 = -y_2, \forall x \in I \text{ με } x \leq 0,$$

και άρα δεν υπάρχουν μη μηδενικές σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  για τις οποίες ισχύει  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$ .

Σημειώνουμε ότι η γραμμική ανεξαρτησία δύο συναρτήσεων σε ένα διάστημα  $I$  δεν συνεπάγεται τη γραμμική ανεξαρτησία αυτών σε κάθε υποδιάστημα του  $I$ . Εξάλλου, δύο γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις στο διάστημα  $I$  θα είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητες και σε κάθε άλλο διάστημα  $I_1$  που περιέχει το  $I$  υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις ορίζονται και στο  $I_1$ .

Βασική έννοια για τον έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας δύο λύσεων  $y_1$  και  $y_2$  της Δ.Ε. (4.1.2) είναι εκείνη της ορίζουσας Wronski.

**Ορισμός 4.1.2** Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $y_1, y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Η συνάρτηση  $W \equiv W(y_1, y_2) : I \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ορίζεται από την  $2 \times 2$  ορίζουσα

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x), \quad (4.1.6)$$

ονομάζεται ορίζουσα Wronski των  $y_1$  και  $y_2$ .

□

Για την ορίζουσα Wronski δύο λύσεων  $y_1$  και  $y_2$  της (4.1.2) ισχύει το ακόλουθο

**Θεώρημα 4.1.2 (Abel).** Για δύο λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  της (4.1.2) και  $x_0 \in I$ , ισχύει

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt}, \quad \forall x \in I. \quad (4.1.7)$$

**Απόδειξη.** Από τον Ορισμό 4.1.2, έχουμε

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

από την οποία ευρίσκουμε

$$W'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x).$$

Εξάλλου, επειδή οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι λύσεις της (4.1.2), η τελευταία γράφεται

$$W'(x) = y_1(x)(-a_1(x)y_2'(x) - a_0(x)y_2(x)) - y_2(x)(-a_1(x)y_1'(x) - a_0(x)y_1(x)),$$

οπότε

$$W'(x) = -a_1(x)[y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)] = -a_1(x)W(x).$$

Η τελευταία είναι Δ.Ε. πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών και έχει ως λύση

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(t)dt}, \quad x \in I.$$

□

**Παρατήρηση 4.1.2** Από την (4.1.7) προκύπτει ότι ισχύει  $W(x) \neq 0, \forall x \in I$  τότε και μόνο τότε όταν  $W(x_0) \neq 0$  για κάποιο  $x_0 \in I$ , δηλαδή  $W(x) = 0, \forall x \in I$  τότε και μόνο τότε όταν  $W(x_0) = 0$  για κάποιο  $x_0 \in I$ .

△

Στο ακόλουθο θεώρημα διατυπώνεται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη γραμμική ανεξαρτησία δύο λύσεων  $y_1$  και  $y_2$  της (4.1.2).

**Θεώρημα 4.1.3** Δύο λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  της (4.1.2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε και μόνο τότε όταν  $W(x_0) \neq 0$  για κάποιο  $x_0 \in I$ .

**Απόδειξη.** Έστω ότι οι λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  της (4.1.2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αλλά ισχύει  $W(x) = 0$  για κάθε  $x \in I$ . Αν  $x_0$  είναι ένα (σταθεροποιημένο) σημείο του  $I$ , τότε το ομογενές  $2 \times 2$  (αλγεβρικό) σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

ως προς αγνώστους τα  $c_1$  και  $c_2$ , έχει μία μη μηδενική λύση  $(c_1^*, c_2^*)$ , επειδή η ορίζουσά του είναι η  $W(x_0) = 0$ .

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η συνάρτηση

$$(α) \quad y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x), \quad x \in I$$

είναι λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2), η οποία επιπλέον ικανοποιεί επίσης τις αρχικές συνθήκες  $y(x_0) = 0$  και  $y'(x_0) = 0$  (αφού  $(c_1^*, c_2^*)$  είναι λύση του προηγούμενου αλγεβρικού συστήματος).

Από το Θεώρημα 4.1.1, έχουμε ότι το Π.Α.Τ.

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

έχει ως μοναδική λύση τη συνάρτηση  $y = 0$ , και έτσι από την (α) προκύπτει ότι

$$c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x) = 0, \quad \forall x \in I,$$

η οποία συνεπάγεται ότι οι λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά εξαρτημένες, αφού  $(c_1^*, c_2^*) \neq (0, 0)$ , που συνιστά αντίφαση.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι ισχύει  $W(x_0) \neq 0$  και έστω σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  για τις οποίες ισχύει

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in I,$$

από την οποία προκύπτει η εξίσωση

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Θεωρούμε, τώρα, το  $2 \times 2$  ομογενές (αλγεβρικό) σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0, \end{aligned}$$

το οποίο έχει ως ορίζουσα την  $W(x_0) \neq 0$ , άρα το σύστημα αυτό έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή ισχύει  $c_1 = c_2 = 0$ , και επομένως οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

□

Συνδυάζοντας το προηγούμενο θεώρημα και το Θεώρημα 4.1.1 (ύπαρξης και μοναδικότητας), λαμβάνουμε το ακόλουθο

**Πόρισμα 4.1.1** Υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο  $I$ .

**Απόδειξη.** Από το Θεώρημα 4.1.1 (ύπαρξης και μοναδικότητας), για  $x_0 \in I$  και  $\alpha \neq 0$  σταθεροποιημένο πραγματικό αριθμό, έχουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  της (4.1.2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= \alpha, & y_1'(x_0) &= 0 \\ y_2(x_0) &= 0, & y_2'(x_0) &= \alpha. \end{aligned}$$

Τότε, για την ορίζουσα Wronski  $W$  των  $y_1$  και  $y_2$  ισχύει ότι

$$W(x_0) = \alpha^2 \neq 0,$$

και επομένως από το Θεώρημα 4.1.3 συνάγουμε ότι οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

□

Τώρα, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το ακόλουθο σημαντικό

**Θεώρημα 4.1.4** Αν  $y_1$  και  $y_2$  είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2), τότε για κάθε λύση  $y$  αυτής, υπάρχουν μοναδικές σταθερές  $c_1^*$  και  $c_2^*$  έτσι ώστε να ισχύει

$$y(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x). \quad (4.1.8)$$

**Απόδειξη.** Για τυχόν  $x_0 \in I$ , θεωρούμε το  $2 \times 2$  ομογενές αλγεβρικό γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

ως προς αγνώστους τα  $c_1$  και  $c_2$ , του οποίου η ορίζουσα είναι η ορίζουσα Wronski  $W(x_0)$ .

Εφόσον οι λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες, από το Θεώρημα 4.1.3 έχουμε  $W(x_0) \neq 0$ . Επομένως, το προηγούμενο σύστημα έχει μοναδική λύση  $(c_1^*, c_2^*)$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} c_1^* y_1(x_0) + c_2^* y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1^* y_1'(x_0) + c_2^* y_2'(x_0) &= y'(x_0). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η συνάρτηση

$$\tilde{y}(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x)$$

είναι λύση της (4.1.2), για την οποία επιπλέον ισχύουν

$$\tilde{y}(x_0) = y(x_0) \quad \text{και} \quad \tilde{y}'(x_0) = y'(x_0),$$

οπότε από το Θεώρημα 4.1.1 (ύπαρξης και μοναδικότητας), έχουμε

$$y(x) = \tilde{y}(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

□

Συνδυάζοντας τώρα το Λήμμα 4.1.1 και τα Θεωρήματα 4.1.2, 4.1.3 και 4.1.4, ενοποιούμε τα αποτελέσματά τους στο ακόλουθο

**Θεώρημα 4.1.5** Έστω  $y_1$  και  $y_2$  δύο λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο διάστημα  $I$ . Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1. Κάθε λύση  $y$  της Δ.Ε. (4.1.2) είναι γραμμικός συνδυασμός των λύσεων  $y_1$  και  $y_2$  στο  $I$ , δηλαδή υπάρχουν σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  έτσι ώστε να ισχύει

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

2. Οι λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο  $I$ .

3. Υπάρχει  $x_0 \in I$  έτσι ώστε η τιμή της ορίζουσας Wronski  $W$  των  $y_1$  και  $y_2$  στο  $x_0$  να είναι διάφορη από το μηδέν, δηλαδή  $W(x_0) \neq 0$ .

4. Για την ορίζουσα Wronski  $W$  των  $y_1$  και  $y_2$  ισχύει  $W(x) \neq 0, \forall x \in I$ .



□

Από το Θεώρημα 4.1.5 συνάγεται ότι για τον προσδιορισμό όλων των λύσεων της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2), αρκεί η εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων  $y_1$  και  $y_2$  αυτής, οπότε η γενική λύση της (4.1.2) συμπίπτει με το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Στην προκειμένη περίπτωση, το σύνολο  $\{y_1, y_2\}$  αναφέρεται και ως θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (4.1.2).

**Πόρισμα 4.1.2** Το σύνολο  $\Lambda_o$  των λύσεων της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 2.

**Απόδειξη.** Από την αρχή της υπέρθεσης, το  $\Lambda_o$  είναι διανυσματικός χώρος. Εξάλλου, από το Πόρισμα 4.1.1 και το Θεώρημα 4.1.4, υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $y_1$  και  $y_2$ , οι οποίες παράγουν γραμμικά το διανυσματικό χώρο  $\Lambda_o$ . Έτσι, το σύνολο  $B = \{y_1, y_2\}$  είναι βάση του  $\Lambda_o$  και άρα η διάσταση του διανυσματικού χώρου  $\Lambda_o$  είναι 2.

□

Το πόρισμα αυτό δικαιολογεί επίσης και τη χρήση (αναφορά) του όρου θεμελιώδες σύνολο λύσεων.

**Παράδειγμα 4.1.1** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + k^2 y = 0,$$

όπου  $k > 0$ .

**Λύση.** Επαληθεύουμε εύκολα ότι οι συναρτήσεις  $y_1(x) = \cos(kx)$  και  $y_2(x) = \sin(kx)$  είναι λύσεις της Δ.Ε. και υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronski  $W$  των  $y_1$  και  $y_2$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k \sin(kx) & k \cos(kx) \end{vmatrix} = k > 0.$$

Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.5, οι λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx), \quad x \in I.$$

△

Τώρα, για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) χρειαζόμαστε την ακόλουθη

**Πρόταση 4.1.1** Η διαφορά δύο λύσεων  $y_1$  και  $y_2$  της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) είναι λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2).

**Απόδειξη.** Επειδή οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι λύσεις της (4.1.1), ισχύουν

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = f(x),$$

$$y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = f(x),$$

οπότε αφαιρώντας κατά μέλη λαμβάνουμε

$$(y_1 - y_2)'' + a_1(x)(y_1 - y_2)' + a_0(x)(y_1 - y_2) = 0,$$

και επομένως η  $y_1 - y_2$  είναι πράγματι λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2).

□

Συνδυασμός του Θεωρήματος 4.1.4 και της Πρότασης 4.1.1 οδηγεί στο ακόλουθο

**Θεώρημα 4.1.6** Έστω ότι  $y_1$  και  $y_2$  είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο  $I$  και  $y_\mu$  είναι μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) στο  $I$ . Τότε, κάθε λύση  $y$  της (4.1.1) είναι της μορφής

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_\mu(x), \quad x \in I. \quad (4.1.9)$$

**Απόδειξη.** Κάθε συνάρτηση  $y$  της μορφής (4.1.9) είναι λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1). Πράγματι, από τις υποθέσεις έχουμε

$$\begin{aligned} y'' + a_1y' + a_0y &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + y_\mu'' + a_1(c_1y_1' + c_2y_2' + y_\mu') + a_0(c_1y_1 + c_2y_2 + y_\mu) = \\ &= c_1[y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1] + c_2[y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2] + y_\mu'' + a_1y_\mu' + a_0y_\mu = 0 + 0 + f = f. \end{aligned}$$

Αντιστρόφως, αν  $y$  είναι μία οποιαδήποτε λύση της (4.1.1), τότε από την Πρόταση 4.1.1, η διαφορά  $y - y_\mu$  είναι λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2). Εφόσον οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.1.2), από το Θεώρημα 4.1.4, υπάρχουν σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  ώστε

$$y - y_\mu = c_1y_1 + c_2y_2.$$

□

**Σημείωση 4.1.1** Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.4, κάθε λύση  $y_o$  της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός

$$y_o(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad x \in I,$$

όπου  $y_1$  και  $y_2$  είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.1.2). Επομένως, από το Θεώρημα 4.1.6, κάθε λύση  $y$  της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) είναι το άθροισμα μιας μερικής λύσης της  $y_\mu$  και της γενικής λύσης  $y_o$  της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., δηλαδή

$$y(x) = y_o(x) + y_\mu(x), \quad x \in I. \quad (4.1.10)$$

△

Κατά αντιστοιχία με την ομογενή Δ.Ε., η οικογένεια λύσεων

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_\mu,$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, αποτελεί τη γενική λύση της (4.1.1).

**Παράδειγμα 4.1.2** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + k^2 y = x,$$

όπου  $k > 0$ .

**Λύση.** Στο Παράδειγμα 4.1.1 έχουμε υπολογίσει τη γενική λύση

$$y_o(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)$$

της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε.

Εξάλλου, επαληθεύεται εύκολα ότι η συνάρτηση  $y_\mu(x) = k^{-2} x$  είναι μία μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. Έτσι, σύμφωνα με την (4.1.10), η ζητούμενη γενική λύση είναι

$$y(x) = y_o(x) + y_\mu(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) + k^{-2} x.$$

△

Τέλος, συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 4.1.1 και 4.1.6, διατυπώνουμε το ακόλουθο

**Θεώρημα 4.1.7** Έστω ότι  $y_1$  και  $y_2$  είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.1.2) στο  $I$  και  $y_\mu$  είναι μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.1.1) στο  $I$ . Τότε, υπάρχουν μοναδικές σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  έτσι ώστε το Π.Α.Τ. (4.1.3) να έχει τη μοναδική λύση

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_\mu(x), \quad x \in I.$$

□

**Παράδειγμα 4.1.3** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y'' - y = x^2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3.$$

**Λύση.** Επαληθεύουμε αρχικά ότι οι συναρτήσεις  $y_1(x) = e^x$  και  $y_2(x) = e^{-x}$  είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. και στη συνέχεια υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronski  $W = -2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , και έτσι συμπεραίνουμε ότι οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Εξάλλου, διαπιστώνουμε εύκολα ότι η συνάρτηση  $y_\mu(x) = -2 - x^2$  είναι μία μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. Άρα, από την (4.1.10), η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2 - x^2.$$

Οι σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 - 2 = 3 \\ y'(0) &= c_1 - c_2 = 3, \end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει από τις αρχικές συνθήκες και το οποίο έχει τη λύση  $c_1 = 4$  και  $c_2 = 1$ . Έτσι, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(x) = 4e^x + e^{-x} - 2 - x^2.$$

△

## 4.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Ο προσδιορισμός σε εκπεφρασμένη μορφή των λύσεων των γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης με συντελεστές συναρτήσεις δεν είναι πάντα δυνατός σε αντίθεση με τις γραμμικές Δ.Ε. πρώτης τάξης των οποίων οι λύσεις εκφράζονται ως ολοκληρώματα των συναρτήσεων των συντελεστών (βλ. Παρ. 2.3). Όμως, όταν οι συντελεστές των  $y, y', y''$  μιας ομογενούς Δ.Ε. δεύτερης τάξης είναι σταθεροί τότε η γενική λύση της Δ.Ε. προσδιορίζεται με την ακόλουθη διαδικασία, η οποία βασίζεται στον αλγεβρικό υπολογισμό των ριζών ενός συγκεκριμένου πολυωνύμου.

Μια Δ.Ε. της μορφής

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4.2.1}$$

όπου  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ , λέγεται *ομογενής γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές*.

Μία (προφανής) λύση της (4.2.1) είναι η  $y = 0$ . Επειδή η παράγωγος οποιασδήποτε τάξης της συνάρτησης  $e^{\lambda x}$ , όπου  $\lambda$  σταθερά, είναι ένα πολλαπλάσιο της  $e^{\lambda x}$ , αναμένουμε ότι η  $e^{\lambda x}$  θα είναι λύση της (4.2.1) για συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς  $\lambda$ . Έτσι, αναζητούμε λύσεις της μορφής  $y(x) = e^{\lambda x}$  και αντικαθιστώντας στην (4.2.1), λαμβάνουμε

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \alpha_1 \lambda e^{\lambda x} + \alpha_0 e^{\lambda x} = 0$$

ή

$$e^{\lambda x} [\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0] = 0.$$

Οπότε, για να έχουμε λύση της μορφής  $y(x) = e^{\lambda x}$ , πρέπει το  $\lambda$  να είναι ρίζα στο  $\mathbb{C}$  της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0, \quad (4.2.2)$$

η οποία λέγεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. (4.2.1). Οι ρίζες της (4.2.2) καλούνται *χαρακτηριστικές ρίζες*, ενώ το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \quad (4.2.3)$$

αναφέρεται ως το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* της (4.2.1).

Η γενική λύση της (4.2.1) ευρίσκεται με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών ριζών των οποίων ο προσδιορισμός επιτυγχάνεται διακρίνοντας τις ακόλουθες τρεις γενικές περιπτώσεις.

### I. Οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι πραγματικές και διακεκριμένες

Οι ρίζες  $\lambda_1, \lambda_2$  της (4.2.2) είναι πραγματικές και διακεκριμένες τότε και μόνο τότε όταν

$$a_1^2 - 4a_0 > 0, \quad (4.2.4)$$

οπότε

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}. \quad (4.2.5)$$

Επομένως, οι  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  και  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$  είναι λύσεις της (4.2.1). Η ορίζουσα Wronski των  $y_1$  και  $y_2$

$$W(x) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \quad (4.2.6)$$

είναι διάφορη του μηδενός αφού  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , και άρα οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.4, η γενική λύση της (4.2.1) είναι

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (4.2.7)$$

όπου  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

#### Παράδειγμα 4.2.1 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

και οι ρίζες της

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1, 2.$$

Συνεπώς, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

△

## II. Η χαρακτηριστική ρίζα είναι διπλή

Σε αυτή την περίπτωση

$$a_1^2 - 4a_0 = 0, \quad (4.2.8)$$

οπότε η διπλή ρίζα  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^*$  της (4.2.2) είναι

$$\lambda^* = -\frac{a_1}{2}. \quad (4.2.9)$$

Η  $y_1 = e^{\lambda^* x}$  είναι λύση της (4.2.1). Για να βρούμε μία δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση, λαμβάνουμε υπόψη ότι για τη συνάρτηση  $y_2 = x e^{\lambda^* x}$  (η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την  $y_1$ ) ισχύει ότι

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = e^{\lambda^* x} [p'(\lambda^*) + p(\lambda^*)x]. \quad (4.2.10)$$

Αφού η  $\lambda^*$  είναι ρίζα πολλαπλότητας 2 της (4.2.2), αυτό σημαίνει ότι  $p(\lambda^*) = p'(\lambda^*) = 0$ , και άρα η (4.2.10) συνεπάγεται ότι η  $y_2$  είναι λύση της (4.2.1).

Έτσι, η γενική λύση της (4.2.1) είναι

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda^* x}. \quad (4.2.11)$$

**Παράδειγμα 4.2.2** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

η οποία έχει τη διπλή ρίζα

$$\lambda^* = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1,$$

και άρα η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = (c_1 + c_2 x) e^x.$$

△

**III. Οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές**

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε

$$a_1^2 - 4a_0 < 0, \quad (4.2.12)$$

οπότε οι συζυγείς μιγαδικές ρίζες της (4.2.2) συμβολίζονται με

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta.$$

Σύμφωνα με την περίπτωση I ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ), οι λύσεις της (4.2.1) είναι  $e^{(\alpha+i\beta)x}$  και  $e^{(\alpha-i\beta)x}$  και η γενική της λύση είναι

$$y = d_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + d_2 e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (4.2.13)$$

Εφαρμόζοντας το γνωστό τύπο του Euler, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} e^{i\beta x} &= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)] = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x), \\ e^{\alpha x} e^{-i\beta x} &= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)] = e^{\alpha x} \cos(\beta x) - i e^{\alpha x} \sin(\beta x), \end{aligned}$$

και άρα η γενική λύση της (4.2.1) είναι

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x). \quad (4.2.14)$$

**Παράδειγμα 4.2.3** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

έχει τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i,$$

και άρα η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = e^x (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)).$$

△

**Παράδειγμα 4.2.4** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' + ky = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 + k = 0$$

έχει τις ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4k}}{2} = \pm \sqrt{-k}.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

(i)  $k > 0$ , τότε έχουμε μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{k}i,$$

και η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = c_1 \cos(\sqrt{k}x) + c_2 \sin(\sqrt{k}x).$$

(ii)  $k < 0$ , τότε έχουμε δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{|k|},$$

και η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{\sqrt{|k|x}} + c_2 e^{-\sqrt{|k|x}}.$$

(iii)  $k = 0$ , τότε προκύπτει η διπλή ρίζα  $\lambda_1 = 0$  και έτσι

$$y = c_1 x + c_2.$$

△

**Παράδειγμα 4.2.5** Λύστε τη Δ.Ε.

$$k^2 y'' - 4k^2 y' + (4k^2 + 1)y = 0, \quad k \neq 0.$$

**Λύση.** Διαιρώντας με το  $k^2 \neq 0$ , η Δ.Ε. παίρνει τη μορφή

$$y'' - 4y' + \left(4 + \frac{1}{k^2}\right)y = 0,$$

η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{1}{k^2} = 0$$



με συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \frac{i}{|k|}.$$

Άρα, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = e^{2x} \left[ c_1 \cos\left(\frac{x}{|k|}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{|k|}\right) \right].$$

△

**Παράδειγμα 4.2.6** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. είναι

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

που έχει τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i,$$

οπότε η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = e^{2x} (c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)).$$

Επειδή  $y(0) = 0$ , λαμβάνουμε ότι  $c_1 = 0$ , και έτσι

$$y = c_2 e^{2x} \sin(3x).$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y' = 2e^{2x} c_2 \sin(3x) + 3c_2 e^{2x} \cos(3x).$$

Επειδή  $y'(0) = 3$  προκύπτει ότι  $c_2 = 1$ , και άρα η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y = e^{2x} \sin(3x).$$

△

### 4.3 Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Η μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη γενική μορφή

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f, \quad (4.3.1)$$

όπου  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση. Η (4.2.1) καλείται η αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε. της (4.3.1).

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.6, η γενική λύση  $y(x)$  της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.3.1) είναι το άθροισμα μιας οποιασδήποτε μερικής της λύσης  $y_\mu(x)$  και της γενικής λύσης  $y_o(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς της (4.3.1). Η ομογενής Δ.Ε. λύνεται με βάση τις τεχνικές της Παραγράφου 4.2. Επομένως, για να βρούμε τη γενική λύση της (4.3.1), πρέπει να βρούμε μία μερική της λύση  $y_\mu(x)$ .

Αν η συνάρτηση δευτέρου μέλους  $f(x)$  είναι ειδικής μορφής τότε η  $y_\mu(x)$  μπορεί να ευρεθεί με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, η οποία θα αναπτυχθεί στην παρούσα παράγραφο. Ως δεύτερο μέλος ειδικής μορφής εννοούμε ότι η  $f(x)$  μπορεί να είναι μία πολυωνυμική, μία εκθετική ή μία τριγωνομετρική συνάρτηση ή και γινόμενο των προηγούμενων.

Στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών αναζητούμε μία μερική λύση ειδικής μορφής, η οποία περιέχει κάποιους συντελεστές προς προσδιορισμό και οι οποίοι υπολογίζονται με αντικατάσταση στην (4.3.1). Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις ως προς τη συνάρτηση δευτέρου μέλους  $f(x)$ .

#### I. Πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Επειδή η παράγωγος ενός πολυωνύμου είναι πάλι ένα πολυώνυμο, αναζητούμε μερική λύση της (4.3.1) της μορφής

$$y_\mu(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0, \quad (4.3.2)$$

όπου οι πραγματικές σταθερές  $B_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) που υπεισέρχονται στην αναζητούμενη μορφή της λύσης προσδιορίζονται με αντικατάσταση της  $y_\mu(x)$  στην (4.3.1) και εξίσωση των ομοιοβαθμίων δυνάμεων του  $x$  και στα δύο μέλη της εξίσωσης που προκύπτει.

Όταν  $a_0 = 0$ , τότε η παραπάνω διαδικασία αντικατάστασης στην (4.3.1) αφήνει μεγιστοβάθμιο όρο  $x^{m-1}$  στο αριστερό μέλος ενώ στο δεξιό μέλος ο μεγιστοβάθμιος όρος είναι  $x^m$ . Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = x(B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0). \quad (4.3.3)$$

**Παράδειγμα 4.3.1** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - y' - 2y = -2x^2 - 2x + 1.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1, 2,$$

και έτσι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

Επειδή έχουμε  $f(x) = -2x^2 - 2x + 1$ , αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = B_2 x^2 + B_1 x + B_0$$

και αντικαθιστώντας αυτή στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$2B_2 - (2B_2 x + B_1) - 2(B_2 x^2 + B_1 x + B_0) = -2x^2 - 2x + 1$$

ή

$$-2B_2 x^2 - (2B_2 + 2B_1)x + 2B_2 - B_1 - 2B_0 = -2x^2 - 2x + 1.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} -2B_2 & = -2 \\ -2B_2 - 2B_1 & = -2 \\ 2B_2 - B_1 - 2B_0 & = 1 \end{cases},$$

το οποίο έχει τη λύση

$$B_2 = 1, \quad B_1 = 0, \quad B_0 = \frac{1}{2}.$$

Άρα, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu = x^2 + \frac{1}{2},$$

και έτσι η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = y_o + y_\mu = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + x^2 + \frac{1}{2}.$$

△

## II. Εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = be^{dx}$$

Επειδή παραγωγίζοντας την εκθετική συνάρτηση προκύπτει ένα πολλαπλάσιό της, αναζητούμε μερική λύση της (4.3.1) της μορφής

$$y_{\mu}(x) = Be^{dx}, \quad (4.3.4)$$

όπου  $B$  σταθερά προς προσδιορισμό.

Με αντικατάσταση στην (4.3.1) λαμβάνουμε

$$B(d^2 + a_1d + a_0)e^{dx} = be^{dx}, \quad (4.3.5)$$

από όπου μπορούμε να προσδιορίσουμε το  $B$ , αν  $d^2 + a_1d + a_0 \neq 0$ .

Όταν  $d^2 + a_1d + a_0 = 0$ , δηλαδή το  $d$  είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.2.2) της αντίστοιχης ομογενούς, τότε η  $y_{\mu}(x) = Be^{dx}$  δεν μπορεί να είναι λύση της (4.3.1) διότι το αριστερό μέλος της (4.3.5) μηδενίζεται ενώ το δεξιό είναι διάφορο του μηδενός. Σε αυτή την περίπτωση, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu}(x) = Bxe^{dx}, \quad (4.3.6)$$

οπότε με αντικατάσταση στην (4.3.1), λαμβάνουμε

$$Bp(d)xe^{dx} + Bp'(d)e^{dx} = be^{dx},$$

από όπου, επειδή  $p(d) = 0$ , υπολογίζεται το  $B$  ως

$$B = \frac{b}{p'(d)} = \frac{b}{2d + a_1}, \quad (4.3.7)$$

υπό την προϋπόθεση ότι  $p'(d) \neq 0$ , δηλαδή το  $d$  δεν είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p(\lambda)$ .

Αν συμβαίνει αυτο, δηλαδή αν  $p(d) = p'(d) = 0$ , τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu}(x) = Bx^2e^{dx}, \quad (4.3.8)$$

η οποία με αντικατάσταση στην (4.3.1), δίνει

$$Bp(d)x^2e^{dx} + 2Bp'(d)xe^{dx} + 2Be^{dx} = be^{dx},$$

και λόγω των  $p(d) = p'(d) = 0$ , τελικά προκύπτει

$$B = \frac{b}{2}. \quad (4.3.9)$$

Τα παραπάνω συνοψίζονται ως εξής. Αν το  $d$  δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.2.2) της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής (4.3.4). Αν το  $d$  είναι ρίζα πολλαπλότητας  $\mu$  της (4.2.2) (δηλαδή  $\mu = 1$  ή  $\mu = 2$  σημαίνει ότι το  $d$  είναι απλή ή διπλή ρίζα), τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = Bx^\mu e^{dx}. \quad (4.3.10)$$

**Παράδειγμα 4.3.2** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' + 3y' - 4y = 3e^{2x}.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = -4, 1,$$

και άρα η γενική λύση της ομογενούς προκύπτει

$$y_o = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x.$$

Επειδή το 2 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = B e^{2x},$$

και αντικαθιστώντας αυτή στη Δ.Ε. λαμβάνουμε

$$4B e^{2x} + 3(2B e^{2x}) - 4B e^{2x} = 3e^{2x},$$

από όπου προσδιορίζουμε

$$B = \frac{1}{2}.$$

Άρα, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu = \frac{1}{2} e^{2x}$$

και η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = y_o + y_\mu = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} e^{2x}.$$

△

### III. Γινόμενο πολυωνυμικής με εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) e^{dx}$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των περιπτώσεων I και II, έχουμε τα ακόλουθα

α) αν το  $d$  δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.2.2) της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = (B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0) e^{dx}.$$

β) αν το  $d$  είναι ρίζα με πολλαπλότητα  $\mu$  της (4.2.2) (όπου  $\mu = 1$  ή  $2$ ), τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = (B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0) x^\mu e^{dx}.$$

**Παράδειγμα 4.3.3** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 2y' - 3y = (x + 1)e^{3x}.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = -1, 3.$$

Η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Αφού το 3 είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = (B_1 x + B_0) x e^{3x}.$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_\mu(x) = 3(B_1 x^2 + B_0 x) e^{3x} + (2B_1 x + B_0) e^{3x} = (3B_1 x^2 + 3B_0 x + 2B_1 x + B_0) e^{3x}$$

και

$$\begin{aligned} y''_\mu(x) &= 9(B_1 x^2 + B_0 x) e^{3x} + 3(2B_1 x + B_0) e^{3x} + 3(2B_1 x + B_0) e^{3x} + 6B_1 e^{3x} \\ &= [9B_1 x^2 + (9B_0 + 12B_1)x + 6B_0 + 2B_1] e^{3x}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$[9B_1x^2 + (9B_0 + 12B_1)x + 6B_0 + 2B_1]e^{3x} - 2(3B_1x^2 + 3B_0x + 2B_1x + B_0)e^{3x} - 3x(B_1x + B_0)e^{3x} = (x + 1)e^{3x}$$

ή

$$(8B_1x + 4B_0 + 2B_1)e^{3x} = (x + 1)e^{3x},$$

οπότε τελικά εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων, ευρίσκουμε

$$B_1 = \frac{1}{8}, \quad B_0 = \frac{3}{16}.$$

Άρα, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu(x) = x \left( \frac{1}{8}x + \frac{3}{16} \right) e^{3x} = \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^{3x},$$

και η ζητούμενη γενική λύση είναι

$$y(x) = y_o(x) + y_\mu(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^{3x}.$$

△

#### IV. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = b_1 \cos(dx) + b_2 \sin(dx)$$

Οι παράγωγοι των  $\cos(dx)$  και  $\sin(dx)$  είναι πολλαπλάσια των  $\cos(dx)$  και  $\sin(dx)$  με κατάλληλες σταθερές. Για αυτό είναι λογικό να αναζητήσουμε μερική λύση που είναι γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων αυτών, δηλαδή

$$y_\mu(x) = B_1 \cos(dx) + B_2 \sin(dx)$$

με συντελεστές  $B_1$  και  $B_2$ , οι οποίοι θα προσδιοριστούν με αντικατάσταση στην (4.3.1) και εξίσωση των αντίστοιχων συντελεστών των συναρτήσεων  $\cos(dx)$  και  $\sin(dx)$  στα δύο μέλη της προκύπτουσας εξίσωσης.

Είναι, όμως, δυνατόν μία τουλάχιστον από τις  $\cos(dx)$  και  $\sin(dx)$  να είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. (4.2.1) οπότε τότε το αριστερό μέλος της (4.3.1) θα γίνει μηδέν και δεν θα υπάρχει επιλογή των  $B_1$  και  $B_2$  που να ικανοποιεί την εξίσωση.

Έτσι, καταλήγουμε στο διαχωρισμό των δύο περιπτώσεων

α) αν το  $di$  δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.2.2) της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. (4.2.1), τότε αναζητούμε μερική λύση της (4.3.1) της μορφής

$$y_{\mu}(x) = B_1 \cos(dx) + B_2 \sin(dx). \quad (4.3.11)$$

β) αν το  $di$  είναι ρίζα της (4.2.2), τότε αναζητούμε μερική λύση της (4.3.1) της μορφής

$$y_{\mu}(x) = x (B_1 \cos(dx) + B_2 \sin(dx)). \quad (4.3.12)$$

**Παράδειγμα 4.3.4** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - 4y' + 4y = 5 \sin(2x).$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2 \text{ (διπλή)},$$

και έτσι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = (c_1 x + c_2) e^{2x}.$$

Επειδή το  $2i$  δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu} = B_1 \sin(2x) + B_2 \cos(2x).$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_{\mu} = 2B_1 \cos(2x) - 2B_2 \sin(2x)$$

και

$$y''_{\mu} = -4B_1 \sin(2x) - 4B_2 \cos(2x).$$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & -4B_1 \sin(2x) - 4B_2 \cos(2x) - 4(2B_1 \cos(2x) - 2B_2 \sin(2x)) \\ & + 4(B_1 \sin(2x) + B_2 \cos(2x)) = 5 \sin(2x) \end{aligned}$$

ή

$$8B_2 \sin(2x) - 8B_1 \cos(2x) = 5 \sin(2x)$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές προκύπτει

$$B_1 = 0 \quad \text{και} \quad B_2 = \frac{5}{8}.$$



Άρα, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu = \frac{5}{8} \cos(2x)$$

και η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = y_o + y_\mu = (c_1 x + c_2) e^{2x} + \frac{5}{8} \cos(2x).$$

Δ

**Παράδειγμα 4.3.5** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' + 9y = \sin(3x) + \cos(3x).$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \frac{\pm \sqrt{-36}}{2} = \pm 3i$$

και άρα η γενική λύση της ομογενούς προκύπτει

$$y_o = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x).$$

Αφού το  $3i$  είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = x(B_1 \sin(3x) + B_2 \cos(3x)).$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_\mu = x(3B_1 \cos(3x) - 3B_2 \sin(3x)) + B_1 \sin(3x) + B_2 \cos(3x)$$

και

$$\begin{aligned} y''_\mu &= 3B_1 \cos(3x) - 3B_2 \sin(3x) + x(-9B_1 \sin(3x) - 9B_2 \cos(3x)) \\ &+ 3B_1 \cos(3x) - 3B_2 \sin(3x) \\ &= 6B_1 \cos(3x) - 9B_2 x \cos(3x) - 6B_2 \sin(3x) - 9B_1 x \sin(3x). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} 6B_1 \cos(3x) - 9B_2 x \cos(3x) - 6B_2 \sin(3x) - 9B_1 x \sin(3x) \\ + 9x(B_1 \sin(3x) + B_2 \cos(3x)) = \sin(3x) + \cos(3x) \end{aligned}$$

ή

$$6B_1 \cos(3x) - 6B_2 \sin(3x) = \sin(3x) + \cos(3x).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές, ευρίσκουμε

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad \text{και} \quad B_2 = -\frac{1}{6}.$$

Έτσι, μια μερική λύση είναι

$$y_\mu = x \left( \frac{1}{6} \sin(3x) - \frac{1}{6} \cos(3x) \right),$$

και η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = y_o + y_\mu = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + x \left( \frac{1}{6} \sin(3x) - \frac{1}{6} \cos(3x) \right).$$

△

#### V. Γινόμενο πολυωνυμικής με εκθετική και με τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0)(\beta_1 \cos(\delta x) + \beta_2 \sin(\delta x))e^{dx}$$

Σε αυτή την περίπτωση συνδυάζουμε τα αποτελέσματα των περιπτώσεων III και IV.

#### VI. Αθροίσματα συναρτήσεων των περιπτώσεων I-V

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε τη μη ομογενή Δ.Ε.

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x), \quad (4.3.13)$$

της οποίας το δεύτερο μέλος γράφεται ως (πεπερασμένο) άθροισμα συναρτήσεων των περιπτώσεων I-V.

Τότε, βρίσκουμε τις μερικές λύσεις  $y_{\mu_1}, y_{\mu_2}, \dots, y_{\mu_k}$  των  $k$  επιμέρους εξισώσεων, αντίστοιχως

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= f_1(x), \\ y'' + a_1 y' + a_0 y &= f_2(x), \\ &\vdots \\ y'' + a_1 y' + a_0 y &= f_k(x). \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

και λόγω της γραμμικότητας της Δ.Ε. (4.3.13), συνάγεται ότι το άθροισμα

$$y_\mu = y_{\mu_1} + y_{\mu_2} + \dots + y_{\mu_k} \quad (4.3.15)$$

αποτελεί μία μερική της λύση.

Η παραπάνω διαδικασία εκφράζει την αρχή της υπέρθεσης για μη ομογενείς γραμμικές Δ.Ε.

**Παράδειγμα 4.3.6** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' - y = x^2 + 1 + 2e^x + \cos(2x).$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda = \pm 1,$$

και έτσι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 e^{-x} + c_2 e^x.$$

Επειδή  $f(x) = x^2 + 1 + 2e^x + \cos(2x)$ , βρίσκουμε τις μερικές λύσεις των Δ.Ε.

$$y'' - y = x^2 + 1,$$

$$y'' - y = 2e^x,$$

$$y'' - y = \cos(2x).$$

Για την πρώτη αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu_1} = ax^2 + bx + c,$$

οπότε παραγωγίζοντας έχουμε

$$y'_{\mu_1}(x) = 2ax + b$$

και

$$y''_{\mu_1}(x) = 2a,$$

και αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$-ax^2 - bx - c + 2a = x^2 + 1.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} -a & = 1 \\ -b & = 0 \\ 2a - c & = 1 \end{cases},$$

το οποίο έχει ως λύση

$$\begin{cases} a & = -1 \\ b & = 0 \\ c & = -3 \end{cases},$$

και άρα μια μερική λύση είναι

$$y_{\mu_1} = -x^2 - 3.$$

Για τη δεύτερη Δ.Ε., επειδή το 1 αποτελεί λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu_2} = axe^x.$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_{\mu_2} = ae^x + axe^x$$

και

$$y''_{\mu_2} = ae^x + ae^x + axe^x = 2ae^x + axe^x.$$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$2ae^x - axe^x + axe^x = 2e^x,$$

από την οποία προκύπτει

$$a = 1,$$

και άρα μια μερική λύση είναι

$$y_{\mu_2} = xe^x.$$

Για την τρίτη Δ.Ε., αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu_3} = a \sin(2x) + b \cos(2x).$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y'_{\mu_3} = 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x)$$

και

$$y''_{\mu_3} = -4a \sin(2x) - 4b \cos(2x),$$

οπότε αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$-4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) - a \sin(2x) - b \cos(2x) = \cos(2x)$$

ή

$$-5a \sin(2x) - 5b \cos(2x) = \cos(2x).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές, προκύπτει

$$a = 0 \quad \text{και} \quad b = -\frac{1}{5},$$

και έτσι

$$y_{\mu_3} = -\frac{1}{5} \cos(2x).$$

Σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. δίνεται από το άθροισμα των τριών μερικών λύσεων και της λύσης της ομογενούς, δηλαδή

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_{\mu_1} + y_{\mu_2} + y_{\mu_3} \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^x - x^2 - 3 + x e^x - \frac{1}{5} \cos(2x). \end{aligned}$$

△

**Παρατήρηση 4.3.1** Η απλούστερη μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y'' = f(x),$$

η οποία αντιστοιχεί στην (4.3.1) για  $a_1 = a_0 = 0$ . Για να τη λύσουμε, κάνουμε δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

△

**Παράδειγμα 4.3.7** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y'' = x^2 - x + \sin x.$$

**Λύση.** Κάνουμε δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις και έχουμε

$$\int y'' dy = \int (x^2 - x + \sin x) dx + c_1.$$

ή

$$y' = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

ή

$$\int y' dy = \int \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1 \right) dx,$$

οπότε τελικά

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2.$$

△

#### 4.4 Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των δυναμοσειρών

Η μεθοδολογία επίλυσης Δ.Ε. με τη βοήθεια δυναμοσειρών είναι ιδιαίτερα χρηστική σε πολλά προβλήματα εφαρμοσμένων θετικών και τεχνολογικών επιστημών, τα οποία μοντελοποιούνται με Δ.Ε., για τις οποίες δεν εφαρμόζονται οι τεχνικές προηγούμενων παραγράφων. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα είναι η γραμμική ομογενής Δ.Ε.

$$y'' - 2xy' + y = 0,$$

η οποία εμφανίζεται σε προβλήματα Κβαντικής Μηχανικής.

Για να αποσαφηνίσουμε τη μεθοδολογία επίλυσης Δ.Ε. με δυναμοσειρές, επεξεργαζόμαστε αρχικά ένα συγκεκριμένο απλό παράδειγμα.

**Παράδειγμα 4.4.1** Επιλύστε με τη βοήθεια δυναμοσειρών τη Δ.Ε.

$$y'' + y = 0.$$

**Λύση.** Αναζητούμε λύση  $y(x)$  της Δ.Ε., η οποία παρίσταται από μία δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R > 0$ , δηλαδή ισχύει

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Εφαρμόζοντας το γνωστό κανόνα παραγωγίσης δυναμοσειράς, υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

και

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των  $y$  και  $y''$  στη Δ.Ε., ευρίσκουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

οπότε έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

και έτσι προκύπτει

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0,$$

δηλαδή η ακολουθία  $a_n$  ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

η οποία προσδιορίζει την ακολουθία  $a_n$  με τη βοήθεια των όρων  $a_0$  και  $a_1$ , οι οποίοι θεωρούνται ως αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Πιο συγκεκριμένα, για τις υπακολουθίες των άρτιων και περιττών όρων, ισχύει ότι

$$a_{2n} = a_0 \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \text{και} \quad a_{2n+1} = a_1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

και έτσι η λύση της Δ.Ε. γράφεται ως

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

△

Εξάλλου, σημειώνουμε ότι οι δύο τελευταίες δυναμοσειρές είναι οι σειρές Maclaurin των συναρτήσεων  $\cos x$  και  $\sin x$ , αντιστοίχως, και έτσι, η λύση εκφράζεται υπό τη μορφή

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x,$$

η οποία ευρίσκεται και με εφαρμογή των γενικών μεθοδολογιών επίλυσης ομογενών γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές της Παραγράφου 4.2.

Η διαδικασία επεξεργασίας του παραδείγματος μας οδηγεί στη διατύπωση της μεθόδου επίλυσης Δ.Ε. με τη βοήθεια δυναμοσειρών, η οποία συνοψίζεται ως εξής:

1. Αναζητούμε λύση  $y(x)$  της Δ.Ε., η οποία παρίσταται από μία δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R$ , δηλαδή ισχύει

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

2. Υπολογίζουμε, με τη βοήθεια του γνωστού τύπου παραγωγίσης δυναμοσειράς, τις παραγώγους της  $y(x)$ , οι οποίες εμφανίζονται στη Δ.Ε.
3. Αντικαθιστούμε τις παραγώγους αυτές στη Δ.Ε.
4. Προσδιορίζουμε την αναδρομική σχέση που ορίζει την ακολουθία  $a_n$ .
5. Ευρίσκουμε, με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης, τους όρους της ακολουθίας  $a_n$  με τη βοήθεια των όρων  $a_0$  και  $a_1$  και, έτσι, προκύπτει η τελική έκφραση της λύσης  $y(x)$ .

**Παράδειγμα 4.4.2** Επιλύστε με τη βοήθεια δυναμοσειρών τη Δ.Ε.

$$y'' - 2xy' + y = 0.$$

**Λύση.** Ακολουθούμε τα βήματα της παραπάνω διαδικασίας. Έτσι, αναζητούμε λύση  $y(x)$  της Δ.Ε. της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R),$$

υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

και

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

και αντικαθιστούμε τις εκφράσεις των  $y$  και  $y''$  στη Δ.Ε. Έτσι, λαμβάνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

οπότε έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

η οποία γράφεται ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - (2n-1) a_n] x^n = 0.$$

Έτσι, προκύπτει

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - (2n-1) a_n = 0,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$a_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Οι υπακολουθίες των αρτίων και περιττών όρων προσδιορίζονται, με τη βοήθεια των  $a_0$  και  $a_1$ , ως εξής

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_0, \quad a_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)}{(2n)!} a_0, \quad n = 2, 3, \dots$$



και

$$a_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{(2n+1)!} a_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Επομένως, η Δ.Ε. έχει ως λύση τη συνάρτηση

$$y(x) = a_0 \left( 1 - \frac{1}{2}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)}{(2n)!} x^{2n} \right) + a_1 \left( x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right),$$

όπου  $a_0$  και  $a_1$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

△

Σε αντίθεση με το Παράδειγμα 4.4.1, στο Παράδειγμα 4.4.2 οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)}{(2n)!} x^{2n}$$

και

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

που εμφανίζονται στη λύση δεν εκφράζονται με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων. Στις περιπτώσεις αυτές, συνήθως, υπολογίζουμε με τη βοήθεια των  $y_1$  και  $y_2$  προσεγγιστικές λύσεις της Δ.Ε.

**Παράδειγμα 4.4.3** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y'' - 2xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**Λύση.** Από το προηγούμενο παράδειγμα, με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών, ευρίσκουμε

$$a_0 = y(0) = 0 \quad \text{και} \quad a_1 = y'(0) = 1,$$

και άρα η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

△

## 4.5 Διαφορική εξίσωση Euler

Ορισμένες γραμμικές Δ.Ε. με μεταβλητούς συντελεστές ανάγονται με τη βοήθεια μετασχηματισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$  σε Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές, οι οποίες λύνονται με εφαρμογή των τεχνικών των Παραγράφων 4.2 και 4.3. Εδώ, εφαρμόζουμε τη διαδικασία αυτή για την επίλυση της Δ.Ε. Euler

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x), \quad x > 0, \quad (4.5.1)$$

όπου  $a_0$  και  $a_1$  σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής

$$t = \ln x, \quad \text{οπότε} \quad x = e^t \quad (4.5.2)$$

και εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας, ευρίσκουμε

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x} = \dot{y} \frac{1}{x}$$

και

$$y'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \dot{y} \right) = -\frac{1}{x^2} \dot{y} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{y}}{dx} = -\frac{1}{x^2} \dot{y} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{y}}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \dot{y} + \frac{1}{x^2} \ddot{y},$$

όπου  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  και  $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}$  συμβολίζουν τις παραγώγους ως προς τη νέα μεταβλητή  $t$ .

Έτσι, η αρχική Δ.Ε. (4.5.1) ανάγεται στην

$$\ddot{y} + (a_1 - 1)\dot{y} + a_0 y = f(e^t), \quad (4.5.3)$$

η οποία είναι γραμμική Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές της μορφής (4.3.1).

Αν  $f = 0$ , οπότε η (4.5.3) είναι ομογενής, τότε η λύση της ευρίσκεται με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών ριζών της εξίσωσης

$$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0. \quad (4.5.4)$$

Σε κάθε περίπτωση, όταν προσδιοριστεί η λύση  $y$  της (4.5.3) ως συνάρτηση του  $t$ , τότε κάνουμε το μετασχηματισμό (4.5.2) για να βρούμε τη λύση  $y$  της (4.5.1) ως συνάρτηση του  $x$ .

Όταν  $x < 0$  τότε κάνουμε την αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t = \ln(-x)$ , οπότε λαμβάνουμε την ίδια Δ.Ε. (4.5.3).

Η παραπάνω διαδικασία αποσαφηνίζεται στο ακόλουθο

**Παράδειγμα 4.5.1** Λύστε τη Δ.Ε.

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad x > 0.$$

**Λύση.** Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό  $t = \ln x$  και έτσι η Δ.Ε. ανάγεται στην

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0,$$

η οποία είναι Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της τελευταίας είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

που έχει τη διπλή ρίζα  $\lambda = -2$ , και έτσι η γενική της λύση είναι

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}.$$

Θέτοντας  $t = \ln x$ , ευρίσκουμε τη γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε.

$$y = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2 \ln x}{x^2}.$$

△

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. της (4.5.3) μπορεί πάντα να εκφραστεί με τη βοήθεια των ριζών της (4.5.4), σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην Παράγραφο 4.2. Στη συνέχεια, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (4.5.1) ευρίσκεται με την αντικατάσταση  $t = \ln x$ . Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτή τη γενική διαδικασία επίλυσης της (4.5.1) με  $f = 0$  καταγράφονται παρακάτω.

1. Αν  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  είναι οι διακεκριμένες πραγματικές ρίζες της (4.5.4), τότε η γενική λύση της (4.5.3) είναι

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

και η γενική λύση της (4.5.1) είναι

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}.$$

2. Αν η χαρακτηριστική εξίσωση (4.5.4) έχει μία διπλή ρίζα  $\lambda$ , τότε

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

είναι η γενική λύση της (4.5.3) και

$$y(x) = c_1 x^\lambda + c_2 x^\lambda \ln x$$

η γενική λύση της (4.5.1).

3. Αν η (4.5.4) έχει συζυγείς μιγαδικές ρίζες  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  και  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ , τότε η γενική λύση της (4.5.3) είναι

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)),$$

ενώ της (4.5.1) είναι

$$y(x) = x^\alpha(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)).$$

Έτσι, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (4.5.1) μπορεί πάντα να ευρεθεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (4.5.2) και σύμφωνα με τις προηγούμενες τρεις περιπτώσεις. Εφόσον γνωρίζουμε τη λύση της ομογενούς, μπορούμε να βρούμε τη λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.5.1) με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (βλ. Παράγραφο 4.7). Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση  $f$  είναι ειδικής μορφής, τότε η λύση της (4.5.1) μπορεί να ευρεθεί και με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών (βλ. Παράγραφο 4.3).

**Παράδειγμα 4.5.2** Λύστε τη Δ.Ε.

$$x^2 y'' - xy' - 3y = \ln x, \quad x > 0.$$

**Λύση.** Με το μετασχηματισμό  $t = \ln x$  η Δ.Ε. παίρνει τη μορφή

$$(α) \quad \ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = t,$$

η οποία είναι Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.

Οι χαρακτηριστικές ρίζες της αντίστοιχης ομογενούς είναι  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 3$  και έτσι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_0 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων ή τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών βρίσκουμε ότι μία μερική λύση της (α) είναι

$$y_\mu = \frac{2}{9} - \frac{t}{3},$$

οπότε η γενική λύση της (α) είναι

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{2}{9} - \frac{t}{3},$$

από όπου με την αντικατάσταση  $t = \ln x$ , λαμβάνουμε τη γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε.

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 x^3 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} \ln x.$$

△

**Παράδειγμα 4.5.3** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$x^2 y'' + xy' + 2y = -6x^2, \quad x > 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$$

**Λύση.** Με το μετασχηματισμό  $t = \ln x$  η Δ.Ε. μετασχηματίζεται στην

$$\ddot{y} + 2y = -6e^{2t}.$$

Η αρχική συνθήκη  $y(1) = 2$  μετασχηματίζεται στην  $y(0) = 2$  (διότι  $t = 0$  για  $x = 1$ ). Για το μετασχηματισμό της αρχικής συνθήκης της παραγώγου χρησιμοποιούμε τον κανόνα αλυσίδας  $y' = \dot{y} \frac{1}{x}$  για  $x = 1$  (και  $t = 0$ ), οπότε  $\dot{y}(0) = y'(1) = 0$ .

Έτσι, το νέο Π.Α.Τ. είναι

$$(\beta) \quad \ddot{y} + 2y = -6e^{2t}, \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. του (β) είναι

$$y_o = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t),$$

ενώ η μερική της λύση προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων ή των προσδιοριστέων συντελεστών να είναι

$$y_\mu = -e^{2t},$$

οπότε η γενική λύση της Δ.Ε. του (β) είναι

$$y = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t) - e^{2t}.$$

Οι σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  υπολογίζονται με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών του (β) να είναι  $c_1 = 3$  και  $c_2 = \sqrt{2}$ , και έτσι έχουμε ότι η λύση του Π.Α.Τ. (β) είναι

$$y = 3 \cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) - e^{2t}.$$

Τέλος, με αντικατάσταση  $t = \ln x$  στην τελευταία, λαμβάνουμε τη λύση δοθέντος Π.Α.Τ.

$$y = 3 \cos(\sqrt{2} \ln x) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2} \ln x) - x^2.$$

△

## 4.6 Υποβιβασμός τάξης

Στην Παράγραφο 4.2 αναλύθηκε η γενική μεθοδολογία για την εύρεση της γενικής λύσης ομογενούς Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Όταν οι συντελεστές της Δ.Ε. είναι συναρτήσεις, τότε δεν υπάρχει γενική μεθοδολογία για την εύρεση της γενικής λύσης. Σε κάποιες, όμως, περιπτώσεις η ομογενής Δ.Ε. μπορεί να έχει μία λύση  $y_1 \neq 0$ , η οποία να μπορεί να προσδιορισθεί με εύκολο τρόπο. Τότε, η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε.

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (4.6.1)$$

προκύπτει με κάποιο συγκεκριμένο μετασχηματισμό, ο οποίος ανάγει την (4.6.1) σε μία ισοδύναμη Δ.Ε. πρώτης τάξης. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται υποβιβασμός τάξης και χρησιμοποιείται για την εύρεση μιας δεύτερης γραμμικά ανεξάρτητης λύσης  $y_2$  της (4.6.1), όταν είναι ήδη γνωστή μία λύση  $y_1 \neq 0$ .

Η εφαρμογή της μεθόδου υποβιβασμού τάξης επεξηγείται στο ακόλουθο

**Παράδειγμα 4.6.1** Με δεδομένο ότι η  $y_1 = x$  είναι μία λύση της Δ.Ε.

$$2x^2y'' - xy' + y = 0, \quad x > 0,$$

βρείτε τη γενική της λύση.

**Λύση.** Θέτουμε

$$y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x$$

και αναζητούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση  $u$ , ώστε η  $y = ux$  να είναι λύση της Δ.Ε. Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y' = u'x + u, \quad y'' = u''x + 2u',$$

και αντικαθιστώντας στη Δ.Ε.

$$2x^3u'' + 3x^2u' = 0, \quad x > 0,$$

η οποία είναι Δ.Ε. δευτέρας τάξης (όπως και η αρχική), αλλά επειδή δεν περιέχει όρο που να έχει  $u$  μπορεί να επιλυθεί θέτοντας  $u' = v$ , οπότε ανάγεται στη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$v' + \frac{3}{2x}v = 0.$$

Η τελευταία λύνεται με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα (βλ. Παράγραφο 2.3) και η λύση της προκύπτει να είναι

$$v = Cx^{-3/2},$$

επομένως

$$u = c_1x^{-1/2} + c_2,$$

και άρα η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. είναι

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x.$$

△

Δηλαδή, αν είναι γνωστή μία λύση  $y_1 \neq 0$  της (4.6.1), τότε για να βρούμε μία δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση  $y_2$  θέτουμε

$$y_2(x) = u(x)y_1(x), \quad (4.6.2)$$

οπότε

$$y_2' = u'y_1 + uy_1',$$

και

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''.$$

Αντικαθιστώντας τις τελευταίες εκφράσεις στην (4.6.1), λαμβάνουμε

$$y_1u'' + (2y_1' + a_1y_1)u' + (y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1)u = 0. \quad (4.6.3)$$

Επειδή η  $y_1$  είναι λύση της (4.6.1), ο συντελεστής του  $u$  στην (4.6.3) είναι ίσος με μηδέν, επομένως έχουμε

$$y_1u'' + (2y_1' + a_1y_1)u' = 0, \quad (4.6.4)$$

η οποία, θέτοντας  $v = u'$ , ανάγεται στη (γραμμική) Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$y_1v' + (2y_1' + a_1y_1)v = 0. \quad (4.6.5)$$

Η  $v$  προσδιορίζεται με τις τεχνικές της Παραγράφου 2.3 και ακολούθως η  $u$  προκύπτει με αόριστη ολοκλήρωση.

Η παραπάνω διαδικασία καλείται υποβιβασμός τάξης διότι αναγόμεστε στη λύση μιας Δ.Ε. πρώτης τάξης ως προς  $u'$  αντί για την αρχική Δ.Ε. δεύτερης τάξης ως προς  $y$ .

Επίσης, σημειώνουμε ότι η μέθοδος υποβιβασμού τάξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για μη ομογενείς γραμμικές Δ.Ε. δεύτερης τάξης, όπως φαίνεται στο επόμενο

**Παράδειγμα 4.6.2** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = xe^x, \quad x > 0,$$

με δεδομένο ότι η  $y_1 = e^x$  είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε.

**Λύση.** Θέτουμε

$$y = ue^x.$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$y' = u'e^x + ue^x, \quad y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$$

και αντικαθιστώντας στη δοθείσα Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$xu'' + u' = x,$$

η οποία παραμένει Δ.Ε. δευτέρας τάξης, όμως μπορεί να επιλυθεί θέτοντας  $u' = v$ , οπότε ανάγεται στη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$xv' + v = x,$$

η λύση της οποίας είναι (βλ. Παράγραφο 2.3)

$$v = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x}.$$

Επομένως, με αόριστη ολοκλήρωση προκύπτει

$$u = \frac{x^2}{4} + c_1 \ln x + c_2,$$

και άρα η γενική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y = \frac{x^2 e^x}{4} + c_1 e^x \ln x + c_2 e^x.$$

Σημειώνουμε ότι η  $y_2 = e^x \ln x$  είναι μία δεύτερη λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη με την  $y_1 = e^x$ .

△

## 4.7 Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

Θα περιγράψουμε μία γενική μέθοδο για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. δευτέρας τάξεως με (εν γένει) μεταβλητούς συντελεστές

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad (4.7.1)$$

όπου  $a_0, a_1, f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς συναρτήσεις. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως *μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων* ή *μέθοδος Lagrange* και χρησιμοποιεί τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. της (4.7.1)

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (4.7.2)$$

για να ανάγει το πρόβλημα υπολογισμού της λύσης της (4.7.1) στον υπολογισμό δύο συγκεκριμένων ολοκληρωμάτων.

Ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων παρουσιάζεται αρχικά στο ακόλουθο



**Παράδειγμα 4.7.1** Βρείτε μία μερική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. έχει τις ρίζες  $\lambda_1 = i$  και  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i$ . Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Η βασική ιδέα της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων έγκειται στην αντικατάσταση των σταθερών  $c_1$  και  $c_2$  στην τελευταία έκφραση από συναρτήσεις  $u_1(x)$  και  $u_2(x)$  και ακολουθώντας στον προσδιορισμό των  $u_1(x)$  και  $u_2(x)$  ώστε η

$$(α) \quad y = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$$

να είναι μία μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε.

Οι  $u_1(x)$  και  $u_2(x)$  θα προσδιοριστούν με αντικατάσταση της (α) στη μη ομογενή Δ.Ε. Επειδή, κατά αυτόν τον τρόπο, θα έχουμε δύο άγνωστες συναρτήσεις και μία εξίσωση που αυτές θα ικανοποιούν θα χρειαστούμε και μία δεύτερη εξίσωση. Όπως θα δούμε, τη δεύτερη αυτή εξίσωση την επιλέγουμε εμείς κατάλληλα ώστε να απλοποιούνται οι υπολογισμοί.

Αρχικά, παραγωγίζοντας την (α), έχουμε

$$(β) \quad y' = -u_1 \sin x + u_2 \cos x + u_1' \cos x + u_2' \sin x.$$

Για να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί, απαιτούμε τώρα

$$(γ) \quad u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0,$$

οπότε η (β) παίρνει τη μορφή

$$y' = -u_1 \sin x + u_2 \cos x,$$

και παραγωγίζοντας, λαμβάνουμε

$$(δ) \quad y'' = -u_1 \cos x - u_2 \sin x - u_1' \sin x + u_2' \cos x.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στη δοθείσα Δ.Ε., παίρνουμε

$$(ε) \quad -u_1' \sin x + u_2' \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι πρέπει οι  $u_1'$  και  $u_2'$  να ικανοποιούν το σύστημα των (γ) και (ε)

$$\begin{aligned} u_1' \cos x + u_2' \sin x &= 0 \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x &= \frac{1}{\cos x}, \end{aligned}$$

οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων για τις  $u_1'$  και  $u_2'$ .

Για να λύσουμε το σύστημα αυτό πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με  $\sin x$ , τη δεύτερη με  $\cos x$  και προσθέτοντας κατά μέλη ευρίσκουμε

$$u_2' = 1,$$

η οποία έχει ως λύση

$$u_2 = x.$$

Αντικαθιστώντας  $u_2' = 1$  στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$u_1' = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

οπότε

$$u_1 = \ln(\cos x)$$

(ισχύει ότι  $\cos x > 0$  για  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ).

Άρα, μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_\mu = \ln(\cos x) \cos x + x \sin x$$

και η γενική της λύση είναι

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln(\cos x) \cos x + x \sin x.$$

△

Η γενική διαδικασία που ακολουθούμε στη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων για τη λύση της (4.7.1) περιγράφεται ως εξής. Έστω  $y_1$  και  $y_2$  δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς (4.7.2), οπότε η γενική της λύση είναι

$$y_o = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (4.7.3)$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Η υπόθεση ότι γνωρίζουμε της γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. (4.7.2) είναι ουσιώδης, αφού η αναλυτική επίλυση της (4.7.2) είναι γενικά εφικτή μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπως είναι οι Δ.Ε. σταθερών συντελεστών και η Δ.Ε. Euler (βλ. Παραγράφους 4.2 και 4.5).

Όπως φαίνεται και στο τελευταίο παράδειγμα, η βασική ιδέα είναι να αντικαταστήσουμε τις σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  στην (4.7.3) από προσδιοριστέες συναρτήσεις  $u_1(x)$  και  $u_2(x)$ , έτσι ώστε να αναζητήσουμε μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (4.7.1) της μορφής

$$y_\mu = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2. \quad (4.7.4)$$

Παραγωγίζοντας την (4.7.4) και αναδιατάσσοντας τους όρους, λαμβάνουμε

$$y_\mu' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_1' y_1 + u_2' y_2. \quad (4.7.5)$$

Θέτουμε το άθροισμα των όρων που περιέχουν τα  $u'_1$  και  $u'_2$  ίσο με μηδέν, δηλαδή

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0, \quad (4.7.6)$$

οπότε η (4.7.5) παίρνει τη μορφή

$$y'_\mu = u_1 y'_1 + u_2 y'_2. \quad (4.7.7)$$

Παραγωγίζοντας εκ νέου την (4.7.7), ευρίσκουμε

$$y''_\mu = u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2. \quad (4.7.8)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε στην (4.7.1) τις εκφράσεις των  $y$ ,  $y'$  και  $y''$  από τις (4.7.4), (4.7.7) και (4.7.8), και έχουμε (όλες οι εμφανιζόμενες είναι συναρτήσεις του  $x$ )

$$u_1 [y''_1 + a_1 y'_1 + a_0 y_1] + u_2 [y''_2 + a_1 y'_2 + a_0 y_2] + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f. \quad (4.7.9)$$

Οι παραστάσεις στις αγκύλες είναι ίσες μη μηδέν διότι οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (4.7.2) και έτσι, οδηγούμαστε στη σχέση

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f. \quad (4.7.10)$$

Θεωρούμε τώρα το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα των (4.7.6) και (4.7.10) ως προς τις  $u'_1$  και  $u'_2$

$$y_1 u'_1 + y_2 u'_2 = 0 \quad (4.7.11)$$

$$y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 = f.$$

Η ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι  $y_1 y'_2 - y'_1 y_2$ , δηλαδή η ορίζουσα Wronski  $W$  των  $y_1$  και  $y_2$ . Επειδή οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.7.2), ισχύει ότι  $W(x) \neq 0$ ,  $x \in I$ . Έτσι, το σύστημα (4.7.11) έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται από

$$u'_1 = -\frac{y_2 f}{W}, \quad u'_2 = \frac{y_1 f}{W}. \quad (4.7.12)$$

Ολοκληρώνοντας τις τελευταίες ως προς  $x$ , ευρίσκουμε

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{W} dx, \quad u_2 = \int \frac{y_1 f}{W} dx \quad (4.7.13)$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία στην (4.7.4), προκύπτει η αναζητούμενη μερική λύση της (4.7.1).

Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας περιγράφονται στο ακόλουθο

**Θεώρημα 4.7.1** Έστω η μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. δευτέρας τάξεως με μεταβλητούς συντελεστές

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x),$$

όπου  $a_0, a_1, f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς συναρτήσεις και έστω  $y_1$  και  $y_2$  δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. Τότε, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_\mu(x),$$

όπου η μερική λύση  $y_\mu$  δίνεται από

$$y_\mu(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx \quad (4.7.14)$$

με  $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$  την ορίζουσα Wronski των  $y_1$  και  $y_2$ .

□

**Παρατήρηση 4.7.1** Συνδυάζοντας τις (4.7.4) και (4.7.13), έχουμε ότι η μερική λύση γράφεται, επίσης, ως

$$y_\mu(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} f(t) dt, \quad (4.7.15)$$

όπου  $x_0 \in I$ , ενώ ισχύει ότι  $y_\mu(x_0) = y_\mu'(x_0) = 0$ .

Η τελευταία έκφραση είναι χρήσιμη στην περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε προβλήματα μεταβολών της λύσης  $y_\mu$  ως προς τη συνάρτηση  $f$  του δεξιού μέλους της (4.7.1).

Η (4.7.15) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$y_\mu(x) = \int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt, \quad (4.7.16)$$

όπου η

$$G(x, t) = \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} \quad (4.7.17)$$

ονομάζεται *συνάρτηση Green* του προβλήματος και εξαρτάται μόνο από τις λύσεις  $y_1$  και  $y_2$  της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. (4.7.2).

△

**Παράδειγμα 4.7.2** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}, \quad x > 0.$$

**Λύση.** Η αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε. είναι σταθερών συντελεστών αλλά το δεύτερο μέλος της μη ομογενούς δεν είναι ειδικής μορφής, οπότε εδώ δεν εφαρμόζεται η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών της Παραγράφου 4.3.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς έχει τη διπλή ρίζα  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , και, έτσι, η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Αναζητούμε μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. της μορφής

$$(α) \quad y = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x.$$

Παραγωγίζοντας την (α), έχουμε

$$y' = u_1 e^x + u_2(e^x + xe^x) + u_1' e^x + u_2' x e^x.$$

Θέτουμε

$$(β) \quad u_1' e^x + u_2' x e^x = 0,$$

οπότε

$$y' = u_1 e^x + u_2(e^x + xe^x)$$

και παραγωγίζοντας λαμβάνουμε

$$y'' = u_1 e^x + u_2(2e^x + xe^x) + u_1' e^x + u_2'(e^x + xe^x).$$

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα Δ.Ε., παίρνουμε

$$(γ) \quad u_1' e^x + u_2'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι πρέπει οι  $u_1'$  και  $u_2'$  να ικανοποιούν το σύστημα των (β) και (γ)

$$u_1' e^x + u_2' x e^x = 0$$

$$u_1' e^x + u_2'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, ευρίσκουμε

$$u_2' = \frac{1}{x^2},$$

οπότε

$$u_2 = -\frac{1}{x},$$

και αντικαθιστώντας  $u'_2 = \frac{1}{x^2}$  στην πρώτη εξίσωση, έχουμε

$$u'_1 = -\frac{1}{x},$$

οπότε

$$u_1 = -\ln x.$$

Άρα, μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_\mu = -(\ln x)e^x - e^x$$

και η γενική της λύση είναι

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x - (1 + \ln x)e^x,$$

η οποία γράφεται και ως

$$y = C_1 e^x + c_2 x e^x - (\ln x)e^x,$$

όπου  $C_1 = c_1 - 1$ .

△

**Παράδειγμα 4.7.3** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$x^2 y'' + xy' - y = x^2 \ln x, \quad x > 0.$$

**Λύση.** Η αντίστοιχη ομογενής είναι Δ.Ε. Euler και έτσι, εφαρμόζοντας τις τεχνικές της Παραγράφου 4.5, ευρίσκουμε ότι έχει τη γενική λύση

$$y_o = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}.$$

Αναζητούμε μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. της μορφής

$$y = u_1(x)x + u_2(x)\frac{1}{x}$$

και ακολουθώντας τα γενικά βήματα της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων, καταλήγουμε ότι πρέπει οι  $u'_1$  και  $u'_2$  να ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} u'_1 x + u'_2 \frac{1}{x} &= 0 \\ u'_1 - u'_2 \frac{1}{x^2} &= \ln x. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση με  $x$  και προσθέτοντας κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$2xu_1' = x \ln x,$$

και μία λύση για την  $u_1$  είναι

$$u_1 = \frac{x}{2}(\ln x - 1).$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$u_2' = -\frac{x^2}{2} \ln x,$$

οπότε μία λύση για την  $u_2$  είναι

$$u_2 = -\frac{x^3}{18}(3 \ln x - 1).$$

Άρα, μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_\mu = \frac{x^2}{2}(\ln x - 1) - \frac{x^2}{18}(3 \ln x - 1) = \frac{x^2 \ln x}{3} - \frac{4x^2}{9}$$

και η γενική της λύση είναι

$$y = c_1x + c_2\frac{1}{x} + \frac{x^2 \ln x}{3} - \frac{4x^2}{9}.$$

△

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων είναι ότι μπορεί γενικά να εφαρμοστεί για κάθε συνάρτηση δευτέρου μέλους  $f$ , χωρίς να απαιτεί αυτή να είναι ειδικής μορφής, όπως στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Από την άλλη πλευρά, η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων προϋποθέτει τη γνώση δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων  $y_1$  και  $y_2$  της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. κάτι που μπορεί να μην είναι εύκολο όταν η τελευταία δεν έχει σταθερούς συντελεστές. Επιπρόσθετα, ο αναλυτικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων της μορφής (4.7.14) μπορεί να είναι δύσκολος ανάλογα με τις συναρτήσεις  $y_1$ ,  $y_2$  και  $f$ .

## 4.8 Ασκήσεις

Λύστε τις Δ.Ε.

### Άσκηση 4.8.1

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Άσκηση 4.8.2

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Άσκηση 4.8.3

$$y'' - 6y' + 9y = 3x.$$

Άσκηση 4.8.4

$$y'' + 5y' - 9y = x^2.$$

Άσκηση 4.8.5

$$y'' + 4y' + 5y = 2e^{-2x}.$$

Άσκηση 4.8.6

$$y'' + y' - 12y = 4e^{2x}.$$

Άσκηση 4.8.7

$$y'' + 4y' + 5y = 6 \sin x.$$

Άσκηση 4.8.8

$$y'' + 3y' + 2y = 10 \cos(2x).$$

Λύστε με τη μέθοδο των δυναμοσειρών τα Π.Α.Τ.

Άσκηση 4.8.9

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Άσκηση 4.8.10

$$y'' + x^2y' + xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Λύστε τις Δ.Ε. Euler

Άσκηση 4.8.11

$$x^2y'' - 6xy' + 10y = 0, \quad x > 0.$$

Άσκηση 4.8.12

$$x^2y'' - 9xy' + 25y = 0, \quad x > 0.$$



**Άσκηση 4.8.13** Με δεδομένο ότι η  $y_1 = x$  είναι μία λύση της Δ.Ε.

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0, \quad x > 0,$$

βρείτε τη γενική της λύση.

**Άσκηση 4.8.14** Με δεδομένο ότι η  $y_1 = x^{3/2}$  είναι μία λύση της Δ.Ε.

$$4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0, \quad x > 0,$$

βρείτε τη γενική της λύση.

Λύστε τις Δ.Ε.

**Άσκηση 4.8.15**

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

**Άσκηση 4.8.16**

$$y'' + 9y = 3 \tan(3x).$$

**Άσκηση 4.8.17**

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

# Βιβλιογραφία

- [1] Ν. Δ. Αλικιάκος και Γ. Η. Καλογερόπουλος, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2007.
- [2] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.
- [3] Γ. Κ. Θεοδωρίδης και Κ. Γεωργίου, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πάτρα, 1983.
- [4] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Θέματα Διαφορικών Εξισώσεων*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2011.
- [5] R. H. Martin, *Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1983.
- [6] B. E. Shapiro, *Lecture Notes in Differential Equations*, California State University, Northridge, 2011.
- [7] Ν. Μ. Σταυρακάκης, *Διαφορικές Εξισώσεις: Συνήθεις και Μερικές. Θεωρία και Εφαρμογές από τη Φύση και τη Ζωή*, Έκδοση: Οκτώβριος 2015.

## Κεφάλαιο 5

# Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης

Στο κεφάλαιο περιέχεται μία συνοπτική επισκόπηση των γραμμικών Δ.Ε. ανώτερης τάξης, όπου επεκτείνονται με φυσικό και αναμενόμενο τρόπο οι μεθοδολογίες επίλυσης των γραμμικών Δ.Ε. δεύτερης τάξης που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4. Όμως, οι υπολογιστικές μέθοδοι επίλυσης είναι, όπως αναμένεται, αρκετά πιο περίπλοκες για Δ.Ε. ανώτερης τάξης.

### 5.1 Γενική θεωρία

Θεωρούμε τη γραμμική Δ.Ε. τάξης  $n$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (5.1.1)$$

όπου  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $I$ , καθώς επίσης και την αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (5.1.2)$$

Αρχικά, διατυπώνουμε την αρχή της υπέρθεσης για γραμμικές Δ.Ε. τάξης  $n$ , η οποία αποδεικνύεται όπως και η αντίστοιχη για Δ.Ε. δεύτερης τάξης (βλ. Λήμμα 4.1.1).

**Λήμμα 5.1.1** Αν  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (5.1.2) στο διάστημα  $I$ , τότε η συνάρτηση

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n,$$

όπου  $c_1, c_2, \dots, c_n$  είναι αυθαίρετες σταθερές, είναι επίσης λύση της (5.1.2) στο  $I$ .

□

Το θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για Π.Α.Τ. γραμμικών Δ.Ε. τάξης  $n$  διατυπώνεται ως εξής.

**Θεώρημα 5.1.1** Για κάθε  $x_0 \in I$  και  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$  υπάρχει ακριβώς μία λύση  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  του Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y &= f(x), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

□

Επίσης, υπενθυμίζουμε τις έννοιες της γραμμικής εξάρτησης και ανεξαρτησίας για  $n$  συναρτήσεις.

**Ορισμός 5.1.1** Οι συναρτήσεις  $y_1, y_2, \dots, y_n : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζονται *γραμμικά εξαρτημένες* στο διάστημα  $I$  όταν υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in I. \quad (5.1.4)$$

Οι συναρτήσεις ονομάζονται *γραμμικά ανεξάρτητες* στο  $I$  όταν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή όταν για  $n$  σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ισχύει

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0. \quad (5.1.5)$$

□

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τον ορισμό της έννοιας της ορίζουσας Wronski.

**Ορισμός 5.1.2** Έστω οι  $n - 1$  φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $y_1, y_2, \dots, y_n : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Η συνάρτηση  $W \equiv W(y_1, y_2, \dots, y_n) : I \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ορίζεται από την  $n \times n$  ορίζουσα

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (5.1.6)$$

ονομάζεται ορίζουσα *Wronski* των  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

□

Στο ακόλουθο θεώρημα, το οποίο επεκτείνει το Θεώρημα 4.1.5, συσχετίζονται η γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων της ομογενούς Δ.Ε. (5.1.2), η ορίζουσα Wronski των λύσεων αυτών και η γενική λύση της (5.1.2).

**Θεώρημα 5.1.2** Έστω ότι  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι  $n$  λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (5.1.2) στο διάστημα  $I$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1. Κάθε λύση  $y$  της Δ.Ε. (5.1.2) είναι γραμμικός συνδυασμός των λύσεων  $y_1, y_2, \dots, y_n$  στο  $I$ , δηλαδή υπάρχουν (μοναδικές) σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad \forall x \in I.$$

2. Οι  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο  $I$ .

3. Υπάρχει  $x_0 \in I$  έτσι ώστε η τιμή της ορίζουσας Wronski  $W$  των  $y_1, y_2, \dots, y_n$  στο  $x_0$  να είναι διάφορη από το μηδέν, δηλαδή  $W(x_0) \neq 0$ .

4. Για την ορίζουσα Wronski  $W$  των  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ισχύει  $W(x) \neq 0, \forall x \in I$ .

□

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.2, για τον προσδιορισμό όλων των λύσεων της ομογενούς Δ.Ε. (5.1.2) τάξης  $n$ , χρειαζόμαστε  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $y_1, y_2, \dots, y_n$  της (5.1.2), οπότε η γενική λύση της (5.1.2) είναι η οικογένεια των συναρτήσεων

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n : I \rightarrow \mathbb{R},$$

όπου  $c_1, c_2, \dots, c_n$  είναι αυθαίρετες σταθερές. Στην προκειμένη περίπτωση, το σύνολο  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  αναφέρεται ως θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.1.2).

Ενδεικτικά, επεξεργαζόμαστε συνοπτικά τα ακόλουθα δύο παραδείγματα.

**Παράδειγμα 5.1.1** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y''' - y'' - 2y' = 0,$$

η οποία έχει ως τρεις λύσεις τις συναρτήσεις  $y_1(x) = 1$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  και  $y_3(x) = e^{2x}$ .

**Λύση.** Η ορίζουσα Wronski των  $y_1, y_2$  και  $y_3$  είναι

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} & e^{2x} \\ 0 & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ 0 & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

και ισχύει

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.2, οι  $y_1$ ,  $y_2$  και  $y_3$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

△

**Παράδειγμα 5.1.2** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 2,$$

αν γνωρίζετε ότι η Δ.Ε. έχει ως λύσεις τις συναρτήσεις  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$ ,  $y_3(x) = \sin x$  και  $y_4(x) = \cos x$ .

**Λύση.** Επαληθεύεται εύκολα ότι οι λύσεις  $y_1, y_2, y_3$  και  $y_4$  της ομογενούς Δ.Ε. είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα η γενική λύση της είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x.$$

Οι τιμές των σταθερών που χρειαζόμαστε αποτελούν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + c_4 = 4 \\ y'(0) &= c_1 - c_2 + c_3 = -4 \\ y''(0) &= c_1 + c_2 - c_4 = 2 \\ y'''(0) &= c_1 - c_2 - c_3 = 2, \end{aligned}$$

που προκύπτει από τις αρχικές συνθήκες. Η λύση αυτού είναι  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = -3$  και  $c_4 = 1$  και επομένως η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(x) = e^x + 2e^{-x} - 3 \sin x + \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

△

Στο ακόλουθο θεώρημα προσδιορίζεται, κατ' επέκταση του Θεωρήματος 4.1.6, η γενική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (5.1.1) με τη βοήθεια μίας μερικής λύσης αυτής και της γενικής λύσης της ομογενούς Δ.Ε. (5.1.2).

**Θεώρημα 5.1.3** Αν  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (5.1.2) στο  $I$  και  $y_\mu$  είναι μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (5.1.1) στο  $I$ , τότε για κάθε λύση  $y$  της (5.1.1) υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$  έτσι ώστε να ισχύει

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_\mu(x), \quad x \in I. \quad (5.1.7)$$

□

**Παράδειγμα 5.1.3** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y''' - y'' - 2y' = 2.$$

**Λύση.** Στο Παράδειγμα 5.1.1 έχουμε προσδιορίσει τη γενική λύση

$$y_o(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε.

Εξάλλου, όπως επαληθεύεται εύκολα, η συνάρτηση  $y_\mu(x) = -x$  είναι μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. Έτσι, σύμφωνα με την (5.1.7), η ζητούμενη γενική λύση είναι

$$y(x) = y_o(x) + y_\mu(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} - x.$$

△

## 5.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Μια Δ.Ε. της μορφής

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (5.2.1)$$

όπου  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ , λέγεται ομογενής γραμμική Δ.Ε. τάξης  $n$  με σταθερούς συντελεστές.

Η μεθοδολογία επίλυσης της (5.2.1) είναι αντίστοιχη με εκείνη της γραμμικής Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές (4.2.1), η οποία αναλύεται στην Παράγραφο 4.2. Όμως, οι υπολογισμοί επίλυσης για την Δ.Ε. τάξης  $n$  είναι αρκετά περίπλοκοι.

Αναζητούμε λύσεις της μορφής  $y(x) = e^{\lambda x}$ , και αντικαθιστώντας στην (5.2.1), λαμβάνουμε

$$e^{\lambda x}[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0] = 0,$$

οπότε πρέπει το  $\lambda$  να είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (5.2.2)$$

της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. (5.2.1). Οι ρίζες της (5.2.2) καλούνται *χαρακτηριστικές ρίζες*, ενώ το πολυώνυμο  $n$ -οστού βαθμού

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (5.2.3)$$

καλείται το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* της (5.2.1).

Η γενική λύση της (5.2.1) προσδιορίζεται με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών ριζών. Γνωρίζουμε από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας ότι το  $n$ -οστού βαθμού πολυώνυμο  $p(\lambda)$  έχει  $n$  ρίζες στο  $\mathbb{C}$ . Έτσι, θα πρέπει να εξαντλήσουμε όλες τις περιπτώσεις για τις ρίζες, κάτι που είναι ουσιωδώς διαφορετικό από τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την επίλυση της Δ.Ε. δεύτερης τάξης (4.2.1), όπου ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών ριζών έγινε επιλύοντας μία πολυωνυμική εξίσωση δευτέρου βαθμού. Επίσης, σημειώνουμε ότι η εύρεση των ριζών ενός πολυωνύμου βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του τρία γενικά είναι μία πολύπλοκη διαδικασία. Για αυτό το λόγο αποτελεί συνήθη πρακτική αρκετές φορές να γίνεται χρήση μαθηματικών πακέτων, όπως είναι π.χ. τα Mathematica, Matlab και Maple, για την εύρεση των χαρακτηριστικών ριζών της (5.2.2).

Όπως στις Δ.Ε. δεύτερης τάξης, έτσι και εδώ διακρίνουμε πάλι για τις χαρακτηριστικές ρίζες τρεις περιπτώσεις: πραγματικές διακεκριμένες, επαναλαμβανόμενες και μιγαδικές (οι οποίες επίσης μπορεί να είναι επαναλαμβανόμενες). Όμως, υπάρχουν Δ.Ε. τάξης  $n$  οι οποίες περιλαμβάνουν και τις τρεις κατηγορίες χαρακτηριστικών ριζών, ενώ κάθε Δ.Ε. δεύτερης τάξης περιλαμβάνει μόνο μία από τρεις κατηγορίες.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.2, για την εύρεση της γενικής λύσης της (5.2.1), πρέπει να προσδιορίσουμε ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  της (5.2.1). Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες τρεις κατηγορίες ως προς το είδος των χαρακτηριστικών ριζών της (5.2.2).

### I. Πραγματικές και διακεκριμένες χαρακτηριστικές ρίζες

Έστω ότι η χαρακτηριστική εξίσωση (5.2.2) έχει  $k \leq n$  απλές διακεκριμένες πραγματικές ρίζες  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  (δηλαδή  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_k$ ). Τότε, οι  $k$  συναρτήσεις

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_k(x) = e^{\lambda_k x}$$

είναι στοιχεία ενός θεμελιώδους συνόλου λύσεων της (5.2.1).

### II. Πολλαπλές πραγματικές χαρακτηριστικές ρίζες

Έστω ότι η (5.2.2) έχει πραγματική ρίζα  $\lambda_0$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\mu$  (δηλαδή ο  $(\lambda - \lambda_0)^\mu$  είναι παράγοντας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (5.2.3), ενώ ο  $(\lambda - \lambda_0)^{\mu+1}$  δεν είναι). Τότε, οι  $\mu$  συναρτήσεις

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}, \dots, y_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\lambda_0 x}$$



είναι στοιχεία ενός θεμελιώδους συνόλου λύσεων της (5.2.1). Αν  $\mu = 1$ , οπότε η ρίζα  $\lambda_0$  είναι απλή, τότε αναγόμενα στην περίπτωση I και προκύπτει ότι μόνο η συνάρτηση  $y(x) = e^{\lambda_0 x}$  είναι στοιχείο ενός θεμελιώδους συνόλου λύσεων.

### III. Πολλαπλές συζυγείς μιγαδικές χαρακτηριστικές ρίζες

Έστω ότι η (5.2.2) έχει συζυγείς μιγαδικές ρίζες  $\lambda_0 = \alpha + i\beta$  και  $\overline{\lambda_0} = \alpha - i\beta$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\mu$  η καθεμία. Τότε, από την περίπτωση II, ευρίσκουμε τις ακόλουθες  $2\mu$  μιγαδικές συναρτήσεις

$$u_1(x) = e^{\lambda_0 x}, u_2(x) = x e^{\lambda_0 x}, \dots, u_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\lambda_0 x},$$

$$u_{\mu+1}(x) = e^{\overline{\lambda_0} x}, u_{\mu+2}(x) = x e^{\overline{\lambda_0} x}, \dots, u_{2\mu}(x) = x^{\mu-1} e^{\overline{\lambda_0} x},$$

για τις οποίες επιπλέον ισχύει ότι

$$u_{\mu+1}(x) = \overline{u_1}(x), u_{\mu+2}(x) = \overline{u_2}(x), \dots, u_{2\mu}(x) = \overline{u_\mu}(x).$$

Για να βρούμε τις πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι στοιχεία ενός θεμελιώδους συνόλου λύσεων της (5.2.1), χρησιμοποιούμε, όπως και στην Παράγραφο 4.2, τον τύπο του Euler και λαμβάνουμε τελικά το ακόλουθο σύνολο των  $2\mu$  πραγματικών συναρτήσεων

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2(x) = x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, y_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

$$y_{\mu+1}(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x), y_{\mu+2}(x) = x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, y_{2\mu}(x) = x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Και στις τρεις περιπτώσεις I, II και III η ορίζουσα Wronski των αντίστοιχων συναρτήσεων είναι διάφορη του μηδενός, και επομένως οι συναρτήσεις αυτές είναι πράγματι γραμμικά ανεξάρτητες.

#### Παράδειγμα 5.2.1 Λύστε τη Δ.Ε.

$$y''' - 3y' - 2y = 0.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

ή

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0,$$

που έχει την απλή ( $\mu = 1$ ) ρίζα  $\lambda_1 = 2$  και τη διπλή ( $\mu = 2$ ) ρίζα  $\lambda_2 = -1$ .

Επομένως, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x}.$$

△

**Παράδειγμα 5.2.2** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε.

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$$

έχει τις διακεκριμένες πραγματικές ρίζες

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$$

και έτσι η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{3x}.$$

Εξάλλου, οι αρχικές συνθήκες οδηγούν στο ακόλουθο σύστημα

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$-c_1 + c_2 + 3c_3 = 2$$

$$c_1 + c_2 + 9c_3 = 3,$$

το οποίο έχει τη λύση

$$c_1 = -\frac{1}{4}, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = \frac{1}{4}.$$

Έτσι, η λύση του Π.Α.Τ είναι

$$y = -\frac{e^{-x}}{4} + e^x + \frac{e^{3x}}{4}.$$

△

**Παράδειγμα 5.2.3** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)^3 = 0$$

έχει την απλή ( $\mu = 1$ ) ρίζα  $\lambda_1 = 0$  και την τριπλή ( $\mu = 3$ ) ρίζα  $\lambda_2 = 1$ .

Επομένως, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x = c_1 + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^x.$$

△

**Παράδειγμα 5.2.4** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = [(\lambda - 1)^2 + 1]^2 = 0$$

έχει τις διπλές ( $\mu = 2$ ) ρίζες  $\lambda_1 = 1 + i$  και  $\lambda_2 = 1 - i$ , και επομένως η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x \cos x + c_2 x e^x \cos x + c_3 e^x \sin x + c_4 x e^x \sin x \\ &= (c_1 + c_2 x) e^x \cos x + (c_3 + c_4 x) e^x \sin x. \end{aligned}$$

△

### 5.3 Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η γενική μορφή της μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. τάξης  $n$  με σταθερούς συντελεστές δίνεται από την

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (5.3.1)$$

όπου  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $I$ , ενώ της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. από την

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (5.3.2)$$

Από το Θεώρημα 5.1.3, η γενική λύση  $y$  της μη ομογενούς Δ.Ε. (5.3.1) είναι το άθροισμα της γενικής λύσης  $y_o$  της αντίστοιχης ομογενούς (5.3.2) και μιας οποιασδήποτε μερικής λύσης  $y_\mu$  της (5.3.1). Γνωρίζουμε ήδη, σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην Παρ. 5.2, να προσδιορίζουμε τη γενική λύση  $y_o$ . Πρέπει επομένως να βρούμε μία μερική λύση  $y_\mu$  της (5.3.1).

Για γραμμικές Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, έχουμε δει ήδη στις Παραγράφους 4.3 και 4.7 τις μεθόδους των προσδιοριστέων συντελεστών και της μεταβολής παραμέτρων που οδηγούν στην εύρεση της μερικής λύσης  $y_\mu$ . Στην παρούσα παράγραφο, θα περιγράψουμε συνοπτικά την εφαρμογή της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών για Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές τάξης  $n$ , καθώς η μέθοδος επεκτείνεται με φυσικό και αναμενόμενο τρόπο από Δ.Ε. δεύτερης τάξης σε Δ.Ε. τάξης  $n$ . Συνοπτική περιγραφή της εφαρμογής της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων θα ακολουθήσει στην επόμενη παράγραφο.

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση δευτέρου μέλους  $f$  είναι ειδικής μορφής, δηλαδή μπορεί να είναι μία πολυωνυμική, μία εκθετική ή μία τριγωνομετρική συνάρτηση ή και γινόμενο αυτών. Στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών αναζητούμε μία μερική λύση που περιέχει συντελεστές προς προσδιορισμό, οι οποίοι υπολογίζονται με αντικατάσταση στην (5.3.1). Η μέθοδος εφαρμόζεται για Δ.Ε. τάξης  $n$  με τον ίδιο τρόπο που εφαρμόζεται και σε Δ.Ε. δεύτερης τάξης (βλ., ανάλογα με τη συνάρτηση  $f$ , τις περιπτώσεις I-VI της Παραγράφου 4.3). Το μόνο ίσως σημείο που θέλει κάποια προσοχή είναι ότι αν κάποιος όρος στην αναζητούμενη έκφραση της μερικής λύσης υπάρχει ήδη στη λύση  $y_0$  της ομογενούς Δ.Ε., τότε ο όρος αυτός πρέπει να πολλαπλασιαστεί με κάποια δύναμη του  $x$ , η οποία μπορεί να είναι μεγαλύτερη του δύο, διότι τώρα η Δ.Ε. είναι τάξης  $n$ .

Το ακόλουθο θεώρημα διατυπώνει τα συμπεράσματα για την έκφραση της μερικής λύσης  $y_\mu$  μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. τάξης  $n$  με σταθερούς συντελεστές, όπου η συνάρτηση δευτέρου μέλους  $f$  είναι ειδικής μορφής.

**Θεώρημα 5.3.1** Έστω η Δ.Ε.  $n$  τάξης

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f,$$

με

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $P, Q$  πολυώνυμα μέγιστου βαθμού  $k$  (ώστε τουλάχιστον ένα από τα δύο να έχει βαθμό ακριβώς  $k$ ) και  $\nu$  ο ελάχιστος μη αρνητικός ακέραιος τέτοιος ώστε η συνάρτηση

$$y(x) = x^\nu e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ή} \quad y(x) = x^\nu e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

να μην είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε.

Τότε, μία μερική λύση της Δ.Ε. είναι

$$\begin{aligned} y_\mu(x) &= (d_1x^\nu + \dots + d_kx^{\nu+k-1})e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ &+ (\tilde{d}_1x^\nu + \dots + \tilde{d}_kx^{\nu+k-1})e^{\alpha x} \sin(\beta x), \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

όπου τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές  $d_k$  και  $\tilde{d}_k$  δεν είναι μηδέν.

□

**Παράδειγμα 5.3.1** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = e^{2x}.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1$$

και έτσι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x.$$

Επειδή  $f(x) = e^{2x}$  και το 2 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. (βλ. περίπτωση II, Παραγράφος 4.3), δηλαδή η  $e^{2x}$  δεν είναι λύση της ομογενούς Δ.Ε., αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = B e^{2x}.$$

Παραγωγίζοντας και αντικαθιστώντας αυτήν στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$8B e^{2x} + 12B e^{2x} - 2B e^{2x} - 3B e^{2x} = e^{2x},$$

οπότε υπολογίζουμε ότι  $B = \frac{1}{15}$ , και άρα

$$y_\mu = \frac{e^{2x}}{15}.$$

Έτσι, η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = y_o + y_\mu = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + \frac{e^{2x}}{15}.$$

△

**Παράδειγμα 5.3.2** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y''' - y = 6e^x + 2x - 3.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

με ρίζες

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

και έτσι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$$

Επειδή  $f(x) = 6e^x + 2x - 3$ , θα διαχωρίσουμε τους δύο όρους  $6e^x$  και  $2x - 3$ , σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην περίπτωση VI της Παραγράφου 4.3 (αρχή της υπέρθεσης). Για την

$6e^x$ , επειδή το 1 είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. (βλ. περίπτωση II, Παραγράφος 4.3), αναζητούμε μερική λύση της μορφής  $Axe^x$ . Για την  $2x - 3$ , αναζητούμε μερική λύση της μορφής  $Bx + C$  (βλ. περίπτωση I, Παραγράφος 4.3).

Έτσι, προκύπτει ότι

$$y_\mu = Axe^x + Bx + C.$$

Παραγωγίζοντας, αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στη Δ.Ε. και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων, υπολογίζουμε

$$A = 2, \quad B = -2, \quad C = 3,$$

και άρα

$$y_\mu = 2xe^x - 2x + 3,$$

οπότε τελικά η γενική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y = y_o + y_\mu = c_1e^x + c_2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_3e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + 2xe^x - 2x + 3.$$

△

**Παράδειγμα 5.3.3** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y''' - 12y'' + 48y' - 64y = 12 - 32e^{-8x} + 2e^{4x}.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 48\lambda - 64 = (\lambda - 4)^3 = 0$$

και έχει ρίζα την  $\lambda = 4$  με πολλαπλότητα  $\mu = 3$ .

Η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_o = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + c_3x^2e^{4x}.$$

Επειδή  $f(x) = 12 - 32e^{-8x} + 2e^{4x}$ , αρχικά διαχωρίζουμε τους τρεις όρους 12,  $-32e^{-8x}$  και  $2e^{4x}$  βάσει της αρχής της υπέρθεσης (βλ. περίπτωση VI, Παράγραφος 4.3). Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται ο όρος  $2e^{4x}$ , διότι το 4 είναι τριπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. Επεκτείνοντας για  $\mu = 3$  τα αναφερόμενα στην περίπτωση II της Παραγράφου 4.3, αναζητούμε για τον όρο αυτό μερική λύση της μορφής  $Cx^3e^{4x}$ .

Έτσι, έχουμε ότι

$$y_\mu = A + Be^{-8x} + Cx^3e^{4x}.$$

Παραγωγίζοντας και αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$-64A - 1728Be^{-8x} + 6Ce^{4x} = 12 - 32e^{-8x} + 2e^{4x},$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοίων όρων, υπολογίζουμε

$$A = -\frac{3}{16}, \quad B = \frac{1}{54}, \quad C = \frac{1}{3},$$

επομένως

$$y_{\mu} = -\frac{3}{16} + \frac{e^{-8x}}{54} + \frac{x^3 e^{4x}}{3}$$

και τελικά προκύπτει

$$y = y_o + y_{\mu} = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + c_3 x^2 e^{4x} - \frac{3}{16} + \frac{e^{-8x}}{54} + \frac{x^3 e^{4x}}{3}.$$

△

**Παρατήρηση 5.3.1** Η απλούστερη μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. τάξης  $n$  με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y^{(n)} = f(x),$$

που αντιστοιχεί στην (5.3.1) για  $a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$ . Για να τη λύσουμε κάνουμε  $n$  διαδοχικές ολοκληρώσεις, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

△

**Παράδειγμα 5.3.4** Λύστε τη Δ.Ε.

$$y^{(2000)} = e^x.$$

**Λύση.** Εκτελώντας αόριστες ολοκληρώσεις, έχουμε διαδοχικά

$$\int y^{(2000)} dy = \int e^x dx$$

ή

$$y^{1999} = e^x + c_1$$

ή

$$\int y^{(1999)} dy = \int e^x + c_1$$

ή

$$y^{1998} = e^x + c_1 x + c_2.$$

Κατά αυτόν τον τρόπο, μετά από 2000 διαδοχικές ολοκληρώσεις ευρίσκουμε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y(x) = e^x + \sum_{k=1}^{2000} \frac{c_k}{(2000-k)!} x^{2000-k}.$$

△

## 5.4 Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

Στην παράγραφο αυτή επεκτείνουμε σε Δ.Ε. τάξης  $n$  τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, η οποία αναπτύχθηκε στην Παράγραφο 4.7 για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. δεύτερας τάξεως με (εν γένει) μεταβλητούς συντελεστές. Έτσι, θεωρούμε τη Δ.Ε. τάξης  $n$

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad (5.4.1)$$

όπου  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς συναρτήσεις.

Η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων χρησιμοποιεί τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. της (5.4.1)

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (5.4.2)$$

ούτως ώστε να ανάγει το πρόβλημα υπολογισμού της λύσης της (5.4.1) στον υπολογισμό  $n$  συγκεκριμένων ολοκληρωμάτων.

Έστω  $y_1, y_2, \dots, y_n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (5.4.2), οπότε η γενική της λύση είναι

$$y_o = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad (5.4.3)$$

όπου  $c_1, c_2, \dots, c_n$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Αντικαθιστούμε αυτές τις σταθερές στην (5.4.3) από προσδιοριστέες συναρτήσεις  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ , και αναζητούμε μία μερική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. (5.4.1) της μορφής

$$y_\mu = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + \dots + u_n(x)y_n. \quad (5.4.4)$$

Γενικεύοντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην Παράγραφο 5.4 για Δ.Ε. δεύτερης τάξης, θεωρούμε τους ακόλουθους  $n - 1$  περιορισμούς

$$\begin{aligned} y_1 u'_1 + y_2 u'_2 + \dots + y_n u'_n &= 0 \\ y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 + \dots + y'_n u'_n &= 0 \\ &\vdots \\ y_1^{(n-2)} u'_1 + y_2^{(n-2)} u'_2 + \dots + y_n^{(n-2)} u'_n &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (5.4.5), οι παράγωγοι της  $y_\mu$  παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} y'_\mu &= y'_1 u_1 + y'_2 u_2 + \dots + y'_n u_n \\ y''_\mu &= y''_1 u_1 + y''_2 u_2 + \dots + y''_n u_n \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}_\mu &= y^{(n-1)}_1 u_1 + y^{(n-1)}_2 u_2 + \dots + y^{(n-1)}_n u_n. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$



Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε άλλη μία φορά την τελευταία από τις (5.4.6), οπότε έχουμε

$$y_{\mu}^{(n)} = y_1^{(n)}u_1 + y_2^{(n)}u_2 + \dots + y_n^{(n)}u_n + y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \dots + y_n^{(n-1)}u_n'. \quad (5.4.7)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.4.4), (5.4.6) και (5.4.7) στην (5.4.1) και αφού οι  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (5.4.2), τελικά καταλήγουμε στην

$$y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \dots + y_n^{(n-1)}u_n' = f. \quad (5.4.8)$$

Οι (5.4.5) και (5.4.8) αποτελούν ένα  $n \times n$  μη ομογενές γραμμικό αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' + \dots + y_nu_n' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' + \dots + y_n'u_n' &= 0 \\ &\vdots \\ y_1^{(n-2)}u_1' + y_2^{(n-2)}u_2' + \dots + y_n^{(n-2)}u_n' &= 0 \\ y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \dots + y_n^{(n-1)}u_n' &= f, \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

ως προς τις  $n$  άγνωστες συναρτήσεις  $u_1', u_2', \dots, u_n'$ .

Η ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι η ορίζουσα Wronski των  $y_1, y_2, \dots, y_n$  και άρα είναι διάφορη του μηδενός, αφού οι  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (5.4.2). Έτσι, το σύστημα (5.4.9) έχει μοναδική λύση για τις συναρτήσεις  $u_1', u_2', \dots, u_n'$ , από τις οποίες με αόριστη ολοκλήρωση ευρίσκουμε τις  $u_1, u_2, \dots, u_n$  και τέλος με τη βοήθεια της (5.4.4) προσδιορίζουμε τη μερική λύση  $y_{\mu}$ .

Το γεγονός ότι η ορίζουσα του συστήματος (5.4.9) είναι η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_n$  βοηθάει και στην απομνημόνευση της δομής του συστήματος αυτού (χωρίς να χρειάζεται να το παράγουμε κάθε φορά).

**Παράδειγμα 5.4.1** Βρείτε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}.$$

**Λύση.** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης έχει τις πραγματικές διακεκριμένες ρίζες

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2,$$

και, έτσι, η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_o = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x}.$$

Αναζητούμε μερική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. της μορφής

$$y_{\mu} = u_1(x) + u_2(x)e^x + u_3(x)e^{2x}.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, το σύστημα (5.4.9) είναι το εξής

$$\begin{aligned} u_1' + e^x u_2' + e^x u_3' &= 0 \\ e^x u_2' + 2e^{2x} u_3' &= 0 \\ e^x u_2' + 4e^{2x} u_3' &= \frac{e^{2x}}{1 + e^x} \end{aligned}$$

και θα το λύσουμε με τον κανόνα του Cramer.

Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0.$$

Έτσι, έχουμε

$$u_1' = \frac{e^{-3x}}{2} \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ \frac{e^{2x}}{1+e^x} & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$$

και

$$u_2' = \frac{e^{-3x}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{2x} \\ 0 & 0 & 2e^{2x} \\ 0 & \frac{e^{2x}}{1+e^x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^x}{1 + e^x}$$

και

$$u_3' = \frac{e^{-3x}}{2} \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & \frac{e^{2x}}{1+e^x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + e^x}.$$

Στη συνέχεια, κάνουμε αόριστες ολοκληρώσεις και λαμβάνουμε

$$u_1 = \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^x}{1 + e^x} e^x dx = \frac{1}{2} \int \frac{v - 1}{v} dv = \frac{1}{2} (1 + e^x) - \frac{1}{2} \ln(1 + e^x)$$

και

$$u_2 = - \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = - \ln(1 + e^x)$$

και

$$u_3 = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+e^x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -\frac{1}{2} \ln(1+e^{-x}).$$

Έτσι, η μερική λύση της Δ.Ε. δίνεται από

$$y_\mu = \frac{1}{2}(1+e^x) - \frac{1}{2} \ln(1+e^x) - e^x \ln(1+e^x) - \frac{e^{2x}}{2} \ln(1+e^{-x}),$$

ενώ η γενική της λύση από

$$y = C_1 + C_2 e^x + c_3 e^{2x} - \left( \frac{1}{2} + e^x \right) \ln(1+e^x) - \frac{e^{2x}}{2} \ln(1+e^{-x}),$$

όπου ο πρώτος όρος της  $y_\mu$  ενσωματώθηκε στους δύο πρώτους όρους της  $y_0$ , και για αυτό το λόγο χρησιμοποιήσαμε δύο νέες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ .

△

## 5.5 Ασκήσεις

Λύστε τις Δ.Ε.

Άσκηση 5.5.1

$$y^{(4)} + 16y = 0.$$

Άσκηση 5.5.2

$$2y^{(4)} + 11y''' + 18y'' + 4y' - 8y = 0.$$

Άσκηση 5.5.3

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Άσκηση 5.5.4

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0.$$

Άσκηση 5.5.5

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = 4 \cos x - 8 \sin x - 6x + 1.$$

Άσκηση 5.5.6

$$y''' - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x}.$$

## Άσκηση 5.5.7

$$y''' - 2y'' - 21y' - 18y = 3 + 4e^{-x}.$$

Λύστε τα Π.Α.Τ.

## Άσκηση 5.5.8

$$y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = -4.$$

## Άσκηση 5.5.9

$$y''' - 3y' - 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 9.$$

## Άσκηση 5.5.10

$$y''' + y'' + y' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$$

## Άσκηση 5.5.11

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = -1.$$

## Άσκηση 5.5.12

$$y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = \frac{7}{2}, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = \frac{5}{2}, \quad y'''(0) = -2.$$

# Βιβλιογραφία

- [1] J. Lebl, *Differential Equations for Engineers*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2014.
- [2] R. H. Martin, *Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1983.
- [3] B. E. Shapiro, *Lecture Notes in Differential Equations*, California State University, Northridge, 2011.

## Κεφάλαιο 6

# Συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

Πολλά σημαντικά προβλήματα του πραγματικού κόσμου, τα οποία εντάσσονται κυρίως στις φυσικές, τεχνολογικές και βιολογικές επιστήμες, όπου διάφορες μεταβλητές εξαρτώνται από την ίδια ανεξάρτητη μεταβλητή, διατυπώνονται με μαθηματικούς όρους, μοντελοποιούνται και προσομοιώνονται με τη βοήθεια συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Μεταξύ των προβλημάτων αυτών συγκαταλέγονται κινήσεις στο βαρυτικό πεδίο, συζευγμένα ηλεκτρικά κυκλώματα και μελέτη πληθυσμιακών μοντέλων με παρουσία θηραμάτων και κυνηγών. Οι μοντελοποιήσεις των προβλημάτων απετέλεσαν κίνητρα για τη θεωρητική και εφαρμοσμένη διερεύνηση των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζονται αρχικά οι βασικές εισαγωγικές έννοιες, καθορίζεται η σχετική ορολογία και αναλύονται ορισμένες μοντελοποιήσεις προβλημάτων. Στη συνέχεια καταχωρείται μία συνοπτική παρουσίαση της γενικής θεωρίας και των τεχνικών επίλυσης γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

### 6.1 Εισαγωγικές έννοιες και μοντελοποιήσεις προβλημάτων

Ο βασικός τύπος εξισώσεων που μελετώνται στο κεφάλαιο αυτό είναι συστήματα  $n$  Δ.Ε. πρώτης τάξης, όπου εμφανίζονται  $n$  άγνωστες συναρτήσεις μιας μεταβλητής και οι πρώτες παράγωγοί τους. Οι άγνωστες συναρτήσεις συμβολίζονται με  $x_1, x_2, \dots, x_n$  και η ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίζεται με  $t$ .

Η γενική μορφή ενός συστήματος  $n$  Δ.Ε. πρώτης τάξης είναι η εξής

$$\begin{aligned}x'_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\dots \\x'_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

όπου  $x_i = x_i(t)$ ,  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  και  $F_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Στα επόμενα, αντί του όρου σύστημα Δ.Ε. θα χρησιμοποιούμε τον όρο *διαφορικό σύστημα*.

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις του συστήματος (6.1.1) είναι συζευγμένες στις συναρτήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  αλλά όχι στις παραγώγους αυτών. Επίσης, σημειώνουμε ότι η μελέτη μας αφορά συστήματα Δ.Ε. όπου ο αριθμός των αγνώστων ισούται με τον αριθμό των εξισώσεων.

Το σύστημα (6.1.1) υπό διανυσματική μορφή γράφεται

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}),\tag{6.1.2}$$

όπου  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ .

Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με πεδίο ορισμού ένα διάστημα  $I$  αποτελούν λύση του συστήματος (6.1.1), όταν ισχύουν

- (i)  $(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)) \in \Omega, \forall t \in I$
- (ii)  $\phi'_i(t) = F_i(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)), \forall t \in I, \forall i = 1, 2, \dots, n.$

Έστω  $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$  με  $t_0 \in I$ . Το σύστημα Δ.Ε. πρώτης τάξης (6.1.1) συνδυασμένο με τις  $n$  αρχικές συνθήκες

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0,\tag{6.1.3}$$

αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) συστήματος  $n$  Δ.Ε. πρώτης τάξης.

Εξάλλου, λύση του Π.Α.Τ. είναι μία λύση του συστήματος (6.1.1), η οποία ικανοποιεί επίσης τις αρχικές συνθήκες (6.1.3).

Διατυπώνουμε αρχικά το ακόλουθο θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων ενός Π.Α.Τ. διαφορικού συστήματος πρώτης τάξης

**Θεώρημα 6.1.1** Υποθέτουμε ότι οι  $F_1, F_2, \dots, F_n$  είναι  $C^1$  συναρτήσεις στο  $\Omega$ , δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  στο  $\Omega$  και είναι συνεχείς συναρτήσεις για κάθε  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Τότε, για κάθε σημείο  $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$  με  $t_0 \in I$ , υπάρχει  $\delta > 0$  και μοναδική λύση  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) : I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  του συστήματος (6.1.1), η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (6.1.3).

□

Σημειώνουμε με έμφαση ότι υπάρχει μία σπουδαία συσχέτιση μεταξύ μίας Δ.Ε.  $n$  τάξης και ενός συστήματος  $n$  Δ.Ε. πρώτης τάξης, η οποία περιγράφεται ως εξής.

Έστω, μία Δ.Ε.  $n$  τάξης

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (6.1.4)$$

Τότε, ο μετασχηματισμός

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y' \\ &\dots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

οδηγεί στο σύστημα των  $n$  Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\dots \\ x_n' &= F(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

της γενικής μορφής (6.1.1).

Αν  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  είναι μία λύση του (6.1.6), τότε η  $\phi = \phi_1$  είναι λύση της Δ.Ε. (6.1.4), αλλά και αντιστρόφως αν η  $\phi$  είναι λύση της Δ.Ε. (6.1.4), τότε το διάνυσμα  $(\phi, \phi', \dots, \phi^{(n-1)})$  είναι λύση του συστήματος (6.1.6).

Επίσης, κάθε σύστημα της μορφής (6.1.6) μετασχηματίζεται, με τη βοήθεια των (6.1.5), σε Δ.Ε. της μορφής (6.1.4). Ο τελευταίος ισχυρισμός ανάγει την επίλυση ενός  $n \times n$  διαφορικού συστήματος πρώτης τάξης της μορφής (6.1.6) σε επίλυση μίας Δ.Ε.  $n$  τάξης, όπου εφαρμόζονται οι τεχνικές των Παραγράφων 4.2 και 5.2. Η διαδικασία αυτή αποσαφηνίζεται με το ακόλουθο

**Παράδειγμα 6.1.1** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= 3x_1 - 2x_2 \\ x_1(0) &= 3 \\ x_2(0) &= 1. \end{aligned}$$



**Λύση.** Το δοσμένο διαφορικό σύστημα είναι της μορφής (6.1.6) (με  $n = 2$  και  $F(t, x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2$ ) και μετασχηματίζεται, θέτοντας  $x_1 = y$  και  $x_2 = y'$ , στην Δ.Ε.

$$y'' = 3y - 2y'.$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές συνθήκες του δοσμένου Π.Α.Τ. συστήματος Δ.Ε. πρώτης τάξης, αναγόμεστε στο Π.Α.Τ.

$$y'' + 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

Εφαρμόζοντας τις τεχνικές της Παραγράφου 4.2, ευρίσκουμε ότι η γενική λύση της Δ.Ε. του τελευταίου Π.Α.Τ. είναι

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t},$$

από την οποία, με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών, υπολογίζουμε  $c_1 = 2$  και  $c_2 = 1$  και άρα η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(t) = 2e^{-t} + e^{3t}.$$

Συνεπώς, η λύση του δοσμένου Π.Α.Τ. διαφορικού συστήματος πρώτης τάξης είναι

$$x_1(t) = 2e^{-t} + e^{3t} \quad \text{και} \quad x_2(t) = -2e^{-t} + 3e^{3t}.$$

△

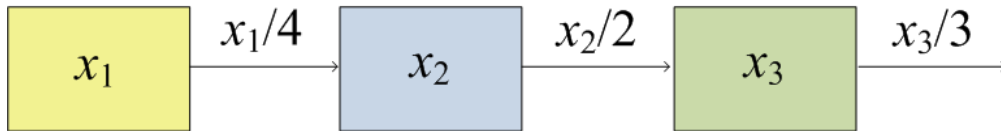
Στη συνέχεια, επεξεργαζόμαστε μοντελοποιήσεις ορισμένων προβλημάτων του πραγματικού κόσμου οι οποίες διέπονται από διαφορικά συστήματα πρώτης τάξης.

#### (1) Ανάλυση αλληλουχιών

Ο όρος γραμμική αλληλουχία (*linear cascade*) αναφέρεται σε ένα διάγραμμα διαμερισμάτων (*compartments*), όπου οι ρυθμοί εισόδου και εξόδου έχουν ανατεθεί σε ένα ή περισσότερα από αυτά τα διαμερίσματα. Το διάγραμμα είναι ένας περιληπτικός τρόπος για την αποτύπωση των διαφόρων ρυθμών και χρησιμοποιείται ευρέως στη μελέτη των μοντελοποιήσεων στην Οικολογία, τη Χημεία, την Κινητική, τη Μηχανική και τον Ηλεκτρισμό.

Το διάγραμμα διαμερισμάτων μοντελοποιείται με ένα σύστημα Δ.Ε. Το ενδεικτικό διάγραμμα του Σχήματος 6.1 αναφέρεται στα εξής

- ονόματα μεταβλητών: κάθε διαμέρισμα ταυτοποιείται με μία μεταβλητή  $X$
- βέλη: κάθε βέλος χαρακτηρίζεται από ένα ρυθμό ροής  $R$
- ρυθμός εισόδου: ένα βέλος που δείχνει προς ένα διαμέρισμα  $X$  παριστά ρυθμό εισόδου  $R$  στο  $X$
- ρυθμός εξόδου: ένα βέλος που εξέρχεται από ένα διαμέρισμα  $X$  παριστά ρυθμό εξόδου  $R$  από το  $X$



Σχήμα 6.1: Ενδεικτικό διάγραμμα γραμμικής αλληλουχίας.

Ένα διαμέρισμα  $X$  διέπεται από μία Δ.Ε. πρώτης τάξης, η οποία προέρχεται από εφαρμογή του νόμου ισορροπίας (*balance law*)

$$\frac{dX}{dt} = (\text{άθροισμα ρυθμών εισόδου στο } X) - (\text{άθροισμα ρυθμών εξόδου από το } X), \quad (6.1.7)$$

υπό τη σύμβαση ότι ένα διαμέρισμα στο οποίο δεν εισέρχεται βέλος έχει μηδενικό ρυθμό εισόδου και ένα διαμέρισμα από το οποίο δεν εξέρχεται βέλος έχει μηδενικό ρυθμό εξόδου.

Ειδικότερα, αναφερόμενοι στο Σχήμα 6.1, εφαρμογή του νόμου ισορροπίας (6.1.7) οδηγεί στο ακόλουθο  $3 \times 3$  διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' &= -\frac{1}{4}x_1 \\ x_2' &= \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_3' &= \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

## (2) Θέρμανση κατοικίας

Σε ένα τυπικό σπίτι με υπόγειο, ισόγειο και σοφίτα (Σχήμα 6.2), το ισόγειο (κυρίως όροφος) περιβάλλεται με μόνωση, η σοφίτα έχει τοίχους και ταβάνι χωρίς μόνωση και οι τοίχοι και το πάτωμα του υπογείου μονώνονται από τη γη, ενώ το ταβάνι του υπογείου μονώνεται από το πάτωμα του κυρίως ορόφου.

Εφαρμόζοντας το νόμο ψύξης του Νεύτωνα (*Newton's cooling law*)

$$(\text{ρυθμός μεταβολής θερμοκρασίας}) = k (\text{διαφορά τιμών θερμοκρασίας}), \quad (6.1.9)$$

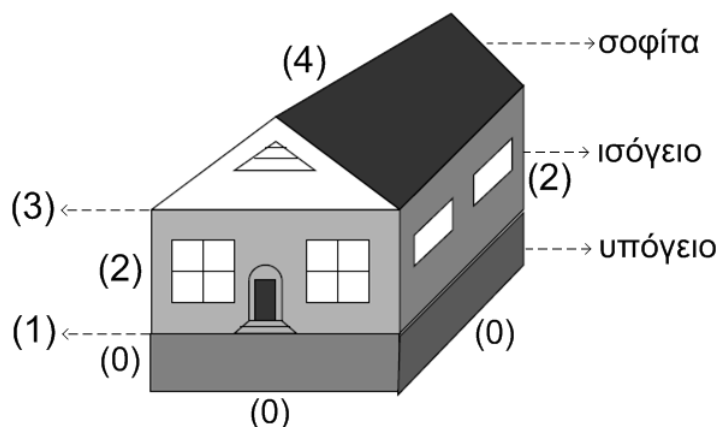
όπου  $k$  κατάλληλη σταθερά ψύξης, θα μελετήσουμε τις μεταβολές της θερμοκρασίας στα τρία επίπεδα του σπιτιού.

Προς τούτο, θεωρούμε τις μεταβλητές

$t$  ο χρόνος σε ώρες

$z(t)$  η θερμοκρασία στη σοφίτα

$y(t)$  η θερμοκρασία στο ισόγειο



Σχήμα 6.2: Διάγραμμα σπιτιού στο οποίο θα εφαρμοστεί το μοντέλο θέρμανσης.

$x(t)$  η θερμοκρασία στο υπόγειο

Ως δεδομένα θεωρούμε ότι είναι περίοδος χειμώνα και η εξωτερική θερμοκρασία είναι σταθερή στους  $10^{\circ}\text{C}$  κατά τη διάρκεια της ημέρας, ενώ η θερμοκρασία της γης είναι στους  $15^{\circ}\text{C}$ . Αρχικά, η θέρμανση του σπιτιού είναι κλειστή για αρκετές ημέρες. Έτσι, ως αρχικές θερμοκρασίες το μεσημέρι ( $t = 0$ ) θεωρούνται  $x(0) = 15$  και  $y(0) = z(0) = 10$ . Την  $t = 0$  ανάβουμε μία μικρή ηλεκτρική θερμάστρα και τοποθετούμε το θερμοστάτη στους  $30^{\circ}\text{C}$ . Η θερμάστρα παρέχει αύξηση της θερμοκρασίας  $8^{\circ}\text{C}$  για κάθε ώρα λειτουργίας της.

Εφαρμόζουμε το νόμο ψύξης του Νεύτωνα (6.1.9) στις συνοριακές επιφάνειες: (0) τοίχοι και πάτωμα υπογείου, (1) ταβάνι υπογείου, (2) τοίχοι ισόγειου, (3) ταβάνι ισόγειου και (4) τοίχοι και ταβάνι σοφίτας με αντίστοιχες θετικές σταθερές ψύξης  $k_0, k_1, k_2, k_3$  και  $k_4$  και λαμβάνουμε το εξής  $3 \times 3$  διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= k_0(15 - x) + k_1(y - x) \\ y' &= k_1(x - y) + k_2(10 - y) + k_3(z - y) + 8 \\ z' &= k_3(y - z) + k_4(10 - z). \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

### (3) Ακανόνιστοι καρδιακοί παλμοί και φαρμακευτική αγωγή

Ένα από τα φάρμακα που χρησιμοποιούνται για τη θεραπεία της καρδιακής αρρυθμίας είναι η λιδοκαΐνη (lidocaine). Για να είναι το φάρμακο αποδοτικό πρέπει να διατηρείται σε μία συγκέντρωση της κυκλοφορίας του αίματος  $1.5 \text{ ml/lit}$ , ενώ συγκεντρώσεις πάνω από  $6 \text{ ml/lit}$  μπορεί να αποβούν ιδιαίτερα επιβλαβείς για κάποιους ασθενείς. Η χορηγούμενη δόση εξαρτάται από το σωματικό βάρος. Για παράδειγμα, στους ενήλικες η μέγιστη δοσολογία αναφέρεται στα  $3 \text{ mg/kg}$ .

Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο διαφορικό μοντέλο αναφορικά με τη δυναμική της θεραπείας χρησιμοποιεί τις μεταβλητές

$x(t)$  η ποσότητα του φαρμάκου στην κυκλοφορία του αίματος  
 $y(t)$  η ποσότητα του φαρμάκου στον ιστό του οργανισμού  
και διατυπώνεται ως εξής

$$\begin{aligned}x' &= -0.09x + 0.038y \\y' &= 0.066x - 0.038y.\end{aligned}\tag{6.1.11}$$

Ως αρχικά δεδομένα ορίζονται η μηδενική αρχική ποσότητα φαρμάκου στο αίμα, δηλαδή  $x(0) = 0$ , και η αρχική δοσολογία  $y_0$  της ένεσης του φαρμάκου  $y(0) = y_0$ . Η λύση του συστήματος (6.1.11) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της μέγιστης δυνατής αρχικής χορήγησης φαρμάκου  $y_0$  και της χρονικής διάρκειας που το φάρμακο θα είναι αποτελεσματικό.

#### (4) Πρόβλεψη τιμών

Μία εταιρεία κατασκευής καλλυντικών καθορίζει την πολιτική εμπορίας και προώθησης των προϊόντων της βάσει της τρέχουσας τιμής  $x(t)$  του κάθε προϊόντος. Η πολιτική αυτή βασίζεται στην ανάθεση της τιμής  $x(t)$  δυναμικά για να αντικατοπτρίζει τη ζήτηση του προϊόντος.

Η παραγωγή  $P(t)$  και οι πωλήσεις  $S(t)$  δίνονται συναρτήσει της τιμής  $x(t)$  και του ρυθμού μεταβολής αυτής  $x'(t)$  από εξισώσεις της μορφής

$$\begin{aligned}P &= -\frac{3}{4}x - 8x' + 4 \\S &= -4x - 2x' + 15.\end{aligned}\tag{6.1.12}$$

Οι Δ.Ε. που συσχετίζουν την τιμή  $x(t)$  και το βαθμό αποθεμάτων  $I(t)$  είναι

$$\begin{aligned}x' &= k(I - I_0) \\I' &= P - S,\end{aligned}\tag{6.1.13}$$

όπου  $I_0$  ο επιθυμητός βαθμός αποθεμάτων και  $k$  κατάλληλη σταθερά.

Συνδυάζοντας τις (6.1.12) και (6.1.13), λαμβάνουμε το  $2 \times 2$  διαφορικό σύστημα

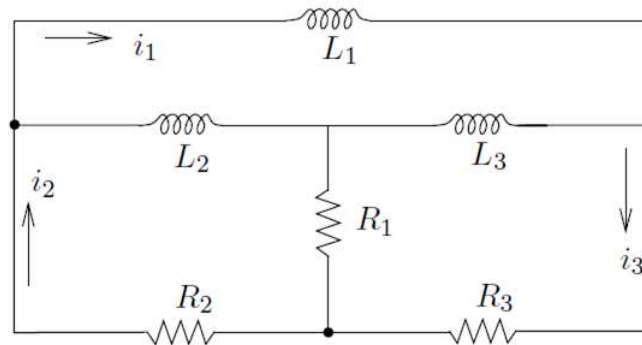
$$\begin{aligned}x' &= k(I - I_0) \\I' &= \frac{13}{4}x - 6kI + 6kI_0 - 11\end{aligned}\tag{6.1.14}$$

με αγνώστους τα  $x(t)$  και  $I(t)$ .

Λύνοντας το σύστημα των (6.1.14) και υπολογίζοντας τα όρια  $x_f = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  και  $I_f = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$  των λύσεων ευρίσκουμε τις προβλέψεις (*forecasts*)  $x_f$  και  $I_f$  της τιμής και του επιθυμητού βαθμού αποθεμάτων, αντιστοίχως.

## (5) Ηλεκτρικά κυκλώματα

Θεωρούμε το  $LR$ -ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 6.3.



Σχήμα 6.3: Ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο αποτελείται από τρεις αντιστάσεις  $R_1$ ,  $R_2$  και  $R_3$  και τρία πηνία  $L_1$ ,  $L_2$  και  $L_3$ . Τα ρεύματα  $i_1$ ,  $i_2$  και  $i_3$  ρέουν στις περιοχές μεταξύ των κόμβων (μαύρες τελείες).

Για τη διατύπωση ενός συστήματος Δ.Ε. για τα ρεύματα  $i_1$ ,  $i_2$  και  $i_3$  που διαρρέουν τους βρόχους του κυκλώματος χρησιμοποιούμε τους νόμους του Kirchhoff και τις θεμελιώδεις σχέσεις για την πτώση τάσης στα άκρα αντιστάσεων και πηνίων. Οι μαύρες τελείες στο Σχήμα 6.3 δείχνουν τους κόμβους που καθορίζουν τα σημεία αφετηρίας και προορισμού κάθε ρεύματος. Τα  $i_1$ ,  $i_2$  και  $i_3$  ορίζονται μόνο στο εξωτερικό σύνορο του κυκλώματος. Εφαρμόζοντας το νόμο ρευμάτων (κόμβων) του Kirchhoff, ευρίσκουμε ότι τα ρεύματα (με κατεύθυνση προς τα δεξιά) που διαρέουν τα πηνία  $L_2$  και  $L_3$  είναι  $i_2 - i_1$  και  $i_3 - i_1$ , αντιστοίχως. Επίσης, το ρεύμα (με κατεύθυνση προς τα κάτω) που διαρέει την αντίσταση  $R_1$  είναι  $i_2 - i_3$ . Από το νόμο του Ohm η πτώση τάσης στα άκρα μιας αντίστασης  $R$  που διαρέεται από ρεύμα  $i$  είναι  $V_R = RI$ , ενώ από το νόμο του Faraday η πτώση τάσης στα άκρα ενός πηνίου  $L$  που διαρρέεται από ρεύμα  $i$  είναι  $V_L = Li'$ . Έτσι, συνδυάζοντας τα προηγούμενα με το νόμο τάσεων (βρόχων) του Kirchhoff, ο οποίος αναφέρει ότι το αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσης κατά μήκος ενός κλειστού βρόχου είναι ίσο με μηδέν, λαμβάνουμε το ακόλουθο διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} i_1' &= -\frac{R_2}{L_1}i_2 - \frac{R_3}{L_1}i_3 \\ i_2' &= -\left(\frac{R_2}{L_2} + \frac{R_2}{L_1}\right)i_2 + \left(\frac{R_1}{L_2} - \frac{R_3}{L_1}\right)i_3 \\ i_3' &= \left(\frac{R_1}{L_3} - \frac{R_2}{L_1}\right)i_2 - \left(\frac{R_1}{L_3} + \frac{R_3}{L_1} + \frac{R_3}{L_3}\right)i_3. \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

## (6) Βιολογία-Μαθηματική Οικολογία

Έστω ότι  $H(t)$  και  $h(t)$  είναι οι πληθυσμοί στο χρόνο  $t$  δύο ειδών τα οποία αλληλεπι-

δρούν. Οι στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής των πληθυσμών  $H(t)$  και  $h(t)$  εξαρτώνται από τις τρέχουσες τιμές και των δύο πληθυσμών  $H(t)$  και  $h(t)$ . Συνήθως ο ένας από τους δύο πληθυσμούς (έστω ο  $H(t)$ ) αναφέρεται ως *κυνηγός* και ο άλλος (έστω ο  $h(t)$ ) ως *θήραμα*. Για παράδειγμα, ο κυνηγός  $H(t)$  μπορεί να είναι ο αριθμός των αλεπούδων και το θήραμα  $h(t)$  ο αριθμός των λαγών σε ένα δάσος ή εναλλακτικά  $H(t)$  μπορεί να είναι ο πληθυσμός ενός μεγάλου ψαριού και  $h(t)$  ενός μικρού ψαριού σε μία λίμνη (υπό την παραδοχή ότι το μεγάλο ψάρι κυνηγάει το μικρό). Όταν μειώνονται τα θηράματα τότε αναμένεται να μειωθεί και ο αριθμός των κυνηγών, ενώ όταν μειώνεται ο αριθμός των κυνηγών τότε ο πληθυσμός των θηραμάτων αναμένεται να αυξηθεί.

Η μοντελοποίηση ενός τέτοιου τύπου αλληλεπίδρασης δύο πληθυσμών οδηγεί με φυσικό τρόπο σε ένα  $2 \times 2$  διαφορικό σύστημα. Ένα κλασικό τέτοιο μοντέλο είναι το Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} h' &= ah - bhH \\ H' &= -cH + dhH, \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

όπου  $a, b, c, d$  κατάλληλες σταθερές. Ακριβέστερα,  $a$  είναι ο ρυθμός γεννήσεων του πληθυσμού  $h$  και  $c$  είναι ο ρυθμός αφανισμού του πληθυσμού  $H$ . Οι όροι  $hH$  μοντελοποιούν τις αλληλεπιδράσεις των δύο πληθυσμών, όπου υποτίθεται ότι ο αριθμός τους είναι ανάλογος του γινομένου των πληθυσμών. Επειδή κάθε τέτοια αλληλεπίδραση δρα ευεργετικά για τους κυνηγούς και δυσμενώς για τα θηράματα, εμφανίζεται θετικό πρόσημο στη δεύτερη και αρνητικό στην πρώτη εξίσωση με αντίστοιχους συντελεστές αλληλεπίδρασης  $d$  και  $b$ .

Επιλύοντας το σύστημα (6.1.16) και λαμβάνοντας το ασυμπτωτικό όριο των λύσεων αυτού, μπορεί να διερευνηθούν συνθήκες ύπαρξης οικολογικής ισορροπίας ως προς τα δύο είδη των πληθυσμών.

## 6.2 Γενική θεωρία γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων

Στην παράγραφο αυτή μελετούμε ειδικά διαφορικά συστήματα πρώτης τάξης της μορφής (6.1.1), όπου οι συναρτήσεις  $F_i$  είναι γραμμικές συναρτήσεις ως προς το διάνυσμα  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , δηλαδή, υπάρχουν συναρτήσεις  $a_{ij} = a_{ij}(t)$  και  $b_i = b_i(t)$  έτσι ώστε να ισχύει

$$F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \dots + a_{in}(t)x_n + b_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Έτσι, κάθε διαφορικό σύστημα πρώτης τάξης της μορφής

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\dots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

όπου οι συναρτήσεις  $a_{ij}(t)$  και  $b_i(t)$  είναι συνεχείς σε ένα διάστημα  $I \subseteq \mathbb{R}$ , αναφέρεται ως γραμμικό  $n \times n$  διαφορικό σύστημα πρώτης τάξης με συντελεστές συναρτήσεις.

Αν ισχύει  $b_i(t) = 0$ ,  $\forall t \in I$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , τότε το αντίστοιχο σύστημα

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n \\ &\dots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

αναφέρεται ως ομογενές, ενώ σε διαφορετική περίπτωση αναφέρεται ως μη ομογενές.

Με όρους Θεωρίας Πινάκων, το σύστημα (6.2.1) γράφεται

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (6.2.3)$$

όπου

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

Όταν οι  $a_{ij}$  και  $b_i$  είναι σταθερές συναρτήσεις στο  $I$ , τότε το σύστημα

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\dots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

αναφέρεται ως  $n \times n$  γραμμικό διαφορικό σύστημα πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, και το

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

ως ομογενές  $n \times n$  γραμμικό διαφορικό σύστημα πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Το θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για Π.Α.Τ. γραμμικών διαφορικών συστημάτων πρώτης τάξης διατυπώνεται ως εξής.

**Θεώρημα 6.2.1** Έστω ότι οι συναρτήσεις  $a_{ij}, b_i : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $I$ . Τότε, για κάθε  $t_0 \in I$  και  $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  υπάρχει ακριβώς μία λύση  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  του Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \\ x_1(t_0) &= u_1, x_2(t_0) = u_2, \dots, x_n(t_0) = u_n. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

□

Για τις λύσεις του ομογενούς συστήματος (6.2.2) ισχύει η αρχή της υπέρθεσης.

**Λήμμα 6.2.1** Αν  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος (6.2.2) στο διάστημα  $I$ , τότε η συνάρτηση

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots + c_n\phi_n,$$

όπου  $c_1, c_2, \dots, c_n$  είναι αυθαίρετες σταθερές, είναι επίσης λύση του (6.2.2) στο  $I$ .

□

Από την αρχή της υπέρθεσης συνάγεται ότι το σύνολο  $\Lambda_o$  των λύσεων του ομογενούς συστήματος (6.2.2) είναι διανυσματικός χώρος. Το  $\Lambda_o$  αναφέρεται και ως η γενική λύση του συστήματος. Για τον προσδιορισμό της αλγεβρικής διάστασης του διανυσματικού χώρου  $\Lambda_o$  χρειαζόμαστε τις έννοιες γραμμική εξάρτηση και γραμμική ανεξαρτησία διανυσματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Προς τούτο, υπενθυμίζουμε πρώτα τις έννοιες γραμμική εξάρτηση και γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων του  $\mathbb{R}^n$ : τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$  λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα όταν ισχύει η συνεπαγωγή

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0. \quad (6.2.7)$$

Εξάλλου, τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  ονομάζονται γραμμικά εξαρτημένα όταν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή όταν υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε να ισχύει

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \quad (6.2.8)$$

Η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας (αντίστοιχα γραμμικής εξάρτησης) συσχετίζεται με τον  $n \times n$  πίνακα, ο οποίος έχει στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ , όπως διατυπώνεται στο ακόλουθο

**Θεώρημα 6.2.2** Έστω  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$   $n$  διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$ , όπου  $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Τότε, τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε και μόνο



τότε όταν ο πίνακας

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

με στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή η ορίζουσα του πίνακα  $V$  είναι διάφορη από το μηδέν.

**Απόδειξη.** Η εξίσωση

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

είναι ισοδύναμη με το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} c_1 v_{11} + c_2 v_{21} + \dots + c_n v_{n1} &= 0 \\ c_1 v_{12} + c_2 v_{22} + \dots + c_n v_{n2} &= 0 \\ &\dots \\ c_1 v_{1n} + c_2 v_{2n} + \dots + c_n v_{nn} &= 0, \end{aligned}$$

το οποίο υπό μορφή πινάκων γράφεται

$$V \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

όπου  $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T$ . Επομένως, τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε και μόνο τότε όταν το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή τότε και μόνο τότε όταν ο πίνακας  $V$  είναι αντιστρέψιμος.

□

Οι έννοιες γραμμική ανεξαρτησία και γραμμική εξάρτηση ορίζονται επίσης και για διανυσματικές συναρτήσεις, όπως ακολουθεί.

**Ορισμός 6.2.1** Οι  $k$  διανυσματικές συναρτήσεις  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ονομάζονται *γραμμικά ανεξάρτητες* στο διάστημα  $I$ , όταν ισχύει η συνεπαγωγή

$$c_1 \psi_1(t) + c_2 \psi_2(t) + \dots + c_k \psi_k(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0. \quad (6.2.9)$$

Εξάλλου, οι συναρτήσεις  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$  ονομάζονται *γραμμικά εξαρτημένες* στο  $I$ , όταν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή όταν υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε να ισχύει

$$c_1 \psi_1(t) + c_2 \psi_2(t) + \dots + c_k \psi_k(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in I. \quad (6.2.10)$$

□

Σημειώνουμε ότι, για σταθεροποιημένο  $t \in I$ , το σύστημα (6.2.10) γράφεται

$$\begin{aligned} \psi_{11}c_1 + \psi_{21}c_2 + \dots + \psi_{k1}c_k &= 0 \\ \psi_{12}c_1 + \psi_{22}c_2 + \dots + \psi_{k2}c_k &= 0 \\ &\dots \\ \psi_{1k}c_1 + \psi_{2k}c_2 + \dots + \psi_{kk}c_k &= 0, \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

το οποίο είναι αλγεβρικό ομογενές γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .

Το τελευταίο σύστημα μας οδηγεί στη θεώρηση του θεμελιώδους πίνακα

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} & \dots & \psi_{k1} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \dots & \psi_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1k} & \psi_{2k} & \dots & \psi_{kk} \end{bmatrix}$$

του συστήματος (6.2.11).

Όπως συνάγεται από το γραμμικό σύστημα (6.2.11), υπάρχει σημαντική συσχέτιση της γραμμικής ανεξαρτησίας με την ορίζουσα του θεμελιώδους πίνακα.

Προς τούτο, για  $n$  λύσεις  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  του ομογενούς συστήματος (6.2.2), θεωρούμε, σε αντιστοιχία με την περίπτωση Δ.Ε.  $n$  τάξης, την ορίζουσα

$$W(t) := \begin{vmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{21}(t) & \dots & \phi_{n1}(t) \\ \phi_{12}(t) & \phi_{22}(t) & \dots & \phi_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1n}(t) & \phi_{2n}(t) & \dots & \phi_{nn}(t) \end{vmatrix}, \tag{6.2.12}$$

η οποία αναφέρεται και εδώ ως ορίζουσα Wronski των λύσεων.

Σχετικά, ισχύει το ακόλουθο

**Θεώρημα 6.2.3 (Abel).** Για  $n$  λύσεις  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  του ομογενούς συστήματος (6.2.2) και για κάθε  $t_0 \in I$ , ισχύει

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds}, \quad t \in I, \tag{6.2.13}$$

όπου

$$\text{tr}(A(t)) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t), \quad t \in I.$$

□

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας  $n$  λύσεων του ομογενούς συστήματος (6.2.2).

**Θεώρημα 6.2.4** Οι  $n$  λύσεις  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  του (6.2.2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε και μόνο τότε όταν ισχύει  $W(t_0) \neq 0$ , για κάποιο  $t_0 \in I$ .

□

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 6.2.1 και 6.2.4, με κατάλληλη επιλογή του διανύσματος  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , λαμβάνουμε το ακόλουθο

**Πόρισμα 6.2.1** Το ομογενές σύστημα (6.2.2) έχει  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις στο  $I$ .

□

Διατυπώνουμε, τώρα, το ακόλουθο σημαντικό

**Θεώρημα 6.2.5** Αν  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  είναι  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς συστήματος (6.2.2), τότε για κάθε λύση  $\phi$  αυτού, υπάρχουν μοναδικές σταθερές  $c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*$  έτσι ώστε να ισχύει

$$\phi(t) = c_1^* \phi_1(t) + c_2^* \phi_2(t) + \dots + c_n^* \phi_n(t), \quad t \in I. \quad (6.2.14)$$

□

Επίσης, από το Λήμμα 6.2.1 και το Θεώρημα 6.2.5, λαμβάνουμε

**Θεώρημα 6.2.6** Έστω  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$   $n$  λύσεις του ομογενούς συστήματος (6.2.2) στο διάστημα  $I$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1. Κάθε λύση  $\phi$  του (6.2.2) είναι γραμμικός συνδυασμός των λύσεων  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  στο  $I$ , δηλαδή υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_n$  έτσι ώστε να ισχύει

$$\phi(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + \dots + c_n \phi_n(t), \quad \forall t \in I.$$

2. Οι λύσεις  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο  $I$ .

□

Για την πληρέστερη κατανόηση του τρόπου εφαρμογής των αποτελεσμάτων του παραπάνω θεωρητικού πλαισίου, επεξεργαζόμαστε το ακόλουθο

**Παράδειγμα 6.2.1** Βρείτε τη γενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

το οποίο έχει ως δοσμένες τις λύσεις

$$\phi_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_3(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Λύση.** Για την ορίζουσα Wronski των  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  και  $\phi_3$

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & e^{2t} \\ e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix}$$

ισχύει

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και έτσι από το Θεώρημα 6.2.4, οι  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  και  $\phi_3$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Εξάλλου, από το Θεώρημα 6.2.5, έχουμε ότι η γενική λύση του διαφορικού συστήματος είναι

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3,$$

όπου  $c_1, c_2, c_3$  αυθαίρετες σταθερές.

△

Όπως συνάγεται από το Θεώρημα 6.2.6, για τον προσδιορισμό όλων των λύσεων του ομογενούς συστήματος (6.2.2), αρκεί η εύρεση  $n$  γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  αυτού, οπότε η γενική λύση του (6.2.2) συμπίπτει με το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots + c_n\phi_n,$$

όπου  $c_1, c_2, \dots, c_n$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Στην προκειμένη περίπτωση, το σύνολο  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  αναφέρεται και ως θεμελιώδες σύνολο λύσεων του (6.2.2).

**Πόρισμα 6.2.2** Το σύνολο  $\Lambda_o$  των λύσεων του ομογενούς συστήματος (6.2.2) είναι διανυσματικός χώρος διάστασης  $n$ .

□

Για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης του μη ομογενούς συστήματος (6.2.1), εφαρμόζεται το Θεώρημα 6.2.5, το οποίο οδηγεί στο

**Θεώρημα 6.2.7** Έστω ότι οι  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  είναι  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς συστήματος (6.2.2) στο  $I$  και  $\phi_\mu$  είναι μία μερική λύση του μη ομογενούς συστήματος (6.2.1) στο  $I$ . Τότε, κάθε λύση  $\phi$  του (6.2.1) είναι της μορφής

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t) + \phi_\mu(t), \quad t \in I. \quad (6.2.15)$$

**Απόδειξη.** Έστω  $\phi$  μία (τυχούσα) λύση του (6.2.1). Τότε, όπως διαπιστώνεται εύκολα, η συνάρτηση  $\phi - \phi_\mu$  είναι λύση του αντιστοίχου ομογενούς συστήματος (6.2.2) και έτσι ο ισχυρισμός συνάγεται από το Θεώρημα 6.2.5.

□

### 6.3 Γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές

Σημαντικό ρόλο στην επίλυση ομογενών γραμμικών διαφορικών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές παίζουν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  του ομογενούς συστήματος (6.1.2). Έτσι, υπενθυμίζουμε στην αρχή την έννοια της ιδιοτιμής πίνακα: Έστω  $A$  ένας πραγματικός  $n \times n$  πίνακας. Το πολυώνυμο

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I|, \quad (6.3.1)$$

όπου  $I$  είναι ο μοναδιαίος  $n \times n$  πίνακας, ονομάζεται το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του  $A$  και η εξίσωση

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6.3.2)$$

η *χαρακτηριστική εξίσωση* του  $A$ .

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει  $n$  μιγαδικές ρίζες  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζονται *ιδιοτιμές* του πίνακα  $A$ .

Για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$ , το σύστημα

$$(A - \lambda I)\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (6.3.3)$$

έχει μία μη μηδενική μιγαδική λύση  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{z}$  ονομάζεται *ιδιοδιάνυσμα* αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda$ . Για μία ιδιοτιμή  $\lambda$  και ένα ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{z}$  αντίστοιχο αυτής ισχύει

$$A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}. \quad (6.3.4)$$

Έστω  $\lambda_0$  μία ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ . Τότε, το σύνολο  $N(A - \lambda_0 I)$  των λύσεων του αντιστοίχου συστήματος (6.3.3) είναι διανυσματικός χώρος, ο οποίος αναφέρεται ως *ιδιόχωρος* της ιδιοτιμής  $\lambda_0$ . Η διάσταση του ιδιόχωρου  $N(A - \lambda_0 I)$ , δηλαδή ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, αντίστοιχων της ιδιοτιμής  $\lambda_0$ , αναφέρεται ως *γεωμετρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής  $\lambda_0$  και συμβολίζεται με  $\gamma(\lambda_0)$ . Εξάλλου, υπάρχουν μοναδικός θετικός ακέραιος  $m$  και πολυώνυμο  $q$  με  $q(\lambda_0) \neq 0$  έτσι ώστε να ισχύει

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ο αριθμός  $m$  ονομάζεται η *αλγεβρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής  $\lambda_0$  και συμβολίζεται με  $\alpha(\lambda_0)$ . Αν  $\alpha(\lambda_0) = 1$ , η ιδιοτιμή  $\lambda_0$  ονομάζεται απλή, ενώ αν  $\alpha(\lambda_0) > 1$  πολλαπλή τάξης  $\alpha(\lambda_0)$ . Μεταξύ των πολλαπλοτήτων  $\alpha(\lambda_0)$  και  $\gamma(\lambda_0)$  υφίσταται η σχέση

$$\gamma(\lambda_0) \leq \alpha(\lambda_0).$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτιμών και αντιστοίχων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $A$  προσδιορίζονται οι (γραμμικά ανεξάρτητες) πραγματικές λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \text{όπου} \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t). \quad (6.3.5)$$

Αρχικά, έχουμε

**Πρόταση 6.3.1** Αν  $\mathbf{z}(t) = \phi(t) + i\psi(t)$  είναι μιγαδική λύση του συστήματος (6.3.5), τότε οι συναρτήσεις  $\phi(t)$  και  $\psi(t)$  είναι πραγματικές λύσεις του συστήματος  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ .

**Απόδειξη.** Συνδυάζοντας τις

$$\mathbf{z}'(t) = \phi'(t) + i\psi'(t)$$

και

$$A\mathbf{z}(t) = A(\phi(t) + i\psi(t)) = A\phi(t) + iA\psi(t),$$

παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\phi'(t) = A\phi(t) \quad \text{και} \quad \psi'(t) = A\psi(t).$$

□

Στην παράγραφο αυτή, αναπτύσσεται μεθοδολογία επίλυσης του συστήματος (6.2.2) με τη βοήθεια των ιδιοτιμών και αντιστοίχων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $A$ , για αυτό και η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως *μέθοδος των ιδιοτιμών*. Αποτελεί ουσιαστικά επέκταση της διαδικασίας προσδιορισμού των λύσεων μιας γραμμικής Δ.Ε. τάξης  $n$  με σταθερούς συντελεστές με τη βοήθεια της χαρακτηριστικής εξίσωσης (βλ. Παράγραφο 5.2).

Αποδεικνύουμε, πρώτα, την ακόλουθη

**Πρόταση 6.3.2** Για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$  και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v}$  του πίνακα  $A$ , η συνάρτηση  $\phi(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$  είναι λύση του ομογενούς διαφορικού συστήματος με σταθερούς συντελεστές (6.3.5).

**Απόδειξη.** Επειδή το  $\lambda$  είναι ιδιοτιμή και το  $\mathbf{v}$  αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A$ , ισχύει

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

οπότε

$$\phi'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \lambda \mathbf{v} = e^{\lambda t} A\mathbf{v} = A e^{\lambda t} \mathbf{v} = A\phi(t).$$

□

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε αυτή την πρόταση στις ακόλουθες περιπτώσεις.

### Περίπτωση I: Πραγματικές διακεκριμένες ιδιοτιμές

Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

**Πρόταση 6.3.3** Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  πραγματικές και διαφορετικές ιδιοτιμές του  $n \times n$  πίνακα  $A$  και  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε, τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

**Απόδειξη.** Έστω  $r$  ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων από τα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ . Θα αποδείξουμε ότι ισχύει  $r = k$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει  $r < k$ . Αναδιατάσσοντας τα  $\mathbf{v}_i$  και τα  $\lambda_i$ , αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να θεωρήσουμε τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  ως γραμμικά ανεξάρτητα. Επειδή τα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα, υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_r, c_{r+1}$ , όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε να ισχύει

$$(α) \quad c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_r \mathbf{v}_r + c_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}.$$

Σημειώνουμε, τώρα, ότι πρέπει να είναι  $c_{r+1} \neq 0$ , διότι διαφορετικά τα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  θα ήταν γραμμικά εξαρτημένα. Έτσι πρέπει  $c_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} \neq \mathbf{0}$  και άρα κάποια από τις σταθερές

$c_1, c_2, \dots, c_r$  πρέπει να είναι διάφορη του μηδέν. Πολλαπλασιάζοντας την (α) με τον πίνακα  $A$ , λαμβάνουμε

$$c_1 A \mathbf{v}_1 + c_2 A \mathbf{v}_2 + \dots + c_r A \mathbf{v}_r + c_{r+1} A \mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0},$$

από την οποία προκύπτει

$$(\beta) \quad c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_r \lambda_r \mathbf{v}_r + c_{r+1} \lambda_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (α) επί  $\lambda_{r+1}$  και αφαιρώντας από την (β), ευρίσκουμε

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) \mathbf{v}_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_{r+1}) \mathbf{v}_2 + \dots + c_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) \mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

Όμως, η τελευταία συνιστά αντίφαση προς τη γραμμική ανεξαρτησία των  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  και επομένως πρέπει να ισχύει  $r = k$ .

□

Το βασικό αποτέλεσμα της περίπτωσης αυτής αναφέρεται στον προσδιορισμό συγκεκριμένων γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων του ομογενούς συστήματος  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ , οι οποίες εκφράζονται με τη βοήθεια των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $A$ .

**Πρόταση 6.3.4** Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  πραγματικές και διαφορετικές ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  με  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$  αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε, οι συναρτήσεις  $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \phi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \dots, \phi_n(t) = e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς διαφορικού συστήματος  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$  και άρα η γενική λύση του συστήματος δίνεται από

$$\phi(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + \dots + c_n \phi_n(t),$$

όπου  $c_1, c_2, \dots, c_n$  αυθαίρετες σταθερές.

**Απόδειξη.** Υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronski των λύσεων

$$W(t) = |e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \ e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \ \dots \ e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n| = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} |V|,$$

όπου  $V$  ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ .

Όμως, από την Πρόταση 6.3.3, τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι, από το Θεώρημα 6.2.2, θα ισχύει

$$|V| \neq 0,$$

οπότε έχουμε  $W(t) \neq 0, \forall t$  και επομένως, από το Θεώρημα 6.2.4, έχουμε ότι οι λύσεις  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

□

Σχετικά, παραθέτουμε τα ακόλουθα δύο ενδεικτικά παραδείγματα.



**Παράδειγμα 6.3.1** Λύστε το διαφορικό σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

**Λύση.** Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  του συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$  και άρα έχει τις απλές ιδιοτιμές  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 3$ .

Τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_1$ , είναι λύσεις του αντιστοίχου συστήματος (6.3.3)

$$(A + I)\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

το οποίο γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\xi_1 + \xi_2 = 0,$$

και έτσι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_1 = -1$  είναι το

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 3$  είναι λύσεις του συστήματος

$$(A - 3I)\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

οπότε προκύπτει

$$\xi_1 = \xi_2,$$

και ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 3$  είναι το

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.4, η γενική λύση του διαφορικού συστήματος δίνεται από

$$\boldsymbol{\phi}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

△

**Παράδειγμα 6.3.2** Λύστε το διαφορικό σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

**Λύση.** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$  του διαφορικού συστήματος είναι  $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 4)$  και άρα ο  $A$  έχει τις απλές ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  και  $\lambda_3 = 4$ .

Τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_1$ , είναι λύσεις του

$$(A - I)\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

το οποίο γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} 3\xi_1 + 6\xi_2 + 6\xi_3 &= 0 \\ \xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 - 4\xi_2 - 4\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Επειδή οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι ίδιες, αναγόμεστε στο

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 - 4\xi_2 - 4\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες λαμβάνουμε

$$\xi_2 = -\xi_3,$$

με τη βοήθεια της οποίας και οι δύο προηγούμενες δίνουν  $\xi_1 = 0$ . Άρα, τελικά, ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_1$  είναι το

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Με παρόμοια διαδικασία δείχνουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_2 = -1$  και  $\lambda_3 = 4$  είναι αντιστοίχως

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.4, η γενική λύση του διαφορικού συστήματος δίνεται από

$$\phi(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} + c_3 e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

△

### Περίπτωση II: Μιγαδικές ιδιοτιμές

Αν η ιδιοτιμή  $\lambda$  είναι μιγαδική και ο πίνακας  $A$  έχει πραγματικά στοιχεία, τότε για να πληρείται η εξίσωση (6.3.3) πρέπει το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{z}$  να έχει και μιγαδικές συνιστώσες. Οι συνιστώσες μιγαδικών ιδιοδιανυσμάτων χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό πραγματικών λύσεων του διαφορικού συστήματος (6.3.5) σύμφωνα με την ακόλουθη.

**Πρόταση 6.3.5** Έστω  $\lambda = \kappa + i\mu$  μία μιγαδική ιδιοτιμή του πραγματικού πίνακα  $A$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v} = \xi + i\eta$ . Τότε, το διαφορικό σύστημα (6.3.5) έχει τις πραγματικές λύσεις

$$\phi_1(t) = \operatorname{Re} \left( (\xi + i\eta) e^{(\kappa+i\mu)t} \right) = e^{\kappa t} [\cos(\mu t)\xi - \sin(\mu t)\eta]$$

και

$$\phi_2(t) = \operatorname{Im} \left( (\xi + i\eta) e^{(\kappa+i\mu)t} \right) = e^{\kappa t} [\cos(\mu t)\eta + \sin(\mu t)\xi],$$

οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

**Απόδειξη.** Από την Πρόταση 6.3.2, η

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{(\kappa+i\mu)t} \mathbf{v} = e^{\kappa t} (\cos(\mu t) + i \sin(\mu t)) (\xi + i\eta) \\ &= e^{\kappa t} [\cos(\mu t)\xi - \sin(\mu t)\eta] + i e^{\kappa t} [\cos(\mu t)\eta + \sin(\mu t)\xi] \end{aligned}$$

είναι μιγαδική λύση του συστήματος (6.3.5) και επομένως, από την Πρόταση 6.3.1, έχουμε ότι οι συναρτήσεις  $\phi_1$  και  $\phi_2$  είναι πραγματικές λύσεις του συστήματος.

Η απόδειξη ότι οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι αρκετά περίπλοκη και παραλείπεται.

□

Σημειώνουμε, επίσης, ότι αν  $\lambda = \kappa + i\mu$  είναι μιγαδική ιδιοτιμή του πραγματικού πίνακα  $A$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}$ , τότε η  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  συνεπάγεται  $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$ , δηλαδή το συζυγές  $\bar{\lambda}$  της ιδιοτιμής  $\lambda$  είναι επίσης ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  με ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το συζυγές  $\bar{\mathbf{v}}$  του  $\mathbf{v}$ . Περαιτέρω, από την Πρόταση 6.3.5, παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή  $\bar{\lambda}$  οδηγεί στις ίδιες πραγματικές λύσεις με την ιδιοτιμή  $\lambda$ .

**Παράδειγμα 6.3.3** Λύστε το διαφορικό σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

**Λύση.** Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  του συστήματος είναι οι  $\lambda = 1 + 2i$  και  $\bar{\lambda} = 1 - 2i$ .

Τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda$ , είναι λύσεις του συστήματος

$$(A - (1 + 2i)I)\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

το οποίο γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

από την οποία προκύπτουν

$$\begin{aligned} -2iv_1 + 2v_2 &= 0 \\ -2v_1 - 2iv_2 &= 0. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με  $-i$ , βλέπουμε ότι προκύπτει η δεύτερη επομένως αρκεί τα  $v_1$  και  $v_2$  να ικανοποιούν

$$-2iv_1 + 2v_2 = 0$$

ή ισοδύναμα

$$v_2 = iv_1.$$

Έτσι, ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$  είναι το

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.5, δύο γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις του διαφορικού συστήματος είναι

$$\boldsymbol{\phi}_1(t) = e^t \left( \cos(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{bmatrix}$$

και

$$\phi_2(t) = e^t \left( \cos(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^t \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix}.$$

Η γενική λύση δίνεται από

$$\phi(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t),$$

όπου  $c_1, c_2$  αυθαίρετες σταθερές.

△

**Παράδειγμα 6.3.4** Λύστε το διαφορικό σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

**Λύση.** Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  του συστήματος είναι οι  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = i$  και  $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = -i$ .

Για την πραγματική ιδιοτιμή  $\lambda_1$ , ακολουθώντας τη διαδικασία της περίπτωσης I, βρίσκουμε τη λύση

$$\phi_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για τη μιγαδική ιδιοτιμή  $\lambda_2 = i$ , βρίσκουμε ότι ένα αντίστοιχο της ιδιοδιάνυσμα είναι το

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}.$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.5, οι

$$\phi_2(t) = \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

και

$$\phi_3(t) = \cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις του διαφορικού συστήματος. Άρα, τελικά, η γενική λύση του συστήματος δίνεται από

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t),$$

όπου  $c_1, c_2, c_3$  αυθαίρετες σταθερές.

△

### Περίπτωση III: Πολλαπλές ιδιοτιμές

Η περίπτωση που ο πίνακας  $A$  του συστήματος (6.2.2) έχει μία ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1 παρουσιάζει πολυπλοκότητα, για αυτό περιγράφουμε μόνο τις βασικές ιδέες που αφορούν τον υπολογισμό των λύσεων του συστήματος σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις.

Έστω  $\lambda_0$  ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\alpha(\lambda_0) = m_0$ . Αρχικά, προσδιορίζουμε όλα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην  $\lambda_0$ , δηλαδή ευρίσκουμε τη μη μηδενική λύση του συστήματος

$$(A - \lambda_0 I)\mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (6.3.6)$$

Έστω  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ ,  $1 \leq k \leq m_0$ , γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, αντίστοιχα στην ιδιοτιμή  $\lambda_0$ . Τότε, οι συναρτήσεις  $\phi_1(t) = e^{\lambda_0 t}\xi_1, \phi_2(t) = e^{\lambda_0 t}\xi_2, \dots, \phi_k(t) = e^{\lambda_0 t}\xi_k$  είναι  $k$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του διαφορικού συστήματος (6.2.5) και

$$\phi(t) = e^{\lambda_0 t} (c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_k\xi_k), \quad (6.3.7)$$

όπου  $c_1, c_2, \dots, c_k$  αυθαίρετες σταθερές, είναι όλες οι λύσεις του (6.2.5) της μορφής  $e^{\lambda_0 t}\xi$ , για κάποιο διάνυσμα  $\xi$ , οι οποίες αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_0$ . Αν  $k = m_0$ , δηλαδή όταν η γεωμετρική και αλγεβρική πολλαπλότητα συμπίπτουν, τότε η οικογένεια (6.3.7) συμπίπτει με το σύνολο όλων των λύσεων του συστήματος που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_0$ . Αυτή είναι η περίπτωση στο ακόλουθο

**Παράδειγμα 6.3.5** Λύστε το διαφορικό σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

**Λύση.** Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$  του συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$  και άρα έχει την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = 2$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\alpha(\lambda_1) = 2$  και την ιδιοτιμή  $\lambda_2 = -1$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\alpha(\lambda_2) = 1$ .

Τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_1$ , είναι λύσεις του αντιστοίχου συστήματος (6.3.3)

$$(A - 2I)\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

το οποίο γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

από την οποία προκύπτει ότι το  $\xi_1$  είναι αυθαίρετος πραγματικός αριθμός, ενώ τα  $\xi_2$  και  $\xi_3$  ικανοποιούν

$$\begin{aligned} -3\xi_2 + 3\xi_3 &= 0 \\ 3\xi_2 - 3\xi_3 &= 0 \\ 6\xi_2 - 6\xi_3 &= 0, \end{aligned}$$

οι οποίες όλες ανάγονται στην  $\xi_2 = \xi_3$ . Επομένως, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_1 = 2$  είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

όπου  $\xi_1$  και  $\xi_2$  είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Λαμβάνοντας αρχικά  $\xi_1 = 1$  και  $\xi_2 = 0$  και στη συνέχεια  $\xi_1 = 0$  και  $\xi_2 = 1$  βρίσκουμε τα δύο ιδιοδιανύσματα

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_1$  είναι  $\gamma(\lambda_1) = 2$ , δηλαδή ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα  $\alpha(\lambda_1)$ . Άρα

$$\psi(t) = e^{2t} (c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2)$$

είναι, σύμφωνα με την (6.3.7), όλες οι λύσεις του διαφορικού συστήματος, οι οποίες αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_1$ .

Για την απλή και πραγματική ιδιοτιμή  $\lambda_2 = -1$ , ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω στην περίπτωση I και βρίσκουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή είναι το

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

και η αντίστοιχη λύση είναι

$$\phi_3(t) = e^{-t}\xi_3.$$

Τελικά, η γενική λύση του διαφορικού συστήματος δίνεται από

$$\phi(t) = \psi(t) + c_3\phi_3(t) = e^{2t} \left( c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

△

Η δυσκολία με μία πολλαπλή ιδιοτιμή  $\lambda_0$  εμφανίζεται όταν δεν υπάρχουν  $m_0$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα στην  $\lambda_0$  (δηλαδή όταν  $\gamma(\lambda_0) < m_0$ ). Μία διαδικασία ανάλογη προς εκείνη των Δ.Ε. δευτέρας τάξεως όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα (βλ. Παράγραφο 4.2) εφαρμόζεται επίσης και για διαφορικά συστήματα. Σχετικά, επεξεργαζόμαστε ενδεικτικά το ακόλουθο

**Παράδειγμα 6.3.6** Λύστε το διαφορικό σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

**Λύση.** Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  του συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (3 - \lambda)^2$  και άρα έχει την ιδιοτιμή  $\lambda_0 = 3$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\alpha(\lambda_0) = 2$ .

Τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_0$ , είναι λύσεις του αντιστοίχου συστήματος (6.3.3)

$$(A - 3I)\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

το οποίο γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

από την οποία προκύπτει ότι πρέπει  $\xi_2 = 0$ . Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_0 = 3$  είναι της μορφής  $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix}$  και κάθε δύο τέτοια διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Έτσι, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_0$  είναι  $\gamma(\lambda_0) = 1$ , οπότε  $\gamma(\lambda_0) < \alpha(\lambda_0)$  και ως ιδιοδιάνυσμα της  $\lambda_0$  μπορούμε να θεωρήσουμε το  $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .



Στο ιδιοδιάνυσμα  $\xi_1$  αντιστοιχεί η λύση  $\phi_1(t) = e^{3t}\xi_1$  του διαφορικού συστήματος. Θα προσπαθήσουμε, τώρα, κατά αναλογία με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για τις επαναλαμβανόμενες ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης μίας Δ.Ε. (βλ. Παράγραφο 4.2), να αναζητήσουμε μία δεύτερη λύση του διαφορικού συστήματος στη μορφή

$$\phi_2(t) = e^{3t}(\xi_2 + \xi_1 t).$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$\phi_2'(t) = e^{3t}\xi_1 + 3e^{3t}(\xi_2 + \xi_1 t) = e^{3t}(3\xi_2 + \xi_1) + 3te^{3t}\xi_1,$$

ενώ

$$A\phi_2(t) = Ae^{3t}(\xi_2 + \xi_1 t) = e^{3t}A\xi_2 + te^{3t}A\xi_1.$$

Για να είναι η  $\phi_2$  λύση του συστήματος πρέπει  $\phi_2'(t) = A\phi_2(t)$ , οπότε, εξισώνοντας στις τελευταίες σχέσεις τους συντελεστές των  $e^{3t}$  και  $te^{3t}$ , λαμβάνουμε

$$A\xi_2 = 3\xi_2 + \xi_1 \quad \text{και} \quad A\xi_1 = 3\xi_1,$$

οι οποίες γράφονται ισοδύναμα

$$(A - 3I)\xi_2 = \xi_1 \quad \text{και} \quad (A - 3I)\xi_1 = \mathbf{0}.$$

Η δεύτερη εξίσωση ικανοποιείται αυτόματα αφού το  $\xi_1$  είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_0 = 3$ . Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης με τον πίνακα  $A - 3I$  και χρησιμοποιώντας και τη δεύτερη εξίσωση, ευρίσκουμε ότι το  $\xi_2$  πρέπει να πληρεί

$$(A - 3I)^2\xi_2 = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad (A - 3I)\xi_2 = \xi_1.$$

Όμως, ισχύει ότι ο  $(A - 3I)^2$  είναι ο μηδενικός πίνακας και έτσι οποιοδήποτε διάνυσμα  $\xi_2$  πληρεί την πρώτη εξίσωση. Άρα, αρκεί να βρούμε κατάλληλο  $\xi_2$  που να πληρεί τη δεύτερη, η οποία γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η τελευταία συνεπάγεται ότι  $\xi_2 = 1$  και  $\xi_1$  είναι αυθαίρετος πραγματικός αριθμός. Έτσι, εκλέγουμε το  $\xi_2$  ως

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και η γενική λύση του διαφορικού συστήματος είναι

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2e^{3t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + c_2te^{3t} \\ c_2e^{3t} \end{bmatrix}.$$

△

Η διαδικασία επεξεργασίας του προηγούμενου παραδείγματος οδηγεί στη διατύπωση ενός αλγορίθμου εύρεσης των λύσεων. Για την κατανόηση του αλγορίθμου, εξετάζουμε αρχικά την ειδική περίπτωση  $\gamma(\lambda_0) = 1$  και  $\alpha(\lambda_0) = 2$  για την ιδιοτιμή  $\lambda_0$ . Έστω  $\xi_1$  ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda_0$ . Τότε, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ένα διάνυσμα  $\xi_2$  τέτοιο ώστε

$$(A - \lambda_0 I)^2 \xi_2 = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad (A - \lambda_0 I) \xi_2 = \xi_1 \quad (6.3.8)$$

και οι

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_0 t} \xi_1 \quad \text{και} \quad \phi_2(t) = e^{\lambda_0 t} (\xi_2 + \xi_1 t) \quad (6.3.9)$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του διαφορικού συστήματος (6.2.5), οι οποίες αντιστοιχούν στη διπλή ιδιοτιμή  $\lambda_0$ .

Περιγράφουμε τώρα συνοπτικά τη γενίκευση της διαδικασίας του προηγούμενου αλγορίθμου για την περίπτωση πολλαπλότητας  $\gamma(\lambda_0)$  και  $\alpha(\lambda_0)$  ανώτερης τάξης. Προς τούτο, έστω μία πολλαπλή ιδιοτιμή  $\lambda_0$  αλγεβρικής πολλαπλότητας  $\alpha(\lambda_0)$  και γεωμετρικής πολλαπλότητας  $\gamma(\lambda_0)$ . Αρχικά, προσδιορίζουμε διανύσματα  $\xi$  τέτοια ώστε

$$(A - \lambda_0 I)^d \xi = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad (A - \lambda_0 I)^{d-1} \xi \neq \mathbf{0}, \quad (6.3.10)$$

όπου  $d = \alpha(\lambda_0) - \gamma(\lambda_0) + 1$ , τα οποία καλούνται *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα*. Στη συνέχεια, για κάθε ιδιοδιάνυσμα  $\xi_1$  αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda_0$  προσδιορίζουμε μία ακολουθία γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων  $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_d$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_0 I) \xi_1 &= \mathbf{0}, \\ (A - \lambda_0 I) \xi_2 &= \xi_1, \\ &\dots, \\ (A - \lambda_0 I) \xi_d &= \xi_{d-1}. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Τώρα, με τη βοήθεια των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ , προσδιορίζονται οι  $d$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= e^{\lambda_0 t} \xi_1, \\ \phi_2(t) &= e^{\lambda_0 t} (\xi_2 + \xi_1 t), \\ &\dots, \\ \phi_d(t) &= e^{\lambda_0 t} \left( \xi_d + \xi_{d-1} t + \xi_{d-2} \frac{t^2}{2!} + \dots + \xi_2 \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} + \xi_1 \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \right). \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Επανάληψη της προηγούμενης διαδικασίας οδηγεί στον προσδιορισμό  $m_0 = \alpha(\lambda_0)$  γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων.

Η ιδέα του παραπάνω αλγορίθμου αποσαφηνίζεται με το ακόλουθο

**Παράδειγμα 6.3.7** Λύστε το διαφορικό σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

**Λύση.** Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  του συστήματος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - 2)^3$  και άρα έχει την ιδιοτιμή  $\lambda_0 = 2$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\alpha(\lambda_0) = 3$ .

Τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_0$ , είναι λύσεις του αντιστοίχου συστήματος (6.3.3)

$$(A - 2I)\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

το οποίο γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

από την οποία προκύπτουν ότι

$$\begin{aligned} 2\xi_1 - \xi_2 &= 0 \\ 3\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 &= 0 \\ \xi_1 - \xi_3 &= 0, \end{aligned}$$

οι οποίες ανάγονται στις

$$\begin{aligned} \xi_2 &= 2\xi_1 \\ \xi_3 &= \xi_1, \end{aligned}$$

και άρα στην ιδιοτιμή  $\lambda_0 = 2$  αντιστοιχεί μόνο το ιδιοδιάνυσμα

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_0$  είναι  $\gamma(\lambda_0) = 1$ , δηλαδή  $\gamma(\lambda_0) < \alpha(\lambda_0)$  με  $d = \alpha(\lambda_0) - \gamma(\lambda_0) + 1 = 3$ . Μία λύση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_0$  είναι

$$\boldsymbol{\phi}_1(t) = e^{2t} \boldsymbol{\xi}_1.$$

Στη συνέχεια, για να βρούμε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_0$ , εφαρμόζουμε τον γενικό αλγόριθμο που περιγράφηκε παραπάνω. Προς τούτο, προσδιορίζουμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα  $\xi_2$  και  $\xi_3$  τέτοια ώστε

$$(A - 2I)\xi_1 = \mathbf{0},$$

$$(A - 2I)\xi_2 = \xi_1$$

$$(A - 2I)\xi_3 = \xi_2,$$

οι οποίες οδηγούν στην

$$(A - 2I)^3 \xi_3 = \mathbf{0}.$$

Όμως, προκύπτει ότι

$$(A - 2I)^3 = \mathbf{0},$$

επομένως κάθε διάνυσμα  $\xi_3$  πληρεί την  $(A - 2I)^3 \xi_3 = \mathbf{0}$ . Έστω ότι επιλέγουμε

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα  $\xi_2$  υπολογίζεται από

$$\xi_2 = (A - 2I)\xi_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\xi_1 = (A - 2I)\xi_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα, τρεις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του διαφορικού συστήματος είναι

$$\phi_1(t) = e^{2t} \xi_1 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\phi_2(t) = e^{2t} (\xi_2 + \xi_1 t) = e^{2t} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t \right),$$

$$\phi_3(t) = e^{2t} \left( \xi_3 + \xi_2 t + \xi_1 \frac{t^2}{2} \right) = e^{2t} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} \right)$$

και η γενική λύση του διαφορικού συστήματος δίνεται από

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t).$$

△

## 6.4 Μη ομογενή γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

όπου  $\mathbf{b}(t)$  συνεχής διανυσματική συνάρτηση στο διάστημα  $I$  και  $t_0 \in I$ . Για την επίλυση του (6.4.1) ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία, η οποία είναι γενίκευση της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων, που αναπτύχθηκε στην Παράγραφο 5.4, για την επίλυση γραμμικών Δ.Ε. ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Έστω  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$  του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Τότε, η γενική λύση αυτού γράφεται

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t).$$

Αντίστοιχα με την περίπτωση των γραμμικών Δ.Ε., θεωρούμε τις  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ως συναρτήσεις του  $t$  και αναζητούμε λύση του μη ομογενούς συστήματος της μορφής

$$\phi(t) = c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t) + \dots + c_n(t)\phi_n(t), \quad (6.4.2)$$

η οποία γράφεται ως

$$\phi(t) = \Phi(t)\mathbf{c}(t), \quad (6.4.3)$$

όπου  $\mathbf{c}(t) = [c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)]^T$  είναι διάνυσμα προς προσδιορισμό και

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{21}(t) & \dots & \phi_{n1}(t) \\ \phi_{12}(t) & \phi_{22}(t) & \dots & \phi_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1n}(t) & \phi_{2n}(t) & \dots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (6.4.4)$$

είναι ο θεμελιώδης πίνακας των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος (με  $\phi_{ij}(t)$  συμβολίζουμε την  $j$  συνιστώσα της διανυσματικής συνάρτησης  $\phi_i(t)$ , όπου  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

Αντικαθιστώντας την (6.4.3) στο σύστημα του (6.4.1), έχουμε ότι

$$\Phi'(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\mathbf{c}'(t) = A\Phi(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (6.4.5)$$

Όμως, εφόσον ο  $\Phi(t)$  είναι ο θεμελιώδης πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος, ισχύει ότι

$$\Phi'(t) = A\Phi(t)$$

και έτσι η (6.4.5) ανάγεται στην

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t). \quad (6.4.6)$$

Επειδή ο  $\Phi(t)$  ως θεμελιώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος, η τελευταία σχέση γράφεται

$$\mathbf{c}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t) \quad (6.4.7)$$

και ολοκληρώνοντας από  $t_0$  έως  $t$  λαμβάνουμε

$$\mathbf{c}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds + \mathbf{c}(t_0), \quad (6.4.8)$$

από την οποία, μέσω της (6.4.3), ευρίσκουμε

$$\mathbf{c}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds + \Phi^{-1}(t_0)\phi(t_0). \quad (6.4.9)$$

Έτσι, τελικά συνδυάζοντας τις (6.4.3) και (6.4.9), η λύση του Π.Α.Τ. (6.4.1) προκύπτει να είναι

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\phi(t_0) + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds. \quad (6.4.10)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της προηγούμενης έκφρασης είναι μία μερική λύση του ομογενούς συστήματος (η οποία πληρεί και τη δοθείσα αρχική συνθήκη), ενώ ο δεύτερος όρος είναι μία μερική λύση του μη ομογενούς συστήματος.

Πολλές φορές στους υπολογισμούς είναι ευκολότερο να λύνουμε το σύστημα (6.4.6) με αναγωγή γραμμών και να υπολογίζουμε το διάνυσμα  $\mathbf{c}'(t)$  και ακολούθως να βρίσκουμε το  $\mathbf{c}(t)$  με αόριστη ολοκλήρωση και να χρησιμοποιούμε τον τύπο (6.4.3), παρά να αντιστρέψουμε το θεμελιώδη πίνακα και να χρησιμοποιούμε τον τύπο (6.4.10). Η διαδικασία αυτή αποσαφηνίζεται στο ακόλουθο

**Παράδειγμα 6.4.1** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Λύση.** Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές της Παραγράφου 6.3, ευρίσκουμε τη γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς διαφορικού συστήματος

$$\phi_o(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

επομένως ο θεμελιώδης πίνακας είναι

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Τότε, σύμφωνα με την (6.4.3), η λύση  $\phi(t)$  του μη ομογενούς διαφορικού συστήματος εκφράζεται ως

$$\phi(t) = \Phi(t)\mathbf{c}(t),$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{c}(t) = [c_1(t), c_2(t)]^T$  ικανοποιεί την [βλ. (6.4.6)]

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t),$$

η οποία γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}.$$

Η τελευταία λύνεται με αναγωγή γραμμών δίνοντας

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= e^{2t} - \frac{3}{2}te^{3t}, \\ c_2'(t) &= 1 + \frac{3}{2}te^{3t}, \end{aligned}$$

από τις οποίες με αόριστη ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + c_1, \\ c_2(t) &= t + \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t + c_2, \end{aligned}$$

όπου  $c_1, c_2$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Έτσι, η λύση του μη ομογενούς διαφορικού συστήματος δίνεται από

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \Phi(t)\mathbf{c}(t) \\ &= c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

η οποία γράφεται ως

$$\phi(t) = \phi_o(t) + \phi_\mu(t),$$

όπου

$$\phi_\mu(t) = t e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

μία μερική λύση του μη ομογενούς συστήματος.

Τέλος, ικανοποιώντας τη δοθείσα αρχική συνθήκη λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= \frac{5}{6}, \\ -c_1 + c_2 &= \frac{19}{6},\end{aligned}$$

το οποίο έχει ως λύση τα  $c_1 = -\frac{7}{6}$  και  $c_2 = 2$ . Έτσι, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\phi(t) = -\frac{7}{6}e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + te^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

△

## 6.5 Ασκήσεις

Λύστε τα διαφορικά συστήματα

Άσκηση 6.5.1

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Άσκηση 6.5.2

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Άσκηση 6.5.3

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Άσκηση 6.5.4

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Άσκηση 6.5.5

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$



Λύστε τα Π.Α.Τ.

**Άσκηση 6.5.6**

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 6.5.7**

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 6.5.8**

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 6.5.9** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και προσδιορίστε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  έτσι ώστε η λύση του Π.Α.Τ. να τείνει στο  $[0 \ 0]^T$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Λύστε τα μη ομογενή διαφορικά συστήματα.

**Άσκηση 6.5.10**

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 6.5.11**

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + e^{2t} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 6.5.12**

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

# Βιβλιογραφία

- [1] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.
- [2] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Θέματα Διαφορικών Εξισώσεων*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2011.
- [3] J. Lebl, *Differential Equations for Engineers*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2014.
- [4] R. H. Martin, *Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1983.

## Κεφάλαιο 7

# Μετασχηματισμός Laplace με εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, ο οποίος εισάγεται με τη βοήθεια συγκεκριμένου γενικευμένου ολοκληρώματος και εφαρμόζεται εδώ για τη λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η τεχνική που βασίζεται στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με το μετασχηματισμό Laplace είναι μία αποδοτική εναλλακτική στις μεθόδους μεταβολής των παραμέτρων και προσδιοριστέων συντελεστών που αναλύθηκαν στα Κεφάλαια 4 και 5. Επιπλέον, είναι ειδικότερα πλεονεχτική για μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις στις οποίες τα δεύτερα μέλη συμμετέχουν συναρτήσεις που είναι τμηματικά συνεχείς ή/και περιοδικές.

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά εισάγεται η έννοια του μετασχηματισμού Laplace, εξετάζονται οι βασικές ιδιότητές του και ορίζεται ο αντίστροφός του και καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες αυτού. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, διατυπώνονται στοιχειώδεις τεχνικές για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές και συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Τέλος, εξετάζεται η βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης δύο συναρτήσεων, η οποία χρησιμοποιείται σε τεχνικές επίλυσης ολοκληρωτικών και ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που εμφανίζονται ευρέως στις θετικές επιστήμες και στις επιστήμες μηχανικών.

### 7.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Βασική έννοια για τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace είναι εκείνη του γενικευμένου ολοκληρώματος, την οποία υπενθυμίζουμε συνοπτικά και επεξεργαζόμαστε ορισμένα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα υπολογισμού γενικευμένων ολοκληρωμάτων, τα οποία χρη-

σιμοποιούμε στα επόμενα.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος (κατά Riemann)  $\int_a^b f(x)dx$  αναφέρεται σε φραγμένες συναρτήσεις  $f$  με πεδίο ορισμού ένα κλειστό (και φραγμένο) διάστημα  $[a, b]$  του  $\mathbb{R}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Εξάλλου, η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος επεκτείνεται με εφαρμογή μιας συγκεκριμένης οριακής διαδικασίας σε μία ευρεία κλάση συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται σε τυχόν διάστημα  $I$  του  $\mathbb{R}$  και δεν είναι κατά ανάγκη φραγμένες, αλλά είναι τοπικά ολοκληρώσιμες.

### Ορισμός 7.1.1

Μία συνάρτηση  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $I$  τυχόν διάστημα, ονομάζεται *τοπικά ολοκληρώσιμη* στο  $I$  όταν, για κάθε  $v, w \in I$  με  $v \leq w$ , η συνάρτηση  $f : [v, w] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ολοκληρώσιμη στο  $[v, w]$  (δηλαδή υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  το  $\int_v^w f(x)dx$ ).

□

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα, το οποίο χρησιμοποιείται για τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, αναφέρεται σε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού άπειρο διάστημα.

### Ορισμός 7.1.2

Έστω  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα  $I$ , όπου  $I$  είναι ένα από τα διαστήματα  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b]$  και  $(-\infty, +\infty)$  με  $a, b \in \mathbb{R}$ . Τότε, ορίζουμε

1. Ως γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  της συνάρτησης  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται το όριο

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x)dx,$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  το αναφερόμενο όριο.

2. Ως γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  της συνάρτησης  $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται το όριο

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^b f(x)dx,$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  το αναφερόμενο όριο.

3. Ως γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  της συνάρτησης  $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται το άθροισμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  για το οποίο ορίζονται στο  $\mathbb{R}$  τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα, οπότε σε αυτή την περίπτωση το  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  είναι ανεξάρτητο της επιλογής του  $c$ .

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις 1 έως 3 λέμε ότι υπάρχει ή συγκλίνει το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα. Όταν κάποιο από τα όρια αυτά δεν υπάρχει στο  $\mathbb{R}$ , τότε θα λέμε ότι το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει ή δεν υπάρχει στο  $\mathbb{R}$ .

□

Στη συνέχεια, επεξεργαζόμαστε ορισμένα χρηστικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα υπολογισμών γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

**Παράδειγμα 7.1.1** Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} dx, \quad s \in \mathbb{R}.$$

**Λύση.** Από την περίπτωση 1 του Ορισμού 7.1.2, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-sx} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \begin{cases} \left[ -\frac{e^{-sx}}{s} \right]_0^u, & s \neq 0 \\ [x]_0^u, & s = 0 \end{cases} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{s}(1 - e^{-su}), & s \neq 0 \\ u, & s = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s}, & s > 0 \\ +\infty, & s \leq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 7.1.2** Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Λύση.** Υπολογίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα ως εξής

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} x^\alpha dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u x^\alpha dx \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \begin{cases} \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^u, & \alpha \neq -1 \\ [\ln x]_1^u, & \alpha = -1 \end{cases} \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}(u^{\alpha+1} - 1), & \alpha \neq -1 \\ \ln u, & \alpha = -1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} +\infty, & \alpha \geq -1 \\ -\frac{1}{\alpha+1}, & \alpha < -1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 7.1.3** Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

**Λύση.** Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{dx}{x^2 + 1} \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^u \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (\arctan u - \arctan 0) \\
 &= \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

△

Απλοί συνδυασμοί του ορισμού του γενικευμένου ολοκληρώματος με γενικές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος (κατά Riemann) και των ορίων συναρτήσεων, επιβεβαιώνουν τις βασικές ιδιότητες των γενικευμένων ολοκληρωμάτων, οι οποίες είναι πολύ χρηστικές και εφαρμόζονται ευρέως, και ενοποιούνται στο ακόλουθο

**Θεώρημα 7.1.1** Έστω  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, ισχύουν

(α) (θετικότητα) Αν υπάρχει το γ.ο.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  και ισχύει  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, +\infty)$ , τότε  $\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$ .

(β) (γραμμικότητα) Αν υπάρχουν τα γ.ο.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  και  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  τότε υπάρχει επίσης και το γ.ο.  $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$  και ισχύει

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

(γ) (μονοτονία) Αν υπάρχουν τα γ.ο.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  και  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  και ισχύει

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, +\infty),$$

τότε

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

(δ) (κριτήριο σύγκρισης) Αν  $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, +\infty)$ , τότε

(1) αν υπάρχει το γ.ο.  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ , τότε υπάρχει και το  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ , και ισχύει

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

(2) αν  $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ , τότε  $\int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty$ .

(ε) Το γ.ο.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  υπάρχει τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει το γ.ο.  $\int_c^{+\infty} f(x)dx$  για κάποιο  $c > a$ , στην προκειμένη περίπτωση ισχύει

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

(στ) (απόλυτη σύγκλιση) Αν υπάρχει το γ.ο.  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ , τότε υπάρχει επίσης και το γ.ο.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  και ισχύει

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Εξάλλου, δεν ισχύει ο αντίστροφος ισχυρισμός.

**Απόδειξη.** Ενδεικτικά, αποδεικνύουμε τις ιδιότητες (ε) και (στ).

Για την απόδειξη της (ε), υποθέτουμε ότι υπάρχει το γ.ο.  $\int_c^{+\infty} f(x)dx$  για κάποιο  $c > a$  και, για τυχόν  $u > c$ , υπολογίζουμε

$$\int_a^u f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^u f(x)dx,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_c^u f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

Για την (στ), αρχικά παρατηρούμε ότι ισχύει

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|, \quad \forall x \in [a, +\infty).$$

Έτσι, από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι υπάρχει το γ.ο.  $\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)dx$  και επειδή ισχύει

$$f(x) = (f(x) + |f(x)|) - |f(x)|, \quad \forall x \in [a, +\infty),$$

από τη γραμμικότητα του γ.ο. έπεται ότι υπάρχει το γ.ο.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ .

Περαιτέρω, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| &= \left| \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x)dx \right| = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left| \int_a^u f(x)dx \right| \\ &\leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u |f(x)| dx = \int_a^{+\infty} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

□

Κλείνουμε την παράγραφο, υπενθυμίζοντας από τον Απειροστικό Λογισμό τον ακόλουθο ορισμό της τμηματικά συνεχούς συνάρτησης.

### Ορισμός 7.1.3

Μία συνάρτηση  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται *τμηματικά συνεχής* (στο  $[a, b]$ ) όταν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της  $f$  είναι (το πολύ) πεπερασμένο και σε κάθε σημείο ασυνέχειας της  $f$  υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα πλευρικά όρια της  $f$ , που σημαίνει ότι υπάρχει μία διαμέριση

$$[a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b]$$



του  $[a, b]$  έτσι ώστε η συνάρτηση  $f : (x_k, x_{k+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  να είναι συνεχής και να υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα πλευρικά όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Εξάλλου, μία συνάρτηση  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $I$  τυχόν διάστημα, ονομάζεται *τοπικά τμηματικά συνεχής* στο  $I$ , όταν για κάθε  $a, b \in I$  με  $a \leq b$  η συνάρτηση  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[a, b]$ .

□

Η κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$  περιέχει ασφαλώς την κλάση των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων στο  $[a, b]$  και κατά συνέπεια η κλάση των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων σε ένα τυχόν διάστημα  $I$  περιέχει επίσης την κλάση των τοπικά τμηματικά συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα  $I$ .

Όπως θα εξηγήσουμε στην επόμενη παράγραφο, για μία περιεκτική κλάση τοπικά τμηματικά συνεχών συναρτήσεων σε ένα διάστημα  $[0, +\infty)$ , εκείνη των συναρτήσεων εκθετικής τάξης, ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace.

## 7.2 Ορισμός του μετασχηματισμού Laplace

**Ορισμός 7.2.1** Έστω  $f = f(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως *μετασχηματισμός Laplace* ορίζεται η πραγματική συνάρτηση

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (7.2.1)$$

με πεδίο ορισμού το σύνολο

$$DL(f) = \left\{ s \in \mathbb{R} : \text{υπάρχει (στο } \mathbb{R}) \text{ το γ.ο. } \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \right\}.$$

Η συνάρτηση  $\mathcal{L}\{f\}$  συμβολίζεται επίσης με  $F$ , ενώ στην πράξη, αντί για  $\mathcal{L}\{f\}$  και  $F$ , γράφουμε συνήθως  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  και  $F(s)$  αντιστοίχως, όπου εμφανίζονται και οι μεταβλητές  $t$  και  $s$  των συναρτήσεων  $f$  και  $F$ , και επομένως η (7.2.1) εμφανίζεται στη βιβλιογραφία ως

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (7.2.2)$$

□

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε με χρήση του τελευταίου ορισμού το μετασχηματισμό Laplace ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων.

**Παράδειγμα 7.2.1** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = 1, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-st} dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{s} e^{-su} + \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s}, \quad s > 0, \end{aligned}$$

και άρα

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

△

**Παράδειγμα 7.2.2** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = t, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u t e^{-st} dt \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u t \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \right)' dt \\
 &= -\frac{1}{s} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( [t e^{-st}]_0^u - \int_0^u e^{-st} dt \right) \\
 &= -\frac{1}{s} \left( \lim_{u \rightarrow +\infty} (u e^{-su}) - \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-st} dt \right) \\
 &= -\frac{1}{s} \left( \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \frac{u}{e^{su}} \right) - \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \right) \\
 &= -\frac{1}{s} \left( \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{s e^{su}} \right) - \frac{1}{s} \right), \quad s > 0 \\
 &= \frac{1}{s^2}, \quad s > 0,
 \end{aligned}$$

όπου στα τελευταία βήματα χρησιμοποιήθηκαν ο κανόνας L'Hôpital καθώς και το αποτέλεσμα του τελευταίου παραδείγματος. Άρα, τελικά λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

△

**Παράδειγμα 7.2.3** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = t^n, \quad t \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Λύση.** Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u t^n e^{-st} dt \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u t^n \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \right)' dt \\
 &= -\frac{1}{s} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( [t^n e^{-st}]_0^u - \int_0^u n t^{n-1} e^{-st} dt \right) \\
 &= -\frac{1}{s} \left( \lim_{u \rightarrow +\infty} (u^n e^{-su}) - n \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u t^{n-1} e^{-st} dt \right) \\
 &= -\frac{1}{s} \left( \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \frac{u^n}{e^{su}} \right) - n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}, \quad s > 0,
 \end{aligned}$$

όπου στα τελευταία βήματα χρησιμοποιήθηκε  $n$  φορές ο κανόνας L'Hôpital.

Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά την τελευταία, έχουμε

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \dots = \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

Σημειώνουμε ότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει και για  $n = 0$ , δηλαδή δίνει και το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης 1.

△

**Παράδειγμα 7.2.4** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = e^{at}, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{(a-s)t} dt \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^u \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{a-s} e^{(a-s)u} - \frac{1}{a-s} \right) \\
 &= \frac{1}{s-a}, \quad s > a,
 \end{aligned}$$

και άρα

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

△

**Παράδειγμα 7.2.5** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, +\infty)$$

και

$$g(t) = \cos t, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Χρησιμοποιούμε το μιγαδικό ορισμό του ημιτόνου

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin t e^{-st} dt &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \sin t e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \int_0^u e^{it} e^{-st} dt - \int_0^u e^{-it} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \int_0^u e^{(i-s)t} dt - \int_0^u e^{-(i+s)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \left[ \frac{1}{i-s} e^{(i-s)t} \right]_0^u - \left[ \frac{1}{-(i+s)} e^{-(i+s)t} \right]_0^u \right) \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{i-s} [e^{(i-s)u} - 1] + \frac{1}{i+s} [e^{-(i+s)u} - 1] \right) \\ &= -\frac{1}{2i} \left( \frac{1}{i-s} + \frac{1}{i+s} \right) \\ &= \frac{1}{s^2 + 1}, \quad s > 0, \end{aligned}$$

και άρα

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad s > 0.$$

Χρησιμοποιώντας το μιγαδικό ορισμό του συνημιτόνου

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},$$

και εκτελώντας παρόμοιους υπολογισμούς, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad s > 0.$$

△

### 7.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Αρχικά, αποδεικνύουμε ένα θεώρημα ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace για μία περιεχτική κλάση τοπικά ολοκληρωσίμων συναρτήσεων.

**Ορισμός 7.3.1** Μία συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται *εκθετικής τάξης* (ή *εκθετικά φραγμένη*) (για  $t \rightarrow +\infty$ ) όταν υπάρχουν πραγματικές σταθερές  $M > 0$ ,  $\alpha$  και  $K > 0$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(t)| \leq Ke^{\alpha t}, \quad \forall t \geq M. \quad (7.3.1)$$

(η σταθερά  $\alpha$  αναφέρεται και ως εκθετική τάξη της  $f$ )

□

#### Θεώρημα 7.3.1 (Ύπαρξης μετασχηματισμού Laplace)

Έστω  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία τοπικά τμηματικά συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι εκθετικής τάξης ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \forall s > \alpha.$$

**Απόδειξη.** Αρχικά αποδεικνύουμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_M^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ , για κάθε  $s > \alpha$ . Πράγματι, από την υπόθεση ότι η  $f$  είναι εκθετικής τάξης έχουμε

$$\begin{aligned} \int_M^{+\infty} e^{-st} |f(t)| dt &\leq K \int_M^{+\infty} e^{(\alpha-s)t} dt \\ &= K \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_M^u e^{(\alpha-s)t} dt \\ &= \frac{K}{\alpha-s} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( e^{(\alpha-s)u} - e^{(\alpha-s)M} \right) \\ &= \frac{K}{\alpha-s} \left( 0 - e^{(\alpha-s)M} \right) = \frac{K}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)M}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, από την ιδιότητα (ε) του Θεωρήματος 7.1.1, υπάρχει το  $\int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)| dt$  και ισχύει

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)| dt &= \int_0^M e^{-st} |f(t)| dt + \int_M^{+\infty} e^{-st} |f(t)| dt \\ &= \int_0^M e^{-st} |f(t)| dt + \frac{K}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)M}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ιδιότητα (στ) του Θεωρήματος 7.1.1, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ , και άρα πράγματι υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace για κάθε  $s > \alpha$ .

□

Συνεχίζουμε με την καταγραφή των βασικών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace και επεξεργαζόμαστε αντιπροσωπευτικά παραδείγματα για κάθε επιμέρους ιδιότητα.

**Πρόταση 7.3.1** Έστω  $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με μετασχηματισμούς Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $s > \alpha_1$  και  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ ,  $s > \alpha_2$ , αντιστοίχως. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της  $af(t) \pm bg(t)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  και ισχύει

$$\mathcal{L}\{af(t) \pm bg(t)\} = aF(s) \pm bG(s), \quad s > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

□

**Παράδειγμα 7.3.1** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$f(t) = \sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}, \quad t \in [0, +\infty)$$

και

$$g(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Χρησιμοποιώντας την τελευταία πρόταση, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}.$$

Επειδή

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a,$$

λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right), \quad s > |a|,$$

και άρα

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|.$$

Με παρόμοια διαδικασία, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|. \end{aligned}$$

△

**Πρόταση 7.3.2** Έστω  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $s > \alpha$ . Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της  $e^{bt}f(t)$  και ισχύει

$$\mathcal{L}\{e^{bt}f(t)\} = F(s - b), \quad s > \alpha + b.$$

□

**Παράδειγμα 7.3.2** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = e^{5t} \cos t, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Γνωρίζουμε ότι για τη συνάρτηση  $f(t) = \cos t$ ,  $t \in [0, +\infty)$ , έχουμε  $F(s) = \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$ ,  $s > 0$ . Έτσι, από την τελευταία πρόταση, λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{5t} \cos t\} = F(s - 5) = \frac{s - 5}{(s - 5)^2 + 1}, \quad s > 5.$$

△

**Παράδειγμα 7.3.3** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = e^{-3t}t, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Γνωρίζουμε ότι για τη συνάρτηση  $f(t) = t$ ,  $t \in [0, +\infty)$ , έχουμε  $F(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ ,  $s > 0$ . και επομένως, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-3t}t\} = F(s + 3) = \frac{1}{(s + 3)^2}, \quad s > -3.$$

△

**Παράδειγμα 7.3.4** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = e^{at}, \quad t \in [0, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Λύση.** Για τη συνάρτηση  $f(t) = 1$ ,  $t \in [0, +\infty)$ , έχουμε  $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ ,  $s > 0$ , οπότε, έχουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s - a) = \frac{1}{s - a}, \quad s > a,$$

την οποία είχαμε ήδη βρει και νωρίτερα με χρήση του ορισμού του μετασχηματισμού.



△

**Πρόταση 7.3.3** Έστω  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $s > \alpha_0$ . Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της  $f(at)$ ,  $a > 0$ , και ισχύει

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > a\alpha_0.$$

□

**Παράδειγμα 7.3.5** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$g(t) = \cos(at), \quad t \in [0, +\infty), \quad a > 0$$

και

$$h(t) = \sin(at), \quad t \in [0, +\infty), \quad a > 0.$$

**Λύση.** Για τη συνάρτηση  $f(t) = \cos t$ ,  $t \in [0, +\infty)$ , έχουμε ήδη υπολογίσει ότι  $F(s) = \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$ ,  $s > 0$ .

Έτσι, από την τελευταία πρόταση, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{\frac{s}{a}}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

Με παρόμοιους υπολογισμούς λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

△

**Παράδειγμα 7.3.6** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \cos^2 t, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Από το τελευταίο παράδειγμα και την ιδιότητα γραμμικότητας του μετασχηματισμού (Πρόταση 7.3.1), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\cos^2 t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(2t)\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4}\right) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

△

**Πρόταση 7.3.4** Έστω συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $s > \alpha$ . Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της  $t^n f(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  και ισχύει

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > \alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

**Παράδειγμα 7.3.7** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = t \cos(at), \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Από το Παράδειγμα 7.3.5, γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $f(t) = \cos(at)$  είναι  $F(s) = \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$ ,  $s > 0$ .

Έτσι, χρησιμοποιώντας την τελευταία πρόταση, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{tf(t)\} = (-1)^1 F'(s) = -\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0.$$

△

**Παράδειγμα 7.3.8** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$g(t) = t e^{at}, \quad t \in [0, +\infty)$$

και

$$h(t) = t^2 e^{at}, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Λύση.** Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $f(t) = e^{at}$  είναι, σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.3.4,  $F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ ,  $s > a$ .

Επομένως, με τη βοήθεια της τελευταίας πρότασης, λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{tf(t)\} = (-1)^1 F'(s) = -\left(\frac{1}{s-a}\right)' = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad s > a.$$

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι

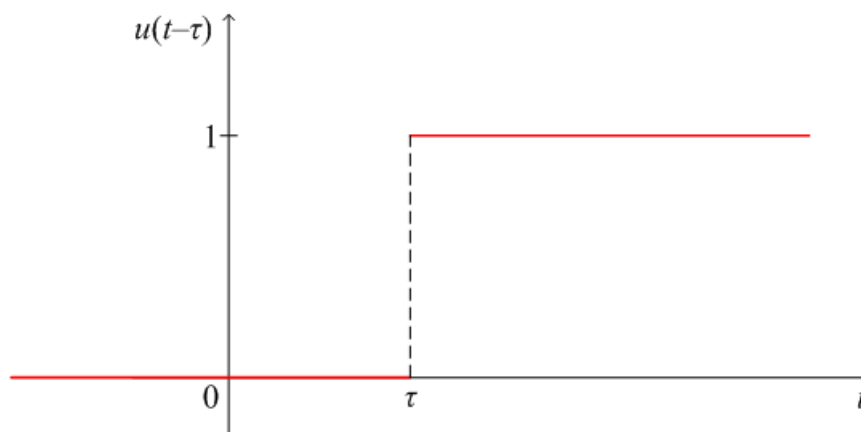
$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = (-1)^2 F''(s) = \left(\frac{1}{s-a}\right)'' = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad s > a.$$

△

Η συνάρτηση

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}, \quad (7.3.2)$$

της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο Σχήμα 7.1, ονομάζεται συνάρτηση *Heaviside* ή *συνάρτηση μοναδιαίου βήματος* (*unit step function*). Με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτής μπορούμε να λαμβάνουμε απλές και ενοποιημένες εκφράσεις συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται από διαφορετικούς τύπους σε διαφορετικά διαστήματα.



Σχήμα 7.1: Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

Επί παραδείγματι, η συνάρτηση (βλ. Σχήμα 7.2)

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

γράφεται ως

$$g(t) = h(t) \sin t,$$

όπου η συνάρτηση  $h(t)$  δίνεται από (βλ. Σχήμα 7.3)

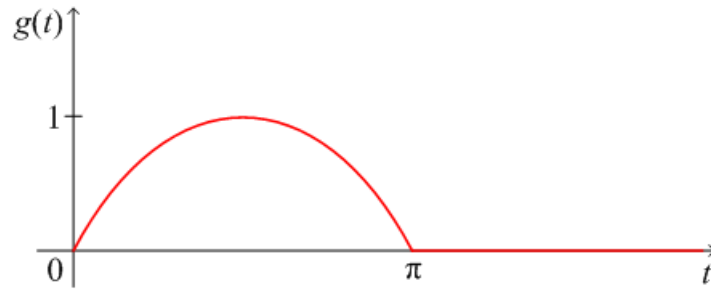
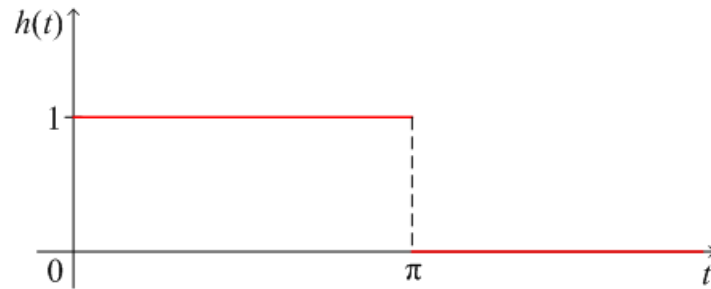
$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases},$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$h(t) = u(t) - u(t - \pi),$$

και άρα τελικά προκύπτει

$$g(t) = [u(t) - u(t - \pi)] \sin t.$$

Σχήμα 7.2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(t)$ .Σχήμα 7.3: Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h(t)$ .

Η ακόλουθη πρόταση αναδεικνύει τη σπουδαιότητα και τη χρησιμότητα της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος στο μετασχηματισμό Laplace.

**Πρόταση 7.3.5** Έστω ότι η συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  έχει μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $s > \alpha$ . Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $u(t - \tau)f(t - \tau)$ ,  $\tau \geq 0$  και ισχύει

$$\mathcal{L}\{u(t - \tau)f(t - \tau)\} = e^{-\tau s}F(s), \quad s > \alpha, \quad \tau \geq 0. \quad (7.3.3)$$

**Απόδειξη.** Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{u(t - \tau)f(t - \tau)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}u(t - \tau)f(t - \tau)dt = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-st}f(t - \tau)dt,$$

και το ζητούμενο προκύπτει κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $v = t - \tau$ , διότι

$$\int_{\tau}^{+\infty} e^{-st}f(t - \tau)dt = e^{-\tau s} \int_0^{+\infty} e^{-sv}f(v)dv = e^{-\tau s}F(s).$$

□

**Παράδειγμα 7.3.9** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος

$$g(t) = u(t - \tau), \quad t \in [0, +\infty), \quad \tau > 0.$$

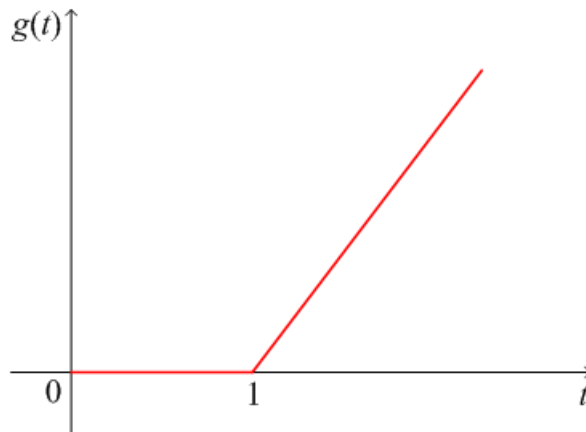
**Λύση.** Εφαρμόζοντας την (7.3.3) για τη συνάρτηση  $f(t) = 1$ , η οποία έχει μετασχηματισμό Laplace  $F(s) = \frac{1}{s}$ ,  $s > 0$  (βλ. Παράδειγμα 7.2.1), ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u(t - \tau)\} = \frac{e^{-\tau s}}{s}, \quad s > 0.$$

△

**Παράδειγμα 7.3.10** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης (βλ. Σχήμα 7.4)

$$g(t) = \begin{cases} t - 1, & t \geq 1 \\ 0, & 0 \leq t < 1 \end{cases}.$$



Σχήμα 7.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(t)$  του Παραδείγματος 7.3.10.

**Λύση.** Η συνάρτηση  $g$  γράφεται, με τη βοήθεια της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος, ως εξής

$$g(t) = u(t - 1)(t - 1), \quad t \in [0, +\infty).$$

Έτσι, εφαρμόζουμε την (7.3.3) για τη συνάρτηση  $f(t) = t$ , η οποία (σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.2.2) έχει μετασχηματισμό Laplace  $F(s) = \frac{1}{s^2}$ ,  $s > 0$ , και ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u(t - 1)(t - 1)\} = \frac{e^{-s}}{s^2}, \quad s > 0.$$

△

**Παράδειγμα 7.3.11** Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης (βλ. Σχήμα 7.2)

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}.$$

**Λύση.** Όπως αναλύθηκε παραπάνω, η συνάρτηση  $g$  γράφεται ως

$$g(t) = [u(t) - u(t - \pi)] \sin t = u(t) \sin t - u(t - \pi) \sin t, \quad t \in [0, +\infty).$$

Επομένως, για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την (7.3.3), πρέπει να εκφράσουμε την  $\sin t$  στο δεύτερο προσθετέο ως συνάρτηση του  $t - \pi$ . Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\sin t = -\sin(t - \pi),$$

και άρα έχουμε ότι

$$g(t) = u(t) \sin t + u(t - \pi) \sin(t - \pi), \quad t \in [0, +\infty),$$

οπότε εφαρμόζοντας την (7.3.3) για τη συνάρτηση  $f(t) = \sin t$ , η οποία (σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.2.5) έχει μετασχηματισμό Laplace  $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ ,  $s > 0$ , λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t) \sin t\} + \mathcal{L}\{u(t - \pi) \sin(t - \pi)\} \\ &= \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

△

Στην ακόλουθη πρόταση δίνεται η θεμελιώδης ιδιότητα για το μετασχηματισμό Laplace των παραγώγων συνάρτησης, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο σε μεθοδολογίες επίλυσης Δ.Ε. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια.

**Πρόταση 7.3.6** Έστω ότι η συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  έχει μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $s > \alpha$ , και είναι  $n$  φορές παραγωγίσιμη με  $f^{(k)}(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , να είναι συναρτήσεις εκθετικής τάξης. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της  $f^{(n)}(t)$  και ισχύει

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad s > \alpha, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.3.4)$$

□

Από την (7.3.4) λαμβάνουμε για  $n = 1, 2$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (7.3.5)$$

και

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (7.3.6)$$

Έτσι, οι μετασχηματισμοί Laplace των παραγώγων μιας συνάρτησης είναι αλγεβρικές έκφρασεις των μετασχηματισμών Laplace. Αυτή η βασική ιδιότητα καθιστά δυνατή τη μετατροπή, μέσω του μετασχηματισμού Laplace, μιας Δ.Ε. σε αλγεβρική εξίσωση.

**Παράδειγμα 7.3.12** Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης  $y(t)$ , η οποία ικανοποιεί το Π.Α.Τ.

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-3t}, \quad y(0) = 1.$$

**Λύση.** Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της Δ.Ε., και χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα γραμμικότητας του μετασχηματισμού, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-3t}\}.$$

Από την (7.3.5), έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0),$$

όπου  $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ . Επιπλέον, σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.3.4, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}, \quad s > -3.$$

Έτσι, συνδυάζοντας όλες τις προηγούμενες, λαμβάνουμε

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s+3}, \quad s > -3,$$

από όπου, με την ενσωμάτωση της δοσμένης αρχικής συνθήκης, έχουμε

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s+3} + 1, \quad s > -3,$$

και τελικά

$$Y(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}, \quad s > -3, \quad s \neq -2.$$

△

**Παράδειγμα 7.3.13** Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης  $y(t)$ , η οποία ικανοποιεί το Π.Α.Τ.

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**Λύση.** Με ανάλογη διαδικασία, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 2\mathcal{L}\{y'(t)\} - 3\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{1\},$$

από όπου, με εφαρμογή των (7.3.5) και (7.3.6) και χρήση του Παραδείγματος 7.2.1, λαμβάνουμε

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

και με την ενσωμάτωση των δοσμένων αρχικών συνθηκών, έχουμε

$$(s^2 + 2s - 3)Y(s) = \frac{1 + s}{s}, \quad s > 0,$$

και άρα

$$Y(s) = \frac{s + 1}{s(s - 1)(s + 3)}, \quad s > 0, \quad s \neq 1.$$

△

Στην ακόλουθη πρόταση δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace μιας περιοδικής συνάρτησης.

**Πρόταση 7.3.7** Έστω ότι η  $T$ -περιοδική συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  έχει μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ .

Τότε, ισχύει

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt, \quad s > 0. \quad (7.3.7)$$

**Απόδειξη.** Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t) dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t) dt + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$



Στην τελευταία κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής  $\tau = t - nT$ , και λαμβάνουμε

$$F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} f(\tau+nT) d\tau,$$

και επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι  $T$ -περιοδική, προκύπτει

$$F(s) = \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT}.$$

Η σειρά  $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT}$  είναι γεωμετρική με λόγο  $0 < e^{-sT} < 1$  (εφόσον  $sT > 0$ ), επομένως ισχύει ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}},$$

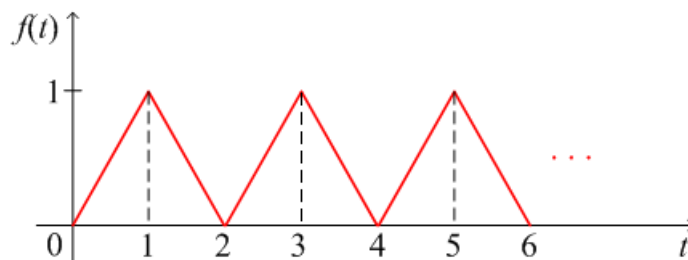
και άρα το ζητούμενο έπεται συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις.

□

**Παρατήρηση 7.3.1** Από την (7.3.7) φαίνεται ότι για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace μιας περιοδικής συνάρτησης  $f(t)$ , χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο το μετασχηματισμό της συνάρτησης που είναι ίση με την  $f(t)$  στη θεμελιώδη περίοδο και είναι ίση με μηδέν παντού αλλού. Αυτό οφείλεται στο ότι μια περιοδική συνάρτηση καθορίζεται πλήρως από τον περιορισμό της στο διάστημα της θεμελιώδους περιόδου.

△

**Παράδειγμα 7.3.14** Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace του τριγωνικού κύματος  $f(t)$ , το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 7.5.

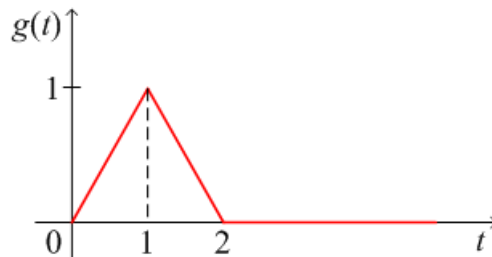


Σχήμα 7.5: Γραφική παράσταση του τριγωνικού κύματος  $f(t)$  του Παραδείγματος 7.3.14.

**Λύση.** Αρχικά, υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ -t + 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases},$$

η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 7.6 και η οποία είναι ίση με τη συνάρτηση  $f(t)$  στη θεμελιώδη περίοδο ( $0 \leq t \leq 2$ ) και ίση με μηδέν παντού αλλού.



Σχήμα 7.6: Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(t)$  της λύσης του Παραδείγματος 7.3.14.

Η συνάρτηση  $g(t)$  γράφεται, με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης, ως εξής

$$g(t) = [u(t) - u(t-1)]t + [u(t-1) - u(t-2)](-t+2),$$

όπου ο πρώτος όρος  $[u(t) - u(t-1)]t$  παριστάνει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία  $(0,0)$  και  $(1,1)$ , ενώ ο δεύτερος όρος  $[u(t-1) - u(t-2)](-t+2)$  το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία  $(1,1)$  και  $(2,0)$ .

Λαμβάνοντας τώρα το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.5, ευρίσκουμε

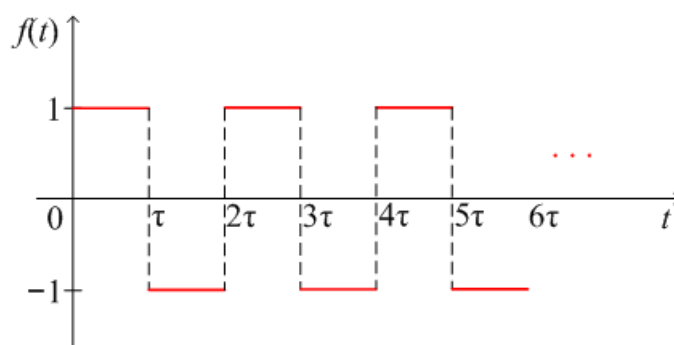
$$G(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.7, τελικά λαμβάνουμε

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2(1 - e^{-2s})} = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(1 + e^{-s})}, \quad s > 0.$$

△

**Παράδειγμα 7.3.15** Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace του τετραγωνικού κύματος  $f(t)$ , το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 7.7.

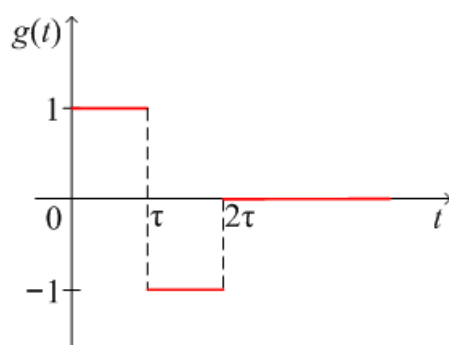


Σχήμα 7.7: Γραφική παράσταση του τετραγωνικού κύματος  $f(t)$  του Παραδείγματος 7.3.15.

**Λύση.** Αρχικά, υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau \\ -1, & \tau \leq t < 2\tau \\ 0, & t \geq 2\tau \end{cases},$$

η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 7.8 και η οποία είναι ίση με τη συνάρτηση  $f(t)$  στη θεμελιώδη περίοδο ( $0 \leq t \leq 2\tau$ ) και ίση με μηδέν παντού αλλού.



Σχήμα 7.8: Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(t)$  της λύσης του Παραδείγματος 7.3.15.

Η συνάρτηση  $g(t)$  γράφεται, με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης, ως εξής

$$\begin{aligned} g(t) &= [u(t) - u(t - \tau)] - [u(t - \tau) - u(t - 2\tau)] \\ &= u(t) - 2u(t - \tau) + u(t - 2\tau), \end{aligned}$$

όπου ο πρώτος όρος  $u(t) - u(t - \tau)$  έχει τιμή 1 μόνο όταν  $0 \leq t < \tau$  και μηδέν παντού αλλού και ο δεύτερος όρος  $-[u(t - \tau) - u(t - 2\tau)]$  έχει τιμή  $-1$  όταν  $\tau \leq t < 2\tau$  και μηδέν παντού αλλού.

Λαμβάνοντας τώρα το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.5, ευρίσκουμε

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-\tau s}}{s} + \frac{e^{-2\tau s}}{s} = \frac{(1 - e^{-\tau s})^2}{s}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.7, και επειδή το τετραγωνικό κύμα είναι  $2\tau$ -περιοδική συνάρτηση, τελικά έχουμε

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-\tau s})^2}{s(1 - e^{-2\tau s})} = \frac{1 - e^{-\tau s}}{s(1 + e^{-\tau s})}, \quad s > 0.$$

△

## 7.4 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Στην παράγραφο αυτή συζητούμε την αντιστρεψιμότητα του μετασχηματισμού Laplace. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται στην εύρεση λύσεων Π.Α.Τ., όπως περιγράφεται αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ως εξής.

**Ορισμός 7.4.1** Έστω μία πραγματική συνάρτηση  $F = F(s) : (\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν υπάρχει μία συνάρτηση  $f = f(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , τότε η  $f$  ονομάζεται *αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace* της  $F$  και συμβολίζεται με  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ , οπότε έχουμε

$$\mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\} = F(s)$$

και

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t).$$

□

Μία αυστηρή απόδειξη της ύπαρξης του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace προϋποθέτει προχωρημένα αποτελέσματα της θεωρίας μιγαδικής ολοκλήρωσης, τα οποία θεωρούνται εκτός του σκοπού του βιβλίου.

Το ακόλουθο σχετικό θεώρημα δίνει πληροφορίες για την ύπαρξη του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace.

**Θεώρημα 7.4.1** Έστω  $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τοπικά τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες είναι εκθετικής τάξης, οπότε υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace  $F(s)$  και  $G(s)$  αυτών (Θεώρημα 7.3.1). Αν ισχύει  $F(s) = G(s)$  για κάθε  $s > c$  (για κάποιο  $c$ ) τότε  $f(t) = g(t)$  σε κάθε υποδιάστημα του  $[0, +\infty)$ , όπου οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς.

□

Όπως συνάγεται από το θεώρημα αυτό, δύο τοπικά τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις εκθετικής τάξης στο διάστημα  $[0, +\infty)$  με τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace είναι δυνατόν να διαφέρουν μόνο στα σημεία ασυνέχειας. Έτσι, στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace στις Δ.Ε., λόγω της συνέχειας των λύσεών τους, οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί θεωρούνται μοναδικοί.

Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις συνεχών συναρτήσεων, των οποίων οι μετασχηματισμοί Laplace καταχωρούνται σε πίνακες, λόγω της μοναδικότητας του αντιστρόφου μετασχηματισμού, από τους πίνακες αυτούς προκύπτουν και οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί.

Συνεχίζουμε τώρα με την καταγραφή των βασικών χρηστικών ιδιοτήτων του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace.

#### Πρόταση 7.4.1 (Ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace)

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

1.  $\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) \pm bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \pm b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$
2.  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t).$
3.  $\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right).$

□

Ο απευθείας υπολογισμός του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace απαιτεί σε ορισμένες περιπτώσεις προχωρημένες γνώσεις θεωρίας μιγαδικής ολοκλήρωσης (βλ. [1]). Στην πράξη, συνήθως, προσπαθούμε να φέρουμε τη συνάρτηση  $F(s)$ , της οποίας θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, σε κάποια κατάλληλη μορφή αθροίσματος στοιχειωδών συναρτήσεων (κυρίως με χρήση της *ανάλυσης σε απλά κλάσματα*, η οποία περιγράφεται στη συνέχεια μέσω παραδειγμάτων), των οποίων γνωρίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace. Κατά αυτή τη διαδικασία είναι, συνήθως, πολύ χρήσιμοι οι πίνακες μετασχηματισμού Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων.

**Παράδειγμα 7.4.1** Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 4}.$$

**Λύση.**

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 1 της Πρότασης 7.4.1 και τα γνωστά αποτελέσματα για το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων  $\cos(at)$  και  $\sin(at)$  (βλ. Παράδειγμα 7.3.5), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\ &= \cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t).\end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 7.4.2** Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}.$$

**Λύση.** Εφαρμόζουμε τη μέθοδο ανάλυσης σε απλά κλάσματα. Αρχικά, έχουμε ότι

$$\frac{1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)},$$

οπότε αναζητούμε  $A$  και  $B$  τέτοια ώστε

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$$

και άρα

$$1 = A(s-2) + B(s-1).$$

Για  $s = 1$  έχουμε  $1 = -A \Rightarrow A = -1$ , ενώ για  $s = 2$  έχουμε  $B = 1$ , και έτσι προκύπτει

$$F(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}.$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.4, τελικά ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 3s + 2}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= -e^t + e^{2t}.\end{aligned}$$

△

**Παρατήρηση 7.4.1** Στο προηγούμενο παράδειγμα, για να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών  $A$  και  $B$ , αντικαταστήσαμε στην έκφραση

$$(*) \quad 1 = A(s - 2) + B(s - 1)$$

τις τιμές  $s = 1$  και  $s = 2$ , οι οποίες ήταν ρίζες των παρανομαστών στην αμέσως προηγούμενη έκφραση

$$(**) \quad \frac{1}{(s - 1)(s - 2)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 2}.$$

Αυτό είναι, πράγματι, επιτρεπτό διότι αν δύο πολυώνυμα βαθμού  $n$  είναι ίσα για περισσότερες από  $n$  αντικαταστάσεις της μεταβλητής, τότε είναι ίσα για κάθε τιμή της μεταβλητής. Η  $(*)$  ισχύει για όλες τις τιμές της  $s$ , εκτός πιθανά από τις  $s = 1$  και  $s = 2$  για τις οποίες οι παρανομαστές της  $(**)$  μηδενίζονται. Επομένως, η  $(*)$  ισχύει για κάθε τιμή της  $s$  συμπεριλαμβανομένων και των  $s = 1$  και  $s = 2$ .

△

**Παράδειγμα 7.4.3** Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 6s + 9}.$$

**Λύση.** Επειδή

$$\frac{1}{s^2 - 6s + 9} = \frac{1}{(s - 3)^2},$$

χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.8, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 3)^2}\right\} = te^{3t}.$$

△

**Παράδειγμα 7.4.4** Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s}{(s + 1)^3}.$$

**Λύση.** Η δοσμένη συνάρτηση γράφεται ως εξής

$$\frac{s}{(s + 1)^3} = \frac{s + 1 - 1}{(s + 1)^3} = \frac{s + 1}{(s + 1)^3} - \frac{1}{(s + 1)^3} = \frac{1}{(s + 1)^2} - \frac{1}{(s + 1)^3}$$

και άρα, από το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.8, λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^3}\right\} = te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

△

**Παράδειγμα 7.4.5** Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2-2s+5}.$$

**Λύση.** Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{s+2}{s^2-2s+5} &= \frac{s+2}{(s-1)^2+4} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} + \frac{3}{(s-1)^2+2^2} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} + \frac{3}{2} \frac{2}{(s-1)^2+2^2}, \end{aligned}$$

και άρα, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.2, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} L^{-1}\{F(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\} \\ &= e^t \cos(2t) + \frac{3}{2}e^t \sin(2t). \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 7.4.6** Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)}.$$

**Λύση.** Η συνάρτηση  $F(s)$  αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2},$$

οπότε

$$2s-1 = A(s-1)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-1).$$

Για  $s=0$ , λαμβάνουμε  $-1 = 2A \Rightarrow A = -1/2$ . Για  $s=1$ , έχουμε  $1 = -B \Rightarrow B = -1$ .

Για  $s=2$ , έχουμε  $3 = 2C \Rightarrow C = 3/2$ .

Επομένως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= -\frac{1}{2} - e^t + \frac{3}{2}e^{2t}. \end{aligned}$$



△

**Παράδειγμα 7.4.7** Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

**Λύση.** Βρίσκουμε  $A$ ,  $B$  και  $C$  τέτοια ώστε

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2},$$

οπότε

$$1 = A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs.$$

Για  $s = 0$ , έχουμε  $A = 1$ . Για  $s = -1$ , έχουμε  $1 = -C \Rightarrow C = -1$  και για  $s = 1$ , λαμβάνουμε  $B = -1$ .

Άρα, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)^2} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} \\ &= 1 - e^{-t} - te^{-t}. \end{aligned}$$

△

## 7.5 Λύση προβλημάτων αρχικών τιμών με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace είναι η χρησιμοποίησή του για την επίλυση Π.Α.Τ για Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Η διαδικασία επίλυσης συνοψίζεται ως εξής

1. λαμβάνουμε αρχικά το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της Δ.Ε. (οπότε το πρόβλημα ανάγεται σε μία αλγεβρική εξίσωση ως προς  $Y(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\}$ ),
2. επιλύουμε την αλγεβρική εξίσωση ως προς  $Y(s)$ ,
3. λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό και υπολογίζουμε την άγνωστη συνάρτηση ως  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ .

Τονίζουμε ότι το πρώτο βήμα της παραπάνω διαδικασίας είναι κάτι περισσότερο από μία απλή μετατροπή της Δ.Ε. σε αλγεβρική εξίσωση διότι οι αρχικές συνθήκες του Π.Α.Τ. ενσωματώνονται στη μετασχηματισμένη αλγεβρική εξίσωση και έτσι δεν εμφανίζονται αυθαίρετες σταθερές στη λύση.

Ακολουθούν ενδεικτικά παραδείγματα για την εφαρμογή της διαδικασίας επίλυσης σε συγκεκριμένα Π.Α.Τ.

**Παράδειγμα 7.5.1** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$2y'(t) - y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 1.$$

**Λύση.** Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$2\mathcal{L}\{y'(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\},$$

οπότε από τον τύπο (7.3.5) και το Παράδειγμα 7.3.4, ευρίσκουμε

$$2sY(s) - 2y(0) - Y(s) = \frac{1}{s-2},$$

και μετά και την ενσωμάτωση και της αρχικής συνθήκης

$$(2s-1)Y(s) = 2 + \frac{1}{s-2}$$

ή

$$Y(s) = \frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)}.$$

Η  $Y(s)$  αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)} = \frac{A}{2s-1} + \frac{B}{s-2},$$

οπότε

$$2s-3 = A(s-2) + B(2s-1).$$

Για  $s = \frac{1}{2}$ , έχουμε  $-2 = -\frac{3}{2}A \Rightarrow A = \frac{4}{3}$  και για  $s = 2$ , έχουμε  $1 = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$ .

Επομένως, τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)} \right\} = \frac{4}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2s-1} \right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} \\ &= \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} \\ &= \frac{2}{3} e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{3} e^{2t}. \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 7.5.2** Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

**Λύση.** Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace στη Δ.Ε., ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 5\mathcal{L}\{y'(t)\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\},$$

από όπου με τη βοήθεια των τύπων (7.3.5) και (7.3.6) και του Παραδείγματος 7.3.4, λαμβάνουμε

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

και μετά από την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) = s + 1 - 5 + \frac{1}{s-1}$$

ή

$$Y(s) = \frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Στη συνέχεια, αναλύουμε την  $Y(s)$  σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3},$$

οπότε

$$s^2 - 5s + 5 = A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2).$$

Για  $s = 1$ , έχουμε  $1 = A(-1)(-2) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ . Για  $s = 2$ , έχουμε  $-1 = -B \Rightarrow B = 1$ . Για  $s = 3$ , έχουμε  $-1 = 2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$ .

Έτσι, τελικά λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3} \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^t + e^{2t} - \frac{1}{2} e^{3t}. \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 7.5.3** Ένα σώμα μάζας  $m$  κρέμεται από (ιδανικό) ελατήριο, του οποίου το άνω άκρο είναι πακτωμένο. Το ελατήριο υποτίθεται ότι έχει μηδενική μάζα και η δύναμη επαναφοράς του είναι ανάλογη της επιμήκυνσης. Το σώμα μετακινείται κατακορύφως προς τα κάτω κατά μία αρχική απόσταση  $y_0$  και αφήνεται ελεύθερο με αρχική ταχύτητα  $v_0$ .

1. Περιγράψτε την απομάκρυνση  $y(t)$  του σώματος από τη θέση ισορροπίας του με ένα Π.Α.Τ. υπό την υπόθεση ότι στην κίνηση υπάρχει δύναμη τριβής λόγω του αέρα, η οποία είναι ανάλογη της στιγμιαίας ταχύτητας  $v(t)$ .
2. Λύστε το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

**Λύση.** Έστω ότι η αρχή  $O$  είναι το σημείο ισορροπίας και  $y > 0$  ( $y < 0$ ) δηλώνει μετατόπιση του σώματος προς τα κάτω (άνω). Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα είναι η δύναμη επαναφοράς  $F$  του ελατηρίου, η οποία από το νόμο Hooke δίνεται από

$$F(t) = -ky(t),$$

όπου  $k > 0$  η σταθερά του ελατηρίου, και η αντίσταση τριβής  $T$  λόγω του αέρα, η οποία δίνεται από

$$T(t) = -bv(t) = -by'(t).$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, το άθροισμα των δυνάμεων αυτών είναι ίσο με το γινόμενο της μάζας του επί την επιτάχυνση  $a(t)$ , επομένως ισχύει

$$F(t) + T(t) = ma(t),$$

δηλαδή η απομάκρυνση  $y(t)$  πληρεί τη Δ.Ε.

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,$$

η οποία είναι γνωστή ως θεμελιώδης εξίσωση του αποσβεσμένου αρμονικού ταλαντωτή (*fundamental equation of the damped harmonic oscillator*).

Άρα, το Π.Α.Τ. το οποίο περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0. \quad (7.5.1)$$

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στη Δ.Ε., και έχουμε

$$m\mathcal{L}\{y''(t)\} + b\mathcal{L}\{y'(t)\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = 0,$$

από όπου με τη βοήθεια των τύπων (7.3.5) και (7.3.6), λαμβάνουμε

$$m(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + b(sY(s) - y(0)) + kY(s) = 0$$

και μετά από την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$ms^2Y(s) - msy_0 - mv_0 + bsY(s) - by_0 + kY(s) = 0$$

ή

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \frac{b}{m}y_0 + v_0}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}},$$

η οποία γράφεται ως

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s + \beta)^2 + \tilde{\gamma}},$$

όπου  $\alpha = \frac{b}{m}y_0 + v_0$ ,  $\beta = \frac{b}{2m}$  και  $\tilde{\gamma} = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$ .

Ο τρόπος αντιστροφής της  $Y(s)$  και τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης απομάκρυνσης  $y(t)$ , η οποία περιγράφει την κίνηση του σώματος, εξαρτώνται από το πρόσημο του συντελεστή  $\tilde{\gamma}$ , για το οποίο διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις.

1.  $\tilde{\gamma} = \gamma^2 > 0$

Η  $Y(s)$  έχει, τότε, τη μορφή

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s + \beta)^2 + \gamma^2},$$

η οποία γράφεται ως εξής

$$Y(s) = \frac{y_0(s + \beta) + \alpha - \beta y_0}{(s + \beta)^2 + \gamma^2}$$

ή ισοδύναμα

$$Y(s) = y_0 \frac{s + \beta}{(s + \beta)^2 + \gamma^2} + \frac{\alpha - \beta y_0}{(s + \beta)^2 + \gamma^2}.$$

Λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και με τη βοήθεια της Πρότασης 7.3.2 και των αποτελεσμάτων του Παραδείγματος (7.3.5), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \beta}{(s + \beta)^2 + \gamma^2} \right\} + \frac{\alpha - \beta y_0}{\gamma} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\gamma}{(s + \beta)^2 + \gamma^2} \right\} \\ &= y_0 e^{-\beta t} \cos(\gamma t) + \frac{\alpha - \beta y_0}{\gamma} e^{-\beta t} \sin(\gamma t) \\ &= e^{-\beta t} \frac{y_0 \gamma \cos(\gamma t) + (\alpha - \beta y_0) \sin(\gamma t)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Επομένως, η λύση ταλαντώνεται διότι περιέχει ημιτονικούς και συνημιτονικούς όρους. Το πλάτος, όμως, των ταλαντώσεων φθίνει συνεχώς λόγω του παράγοντα  $e^{-\beta t} = e^{-\frac{b}{2m}t}$ . Το σύστημα, σε αυτή την περίπτωση, καλείται *υποαποσβεννύμενο* (*underdamped*).

$$2. \tilde{\gamma} = -\gamma^2 < 0$$

Η  $Y(s)$  έχει, τότε, τη μορφή

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s + \beta)^2 - \gamma^2},$$

και, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με την περίπτωση 1, λαμβάνουμε

$$y(t) = e^{-\beta t} \frac{y_0 \gamma \cosh(\gamma t) + (\alpha - \beta y_0) \sinh(\gamma t)}{\gamma}.$$

Τώρα, η λύση δεν ταλαντώνεται διότι περιέχει μόνο εκθετικούς όρους. Το σύστημα σε αυτή την περίπτωση καλείται *υπεραποσβευνύμενο (overdamped)*. Από φυσικής πλευράς, αυτό σημαίνει ότι η δύναμη τριβής είναι μεγάλη συγκρινόμενη με τη δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου και έτσι η μάζα μετακινείται αργά προς τη θέση ισορροπίας της.

$$3. \tilde{\gamma} = 0$$

Η  $Y(s)$  έχει τη μορφή

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s + \beta)^2},$$

η οποία γράφεται ως εξής

$$Y(s) = \frac{y_0}{s + \beta} + \frac{\alpha - \beta y_0}{(s + \beta)^2}.$$

Λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων των Παραδειγμάτων (7.3.5) και (7.3.8), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{y_0}{s + \beta} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha - \beta y_0}{(s + \beta)^2} \right\} \\ &= y_0 e^{-\beta t} + (\alpha - \beta y_0) t e^{-\beta t} \\ &= e^{-\beta t} [y_0 + (\alpha - \beta y_0) t]. \end{aligned}$$

Η λύση και εδώ δεν ταλαντώνεται και το σύστημα τώρα καλείται *κρίσιμα αποσβευνύμενο (critically damped)*. Το σώμα έρχεται στη θέση ισορροπίας του στον ελάχιστο χρόνο και δεν περνάει πάνω από τη θέση αυτή.

△

**Παρατήρηση 7.5.1** Όπως σε κάθε ταλαντούμενο σύστημα, οι ταλαντώσεις δεν μπορούν να διατηρηθούν για πάντα λόγω της βαθμιαία αποσβεννύμενης μηχανικής ενέργειας του συστήματος, εκτός αν το σύστημα τροφοδοτηθεί με ενέργεια εξωτερικά. Για παράδειγμα, αν εφαρμοστεί μία εξωτερική δύναμη  $f(t)$ , τότε το Π.Α.Τ. (7.5.2) παίρνει τη μορφή

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0, \quad (7.5.2)$$

και οι λύσεις του καλούνται *εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (forced oscillations)*.

△

**Παρατήρηση 7.5.2** Το ηλεκτρικό ανάλογο του μηχανικού συστήματος του Παραδείγματος 7.5.3 είναι το RLC-κύκλωμα, το οποίο παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 1.2, και μοντελοποιείται από το ακόλουθο Π.Α.Τ. με άγνωστη τη συνάρτηση φορτίου  $q(t)$  στους οπλισμούς του πυκνωτή

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t), \quad q(0) = q_0, \quad q'(0) = i_0. \quad (7.5.3)$$

Παρατηρούμε ότι η Δ.Ε. του Π.Α.Τ. (7.5.3) ανάγεται σε Δ.Ε. της μορφής (7.5.2) για  $L = m$ ,  $R = b$  και  $C = \frac{1}{k}$ , και έτσι η μελέτη του ηλεκτρικού κυκλώματος είναι ανάλογη με εκείνη του μηχανικού συστήματος.

△

**Παράδειγμα 7.5.4** Ένα πηνίο με αυτεπαγωγή  $L$  και ένας πυκνωτής χωρητικότητας  $C$  συνδέονται σε σειρά με μία πηγή τάσης

$$v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ v_0, & t \geq \tau \end{cases}. \quad (7.5.4)$$

Βρείτε τη συνάρτηση φορτίου  $q(t)$  αν  $q(0) = 0$  και  $i(0) = 0$ .

**Λύση.** Η τάση  $v$  γράφεται με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης

$$v(t) = v_0 u(t - \tau).$$

Έτσι, με βάση τα αναφερόμενα για τη μοντελοποίηση του προβλήματος στην Παράγραφο 1.2 και λαμβάνοντας υπόψη ότι εδώ η αντίσταση των στοιχείων του κυκλώματος είναι ίση με μηδέν, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση φορτίου  $q(t)$  είναι λύση του Π.Α.Τ.

$$Lq''(t) + \frac{1}{C}q(t) = v_0 u(t - \tau), \quad q(0) = 0, \quad q'(0) = 0. \quad (7.5.5)$$

Λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace της Δ.Ε. και με τη βοήθεια των τύπων (7.3.6) και (7.3.3) και χρησιμοποιώντας και τις αρχικές συνθήκες, έχουμε

$$Ls^2Q(s) + \frac{1}{C}Q(s) = v_0 \frac{e^{-\tau s}}{s},$$

από την οποία προκύπτει

$$Q(s) = \frac{v_0}{L} \frac{e^{-\tau s}}{s \left( s^2 + \frac{1}{LC} \right)},$$

και μετά από ανάλυση της τελευταίας σε απλά κλάσματα παίρνουμε

$$Q(s) = v_0 C \left( \frac{e^{-\tau s}}{s} - \frac{se^{-\tau s}}{s^2 + \frac{1}{LC}} \right).$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.3.3) και το αποτέλεσμα του Παραδείγματος (7.3.5), ευρίσκουμε

$$q(t) = v_0 C u(t - \tau) \left[ 1 - \cos \left( \frac{t - \tau}{\sqrt{LC}} \right) \right] \\ = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ v_0 C \left[ 1 - \cos \left( \frac{t - \tau}{\sqrt{LC}} \right) \right], & t \geq \tau \end{cases}.$$

△

**Παρατήρηση 7.5.3** Από το τελευταίο παράδειγμα φαίνεται καθαρά η πραγματική δύναμη του μετασχηματισμού Laplace: το ότι η συνάρτηση δευτέρου μέλους  $v(t)$  δεν είναι συνεχής θα ήταν πρόβλημα για την επίλυση του Π.Α.Τ. με τις μεθόδους που έχουν αναλυθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Με τη γραφή όμως των συναρτήσεων μέσω της βηματικής συνάρτησης και τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace είναι εφικτή η επίλυση Π.Α.Τ. αυτής της μορφής.

△

**Παράδειγμα 7.5.5** Βρείτε τη λύση του συστήματος των Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} y'(t) + x(t) &= t \\ x'(t) - y(t) &= 1 \end{aligned},$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες  $x(0) = 1$  και  $y(0) = 1$ .



**Λύση.**

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στις Δ.Ε. και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{t\} \\ \mathcal{L}\{x'(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{1\}\end{aligned}$$

από όπου χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.3.5) και τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων 7.2.1 και 7.2.2, έχουμε

$$\begin{aligned}sY(s) - y(0) + X(s) &= \frac{1}{s^2} \\ sX(s) - x(0) - Y(s) &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

και με ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$\begin{aligned}sY(s) + X(s) &= \frac{1}{s^2} + 1 \\ sX(s) - Y(s) &= \frac{1}{s} + 1\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{s+1}{s^2+1} \\ Y(s) &= \frac{s-1}{s^2+1}\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+1}\right\} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+1}\right\}\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\end{aligned}$$

από την οποία, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων (7.2.2) και (7.3.5), τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned}x(t) &= t + \cos t + \sin t \\ y(t) &= \cos t - \sin t\end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 7.5.6** Βρείτε τη λύση του συστήματος των Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} y''(t) - 4y(t) + x(t) &= e^{-t} \\ x''(t) - x(t) + y(t) &= e^{2t} \end{aligned} \quad ,$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $x'(0) = -1$  και  $y'(0) = 2$ .

**Λύση.**

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στις Δ.Ε. και έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\} - 4\mathcal{L}\{y(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{x''(t)\} - \mathcal{L}\{x(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \end{aligned} \quad ,$$

από όπου, χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.3.6) και το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.4, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4Y(s) + X(s) &= \frac{1}{s+1} \\ s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) - X(s) + Y(s) &= \frac{1}{s-2} \end{aligned}$$

και με ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$\begin{aligned} (s^2 - 4)Y(s) + X(s) &= \frac{1}{s+1} + s + 2 \\ (s^2 - 1)X(s) + Y(s) &= \frac{1}{s-2} + s - 1 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} [(s^2 - 1)(s^2 - 4) - 1]Y(s) &= \frac{(s^2 - 1)(s^2 - 4) - 1}{s-2} \\ (s^2 - 1)X(s) &= \frac{1}{s-2} + s - 1 - Y(s) \end{aligned} \quad ,$$

οπότε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ X(s) &= \frac{1}{s+1} \end{aligned} \quad .$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \end{aligned} \quad ,$$

από την οποία, με τη βοήθεια του αποτελέσματος του Παραδείγματος (7.3.4), τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2t} \\ x(t) &= e^{-t} \end{aligned} \quad .$$

△

## 7.6 Συνέλιξη και εφαρμογές

**Ορισμός 7.6.1** Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ονομάζουμε συνέλιξη  $f * g$  των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  τη συνάρτηση που ορίζεται από

$$(f * g)(t) \equiv \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

□

Προφανώς, ισχύει ότι

$$(g * f)(t) \equiv \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = (f * g)(t).$$

Για το μετασχηματισμό Laplace της συνέλιξης δύο συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο βασικό

**Θεώρημα 7.6.1** Έστω συναρτήσεις  $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με μετασχηματισμούς Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $s > \alpha_1$  και  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ ,  $s > \alpha_2$ , αντιστοίχως. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της  $f * g$  και ισχύει

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s), \quad s > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

**Απόδειξη.** Από τον ορισμό (7.2.2) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε

$$F(s)G(s) = F(s) \int_0^{+\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} g(\tau) F(s) e^{-s\tau} d\tau,$$

από την οποία χρησιμοποιώντας την (7.3.3), λαμβάνουμε

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} g(\tau) \left[ \int_0^{+\infty} u(t - \tau) f(t - \tau) e^{-st} dt \right] d\tau.$$

Επειδή οι συνάρτησεις  $f$  και  $g$  είναι τοπικά τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης, μπορούμε στην τελευταία να εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, οπότε προκύπτει

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} u(t - \tau) f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt,$$

και επειδή η συνάρτηση  $u(t - \tau) = u(-(\tau - t))$  είναι μηδέν για  $\tau > t$ , τελικά ευρίσκουμε

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} (f * g)(t) e^{-st} dt.$$

□

Άμεσες συνέπειες του τελευταίου θεωρήματος είναι οι εξής

**Πόρισμα 7.6.1**

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t), \quad t \geq 0.$$

□

**Πόρισμα 7.6.2**

$$\mathcal{L}\{(f * 1)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

□

**Παράδειγμα 7.6.1** Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}.$$

**Λύση.** Θεωρούμε την παρακάτω γραφή της δοθείσας συνάρτησης σε μορφή γινομένου

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)} = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \frac{1}{s},$$

για την οποία έχουμε ότι

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2} \sin(2t)$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1.$$

Επομένως, από το Πόρισμα 7.6.1, λαμβάνουμε

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f * g)(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2\tau) d\tau = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t)).$$

△

**Παράδειγμα 7.6.2** Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}, \quad a \neq 0.$$

**Λύση.** Η συνάρτηση  $H(s)$  γράφεται σε μορφή γινομένου

$$H(s) = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2 + a^2} \frac{1}{s^2 + a^2},$$

για την οποία έχουμε ότι  $f(t) = g(t)$  με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \frac{1}{a} \sin(at).$$

Έτσι, από το Πόρισμα 7.6.1, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f * f)(t) \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^t \sin(a\tau) \sin(a(t - \tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2a^3} [\sin(at) - at \cos(at)]. \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 7.6.3** Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, \quad a \neq \pm b, \quad b \neq 0.$$

**Λύση.** Θεωρούμε την παρακάτω γραφή της δοθείσας συνάρτησης σε μορφή γινομένου

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2 + b^2} \frac{s}{s^2 + a^2},$$

για την οποία έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + b^2}\right\} = \frac{1}{b} \sin(bt) \\ g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2}\right\} = \cos(at). \end{aligned}$$

Έτσι, από το Πόρισμα 7.6.1, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f * g)(t) = \frac{1}{b} \int_0^t \sin(b\tau) \cos(a(t - \tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2b} \int_0^t [\sin(at + (b - a)\tau) + \sin((b + a)\tau - at)] d\tau \\ &= \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

△

Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης συναρτήσεων βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων συνεκτικού τύπου, οι οποίες είναι εξισώσεις της μορφής

$$y(t) = f(t) + \int_0^t k(t - \tau)y(\tau)d\tau, \quad (7.6.1)$$

όπου  $y$  είναι η άγνωστη συνάρτηση και  $f, k$  είναι γνωστές συναρτήσεις. Τέτοιες ολοκληρωτικές εξισώσεις μετασχηματίζονται σε αλγεβρικές χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.6.1, όπως φαίνεται στο ακόλουθο

**Παράδειγμα 7.6.4** Λύστε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = 4t - 3 \int_0^t \sin(t - \tau)y(\tau) d\tau.$$

**Λύση.** Η ολοκληρωτική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα, με βάση τον ορισμό της συνέλιξης συναρτήσεων, ως εξής

$$y(t) = 4t - 3 (y(t) * \sin(t)).$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.6.1, ευρίσκουμε

$$Y(s) = \frac{4}{s^2} - 3Y(s)\frac{1}{s^2 + 1},$$

οπότε

$$Y(s) = \frac{4(s^2 + 1)}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2 + 4},$$

και έτσι, τελικά, με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνουμε

$$y(t) = t + \frac{3}{2} \sin(2t).$$

△

Επίσης, ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν παραγώγους και ολοκληρώματα της άγνωστης συνάρτησης, μπορούν να λυθούν με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης και της παραγωγίσης συναρτήσεων, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

**Παράδειγμα 7.6.5** Λύστε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{Q_0}{C} = E_0 e^{-at},$$

η οποία προκύπτει όταν τάση  $E_0 e^{-at}$  εφαρμοστεί στα άκρα ενός πυκνωτή  $C$  και ενός πηνίου  $L$  που είναι συνδεδεμένα σε σειρά, έχοντας υποθέσει ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$  δεν υπάρχει ρεύμα ενώ ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο  $Q_0$ . Η λύση  $i(t)$  της εξίσωσης δίνει την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

**Λύση.** Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 7.6.2, ευρίσκουμε

$$LsI(s) - Li(0) + \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{Q_0}{Cs} = \frac{E_0}{s+a},$$

από όπου ενσωματώνοντας την αρχική συνθήκη  $i(0) = 0$  και λύνοντας ως προς  $I(s)$ , προκύπτει

$$I(s) = \frac{E_0}{L} \frac{s}{(s+a)(s^2 + \frac{1}{LC})} - \frac{Q_0}{LC} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

ή

$$I(s) = \frac{E_0}{L(a^2 + \frac{1}{LC})} \left[ -\frac{a}{s+a} + \frac{as}{s^2 + \frac{1}{LC}} + \frac{1}{LC} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{LC}} \right] - \frac{Q_0}{LC} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{LC}}.$$

Τελικά, με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνουμε

$$i(t) = \frac{E_0}{L(a^2 + \frac{1}{LC})} \left[ -ae^{-at} + a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right] - \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

△

**Παράδειγμα 7.6.6** Λύστε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t),$$

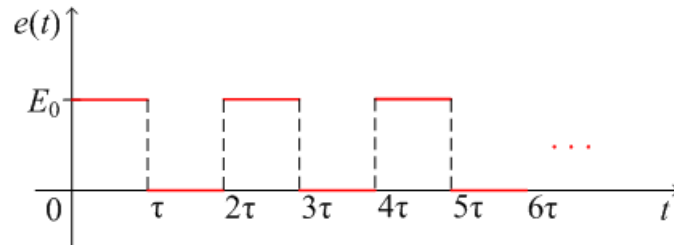
όπου  $e(t)$  το τετραγωνικό κύμα που φαίνεται στο Σχήμα 7.9.

**Λύση.** Το τετραγωνικό κύμα γράφεται ως

$$e(t) = E_0 [u(t) - u(t - \tau) + u(t - 2\tau) - \dots].$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 7.6.2, καθώς και την Πρόταση 7.3.5, λαμβάνουμε

$$RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = E_0 \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-\tau s}}{s} + \frac{e^{-2\tau s}}{s} - \dots \right),$$



Σχήμα 7.9: Γραφική παράσταση του τετραγωνικού κύματος  $e(t)$  του Παραδείγματος 7.6.6.

από όπου λύνοντας ως προς  $I(s)$ , προκύπτει

$$I(s) = \frac{E_0/R}{s + \frac{1}{RC}} (1 - e^{-\tau s} + e^{-2\tau s} - \dots),$$

οπότε, με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, ευρίσκουμε

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \left[ e^{-\frac{t}{RC}} - u(t - \tau)e^{-\frac{t-\tau}{RC}} + u(t - 2\tau)e^{-\frac{t-2\tau}{RC}} - \dots \right].$$

△



## 7.7 Πίνακες μετασχηματισμών Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$u(t - \tau)f(t - \tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$
$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t$	$\frac{1}{s^2}, \quad s > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$e^{bt} \sin(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}, \quad s >  b $
$e^{bt} \cos(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}, \quad s >  b $
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0$
$t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0$
$u(t-\tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}, \quad s > 0$

## 7.8 Ασκήσεις

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

Άσκηση 7.8.1  $f(t) = t^2 - t + 2$

Άσκηση 7.8.2  $f(t) = te^{3t} \cos t$

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

Άσκηση 7.8.3  $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$

Άσκηση 7.8.4  $F(s) = \frac{s-3}{s^2+5s+6}$

Άσκηση 7.8.5  $F(s) = \frac{1}{s^2-2s+5}$

Λύστε τα παρακάτω Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace

Άσκηση 7.8.6  $y' + y = \cos t, y(0) = 3$

Άσκηση 7.8.7  $y' + 3y = e^t, y(0) = -1$

Άσκηση 7.8.8  $y'' - 4y' + 5y = 2t, y(0) = 0, y'(0) = 1$

Άσκηση 7.8.9  $y'' + y = t^2 + t, y(0) = 0, y'(0) = -1$

Άσκηση 7.8.10  $y'' + 2y' + y = (t^2 - 1)e^t, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Άσκηση 7.8.11  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^t, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$

Άσκηση 7.8.12  $y'' - 2y' + 5y = t - \cos t + e^t, y(0) = 0, y'(0) = 0$

Άσκηση 7.8.13  $y''' - y'' + y' - 1 = e^t + 2\cos t + t - 1, y'(0) = 1, y''(0) = -2$

Λύστε τα συστήματα Δ.Ε. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace

**Άσκηση 7.8.14**

$$y' + 2x = e^{-t}$$

$$x' - 2y = e^t$$

με  $x(0) = 0, y(0) = 0$ .

**Άσκηση 7.8.15**

$$2y' + x' - 3x = -e^{-2t}$$

$$2x' - 4y - 3x = 3e^{-t} - 3e^{-2t}$$

με  $x(0) = 3, y(0) = 0$ .

**Άσκηση 7.8.16**

$$2x - 3y' = 0$$

$$x' - 2y = t$$

με  $x(0) = 1, y(0) = 0$ .

**Άσκηση 7.8.17**

$$x' - y = 0$$

$$x + y' + z = 1$$

$$x - y + z' = 2 \sin t$$

με  $x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 0$ .

**Άσκηση 7.8.18** Λύστε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = 1 + \int_0^t \cos(t - \tau)y(\tau) d\tau.$$

# Βιβλιογραφία

- [1] P. K. Kuhfittig, *Introduction to the Laplace Transform*, Plenum Press, New York, 1978.
- [2] J. Lebl, *Differential Equations for Engineers*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2014.
- [3] B. E. Shapiro, *Lecture Notes in Differential Equations*, California State University, Northridge, 2011.
- [4] Α. Ν. Τσίτσας, *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός, 2<sup>η</sup> Έκδοση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2003.

## Μέρος II

# Μιγαδικές συναρτήσεις

## Κεφάλαιο 8

# Μιγαδικοί αριθμοί

Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών ακόμη και πολύ απλές εξισώσεις, όπως π.χ. είναι η  $x^2 + 1 = 0$ , δεν έχουν πραγματικές ρίζες. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ο  $a \in \mathbb{R}$  είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής. Τότε, θα ισχύει  $a^2 + 1 = 0$ , η οποία συνεπάγεται  $a^2 = -1 < 0$ . Όμως, το  $a^2 \geq 0$ , αντίφαση. Η ατέλεια αυτή των πραγματικών αριθμών αντιμετωπίζεται με μία επέκταση του συνόλου  $\mathbb{R}$  σε ένα νέο σύνολο, στο οποίο διατηρούνται όσο το δυνατόν περισσότερες ιδιότητες του  $\mathbb{R}$  και συγχρόνως έχει λύση κάθε πολυωνυμική εξίσωση. Η επιθυμητή επέκταση επιτυγχάνεται με τη θεώρηση του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, το οποίο επίσης ταυτίζεται γεωμετρικά με τα σημεία ενός επιπέδου. Τα στοιχεία του νέου συνόλου είναι οι λεγόμενοι μιγαδικοί αριθμοί, οι οποίοι χρησιμοποιούνται πολύ στη λύση προβλημάτων ταλαντώσεων δυναμικών και ηλεκτρικών συστημάτων καθώς επίσης και διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες προκύπτουν από μοντελοποιήσεις προβλημάτων διαφόρων κλάδων εφαρμοσμένων επιστημών. Εξάλλου, τα αποτελέσματα της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων εφαρμόζονται στη λύση προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας, μηχανικής των ρευστών, ελαστικότητας, υδροδυναμικής και κβαντικής μηχανικής.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται η έννοια του μιγαδικού αριθμού, περιγράφεται η γεωμετρική παράστασή του και εξετάζονται οι αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών, η οποία χρησιμοποιείται εδώ κυρίως στην εύρεση των  $n$ -οστών ριζών μιγαδικών αριθμών και την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων με μιγαδικούς συντελεστές.

### 8.1 Ορισμός και αλγεβρικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών

Στην παράγραφο αυτή ορίζεται η έννοια των μιγαδικών αριθμών και εξετάζονται οι αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητές τους, όπου δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάλυση της έννοιας του μέτρου.

**Ορισμός 8.1.1** Το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

με τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

ονομάζεται το σύνολο (ή το σώμα) των μιγαδικών αριθμών και συμβολίζεται με  $\mathbb{C}$ . Τα στοιχεία  $z = (x, y)$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζονται μιγαδικοί αριθμοί.

□

Από τον ορισμό των μιγαδικών αριθμών ως διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, έχουμε ότι δύο μιγαδικοί αριθμοί  $z = (x, y)$  και  $w = (u, v)$  είναι ίσοι τότε και μόνο τότε όταν  $x = u$  και  $y = v$ .

Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών, οι οποίες συνάγονται από τις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, καταγράφονται στην ακόλουθη

**Πρόταση 8.1.1** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  και  $z_3$  ισχύουν

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1z_2 = z_2z_1,$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3,$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

□

Σημειώνουμε ότι το μηδενικό στοιχείο είναι το  $(0, 0)$ , το μοναδιαίο το  $(1, 0)$ , το αντίθετο του  $z = (x, y)$  είναι το  $-z = (-x, -y)$  και το αντίστροφο του  $z = (x, y) \neq (0, 0)$  το  $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ . Εξάλλου, η διαφορά  $w - z$  των μιγαδικών αριθμών  $z = (x, y)$  και  $w = (u, v)$  είναι

$$w - z = w + (-z) = (u, v) + (-x, -y) = (u - x, v - y),$$

ενώ το πηλίκο  $\frac{w}{z}$  των μιγαδικών αριθμών  $z = (x, y) \neq (0, 0)$  και  $w$  είναι

$$\frac{w}{z} = wz^{-1} = \left(\frac{ux + vy}{x^2 + y^2}, \frac{vx - uy}{x^2 + y^2}\right).$$



Οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής  $(x, 0)$  συμπεριφέρονται ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο  $\mathbb{C}$  ακριβώς όπως και οι πραγματικοί αριθμοί, αφού ισχύουν

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \quad \text{και} \quad (x, 0)(y, 0) = (xy, 0).$$

Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί εμφυτεύονται στο  $\mathbb{C}$  ταυτιζόμενοι με εκείνους τους μιγαδικούς αριθμούς με δεύτερη συντεταγμένη το μηδέν και έτσι ταυτίζουμε κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  με τον μιγαδικό αριθμό  $(x, 0)$  και γράφουμε  $x = (x, 0)$ .

Ο μιγαδικός αριθμός  $i := (0, 1)$ , για τον οποίο ισχύει

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = -1,$$

αναφέρεται ως η *φανταστική μονάδα* του  $\mathbb{C}$ . Με τη βοήθεια της φανταστικής μονάδας, κάθε μιγαδικός αριθμός  $z = (x, y)$  γράφεται

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Η έκφραση  $z = x + iy$  του μιγαδικού αριθμού  $(x, y)$ , η οποία απλουστεύει πολύ τους υπολογισμούς, αναφέρεται συνήθως και ως *καρτεσιανή μορφή* του μιγαδικού αριθμού  $z$ .

Έστω  $z = x + iy$  ένας μιγαδικός αριθμός. Ο πραγματικός αριθμός  $x$  ονομάζεται το *πραγματικό μέρος* του  $z$  και συμβολίζεται με  $\operatorname{Re}(z)$  και ο  $y$  ονομάζεται το *φανταστικό μέρος* του  $z$  και συμβολίζεται με  $\operatorname{Im}(z)$ , δηλαδή έχουμε  $\operatorname{Re}(z) = x$  και  $\operatorname{Im}(z) = y$ .

Ως εφαρμογή, επεξεργαζόμαστε το ακόλουθο

**Παράδειγμα 8.1.1** Αποδείξτε ότι, για κάθε  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , η εξίσωση  $w^2 = z$  έχει τις ρίζες

$$\begin{aligned} w &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} + i \frac{y}{|y|} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right), \quad y \neq 0 \\ w &= \pm \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x \geq 0 \\ w &= \pm i \sqrt{-x}, \quad y = 0, \quad x \leq 0. \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

Οι δύο μιγαδικοί αριθμοί  $w$ , οι οποίοι ορίζονται από την (8.1.1), αναφέρονται ως οι δύο τετραγωνικές ρίζες του  $z$ .

**Λύση.** Αναζητούμε ένα μιγαδικό αριθμό  $w = u + iv$  έτσι ώστε να ισχύει

$$(u + iv)^2 = x + iy,$$

από την οποία εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη προκύπτουν

$$(1) \quad u^2 - v^2 = x$$

και

$$(2) \quad 2uv = y.$$

Για  $y \neq 0$ , οπότε  $u \neq 0$ , λύνοντας την (2), ευρίσκουμε

$$(3) \quad v = \frac{y}{2u}$$

και αντικαθιστώντας την τιμή του  $v$  στην (1), λαμβάνουμε

$$u^2 - \left(\frac{y}{2u}\right)^2 = x,$$

η οποία επίσης γράφεται

$$4u^4 - 4xu^2 - y^2 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς  $u^2$  και έχει ως (θετική) ρίζα

$$u^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2},$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$u = \pm \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}.$$

Από την (3) ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} v &= \pm \frac{y}{\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}} \\ &= \pm \frac{y}{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{y}{|y|} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}, \end{aligned}$$

και έτσι προκύπτει η (8.1.1).

△

Περαιτέρω, ενδιαφερόμαστε για την επίλυση της γενικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού

$$aw^2 + bw + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}. \quad (8.1.2)$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι για  $a \neq 0$ , το πρώτο μέλος της εξίσωσης (8.1.2) γράφεται

$$\left(w + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

η οποία έχει τις ρίζες

$$w = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

όπου η  $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$  υπολογίζεται από τον τύπο (8.1.1), δηλαδή πιο συγκεκριμένα, αν  $b^2 - 4ac = d + ie$ , τότε

$$w = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2\sqrt{2a}} \left( \sqrt{\sqrt{d^2 + e^2} + d} + i \frac{e}{|e|} \sqrt{\sqrt{d^2 + e^2} - d} \right), \quad e \neq 0. \quad (8.1.3)$$

**Παράδειγμα 8.1.2** Λύστε την εξίσωση

$$w^2 - 8(1 - i)w + 63 - 16i = 0.$$

**Λύση.** Η εξίσωση είναι της γενικής μορφής (8.1.2) με  $a = 1$ ,  $b = -8(1 - i)$  και  $c = 63 - 16i$ . Επομένως, ισχύει

$$b^2 - 4ac = -252 - 64i$$

και έτσι έχουμε  $d = -252$  και  $e = -64$ . Άρα, από την (8.1.3), οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από

$$w = 4(1 - i) \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \sqrt{8} - i\sqrt{512} \right) = 4(1 - i) \pm (1 - 8i),$$

δηλαδή

$$w_1 = 5 - 12i \quad \text{και} \quad w_2 = 3 + 4i.$$

△

Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών ορίζεται μία έννοια ολικής διάταξης, η οποία εμπλουτίζει το σύνολο  $\mathbb{R}$  με σημαντικές αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες. Όμως, στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών δεν είναι δυνατόν να οριστεί μία ολική (γραμμική) διάταξη συμβιβαστή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μιγαδικών, δηλαδή μία σχέση  $\geq$  στο  $\mathbb{C}$  με τις ιδιότητες

- (1)  $z \geq z$
- (2)  $z \geq w$  και  $w \geq z \Rightarrow z = w$
- (3)  $\forall z, w \in \mathbb{C}$  ισχύει  $z \geq w$  ή  $w \geq z$
- (4)  $z \geq w$  και  $w \geq c \Rightarrow z \geq c$
- (5)  $z \geq w \Rightarrow z + c \geq w + c$
- (6)  $z \geq 0$  και  $w \geq 0 \Rightarrow zw \geq 0$ , όπου  $z, w, c \in \mathbb{C}$ .

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ορίζεται μία σχέση  $\geq$  με τις ιδιότητες (1)-(6), τότε παρατηρούμε αρχικά ότι ισχύει

$$(*) \quad z^2 \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

διότι από την (3) έχουμε  $z \geq 0$  ή  $z \leq 0$ , οπότε  $-z \geq 0$ , και επομένως από την  $z^2 = (-z)^2$  και την (6) προκύπτει  $z^2 \geq 0$ . Όμως, για τη φανταστική μονάδα  $i$  ισχύει  $i^2 = -1 < 0$ , η οποία συνιστά αντίφαση της (\*).

Εξάλλου, σημειώνουμε ιδιαίτερα ότι η υπόθεση ότι ορίζεται στο  $\mathbb{C}$  μία σχέση  $\geq$  με τις ιδιότητες (1)-(6) συνεπάγεται ότι η πολύ απλή εξίσωση  $z^2 + 1 = 0$  δεν έχει λύση στο  $\mathbb{C}$  που συνιστά επίσης αντίφαση στην ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας (βλ. το προηγούμενο Παράδειγμα 8.1.1).

Έτσι, στα επόμενα ο συμβολισμός  $z \geq w$ , όπου εμφανίζεται, θα αναφέρεται σε  $z$  και  $w$  πραγματικούς αριθμούς.

Ο μιγαδικός αριθμός

$$\bar{z} = x - iy$$

ονομάζεται ο συζυγής του  $z$ .

Στην επόμενη πρόταση συνοψίζονται οι βασικές ιδιότητες του συζυγούς μιγαδικού αριθμού και οι συσχετίσεις του με τις αλγεβρικές πράξεις, οι οποίες είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού του συζυγούς.

**Πρόταση 8.1.2** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  ισχύουν

$$(1) \quad \overline{\bar{z}} = z,$$

$$(2) \quad z\bar{z} = x^2 + y^2,$$

$$(3) \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

$$(4) \quad z = \bar{z} \Leftrightarrow z = x, \quad z = -\bar{z} \Leftrightarrow z = iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$(5) \quad \overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w},$$

$$(6) \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w},$$

$$(7) \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad w \neq 0.$$

□

Εξάλλου, ο πραγματικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ονομάζεται το μέτρο (η απόλυτη τιμή) του  $z$ .

Στην ακόλουθη πρόταση καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού

**Πρόταση 8.1.3** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  ισχύουν

$$(1) \quad |z| \geq 0 \quad \text{και} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$

$$(2) \quad |zw| = |z||w|,$$

$$(3) \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad w \neq 0,$$

$$(4) \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad |z| = |\bar{z}|,$$

$$(5) \quad |\operatorname{Re}z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im}z| \leq |z|,$$

$$(6) \quad |z \pm w| \leq |z| + |w|,$$

$$(7) \quad \left| |z| - |w| \right| \leq |z - w|.$$

**Απόδειξη.** Ενδεικτικά αποδεικνύουμε τις ιδιότητες (2), (6) και (7).

$$(2) : \quad |zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = (z\bar{w})(w\bar{z}) = |z|^2|w|^2.$$

$$(6) : \quad |z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}.$$

Όμως, από την (5) έχουμε:

$$z\bar{w} + w\bar{z} = z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})} = 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq 2|z\bar{w}| = 2|z||w|.$$

Έτσι, από τις δύο προηγούμενες, λαμβάνουμε

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

$$(7) : \quad |z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w| \Rightarrow |z - w| \geq |z| - |w|,$$

$$|w| = |(w - z) + z| \leq |z - w| + |z| \Rightarrow |z - w| \geq |w| - |z|.$$

□

Με τέλεια επαγωγή, από την ιδιότητα (6) της προηγούμενης πρότασης, έχουμε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , ισχύει η ανισότητα

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

**Παράδειγμα 8.1.3** Βρείτε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα για τον  $|z - 3|$  αν  $|z - 4i| \leq 1$ .

**Λύση.** Με τη βοήθεια της ιδιότητας (6) της προηγούμενης πρότασης, έχουμε ότι

$$|z - 3| = |z - 4i + 4i - 3| \leq |z - 4i| + |4i - 3| \leq 1 + 5 = 6,$$

ενώ, από την ιδιότητα (7), ευρίσκουμε

$$|z - 3| = |z - 4i + 4i - 3| \geq ||z - 4i| - |4i - 3||$$

$$= ||z - 4i| - 5| \geq 5 - |z - 4i| \geq 5 - 1 = 4.$$

△

Το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών, εφόσον ορίζεται, υπολογίζεται ευκολότερα από τον τύπο

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{z\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}, \quad w \neq 0.$$

**Παράδειγμα 8.1.4** Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού

$$z = \frac{1 + i}{1 - 3i}.$$

**Λύση.**

$$\frac{1 + i}{1 - 3i} = \frac{(1 + i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{-2 + 4i}{1^2 + 3^2} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

△

**Παράδειγμα 8.1.5** Γράψτε το μιγαδικό αριθμό  $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$  υπό τη μορφή  $x + iy$  με  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Λύση.** Έχουμε

$$\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2} = 1.$$

△

Όπως διαπιστώνεται εύκολα, για τις δυνάμεις της φανταστικής μονάδας  $i$  ισχύουν

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad (8.1.4)$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι  $i^m = i^k$ , όπου  $k$  είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $m$  με το 4.

**Παράδειγμα 8.1.6** Δείξτε ότι  $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Λύση.** Χρησιμοποιώντας την  $i^2 = -1$ , ευρίσκουμε

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = i^n(1 + i + i^2 + i^3) = i^n(1 + i - 1 - i) = 0.$$

△

**Πρόταση 8.1.4** Για  $z, w \in \mathbb{C}$  ισχύει

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

(κανόνας του παραλληλογράμμου).

**Απόδειξη.**

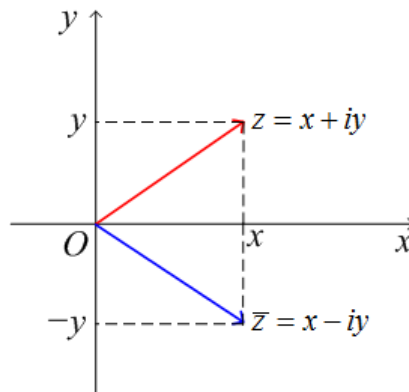
$$\begin{aligned} |z + w|^2 + |z - w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} + (z - w)\overline{(z - w)} \\ &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2). \end{aligned}$$

□

## 8.2 Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών

Ως γνωστόν, κάθε διατεταγμένο ζεύγος  $(x, y)$  πραγματικών αριθμών ταυτίζεται με το σημείο  $P(x, y)$  ενός επιπέδου  $Oxy$  με συντεταγμένες  $(x, y)$ , καθώς επίσης και με το διάνυσμα θέσεως  $\overrightarrow{OP}$ . Εξάλλου, κάθε μιγαδικός αριθμός  $z$  ορίζεται ως διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Κατά συνέπεια, κάθε μιγαδικός αριθμός  $z$  ταυτίζεται με ένα σημείο ενός επιπέδου  $Oxy$ . Με αυτή την έννοια, ταυτίζουμε στα επόμενα γεωμετρικά τον  $\mathbb{C}$  με το επίπεδο  $Oxy$ , το οποίο για αυτό ονομάζεται και *μιγαδικό επίπεδο*. Ο άξονας των  $x$  λέγεται *πραγματικός άξονας* και ο άξονας των  $y$  λέγεται *φανταστικός άξονας*. Στο Σχήμα 8.1 δίνεται μία απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  και του συζυγούς του  $\bar{z}$ .

Επίσης, ένας μιγαδικός αριθμός  $z = x + iy$  ταυτίζεται, εκτός από το σημείο  $P(x, y)$ , και με το διάνυσμα θέσεως  $\overrightarrow{OP}$ . Κατά την ταύτιση αυτή, το άθροισμα  $z + w$  καθώς και η διαφορά  $z - w$  των μιγαδικών αριθμών  $z = x + iy$  και  $w = u + iv$  με διανύσματα θέσης  $\overrightarrow{OP}$  και  $\overrightarrow{OQ}$  αντιστοιχούν στα διανύσματα  $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$  και  $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$  (Σχήμα 8.2). Υπό την έννοια αυτή, η πρόσθεση και η αφαίρεση μιγαδικών αριθμών είναι ισοδύναμες με την πρόσθεση και την αφαίρεση των αντίστοιχων διανυσμάτων στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 8.1: Απεικόνιση ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  και του συζυγούς μιγαδικού  $\bar{z}$ .

Σημειώνουμε επίσης ότι, μετά την ταύτιση αυτή, το μέτρο  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  ενός μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy$  συμπίπτει με το μήκος του αντιστοίχου διανύσματος θέσης  $\overrightarrow{OP}$ , δηλαδή με την απόσταση των σημείων  $O$  και  $P$ .

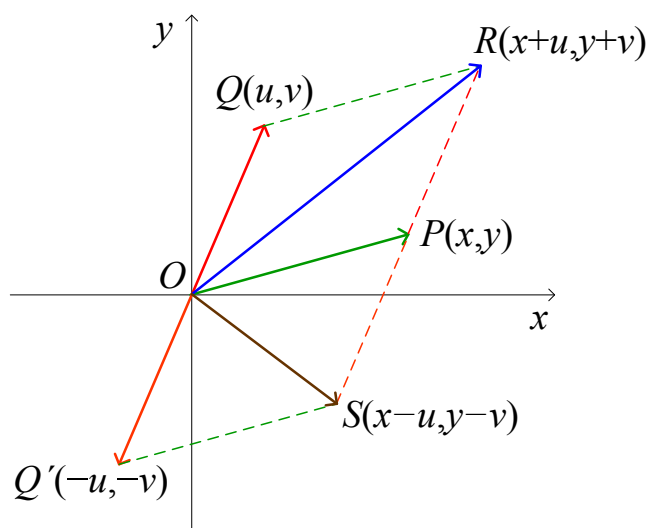
Οι παρατηρήσεις αυτές οδηγούν στον ορισμό της απόστασης  $d(z, w)$  δύο μιγαδικών αριθμών  $z = x + iy$  και  $w = u + iv$

$$d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Ως εφαρμογή επεξεργαζόμαστε το ακόλουθο

**Παράδειγμα 8.2.1** Έστω  $z_0$  δοσμένος μιγαδικός αριθμός και  $R > 0$ . Τότε, το σύνολο





Σχήμα 8.2: Γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος και της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών  $z$  και  $w$ . Το σημείο  $R$ , καθώς επίσης και το διάνυσμα θέσης  $\overrightarrow{OR}$ , αντιστοιχούν στο (ταυτίζονται με το) μιγαδικό αριθμό  $z + w$ , ενώ το σημείο  $S$  και το διάνυσμα θέσης  $\overrightarrow{OS}$  αντιστοιχούν στο μιγαδικό αριθμό  $z - w$ .

των μιγαδικών αριθμών  $z$  με  $|z - z_0| = R$  είναι ο κύκλος με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $R$ .

**Λύση.** Αν  $z = x + iy$  και  $z_0 = x_0 + iy_0$  τότε από τον ορισμό της απόστασης έχουμε

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = |z - z_0|^2 = R^2,$$

η οποία, πράγματι, παριστά κύκλο με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $R$ .

△

**Παράδειγμα 8.2.2** Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$a|z|^2 + bz + \overline{bz} + c = 0, \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}$$

παριστά ευθεία αν  $a = 0$  και  $b \neq 0$  και κύκλο αν  $a \neq 0$  και  $|b|^2 > ac$ .

**Λύση.** Έστω  $b = b_1 + ib_2$  και  $z = x + iy$ . Τότε, έχουμε ότι

$$bz + \overline{bz} = 2\operatorname{Re}(bz) = 2\operatorname{Re}((b_1 + ib_2)(x + iy)) = 2(b_1x - b_2y),$$

και η εξίσωση γράφεται

$$(*) \quad a(x^2 + y^2) + 2(b_1x - b_2y) + c = 0.$$

Για  $a = 0$ , η τελευταία ανάγεται στην

$$2b_1x - 2b_2y + c = 0,$$

η οποία, αν  $b \neq 0$ , παριστάνει ευθεία.

Περαιτέρω, από την (\*) για  $a \neq 0$ , λαμβάνουμε

$$x^2 + y^2 + \frac{2b_1}{a}x - \frac{2b_2}{a}y + \frac{c}{a} = 0,$$

η οποία γράφεται

$$\left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{a}\right)^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 - ac}{a^2}$$

και, αν  $b_1^2 + b_2^2 = |b|^2 > ac$ , παριστά κύκλο με κέντρο το  $\left(-\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a}\right)$  και ακτίνα  $\frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - ac}}{|a|}$ .

△

**Παράδειγμα 8.2.3** Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών αριθμών  $z = x + iy$ , οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{|z + 1|}{|z - 1|} = 2.$$

**Λύση.** Η εξίσωση μετατρέπεται διαδοχικά, όπως ακολουθεί

$$|(x + 1) + iy| = 2|(x - 1) + iy|$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4(x - 1)^2 + 4y^2$$

$$3x^2 - 10x + 3y^2 + 3 = 0,$$

η οποία γράφεται

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

και άρα παριστά κύκλο με κέντρο το σημείο  $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$  και ακτίνα  $\frac{4}{3}$ .

△

### 8.3 Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο

Για τη μελέτη της συμπεριφοράς μιγαδικών συναρτήσεων, καθώς το  $|z| \rightarrow \infty$ , εισάγουμε την έννοια του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου  $\tilde{\mathbb{C}}$ . Το  $\tilde{\mathbb{C}}$  επιτυγχάνεται με επισύναψη στο  $\mathbb{C}$  ενός (ιδεατού) στοιχείου  $\infty$ . Οι αριθμητικές πράξεις του  $\mathbb{C}$  επεκτείνονται υπό προϋποθέσεις στο  $\tilde{\mathbb{C}}$ , ορίζοντας

$$\begin{aligned} z + \infty &= \infty, & z \in \mathbb{C} \\ z \cdot \infty &= \infty, & z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \\ \infty + \infty &= \infty, \\ \infty \cdot \infty &= \infty, \\ \frac{z}{0} &= \infty, & z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \\ \frac{z}{\infty} &= 0, & z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Εξάλλου, σημειώνουμε ότι δεν ορίζονται στο  $\tilde{\mathbb{C}}$  οι πράξεις  $\frac{0}{0}$  και  $\frac{\infty}{\infty}$ .

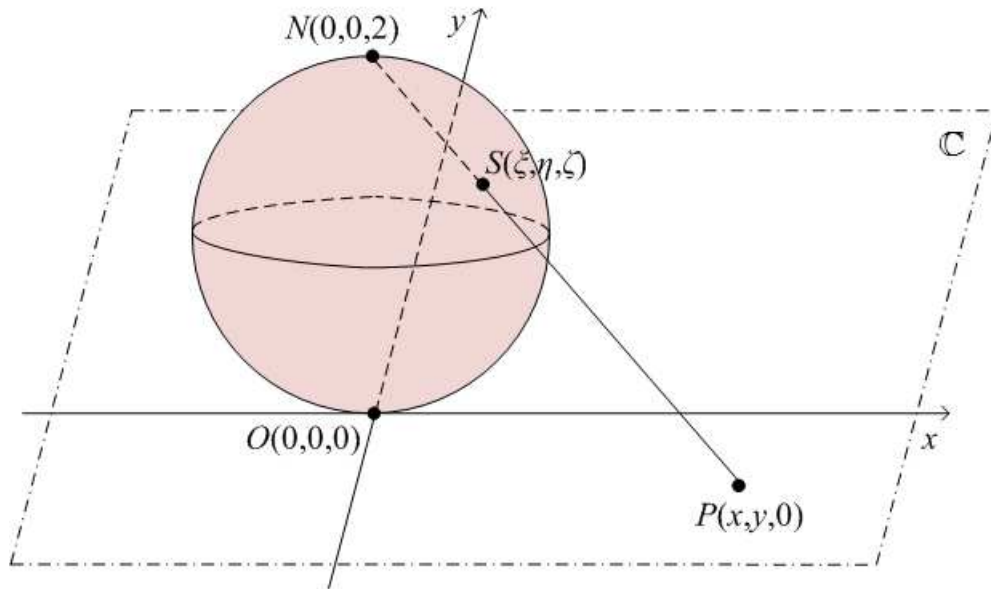
Ως γεωμετρικό μοντέλο του  $\tilde{\mathbb{C}}$  επιλέγεται η σφαίρα

$$\Sigma = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1\} \quad (8.3.1)$$

του  $\mathbb{R}^3$  με κέντρο το  $(0, 0, 1)$  και ακτίνα 1, της οποίας ο νότιος πόλος συμπίπτει με την αρχή  $O(0, 0, 0)$  του μιγαδικού επιπέδου (Σχήμα 8.3).

Προκειμένου να ταυτίσουμε το σύνολο  $\tilde{\mathbb{C}}$  με τη σφαίρα  $\Sigma$ , θεωρούμε το  $\mathbb{C}$  ως υποσύνολο του χώρου  $\mathbb{R}^3$  ταυτίζοντας το  $z = x + iy$  με την τριάδα  $(x, y, 0)$ . Έστω τώρα ένας μιγαδικός αριθμός  $z = x + iy$ . Συνδέουμε το σημείο  $P(x, y, 0)$  του μιγαδικού επιπέδου με το βόρειο πόλο  $N(0, 0, 2)$  της σφαίρας  $\Sigma$  και αντιστοιχούμε στο σημείο  $P$  το σημείο τομής  $S(\xi, \eta, \zeta)$  της ευθείας με τη σφαίρα  $\Sigma$  (Σχήμα 8.3). Αντιστρόφως, σε ένα σημείο  $S(\xi, \eta, \zeta)$  της σφαίρας, διάφορο του βόρειου πόλου  $N(0, 0, 2)$ , αντιστοιχούμε το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$ , ο οποίος ταυτίζεται με το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $N$  και  $S$  με το μιγαδικό επίπεδο. Κατά αυτόν τον τρόπο, ορίζεται μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}$  και της σφαίρας  $\Sigma$ , εκτός από το βόρειο πόλο  $N$  αυτής. Η αντιστοιχία αυτή επεκτείνεται στη σφαίρα  $\Sigma$  αντιστοιχίζοντας το βόρειο πόλο  $N$  στο  $\infty$ . Έτσι, το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο  $\tilde{\mathbb{C}}$  απεικονίζεται στη σφαίρα  $\Sigma$ . Η διαδικασία ορισμού της αντιστοιχίας αυτής (αλλά και η ίδια η αντιστοιχία) αναφέρεται ως *στερεογραφική προβολή* και η σφαίρα  $\Sigma$  ως η *σφαίρα Riemann*. Όπως συνάγεται από τον ορισμό της στερεογραφικής προβολής, καθώς το σημείο  $S$  της σφαίρας πλησιάζει το βόρειο πόλο  $N$ , η ευθεία που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία τείνει να γίνει εφαπτομένη της σφαίρας στο  $N$  και, υπό την έννοια αυτή, το σημείο  $z$  τείνει στο άπειρο.

Για τον ακριβή καθορισμό της στερεογραφικής προβολής ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Έστω  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $P(x, y, 0)$  το σημείο του μιγαδικού επιπέδου, το οποίο παριστά το  $z$ , και  $S(\xi, \eta, \zeta)$  το αντίστοιχο σημείο της σφαίρας Riemann  $\Sigma$  (Σχήμα 8.3). Επειδή τα



Σχήμα 8.3: Σφαίρα Riemann  $\Sigma$  και στερεογραφική προβολή.

σημεία  $N, S$  και  $P$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τα διανύσματα  $\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{ON}$  και  $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}$  είναι παράλληλα, δηλαδή υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $\lambda \neq 0$  έτσι ώστε

$$(\xi, \eta, \zeta - 2) = \lambda(x, y, -2),$$

από την οποία προκύπτουν

$$\xi = \lambda x, \quad \eta = \lambda y, \quad \zeta = 2 - 2\lambda. \quad (8.3.2)$$

Όμως, επειδή το σημείο  $S$  ανήκει στη σφαίρα  $\Sigma$ , ισχύει

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1$$

και συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες, ευρίσκουμε την εξίσωση

$$\lambda^2(x^2 + y^2 + 4) - 4\lambda = 0,$$

η οποία έχει ως (μοναδική) μη μηδενική λύση την

$$\lambda = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4} = \frac{4}{|z|^2 + 4}.$$

Έτσι, σε κάθε σημείο  $z = x + iy$  του μιγαδικού επιπέδου αντιστοιχεί, κατά μοναδικό

τρόπο, το σημείο  $(\xi, \eta, \zeta)$  της σφαίρας  $\Sigma$ , όπου

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4} = \frac{4x}{|z|^2 + 4} = \frac{2(z + \bar{z})}{|z|^2 + 4}, \\ \eta &= \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4} = \frac{4y}{|z|^2 + 4} = \frac{2(z - \bar{z})}{i(|z|^2 + 4)}, \\ \zeta &= \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} = \frac{2|z|^2}{|z|^2 + 4}.\end{aligned}\tag{8.3.3}$$

Ιδιαίτερως, η αρχή  $z = 0$  των αξόνων απεικονίζεται, μέσω της (8.3.3), στο νότιο πόλο  $O(0, 0, 0)$  της σφαίρας, ενώ όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  με  $|z| \rightarrow \infty$  απεικονίζονται στο βόρειο πόλο  $N(0, 0, 2)$  της σφαίρας, όπως διαπιστώνεται με εισαγωγή των  $x = |z| \cos \theta$  και  $y = |z| \sin \theta$  στην (8.3.3) και λαμβάνοντας το όριο  $|z| \rightarrow \infty$ .

Εξάλλου, με την ίδια διαδικασία διαπιστώνουμε ότι σε κάθε σημείο  $S(\xi, \eta, \zeta)$  της σφαίρας  $\Sigma$  αντιστοιχεί το μοναδικό σημείο  $z = x + iy$  του μιγαδικού επιπέδου με

$$x = \frac{2\xi}{2 - \zeta}, \quad y = \frac{2\eta}{2 - \zeta}.\tag{8.3.4}$$

Συνοψίζοντας, τώρα, διατυπώνουμε τους αναλυτικούς ορισμούς της στερεογραφικής προβολής

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \Sigma, \quad P(z) = \left( \frac{2(z + \bar{z})}{|z|^2 + 4}, \frac{2(z - \bar{z})}{i(|z|^2 + 4)}, \frac{2|z|^2}{|z|^2 + 4} \right)$$

του  $\mathbb{C}$  στη σφαίρα  $\Sigma$  και

$$P^{-1} : \Sigma \setminus \{(0, 0, 2)\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{2\xi}{2 - \zeta} + i \frac{2\eta}{2 - \zeta}$$

της  $\Sigma \setminus \{(0, 0, 2)\}$  στο  $\mathbb{C}$ . Οι στερεογραφικές προβολές  $P$  και  $P^{-1}$  επεκτείνονται στο  $\tilde{\mathbb{C}}$  και  $\Sigma$  θέτοντας ως  $P(\infty) = (0, 0, 2)$  και  $P^{-1}(0, 0, 2) = \infty$ , αντιστοίχως.

Η στερεογραφική προβολή απεικονίζει κάθε γεωμετρικό τόπο σημείων του μιγαδικού επιπέδου σε ένα αντίστοιχο τόπο σημείων στη σφαίρα και αντιστρόφως. Από τα ακόλουθα δύο παραδείγματα συνάγουμε ότι η στερεογραφική προβολή μεταφέρει ευθείες του μιγαδικού επιπέδου σε κύκλους στη σφαίρα  $\Sigma$ , οι οποίοι διέρχονται από το βόρειο πόλο της. Επίσης, μεταφέρει κύκλους του μιγαδικού επιπέδου σε κύκλους στη σφαίρα  $\Sigma$ , οι οποίοι δεν διέρχονται από το βόρειο πόλο της.

**Παράδειγμα 8.3.1** Κάθε ευθεία του μιγαδικού επιπέδου με εξίσωση

$$ax + \beta y = \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

απεικονίζεται μέσω της στερεογραφικής προβολής (8.3.4) σε κύκλο της σφαίρας Riemann, ο οποίος διέρχεται από το βόρειο πόλο της.

**Λύση.** Η εξίσωση της ευθείας, με τη βοήθεια των (8.3.4), μετασχηματίζεται στην

$$\alpha \frac{2\xi}{2-\zeta} + \beta \frac{2\eta}{2-\zeta} = \gamma,$$

από την οποία προκύπτει

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma \frac{\zeta}{2} = \gamma,$$

η οποία παριστά επίπεδο του  $\mathbb{R}^3$ .

Περαιτέρω, παρατηρούμε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha\xi + \beta\eta + \gamma \frac{\zeta}{2} &= \gamma \\ \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

παριστά κύκλο της  $\Sigma$ , ο οποίος διέρχεται από το  $N(0, 0, 2)$ , διότι το σημείο  $(0, 0, 2)$  είναι λύση του συστήματος.

△

**Παράδειγμα 8.3.2** Κάθε κύκλος του  $\mathbb{C}$  με εξίσωση

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0, \quad \alpha \neq 0$$

απεικονίζεται μέσω της στερεογραφικής προβολής (8.3.4) σε κύκλο της σφαίρας  $\Sigma$ , ο οποίος δεν διέρχεται από το βόρειο πόλο της.

**Λύση.** Η εξίσωση του κύκλου μετασχηματίζεται μέσω των (8.3.4) στην

$$\alpha \frac{4(\xi^2 + \eta^2)}{(2-\zeta)^2} + \beta \frac{2\xi}{2-\zeta} + \gamma \frac{2\eta}{2-\zeta} + \delta = 0,$$

δηλαδή

$$\alpha \frac{4\zeta}{2-\zeta} + \beta \frac{2\xi}{2-\zeta} + \gamma \frac{2\eta}{2-\zeta} + \delta = 0,$$

από την οποία προκύπτει

$$2\beta\xi + 2\gamma\eta + (4\alpha - \delta)\zeta + 2\delta = 0.$$

Έτσι, οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\begin{aligned} 2\beta\xi + 2\gamma\eta + (4\alpha - \delta)\zeta + 2\delta &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 &= 1, \end{aligned}$$

το οποίο παριστά κύκλο της  $\Sigma$  (ως τομή επιπέδου με τη σφαίρα), ο οποίος δεν διέρχεται από το βόρειο πόλο της  $N(0, 0, 2)$ , αφού  $\alpha \neq 0$ .

△

**Παράδειγμα 8.3.3** Κάθε κύκλος  $C$  της σφαίρας Riemann  $\Sigma$  απεικονίζεται, μέσω της στερεογραφικής προβολής (8.3.3), σε ευθεία του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}$  αν ο βόρειος πόλος  $N(0, 0, 2) \in C$  ή σε κύκλο του  $\mathbb{C}$  αν  $N \notin C$ .

**Λύση.** Έστω ότι ο κύκλος  $C$  ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta = 0 \quad \text{και} \quad \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1$$

(τομή επιπέδου με τη σφαίρα). Η εξίσωση του επιπέδου, με τη βοήθεια των (8.3.3), μετασχηματίζεται

$$4\alpha \frac{x}{x^2 + y^2 + 4} + 4\beta \frac{y}{x^2 + y^2 + 4} + 2\gamma \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 4} + \delta = 0,$$

η οποία επίσης γράφεται

$$(2\gamma + \delta)(x^2 + y^2) + 4\alpha x + 4\beta y + 4\delta = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση παριστά κύκλο του  $\mathbb{C}$  αν  $2\gamma + \delta \neq 0$  και ευθεία αν  $2\gamma + \delta = 0$ . Όμως, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$2\gamma + \delta = 0 \Leftrightarrow N \in C.$$

△

Η απόσταση δύο στοιχείων  $z_1$  και  $z_2$  του  $\tilde{\mathbb{C}}$  ορίζεται με τη βοήθεια της ευκλείδειας απόστασης των εικόνων τους  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  και  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  στη σφαίρα  $\Sigma$  ως εξής

$$d(z_1, z_2) = ((\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2)^{1/2}.$$

Η  $d(z_1, z_2)$  παριστά το μήκος της χορδής της σφαίρας  $\Sigma$  που ορίζουν τα σημεία  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  και  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ . Για το λόγο αυτό, η απόσταση  $d$  αναφέρεται και ως *χορδική απόσταση*. Όπως υπολογίζεται εύκολα, με τη βοήθεια των (8.3.3), η χορδική απόσταση εκφράζεται ως εξής

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{4|z_1 - z_2|}{(|z_1|^2 + 4)(|z_2|^2 + 4)^{1/2}}, & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{4}{(|z_1|^2 + 4)^{1/2}}, & z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty \end{cases}.$$

## 8.4 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

Ως γνωστόν, κάθε σημείο  $P(x, y)$  του επιπέδου καθορίζεται και από τις πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ , όπου  $r$  είναι η απόσταση του  $P$  από το  $O$ , δηλαδή το μήκος του διανύσματος

$\overrightarrow{OP}$ , και  $\theta$  η γωνία με αρχική πλευρά το θετικό ημιάξονα  $Ox$  και τελική πλευρά το διάνυσμα  $\overrightarrow{OP}$  μετρούμενη σε ακτίνια κατά τη θετική φορά, δηλαδή την αντίωρολογιακή. Έτσι, και κάθε μιγαδικός αριθμός  $z = x + iy \neq 0$ , ο οποίος κατά τα γνωστά ταυτίζεται με το σημείο  $P(x, y)$ , εκφράζεται από τις πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  του σημείου  $P$ . Από τον ορισμό του  $r$ , έχουμε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|. \quad (8.4.1)$$

Εξάλλου, οι πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  και οι καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  συνδέονται με τις σχέσεις (Σχήμα 8.4)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (8.4.2)$$

Κάθε τιμή της γωνίας  $\theta$ , για την οποία ισχύουν οι (8.4.2), ονομάζεται και *όρισμα* του  $z$  και το σύνολο όλων των ορισμάτων του  $z$  συμβολίζεται με  $\arg z$  (Σχήμα 8.5). Το  $\arg z$  είναι άπειρο σύνολο και η διαφορά δύο οποιωνδήποτε στοιχείων του είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ . Σημειώνουμε, με έμφαση, ότι μεταξύ των ορισμάτων  $\theta$  του μιγαδικού αριθμού  $z$  υπάρχει ακριβώς ένα όρισμα  $\theta$  για το οποίο ισχύει  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Το συγκεκριμένο αυτό  $\theta$  ονομάζεται *θεμελιώδες ή πρωτεύον όρισμα* του  $z$  και συμβολίζεται με  $\text{Arg} z$  (Σχήμα 8.6), δηλαδή

$$0 \leq \text{Arg} z < 2\pi.$$

Το θεμελιώδες όρισμα  $\theta = \text{Arg} z$  ενός μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy \neq 0$  υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\tan \theta = \frac{y}{x},$$

όταν ληφθούν υπόψη τα τεταρτημόρια στα οποία ευρίσκονται τα  $x$  και  $y$  και συγκεκριμένα ισχύει

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \text{ και } y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \text{ και } y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ και } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}. \quad (8.4.3)$$

Τα  $\arg z$  και  $\text{Arg} z$  συσχετίζονται ως εξής

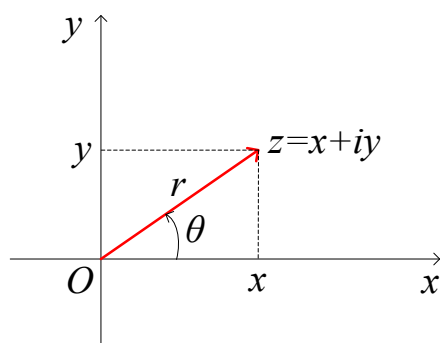
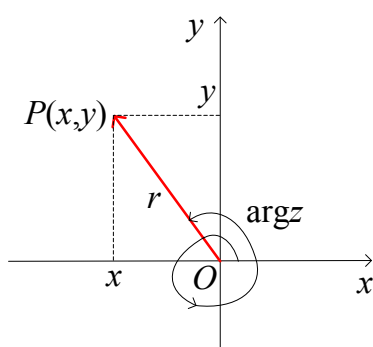
$$\arg z = \text{Arg} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8.4.4)$$

Για ένα μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$ , από την (8.4.1) και τις (8.4.2), λαμβάνουμε την *τριγωνομετρική μορφή*

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (8.4.5)$$

του  $z$ , η οποία, μεταξύ άλλων, είναι ιδιαίτερος χρήσιμη στον υπολογισμό δυνάμεων και ριζών μιγαδικών αριθμών.



Σχήμα 8.4: Πολικές συντεταγμένες ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ .Σχήμα 8.5: Όρισμα  $\arg z$  ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ .

**Παράδειγμα 8.4.1** Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του  $z = 1 + i$ .

**Λύση.** Από τις  $|z| = \sqrt{2}$  και  $\text{Arg} z = \pi/4$ , ευρίσκουμε την τριγωνομετρική μορφή του  $z$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

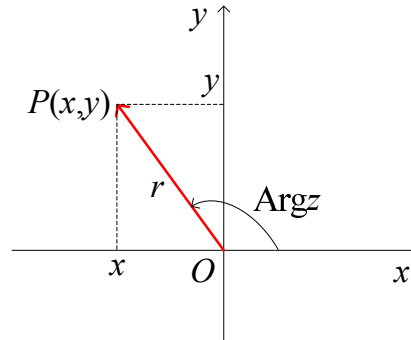
△

Περαιτέρω, για δύο μιγαδικούς αριθμούς

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{και} \quad w = |w|(\cos \phi + i \sin \phi)$$

υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} wz &= |w||z|(\cos \phi + i \sin \phi)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= |w||z|[(\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta) + i(\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta)] \\ &= |w||z|[\cos(\phi + \theta) + i \sin(\phi + \theta)] \end{aligned} \tag{8.4.6}$$



Σχήμα 8.6: Πρωτεύον όρισμα  $\text{Arg}z$  ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ .

και

$$\begin{aligned} \frac{w}{z} &= \frac{|w| \cos \phi + i \sin \phi}{|z| \cos \theta + i \sin \theta} = \frac{|w| (\cos \phi + i \sin \phi)(\cos \theta - i \sin \theta)}{|z| (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} \\ &= \frac{|w|}{|z|} [(\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta) + i(\sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \theta)] \\ &= \frac{|w|}{|z|} [\cos(\phi - \theta) + i \sin(\phi - \theta)], \quad |z| \neq 0, \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

από τις οποίες προκύπτουν (Σχήμα 8.7)

$$|wz| = |w||z| \quad \text{και} \quad \arg(wz) = \arg w + \arg z$$

και

$$\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|} \quad \text{και} \quad \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \arg w - \arg z$$

(όπου οι ισότητες των  $\arg$  σημαίνουν ισότητες συνόλων).

Ιδιαίτέρως, για  $z = w$  από την (8.4.6) έπεται

$$z^2 = |z|^2 [\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)].$$

Εξάλλου, για  $w = \frac{1}{z}$  από την (8.4.7) και την  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = 2k\pi - \arg z$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , προκύπτει

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{|z|^2} [\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta)].$$

Από τις δύο τελευταίες, με τέλεια επαγωγή, προκύπτουν

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)], \quad n \in \mathbb{N}$$

και

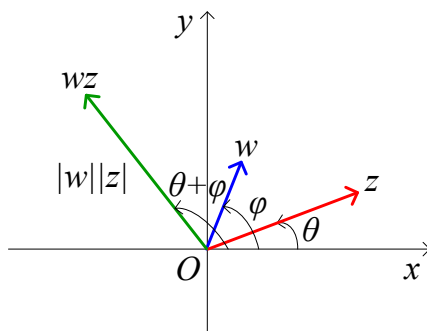
$$z^{-n} = |z|^{-n} [\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)], \quad n \in \mathbb{N},$$

οι οποίες ενοποιούνται στον πολύ χρηστικό τύπο

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)], \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.4.8)$$

Τώρα, από την (8.4.8), για  $|z| = 1$ , προκύπτει ο εξαιρετικά σημαντικός τύπος του *De Moivre*

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.4.9)$$



Σχήμα 8.7: Οπτικοποίηση των ιδιοτήτων του γινομένου δύο μιγαδικών  $z$  και  $w$ :  $|wz| = |w||z|$  και  $\arg(wz) = \arg(z) + \arg(w)$ .

**Παράδειγμα 8.4.2** Ως εφαρμογή του τύπου DeMoivre υπολογίστε την καρτεσιανή μορφή του μιγαδικού αριθμού  $\frac{(1+i)^{20}}{(\sqrt{3}+i)^{12}}$ .

**Λύση.**

$$\frac{(1+i)^{20}}{(\sqrt{3}+i)^{12}} = \frac{(\sqrt{2})^{20} [\cos(20\frac{\pi}{4}) + i \sin(20\frac{\pi}{4})]}{2^{12} [\cos(12\frac{\pi}{6}) + i \sin(12\frac{\pi}{6})]} = -\frac{2^{10}}{2^{12}} = -\frac{1}{4}.$$

△

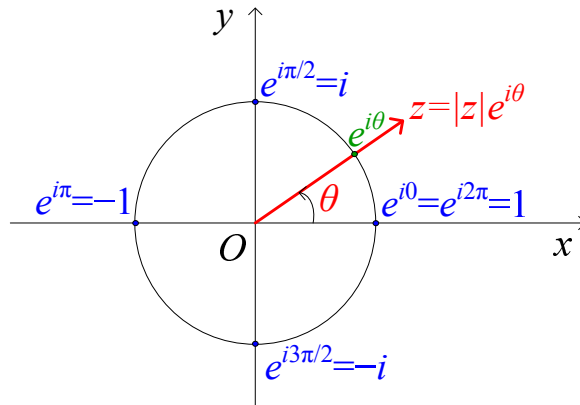
Σε αυτό το σημείο είναι χρηστικό να εισαγάγουμε μία ειδική μιγαδική εκθετική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (8.4.10)$$

Εξάλλου, σημειώνουμε ότι η γενική μιγαδική εκθετική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής ορίζεται και μελετάται στο Κεφάλαιο 10 (βλ. Παράγραφο 10.2).

Έτσι, εφαρμόζοντας την προηγούμενη στην τριγωνομετρική μορφή (8.4.5), ευρίσκουμε την εκθετική μορφή

$$z = |z| e^{i\theta} \quad (8.4.11)$$



Σχήμα 8.8: Εκθετική μορφή των μιγαδικών αριθμών. Ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο περιγράφεται από τη συνάρτηση  $e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

του μιγαδικού αριθμού  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  (Σχήμα 8.8), η οποία συντομεύει τις εκφράσεις και απλουστεύει κατά πολύ τους υπολογισμούς, όπου υπεισέρχονται μιγαδικοί αριθμοί υπό την τριγωνομετρική μορφή.

Στην ακόλουθη πρόταση συνοψίζονται ορισμένες από τις πιο χρηστικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης  $e^{i\theta}$ .

#### Πρόταση 8.4.1

$$e^{i(\theta+2n\pi)} = e^{i\theta}, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad |e^{i\theta}| = 1,$$

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}, \quad e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n, \quad e^{i\frac{\theta}{n}} = (e^{i\theta})^{\frac{1}{n}},$$

όπου  $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  και  $n \in \mathbb{Z}$ .

□

Ο τύπος (8.4.8) με χρήση της εκθετικής μορφής του μιγαδικού αριθμού γράφεται

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.4.12)$$

**Παράδειγμα 8.4.3** Υπολογίστε τις παραστάσεις

$$(i) (1+i)^{12}, \quad (ii) (1+i\sqrt{3})^4, \quad (iii) (1+i\sqrt{3})^8 + (1-i\sqrt{3})^8, \quad (iv) \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13}.$$

**Λύση.**

(i) Για το μιγαδικό αριθμό  $1 + i$  έχουμε  $|1 + i| = \sqrt{2}$  και  $\tan(\text{Arg}(1 + i)) = 1$ , οπότε  $\text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ . Επομένως, η εκθετική μορφή του είναι

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

και, από την (8.4.12), έχουμε

$$(1 + i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}e^{i12\frac{\pi}{4}} = 2^6e^{i3\pi} = -64.$$

(ii) Έχουμε ότι  $|1 + i\sqrt{3}| = 2$  και  $\tan(\text{Arg}(1 + i\sqrt{3})) = \sqrt{3}$ , οπότε  $\text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ . Επομένως

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

και άρα από την (8.4.8) ευρίσκουμε

$$(1 + i\sqrt{3})^4 = 2^4 \left[ \cos \left( 4\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( 4\frac{\pi}{3} \right) \right] = 16 \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -8 - i8\sqrt{3}.$$

(iii) Από την (ii) έχουμε

$$1 - i\sqrt{3} = \overline{1 + i\sqrt{3}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

και άρα

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^8 + (1 - i\sqrt{3})^8 &= 2^8 \left[ \cos \left( 8\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( 8\frac{\pi}{3} \right) \right] + 2^8 \left[ \cos \left( 8\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left( 8\frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= 2 \cdot 2^8 \cos \left( 8\frac{\pi}{3} \right) = 2^9 \left( -\frac{1}{2} \right) = -2^8. \end{aligned}$$

(iv) Για το μιγαδικό αριθμό  $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$  έχουμε  $|\frac{\sqrt{3}+i}{2}| = 1$  και  $\tan(\text{Arg}(\frac{\sqrt{3}+i}{2})) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , οπότε  $\text{Arg}(\frac{\sqrt{3}+i}{2}) = \frac{\pi}{6}$ , και άρα η εκθετική μορφή του είναι

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Έτσι, από την (8.4.12), ευρίσκουμε

$$\left( \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^{13} = e^{i13\frac{\pi}{6}} = e^{i(2\pi+\frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

△

**Παράδειγμα 8.4.4** Αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned}\cos \theta + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \dots + \cos((2n-1)\theta) &= \frac{\sin(n\theta) \cos(n\theta)}{\sin \theta}, \\ \sin \theta + \sin(3\theta) + \sin(5\theta) + \dots + \sin((2n-1)\theta) &= \frac{\sin^2(n\theta)}{\sin \theta}.\end{aligned}$$

**Λύση.** Θέτουμε

$$\begin{aligned}X &= \cos \theta + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \dots + \cos((2n-1)\theta), \\ Y &= \sin \theta + \sin(3\theta) + \sin(5\theta) + \dots + \sin((2n-1)\theta),\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}Z &= X + iY \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)) + \dots + (\cos((2n-1)\theta) + i \sin((2n-1)\theta)) \\ &= e^{i\theta} + e^{i3\theta} + \dots + e^{i(2n-1)\theta},\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$Z - e^{i2\theta} Z = e^{i\theta} - e^{i(2n+1)\theta},$$

και έτσι ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}Z &= \frac{e^{i\theta} - e^{i(2n+1)\theta}}{1 - e^{i2\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1 - e^{i2n\theta})}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})} \\ &= \frac{e^{in\theta}(e^{-in\theta} - e^{in\theta})}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = e^{in\theta} \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos(n\theta) \sin(n\theta)}{\sin \theta} + i \frac{\sin(n\theta) \sin(n\theta)}{\sin \theta},\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτουν οι τύποι της εκφώνησης.

△

## 8.5 $n$ -οστές ρίζες μιγαδικού αριθμού

Με τη βοήθεια του τύπου DeMoivre, υπολογίζουμε τις  $n$ -οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ , δηλαδή τις ρίζες  $w$  της εξίσωσης

$$w^n = z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αν  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  και  $w = |w|(\cos \phi + i \sin \phi)$  τότε από την (8.4.8), έχουμε

$$|w|^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)] = |z|[\cos \theta + i \sin \theta],$$

οπότε

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$

και

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

και συνεπώς οι  $n$ -οστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού  $z$  είναι

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Παρατηρούμε ότι  $w_{n+k} = w_k$ , για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$  (λόγω της περιοδικότητας του ημιτόνου και του συνημιτόνου) και επομένως οι διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες είναι οι

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8.5.1)$$

Εξάλλου, με τη βοήθεια της εκθετικής μορφής, οι ρίζες αυτές εκφράζονται

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8.5.2)$$

Εδώ, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$w_k = w_0 \left( e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k, \quad (8.5.3)$$

δηλαδή οι  $n$ -οστές ρίζες του  $z$  είναι

$$w_0, w_0 e^{i\frac{2\pi}{n}}, w_0 \left( e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^2, \dots, w_0 \left( e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^{n-1}.$$

Τώρα, με τη βοήθεια των (8.5.2) και (8.5.3), υπολογίζουμε

$$|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$$

και

$$\begin{aligned} |w_k - w_{k+1}| &= \left| w_0 \left( e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k - w_0 \left( e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^{k+1} \right| \\ &= |w_0| \left| \left( e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k \right| \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{n}} \right| = \sqrt[n]{|z|} \left| 1 - e^{i\frac{2\pi}{n}} \right|, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι οι  $n$  ρίζες της εξίσωσης  $w^n = z$ , για  $z \neq 0$ , είναι κορυφές κανονικού  $n$ -γώνου (κανονικού πολυγώνου με  $n$ -πλευρές), το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο το  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\sqrt[n]{|z|}$ .

**Παράδειγμα 8.5.1** Λύστε την εξίσωση  $w^3 = i$ .

**Λύση.** Από την  $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , παρατηρούμε ότι  $|i| = 1$  και ένα όρισμα του  $i$  είναι το  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

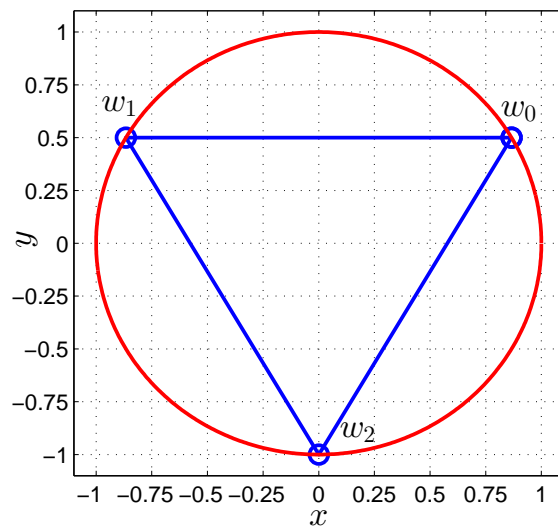
Έτσι, από την (8.5.1), λαμβάνουμε

$$w_k = \sqrt[3]{1} \left[ \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2,$$

δηλαδή

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad w_2 = -i.$$

Οι ρίζες  $w_0, w_1, w_2$  αντιστοιχούν στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 8.9).



Σχήμα 8.9: Γεωμετρική παράσταση των κυβικών ριζών του  $i$

△

**Παράδειγμα 8.5.2** Λύστε την εξίσωση  $w^3 = -2 + 2i$ .

**Λύση.** Υπολογίζουμε

$$|-2 + 2i| = \sqrt{8} \quad \text{και} \quad \text{Arg}(-2 + 2i) = \frac{3\pi}{4},$$



οπότε, από τις (8.5.2) και (8.5.3), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}w_0 &= \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i, \\w_1 &= w_0e^{i2\pi/3} = \sqrt{2}e^{i11\pi/12} = \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right), \\w_2 &= w_0e^{i4\pi/3} = \sqrt{2}e^{i19\pi/12} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + i\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right).\end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 8.5.3** Βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες ενός μιγαδικού  $z$  με χρήση της τριγωνομετρικής μορφής του.

**Λύση.** Εφαρμόζοντας τον τύπο (8.5.1) για  $n = 2$ , ευρίσκουμε ότι οι δύο τετραγωνικές ρίζες  $w_0$  και  $w_1$  ενός μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  είναι οι

$$w_0 = \sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad w_1 = -w_0.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

και ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις ως προς το πρόσημο του  $y$ . Ακριβέστερα, για  $y > 0$ , ισχύει  $0 < \theta < \pi$  και  $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ ,  $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ , οπότε οι ρίζες  $w_0$  και  $w_1$  γράφονται

$$w_0 = \frac{\sqrt{|z|}}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1 + \cos \theta} + i\sqrt{1 - \cos \theta} \right), \quad w_1 = -w_0.$$

Περαιτέρω, επειδή ισχύει

$$\cos \theta = \frac{x}{|z|},$$

λαμβάνουμε για τη ρίζα  $w_0$  ότι

$$w_0 = \frac{\sqrt{|z|}}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1 + \frac{x}{|z|}} + i\sqrt{1 - \frac{x}{|z|}} \right),$$

οπότε, αφού  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , έχουμε τελικά, για  $y > 0$ , ότι

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} + i\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right), \quad w_1 = -w_0. \quad (8.5.4)$$

Στην περίπτωση όπου  $y < 0$ , ισχύει  $\pi < \theta < 2\pi$  και  $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ ,  $\cos \frac{\theta}{2} < 0$ , οπότε έχουμε

$$w_0 = \frac{\sqrt{|z|}}{\sqrt{2}} \left( -\sqrt{1 + \cos \theta} + i\sqrt{1 - \cos \theta} \right), \quad w_1 = -w_0,$$

οι οποίες γράφονται

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} + i\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right), \quad w_1 = -w_0. \quad (8.5.5)$$

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις (8.5.4) και (8.5.5) με την (8.1.1), βλέπουμε ότι επανευρίσκουμε, όπως εξάλλου αναμένεται, τις ρίζες (8.1.1).

△

**Παράδειγμα 8.5.4** Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$\left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{2n} = -1, \quad n \in \mathbb{N},$$

έχει τις ρίζες

$$z = i \tan \left( \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

**Λύση.** Αφού  $\text{Arg}(-1) = \pi$ , από την (8.5.2), λαμβάνουμε

$$\frac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

από την οποία προκύπτει

$$z = \frac{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}} - 1}{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}} + 1} = \frac{\cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) + i \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) - 1}{\cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) + i \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) + 1}.$$

Με τη βοήθεια στοιχειωδών τριγωνομετρικών υπολογισμών, από την τελευταία ευρίσκουμε

$$z = \frac{-2 \sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right) + i2 \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right) \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right)}{2 \cos^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right) + i2 \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right) \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right)}$$

και η ζητούμενη σχέση έπεται άμεσα.

△

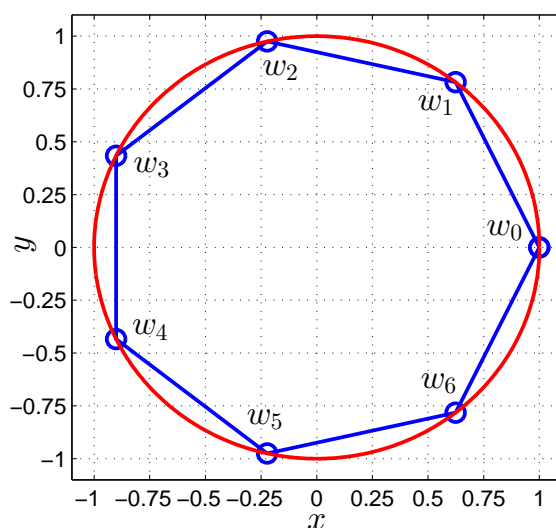
Ιδιαίτερως, οι διαφορετικές  $n$ -οστές ρίζες της μονάδας (δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης  $w^n = 1$ ) είναι

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8.5.6)$$

Εδώ, παρατηρούμε ότι ισχύει  $w_k = w_1^k$  για  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , δηλαδή οι  $n$ -οστές ρίζες της μονάδας είναι

$$1, w_1, w_1^2, \dots, w_1^{n-1}.$$

Γεωμετρικά, οι ρίζες παρίστανται από τις κορυφές ενός κανονικού  $n$ -γώνου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο (βλ. Σχήμα 8.10 για την περίπτωση  $n = 7$ ). Το πολύγωνο έχει μία κορυφή στο σημείο που αντιστοιχεί στη ρίζα  $w = 1$ .



Σχήμα 8.10: Γεωμετρική παράσταση των ριζών της εξίσωσης  $w^7 = 1$ .

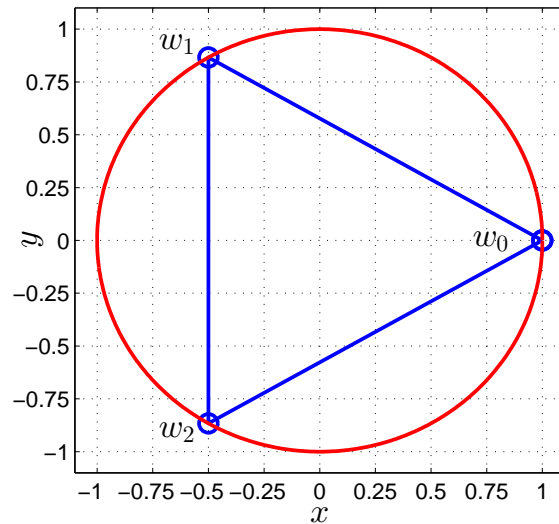
**Παράδειγμα 8.5.5** Υπολογίστε τις κυβικές ρίζες της μονάδας.

**Λύση.** Οι λύσεις της εξίσωσης  $w^3 = 1$  είναι

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

και παρίστανται γεωμετρικά από τις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 8.11).

△



Σχήμα 8.11: Γεωμετρική παράσταση των κυβικών ριζών της μονάδας.

## 8.6 Ασκήσεις

**Άσκηση 8.6.1** Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{8}$$

παριστά κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

**Άσκηση 8.6.2** Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $z = x + iy$  του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = c,$$

όπου  $z_1, z_2$  σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί και  $c$  σταθερός πραγματικός αριθμός.

**Άσκηση 8.6.3** Ως εφαρμογή του τύπου DeMoivre υπολογίστε το μιγαδικό αριθμό

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + i\frac{3}{2}\right)^6}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^3}$$

στη μορφή  $x + iy$ .

**Άσκηση 8.6.4** Βρείτε τις κυβικές μιγαδικές ρίζες του αριθμού 8 και εξηγήστε τη χαρακτηριστική γεωμετρική ιδιότητα των ριζών αυτών.

**Άσκηση 8.6.5** Λύστε την εξίσωση  $w^4 = -64$  και εξηγήστε τη χαρακτηριστική γεωμετρική ιδιότητα των λύσεων.

**Άσκηση 8.6.6** Λύστε την εξίσωση  $w^4 = 1 + i\sqrt{3}$  και εξηγήστε τη χαρακτηριστική γεωμετρική ιδιότητα των λύσεων.

**Άσκηση 8.6.7** Βρείτε το μήκος πλευράς κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο.

**Άσκηση 8.6.8** Με Μαθηματικό Λογισμικό Mathematica ή Matlab γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο για κάθε  $n = 2, 3, \dots$ , να κατασκευάζει τη γραφική παράσταση των  $n$ -οστών ριζών της μονάδας.

**Άσκηση 8.6.9** Δείξτε ότι για  $r < 1$  ισχύει

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos(n\theta) \right)^2 + \left( \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin(n\theta) \right)^2 = \frac{1}{1 - 2r^2 \cos \theta + r^4}.$$

Ο τύπος αυτός εκφράζει την ένταση του φωτός, η οποία μεταδίδεται από μία επιφάνεια μετά από διαδοχικές ανακλάσεις, όπου  $r$  είναι το κλάσμα του φωτός που ανακλάται κάθε φορά που το φως διέρχεται της επιφανείας.

# Βιβλιογραφία

- [1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex Variables, Introduction and Applications*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [2] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, 8<sup>th</sup> Ed., McGraw-Hill, New York, 2009.
- [3] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*, Εκδόσεις Τσότρας, Αθήνα, 2013.
- [4] J. E. Marsden, *Basic complex analysis*, W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1973.
- [5] Σ. Α. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1977.
- [6] A. Rybkin, *Complex Analysis Lecture Notes*, University of Alaska Fairbanks, 2014.
- [7] K. T. Tang, *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1*, Springer, Berlin, 2007.

## Κεφάλαιο 9

# Ακολουθίες και σειρές μιγαδικών αριθμών

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγεται η έννοια του ορίου ακολουθίας μιγαδικών αριθμών και διατυπώνονται οι στοιχειώδεις ιδιότητες ορίων. Επίσης, εισάγεται η έννοια της σειράς μιγαδικών αριθμών και εξετάζεται η σύγκλισή τους.

### 9.1 Ακολουθίες μιγαδικών αριθμών

#### Ορισμός 9.1.1 (Συγκλίνουσα ακολουθία του $\mathbb{C}$ )

Μία ακολουθία  $z_n$  του  $\mathbb{C}$  λέμε ότι *συγκλίνει* (ή *τείνει*) προς το μιγαδικό αριθμό  $z$  (ή ότι έχει ως όριο το  $z$ ) και συμβολίζουμε  $z_n \rightarrow z$  ή  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  όταν η ακολουθία  $|z_n - z|$  των πραγματικών αριθμών είναι μηδενική, δηλαδή

$$z_n \rightarrow z \Leftrightarrow |z_n - z| \rightarrow 0,$$

που σημαίνει ότι για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|z_n - z| < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq N_\epsilon.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, η  $z_n$  λέγεται και *συγκλίνουσα ακολουθία*. Εξάλλου, όταν δεν υπάρχει  $z \in \mathbb{C}$  με  $z_n \rightarrow z$ , τότε λέμε ότι η ακολουθία  $z_n$  είναι *αποκλίνουσα* (ή ότι *αποκλίνει*).

□

Είναι σαφές ότι ισχύει η ακόλουθη

**Πρόταση 9.1.1** Έστω  $z_n$  ακολουθία του  $\mathbb{C}$  και  $z \in \mathbb{C}$  με  $z_n = x_n + iy_n$  και  $z = x + iy$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1.  $z_n \rightarrow z$
2.  $x_n \rightarrow x$  και  $y_n \rightarrow y$ .

□

Εξάλλου, αποδεικνύεται εύκολα η ακόλουθη

**Πρόταση 9.1.2** Έστω  $z_n$  ακολουθία του  $\mathbb{C}$  και  $z \in \mathbb{C}$ . Τότε, ισχύουν

1.  $z_n \rightarrow z \Rightarrow |z_n| \rightarrow |z|$ ,

ενώ δεν ισχύει ο αντίστροφος ισχυρισμός (θεωρείστε π.χ. την ακολουθία  $(-1)^n$ ).

2.  $z_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z_n| \rightarrow 0$ .

□

**Ορισμός 9.1.2** Μία ακολουθία  $z_n$  του  $\mathbb{C}$  λέμε ότι συγκλίνει (ή τείνει) προς το άπειρο, όταν για την ακολουθία των χορδικών αποστάσεων ισχύει

$$d(z_n, \infty) = \frac{4}{(|z_n|^2 + 4)^{1/2}} \rightarrow 0.$$

□

**Πρόταση 9.1.3** Για μία ακολουθία  $z_n$  του  $\mathbb{C}$ , οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1.  $z_n \rightarrow \infty$
2.  $|z_n| \rightarrow +\infty$ .

□

**Παράδειγμα 9.1.1** Για την ακολουθία  $z_n = w^n$ , έχουμε

$$w^n \rightarrow \begin{cases} 0, & |w| < 1 \\ 1, & w = 1 \\ \infty, & |w| > 1 \\ \text{αποκλίνει,} & |w| = 1, w \neq 1 \end{cases} . \quad (9.1.1)$$



**Λύση.**

(i)  $w = 0 \Rightarrow z_n = 0 \rightarrow 0$ .

(ii)  $w = 1 \Rightarrow z_n = 1 \rightarrow 1$ .

(iii)  $0 < |w| < 1$ . Τότε υπάρχει (μοναδικό)  $\delta > 0$  με  $\frac{1}{|w|} = 1 + \delta$ , οπότε ευρίσκουμε

$$|z_n| = \frac{1}{(1 + \delta)^n} \leq \frac{1}{1 + n\delta} < \frac{1}{\delta} \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

και έτσι έχουμε  $|z_n| \rightarrow 0 \Rightarrow z_n \rightarrow 0$  (Πρόταση 9.1.2).

(iv)  $|w| = 1$ ,  $w \neq 1$ . Τότε  $w = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $\theta \neq 0$ , οπότε

$$z_n = w^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Θεωρούμε τώρα τις ακολουθίες

$$\frac{2n\pi}{\theta} \rightarrow +\infty \quad \text{και} \quad \frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{\theta} \rightarrow +\infty$$

και παρατηρούμε ότι ισχύει, καθώς  $n \rightarrow +\infty$

$$\cos\left(\frac{2n\pi}{\theta}\theta\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{\theta}\theta\right) \rightarrow 1 \quad \text{και} \quad \cos\left(\frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{\theta}\theta\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{\theta}\theta\right) \rightarrow i,$$

που σημαίνει, σύμφωνα με την Αρχή της Μεταφοράς, ότι η ακολουθία  $z_n$  αποκλίνει.

(v)  $|w| > 1$ . Έχουμε  $|z_n| = |w|^n \rightarrow \infty$  και επομένως από την Πρόταση 9.1.3, έχουμε  $z_n \rightarrow \infty$ .

△

**Ορισμός 9.1.3** Μία ακολουθία  $z_n$  μιγαδικών αριθμών ονομάζεται *φραγμένη*, όταν υπάρχει  $M > 0$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|z_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

**Πρόταση 9.1.4** Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία  $z_n$  μιγαδικών αριθμών είναι φραγμένη, ενώ δεν ισχύει ο αντίστροφος ισχυρισμός (θεωρείστε π.χ. την ακολουθία  $x_n = (-1)^n$ ).

□

Έστω  $z_n$  μία ακολουθία του  $\mathbb{C}$ . Μία ακολουθία  $w_n$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται υποακολουθία της  $z_n$  όταν υπάρχει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία  $k_n$  του  $\mathbb{N}$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$w_n = z_{k_n}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

**Πρόταση 9.1.5** Έστω  $z_n$  ακολουθία του  $\mathbb{C}$  και  $z \in \tilde{\mathbb{C}}$  με  $z_n \rightarrow z$ . Τότε, για κάθε υποακολουθία  $z_{k_n}$  της  $z_n$ , έχουμε  $z_{k_n} \rightarrow z$ .

□

**Πόρισμα 9.1.1** Έστω  $z_n$  ακολουθία του  $\mathbb{C}$ . Αν υπάρχουν δύο υποακολουθίες  $z_{k_n}$  και  $z_{l_n}$  της  $z_n$ , έτσι ώστε  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{k_n} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} z_{l_n}$  στο  $\tilde{\mathbb{C}}$  (ή κάποιο από τα δύο όρια να μην υπάρχει), τότε η ακολουθία  $z_n$  είναι αποκλίνουσα στο  $\tilde{\mathbb{C}}$ .

□

**Πρόταση 9.1.6** Έστω  $z_n$  ακολουθία του  $\mathbb{C}$  με  $z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Αν  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \alpha \in [0, 1)$ , τότε  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ .

□

**Παράδειγμα 9.1.2** Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ , η ακολουθία  $z_n = \frac{z^n}{n!} \rightarrow 0$ .

**Λύση.** Για  $z = 0$  η  $z_n = 0 \rightarrow 0$ . Εξάλλου, για κάθε  $z \neq 0$ , έχουμε

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0,$$

και έτσι, από την Πρόταση 9.1.6, έπεται ότι  $z_n \rightarrow 0$ .

△

**Θεώρημα 9.1.1** Έστω  $z_n$  ακολουθία του  $\mathbb{C}$  με  $z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Αν  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \alpha \in [0, +\infty]$ , τότε  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \alpha$ , ενώ δεν ισχύει ο αντίστροφος ισχυρισμός.

□

**Παράδειγμα 9.1.3** Η ακολουθία  $x_n = \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$ .

**Λύση.** Θεωρούμε την ακολουθία  $a_n = n!$ , για την οποία ισχύει

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow +\infty,$$

και έτσι, από το Θεώρημα 9.1.1, έπεται ότι  $x_n \rightarrow +\infty$ .

△

**Ορισμός 9.1.4** Μία ακολουθία  $z_n$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται *ακολουθία Cauchy*, όταν για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N_\epsilon$  έτσι ώστε να ισχύει

$$|z_n - z_m| < \epsilon, \quad \forall n, m \text{ με } n \geq m \geq N_\epsilon.$$

□

Οι έννοιες συγκλίνουσα ακολουθία και ακολουθία Cauchy του  $\mathbb{C}$  είναι ισοδύναμες, δηλαδή ισχύει το θεμελιώδες κριτήριο.

### Θεώρημα 9.1.2 (Κριτήριο Cauchy για ακολουθίες)

Μία ακολουθία  $z_n$  του  $\mathbb{C}$  είναι συγκλίνουσα τότε και μόνο τότε όταν η  $z_n$  είναι ακολουθία Cauchy.

□

### Παράδειγμα 9.1.4 Η ακολουθία

$$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

δεν είναι ακολουθία Cauchy και επομένως η  $S_n \rightarrow +\infty$ .

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι ισχύει, για κάθε  $n \geq 1$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

από την οποία συνάγεται ότι δεν ισχύει η συνθήκη Cauchy, και άρα η  $S_n$  δεν είναι πράγματι ακολουθία Cauchy, άρα δεν συγκλίνει. Επειδή η  $S_n$  είναι αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών, έπεται ότι  $S_n \rightarrow +\infty$ .

△

## 9.2 Σειρές μιγαδικών αριθμών

Εδώ εισάγεται η έννοια της σειράς μιγαδικών αριθμών και εξετάζεται η σύγκλιση σειρών. Ειδικότερα, καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες συγκλινουσών σειρών και καταχωρούνται τα σταθερά κριτήρια σύγκλισης. Επίσης, εξετάζονται ορισμένες ειδικές κατηγορίες σειρών με πρακτική και θεωρητική χρησιμότητα και παρουσιάζονται ορισμένα αντιπροσωπευτικά υπολογιστικά παραδείγματα.

Έστω  $z_n$  μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Το σύμβολο (τυπικό άθροισμα)

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{ή} \quad z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$$

ονομάζεται *σειρά μιγαδικών αριθμών* η οποία ορίζεται από την ακολουθία  $z_n$ . Ο όρος  $z_n$  της ακολουθίας ονομάζεται ο  $n$ -οστος όρος της σειράς και η ακολουθία  $S_n$  του  $\mathbb{C}$ , η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \sum_{k=1}^n z_k \quad (9.2.1)$$

ονομάζεται *ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ . Ως σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  θεωρείται επίσης και η (ίδια η) ακολουθία  $S_n$ .

### Ορισμός 9.2.1 (Συγκλίνουσα σειρά του $\mathbb{C}$ )

Μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  μιγαδικών αριθμών λέμε ότι *συγκλίνει* (ή *τείνει*) προς το μιγαδικό αριθμό  $z$  (ή ότι *έχει ως άθροισμα το  $z$* ) και γράφουμε  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$ , όταν η ακολουθία  $S_n$  των μερικών αθροισμάτων της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , η οποία ορίζεται από την (9.2.1), συγκλίνει προς τον  $z$ , δηλαδή όταν για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k - z \right| < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq N_\epsilon.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, η  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  λέγεται και *συγκλίνουσα σειρά*. Όταν η ακολουθία  $S_n$  δεν συγκλίνει στο  $\mathbb{C}$ , τότε λέμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  *αποκλίνει* ή είναι *αποκλίνουσα*. Τέλος, όταν η  $S_n$  τείνει προς το  $\infty$ , τότε λέμε ότι η σειρά *απειρίζεται* (ή *έχει ως άθροισμα το άπειρο*).

□

**Πρόταση 9.2.1** Για κάθε συγκλίνουσα σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  του  $\mathbb{C}$  ισχύει  $z_n \rightarrow 0$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

**Απόδειξη.** Για την ακολουθία  $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$  των μερικών αθροισμάτων της σειράς παρατηρούμε ότι ισχύει

$$(*) \quad z_n = S_n - S_{n-1} \quad (n > 1).$$

Εξάλλου, αφού η σειρά είναι συγκλίνουσα, υπάρχει  $z \in \mathbb{C}$  με  $S_n \rightarrow z$ , οπότε από την (\*) έχουμε, καθώς  $n \rightarrow +\infty$

$$\lim z_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = z - z = 0.$$

□

**Σημείωση 9.2.1** Ο αντίστροφος ισχυρισμός της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει, όπως συνάγεται από τη γνωστή συμπεριφορά της αρμονικής σειράς ως προς τη σύγκλιση, η οποία καταγράφεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

△

**Παράδειγμα 9.2.1** Για την αρμονική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , όπου  $p$  ρητός, ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{συγκλίνει,} & p > 1 \\ +\infty, & p \leq 1 \end{cases}.$$

△

Το γνωστό κριτήριο Cauchy για σειρές πραγματικών αριθμών διατυπώνεται και για μιγαδικές σειρές, όπως ακολουθεί.

### Θεώρημα 9.2.1 (Κριτήριο Cauchy για σειρές)

Μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  είναι συγκλίνουσα τότε και μόνο τότε όταν για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  έτσι ώστε να ισχύει

$$\left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| = |z_{m+1} + z_{m+2} + \dots + z_n| < \epsilon,$$

για κάθε  $n, m \in \mathbb{N}$  με  $n > m \geq N_\epsilon$ .

**Απόδειξη.** Για την ακολουθία  $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$  παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\sum_{k=m+1}^n z_k = S_n - S_m, \quad \forall n, m \text{ με } n > m$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.1.2 (Κριτήριο Cauchy για ακολουθίες).

□

**Θεώρημα 9.2.2** Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  δύο συγκλίνουσες σειρές και  $a, b \in \mathbb{C}$ . Τότε, η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (az_n + bw_n)$  είναι επίσης συγκλίνουσα και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} (az_n + bw_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} z_n + b \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

□

### Ορισμός 9.2.2 (Απόλυτη σύγκλιση σειράς)

Μία μιγαδική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  λέμε ότι *συγκλίνει απολύτως* (ή ότι είναι *απολύτως συγκλίνουσα*) όταν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  των πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα.

□

**Θεώρημα 9.2.3** Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  συγκλίνει απολύτως τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  συγκλίνει και ισχύει

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \quad (9.2.2)$$

□

**Σημείωση 9.2.2** Ο αντίστροφος ισχυρισμός του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μία συγκλίνουσα σειρά δεν συγκλίνει πάντοτε απολύτως, όπως συνάγεται από την εναλλάσσουσα σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , η οποία, ως γνωστόν, συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

△

### Θεώρημα 9.2.4 (Κριτήριο σύγκρισης)

Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  μιγαδικές σειρές με  $|z_n| \leq |w_n|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Τότε, ισχύουν

1. Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  συγκλίνει απολύτως τότε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  συγκλίνει επίσης απολύτως και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|.$$

2. Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  τείνει στο άπειρο τότε και η  $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$  τείνει επίσης στο άπειρο.

□

**Παράδειγμα 9.2.2** Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n + i}{5^n n^2}.$$

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|(3+4i)^n + i| \leq 1 + |3+4i|^n = 1 + 5^n,$$

οπότε

$$\frac{|(3+4i)^n + i|}{5^n n^2} \leq \frac{1+5^n}{5^n n^2} = \frac{1}{5^n n^2} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Επειδή η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  συγκλίνει ως αρμονική τάξης δύο, από το Κριτήριο Σύγκρισης συνάγουμε ότι η σειρά συγκλίνει.

△

Τα γνωστά κριτήρια της ρίζας και του λόγου για σειρές πραγματικών αριθμών διατυπώνονται και για σειρές μιγαδικών αριθμών, όπως ακολουθεί.

### Θεώρημα 9.2.5 (Κριτήριο ρίζας)

Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  μιγαδική σειρά, για την οποία υπάρχει το

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|z_n|} \in [0, +\infty].$$

Τότε ισχύουν

1. Αν  $\rho < 1$ , η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  συγκλίνει απολύτως.
2. Αν  $\rho > 1$ , η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  αποκλίνει.
3. Αν  $\rho = 1$ , η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  μπορεί να συγκλίνει αλλά μπορεί και να αποκλίνει.

□

### Θεώρημα 9.2.6 (Κριτήριο λόγου)

Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  μιγαδική σειρά με  $z_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , για την οποία υπάρχει το

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \in [0, +\infty].$$

Τότε ισχύουν

1. Αν  $\rho < 1$ , η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  συγκλίνει απολύτως.
2. Αν  $\rho > 1$ , η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  αποκλίνει.
3. Αν  $\rho = 1$ , η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  μπορεί να συγκλίνει αλλά μπορεί και να αποκλίνει.

□

### 9.3 Ασκήσεις

**Άσκηση 9.3.1** Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες μιγαδικών αριθμών

(i)  $z_n = e^{\frac{\pi i n}{4}}$

(ii)  $z_n = 2 - \frac{in^2}{2n^2+1}$

(iii)  $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + i \frac{n+1}{n}$

(iv)  $z_n = (1+i)^n$

(v)  $z_n = \frac{1+in}{1-in}$

(vi)  $z_n = \frac{n^3+in^2}{1-in^3}$ .

(vii)  $z_n = \frac{ni}{n+2i}$ .

(viii)  $z_n = \frac{(n+i)(1+ni)}{n^2}$ .

**Άσκηση 9.3.2** Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές μιγαδικών αριθμών

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)^n$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2i}{\sqrt{5}}\right)^n$

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{i}\right)^n$

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+in}$

(v)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in(-1)^n}{n^2}$

(vi)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+i}{n}$ .



# Βιβλιογραφία

- [1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex Variables, Introduction and Applications*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [2] A. Rybkin, *Complex Analysis Lecture Notes*, University of Alaska Fairbanks, 2014.
- [3] Λ. Ν. Τσίτσας, *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός*, 2<sup>η</sup> Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2003.

## Κεφάλαιο 10

# Μιγαδικές συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται η γενική έννοια μιας μιγαδικής συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής, καταγράφονται οι στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις: εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις, λογαριθμική συνάρτηση και δυναμοσυνάρτηση. Στη συνέχεια διακρίνονται ορισμένα ειδικά υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου (δίσκος, ανοικτό σύνολο, κλειστό σύνολο, πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο, πεδίο). Ιδιαίτερως, εξετάζεται το όριο και η συνέχεια των μιγαδικών συναρτήσεων. Τα υποσύνολα των μιγαδικών, τα οποία διακρίναμε προηγουμένως, θεωρούμενα ως πεδία ορισμού των μιγαδικών συναρτήσεων, συμβάλλουν καθοριστικά στον ορισμό και τη μελέτη της συνέχειας και της παραγώγου μιγαδικών συναρτήσεων.

### 10.1 Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής

Μία συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  αναφέρεται ως μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής με πεδίο ορισμού το  $A$  και συμβολίζεται επίσης με  $w = f(z), z \in A$ .

Επί παραδείγματι, οι τύποι

$$w = \operatorname{Re}(z), z \in \mathbb{C},$$

$$w = \bar{z}, z \in \mathbb{C},$$

$$w = \operatorname{Arg}(z), z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ορίζουν μιγαδικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το αναφερόμενο σύνολο.

Η συνάρτηση

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a_i \in \mathbb{C} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

ορίζεται ως μιγαδικό πολυώνυμο  $n$ -βαθμού και η συνάρτηση

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in A = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\},$$

όπου  $P(z)$  και  $Q(z)$  πολυωνυμα του  $z$ , ορίζεται ως ρητή συνάρτηση.

Έστω  $w = f(z)$ ,  $z \in A$ , μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής. Τότε, η έκφραση

$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$$

οδηγεί στη θεώρηση των πραγματικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) \quad \text{και} \quad v = v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

όπου  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in A\}$ , για τις οποίες ισχύει

$$w = f(z) = f(x + iy) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) + i\operatorname{Im}(f(x + iy)) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (10.1.1)$$

Οι συναρτήσεις  $u$  και  $v$  αναφέρονται ως το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της  $f$  και συνήθως γράφουμε  $f = u + iv$ .

**Παράδειγμα 10.1.1** Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος  $u$  και  $v$  της συνάρτησης

$$w = f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

**Λύση.** Από την

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2},$$

και την (10.1.1) έχουμε

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

△

**Παράδειγμα 10.1.2** Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος  $u$  και  $v$  της συνάρτησης

$$w = f(z) = z^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Λύση.** Από την

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

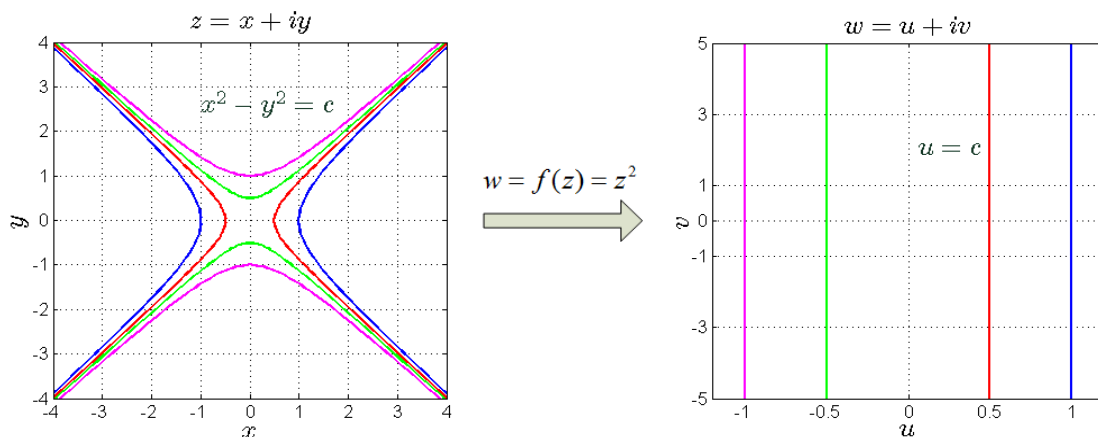
και την (10.1.1) έχουμε

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{και} \quad v(x, y) = 2xy.$$

△

Αν η  $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, τότε το γράφημα της  $f$  είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού επιπέδου. Αν η  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής, τότε το γράφημα της  $f$  απαιτεί τέσσερις διαστάσεις (δύο για τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x, y$  και δύο για τις εξαρτημένες  $u, v$ ) και για την οπτικοποίησή του απαιτούνται άλλες τεχνικές. Για παράδειγμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε τα γραφήματα των πραγματικών συναρτήσεων  $|f(z)|$ ,  $\operatorname{Re}(f(z))$  και  $\operatorname{Im}(f(z))$  της μιγαδικής μεταβλητής  $z = x + iy$  που είναι επιφάνειες στον  $\mathbb{R}^3$ . Εναλλακτικά, το γράφημα της συνάρτησης  $w = f(z)$  οπτικοποιείται ως εικόνα ένας υποσυνόλου σημείων  $(x, y)$  του επιπέδου  $z = x + iy$  σε ένα σύνολο σημείων  $(u, v)$  του επιπέδου  $w = u + iv$ .

Για τη συνάρτηση  $w = f(z) = z^2$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , από το προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε ότι  $u(x, y) = x^2 - y^2$  και  $v(x, y) = 2xy$ . Έτσι, τα σημεία  $(x, y)$  της υπερβολής  $x^2 - y^2 = c$ , όπου  $c$  σταθερά, του  $z$ -επιπέδου απεικονίζονται, μέσω της  $f(z)$ , στα σημεία  $(u, v)$  του  $w$ -επιπέδου με  $u = c$ , δηλαδή σε μία κατακόρυφη ευθεία του  $w$ -επιπέδου (Σχήμα 10.1). Περαιτέρω, τα σημεία της υπερβολής  $2xy = d$ , όπου  $d$  σταθερά, απεικονίζονται στην οριζόντια ευθεία  $v = d$  (Σχήμα 10.2).



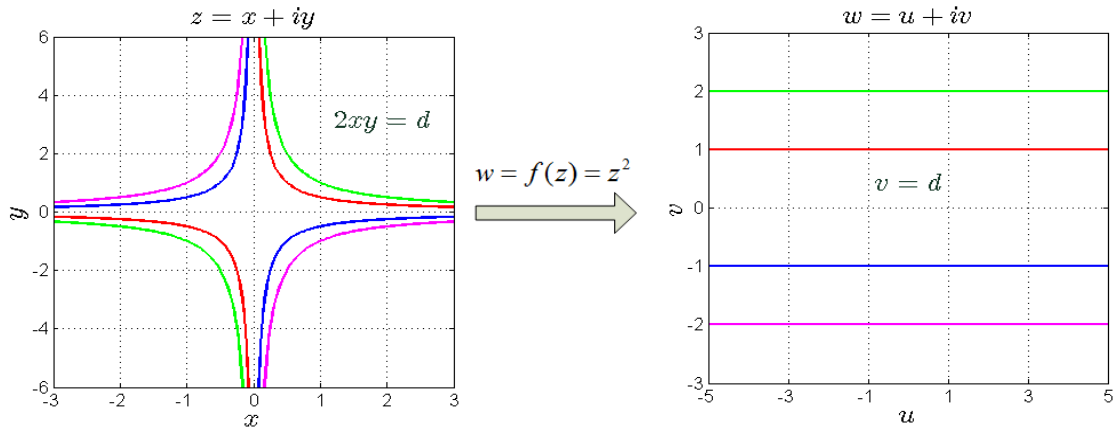
Σχήμα 10.1: Η συνάρτηση  $w = f(z) = z^2$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , απεικονίζει τις υπερβολές  $x^2 - y^2 = c$  του  $z$ -επιπέδου σε κατακόρυφες ευθείες  $u = c$  του  $w$ -επιπέδου.

## 10.2 Στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις

### Εκθετική συνάρτηση

Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , ορίζεται με τη βοήθεια της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής από τον τύπο

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (10.2.1)$$



Σχήμα 10.2: Η συνάρτηση  $w = f(z) = z^2$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , απεικονίζει τις υπερβολές  $2xy = d$  του  $z$ -επιπέδου σε οριζόντιες ευθείες  $v = d$  του  $w$ -επιπέδου.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι εξής ιδιότητες.

Όταν  $y = 0$ , τότε  $z = x \in \mathbb{R}$  και  $e^z = e^x$ . Όταν  $x = 0$ , τότε  $z = iy$  και προκύπτει ο τύπος *Euler*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (10.2.2)$$

Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της εκθετικής συνάρτησης είναι αντιστοίχως

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{και} \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Στην ακόλουθη πρόταση καταγράφονται οι κυριότερες ιδιότητες της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης.

**Πρόταση 10.2.1** Για  $z, w \in \mathbb{C}$  ισχύουν

(1) 
$$e^z e^w = e^{z+w},$$

(2) 
$$e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

(3) 
$$e^z \neq 0 \quad \text{και} \quad \arg(e^z) = \text{Im}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(4) 
$$|e^z| = e^{\text{Re}(z)}$$

(5) 
$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(6) 
$$e^z = e^w \Leftrightarrow z - w = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(7) 
$$e^z = e^{z+2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Απόδειξη.**

(1) Διαπιστώνεται από την (10.2.1) με τη βοήθεια στοιχειωδών τριγωνομετρικών υπολογισμών.

(2) Από την (1) έχουμε ότι  $e^z e^{-z} = e^0 = 1$  και άρα  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ .

(3) Η  $e^z e^{-z} = 1$  συνεπάγεται ότι  $e^z \neq 0$ .

(4) Προκύπτει επειδή  $|e^{i\text{Im}(z)}| = 1$ .

(5)  $e^z = 1 \Rightarrow |e^z| = e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ .

Έτσι,  $e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1 \Rightarrow \cos y = 1$  και  $\sin y = 0 \Rightarrow y = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

και άρα  $z = 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Αντιστρόφως, αν  $z = 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , τότε  $e^z = 1$ .

(6) Από την (2) έχουμε  $e^z = e^w \Rightarrow e^{z-w} = 1 \Rightarrow z - w = 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

(7) Προκύπτει ως άμεση συνέπεια της ιδιότητας (6).

□

**Σημείωση 10.2.1** Από την ιδιότητα (7) της τελευταίας πρότασης, βλέπουμε ότι η μιγαδική εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi i$ . Εξάλλου, δεν ισχύει αντίστοιχη ιδιότητα για την πραγματική περιοδική συνάρτηση.

△

**Παράδειγμα 10.2.1** Λύστε τη μιγαδική εξίσωση  $e^z = \alpha i$ ,  $\alpha > 0$ .

**Λύση.** Για  $z = x + iy$ , έχουμε

$$e^z = \alpha i \Rightarrow e^x \cos y = 0 \text{ και } e^x \sin y = \alpha$$

$$\Rightarrow y = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ και } \sin y > 0$$

$$\Rightarrow y = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

οπότε

$$e^x = \alpha \Rightarrow x = \ln \alpha,$$

και τελικά

$$z = \ln \alpha + \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

△

**Παράδειγμα 10.2.2** Βρείτε το μέτρο, το πραγματικό καθώς και το φανταστικό μέρος του

$$z = e^{(2+3i)x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Λύση.** Από την (10.2.1), έχουμε ότι

$$z = e^{(2+3i)x} = e^{2x} e^{3ix} = e^{2x} (\cos(3x) + i \sin(3x)) = e^{2x} \cos(3x) + i e^{2x} \sin(3x),$$

και άρα

$$\operatorname{Re}(e^{(2+3i)x}) = e^{2x} \cos(3x),$$

και

$$\operatorname{Im}(e^{(2+3i)x}) = e^{2x} \sin(3x).$$

△

**Παράδειγμα 10.2.3** Βρείτε το μέτρο, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του

$$z = e^{e^{ix}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Λύση.** Από τις

$$e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} e^{i \sin x},$$

και

$$|e^{i \sin x}| = 1,$$

λαμβάνουμε

$$\left| e^{e^{ix}} \right| = e^{\cos x}.$$

Επίσης, επειδή

$$e^{\cos x} e^{i \sin x} = e^{\cos x} (\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)),$$

έχουμε ότι

$$\operatorname{Re}(e^{e^{ix}}) = e^{\cos x} \cos(\sin x)$$

και

$$\operatorname{Im}(e^{e^{ix}}) = e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

△

**Παράδειγμα 10.2.4** Δείξτε ότι

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Λύση.** Για  $z = x + iy$ , έχουμε

$$\overline{e^z} = \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^x e^{iy}} = e^x \overline{e^{iy}} = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\overline{z}}.$$

△

### Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Για  $x \in \mathbb{R}$ , από τις

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

και

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

λαμβάνουμε

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{και} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

οι οποίες μας οδηγούν στον ορισμό των μιγαδικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{και} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (10.2.3)$$

Με χρήση των (10.2.1) και (10.2.3) μπορεί να αποδειχτεί εύκολα ότι για τις  $\cos z$  και  $\sin z$  ισχύουν όλες οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες που ισχύουν για τις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις.

**Παράδειγμα 10.2.5** Λύστε τις μιγαδικές εξισώσεις

$$\sin z = 0 \quad \text{και} \quad \cos z = 0.$$

**Λύση.** Με τη βοήθεια των τύπων (10.2.3) και της ιδιότητας (6) της εκθετικής συνάρτησης, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \sin z = 0 &\Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{2iz} = 1 = e^0 \\ &\Rightarrow 2iz = 0 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \cos z = 0 &\Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i\pi} \\ &\Rightarrow 2iz = i\pi + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

△



**Παράδειγμα 10.2.6** Δείξτε ότι

$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z}, \quad \overline{\cos z} = \cos \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Λύση.** Με τη βοήθεια του αποτελέσματος του Παραδείγματος 10.2.4, ευρίσκουμε

$$\overline{\sin z} = \frac{\overline{e^{iz} - e^{-iz}}}{\overline{2i}} = -\frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{2i} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \sin \bar{z}.$$

και

$$\overline{\cos z} = \frac{\overline{e^{iz} + e^{-iz}}}{2} = \frac{e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}}{2} = \cos \bar{z}.$$

△

**Σημείωση 10.2.2** Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι φραγμένες σε αντίθεση με τις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις.

Παραδείγματος χάριν, για τη συνάρτηση  $\sin z$  με  $z = x + iy$ , από την ιδιότητα (7) της Πρότασης 8.1.3, έχουμε

$$|\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \geq \frac{|e^{iz}| - |e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-y} - e^y}{2},$$

και επομένως, για  $z = iy$  με  $y \rightarrow -\infty$ , λαμβάνουμε  $|\sin z| \rightarrow +\infty$ .

△

Περαιτέρω, ορίζουμε τις μιγαδικές συναρτήσεις εφαπτομένης και συνεφαπτομένης από τους τύπους

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (10.2.4)$$

### Υπερβολικές συναρτήσεις

Οι μιγαδικές συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο ορίζονται με τη βοήθεια της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης ως εξής

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{και} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (10.2.5)$$

Οι ιδιότητες των πραγματικών υπερβολικών συναρτήσεων διατηρούνται και στις αντίστοιχες μιγαδικές. Για παράδειγμα, από τις (10.2.5), εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύουν

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1, \quad \sinh(2z) = 2 \sinh z \cosh z, \\ \cosh(-z) &= \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z. \end{aligned}$$

Υπάρχει μία στενή συσχέτιση ανάμεσα στις μιγαδικές τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις. Ακριβέστερα, για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$ , ισχύουν

$$\begin{aligned}\sin(iz) &= i \sinh z, & \cos(iz) &= \cosh z, \\ \sinh(iz) &= i \sin z, & \cosh(iz) &= \cos z, \\ \sinh z &= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \\ \cosh z &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,\end{aligned}$$

οι οποίες εκφράζουν τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των μιγαδικών τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων, και από τις οποίες προκύπτουν

$$|\sinh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y} \quad \text{και} \quad |\cosh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \cos^2 y}. \quad (10.2.6)$$

Οι μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις  $\sinh z$  και  $\cosh z$  είναι, όπως και η μιγαδική εκθετική συνάρτηση, περιοδικές με περίοδο  $2\pi i$ .

Για να λύσουμε την εξίσωση

$$\sinh z = 0,$$

παρατηρούμε, με τη βοήθεια της (10.2.6), ότι ισχύει

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow \sinh x = 0 \quad \text{και} \quad \sin y = 0.$$

Οι λύσεις των τελευταίων είναι

$$x = 0 \quad \text{και} \quad y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

και έτσι ευρίσκουμε τις ρίζες

$$z = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

της εξίσωσης.

Με παρόμοιο τρόπο, συνάγουμε ότι η εξίσωση

$$\cosh z = 0$$

έχει τις ρίζες

$$z = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Εξάλλου, οι συναρτήσεις υπερβολική εφαπτομένη και υπερβολική συνεφαπτομένη ορίζονται από

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad z \neq \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) i \quad \text{και} \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}, \quad z \neq k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10.2.7)$$

Οι συναρτήσεις  $\tanh z$  και  $\coth z$  είναι περιοδικές με περίοδο  $\pi i$ .

### Λογαριθμική συνάρτηση

Για  $z \neq 0$  και  $w = u + iv$ , η εξίσωση

$$e^w = z,$$

γράφεται

$$e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = z,$$

από την οποία προκύπτουν

$$e^u = |z| \Rightarrow u = \ln |z| \text{ και } v = \text{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (10.2.8)$$

οπότε

$$w = \ln |z| + i\text{Arg}(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ενώ ισχύει

$$0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi.$$

Η πλειότιμη συνάρτηση

$$\log z = \ln |z| + i\text{Arg}(z) + 2k\pi i, \quad z \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (10.2.9)$$

ονομάζεται *λογάριθμος* του  $z$ . Εξάλλου, η (10.2.9), για  $k = 0$ , ορίζει μία μονότιμη συνάρτηση

$$\text{Log} z = \ln |z| + i\text{Arg}(z), \quad z \neq 0, \quad (10.2.10)$$

η οποία ονομάζεται *κύρια ή πρωτεύουσα τιμή ή (πρωτεύων κλάδος) του λογαρίθμου*.

Για  $z = x > 0$  (οπότε  $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(x) = 0$ ), η κύρια τιμή του μιγαδικού λογαρίθμου συμπίπτει με την πραγματική συνάρτηση  $\ln x$ , δηλαδή ισχύει

$$\text{Log} x = \ln x, \quad x > 0,$$

ενώ

$$\log x = \ln x + 2k\pi i, \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

και επομένως η μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση διαφέρει από τη πραγματική λογαριθμική συνάρτηση κατά ακέραια πολλαπλάσια του  $2\pi i$ .

**Παράδειγμα 10.2.7** Βρείτε τους λογαρίθμους

$$(i) \log i, \quad (ii) \text{Log}(2i), \quad (iii) \text{Log}(-5), \quad (iv) \text{Log}(1 + i).$$

Λύση.

$$(i) \quad \log i = \ln |i| + i\text{Arg}(i) + 2k\pi i = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$(ii) \quad \text{Log}(2i) = \ln |2i| + i\text{Arg}(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2},$$

$$(iii) \quad \text{Log}(-5) = \ln |-5| + i\text{Arg}(-5) = \ln 5 + i\pi,$$

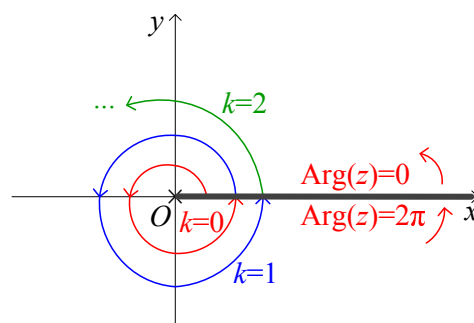
$$(iv) \quad \text{Log}(1+i) = \ln |1+i| + i\text{Arg}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

△

Έστω, τώρα ότι θεωρούμε ένα συγκεκριμένο σημείο  $z = x > 0$  και τον πρωτεύοντα κλάδο της λογαριθμικής συνάρτησης  $\log z$  (δηλαδή επιλέγουμε  $k = 0$ ). Τότε

$$\log z = \text{Log}z = \ln x.$$

Στη συνέχεια αφήνουμε το  $z$  να μεταβληθεί σε ένα κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα  $x$ , οπότε  $z = xe^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Καθώς το  $\theta$  μεταβάλλεται από το 0 στο  $2\pi$ , η τιμή της συνάρτησης  $\log z$  μεταβάλλεται αντιστοίχως από  $\ln x$  σε  $\ln x + 2\pi i$ . Έτσι, βλέπουμε ότι το  $z = 0$  είναι ένα κλαδικό σημείο, καθώς περιστροφή γύρω από το σημείο αυτό (με ακτίνα  $x$  που μπορεί να επιλεγεί κατάλληλα μικρή) οδηγεί σε αλλαγή της τιμής της  $\log z$ , αφού μεταπίπτουμε σε έναν άλλο κλάδο της συνάρτησης, ο οποίος προσδιορίζεται από μία νέα τιμή του  $k$  στην (10.2.9). Πράγματι, μετά από μία περιστροφή βρισκόμαστε στον  $k = 1$  κλάδο της  $\log z$ . Στην επόμενη περιστροφή θα βρεθούμε στον  $k = 2$  κλάδο κοκ. Υπό αυτή την έννοια, βλέπουμε ότι η  $\log z$  έχει άπειρους κλάδους, ενώ η ημιευθεία  $z = x > 0$  (θετικός πραγματικός ημιάξονας) του μιγαδικού επιπέδου ονομάζεται κλαδική τομή (Σχήμα 10.3).

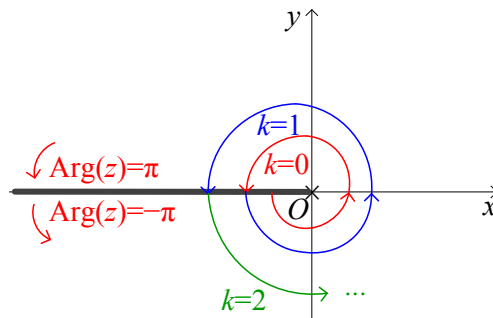


Σχήμα 10.3: Κλαδική τομή (έντονη γραμμή) και κλάδοι της μιγαδικής λογαριθμικής συνάρτησης  $\log z$  για  $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$ . Το κλαδικό σημείο  $z = 0$  απεικονίζεται με  $\times$ .

Οι επιλογές του πρωτεύοντος κλάδου της λογαριθμικής συνάρτησης καθώς και της κλαδικής τομής γενικά καθορίζονται από το διάστημα μήκους  $2\pi$ , στο οποίο ανήκει το πρωτεύον όρισμα  $\text{Arg}(z)$  του μιγαδικού  $z$ . Για παράδειγμα, αν είχαμε ορίσει

$$-\pi \leq \text{Arg}(z) < \pi,$$

τότε η αλλαγή στην τιμή (στον κλάδο) της  $\log z$  θα γινόταν σε κάθε πέρασμα από την ημιευθεία  $z = x < 0$  (αρνητικός πραγματικός ημιάξονας), η οποία θα όριζε και την κλαδική τομή (Σχήμα 10.4). Τότε, ένας  $z = x < 0$  στον πρωτεύοντα κλάδο ( $k = 0$ ) της  $\log z$  έχει τιμή  $\ln|x| - \pi i$ , ενώ μετά από περιστροφή κατά  $2\pi$  περί το  $z = 0$  μεταπίπτουμε στον επόμενο κλάδο ( $k = 1$ ) της  $\log z$  με τιμή  $\ln|x| - \pi i + 2\pi i = \ln|x| + \pi i$ .



Σχήμα 10.4: Κλαδική τομή (έντονη γραμμή) και κλάδοι της μιγαδικής λογαριθμικής συνάρτησης  $\log z$  για  $-\pi \leq \text{Arg}(z) < \pi$ . Το κλαδικό σημείο  $z = 0$  απεικονίζεται με  $\times$ .

Περαιτέρω, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το  $z = \infty$  είναι επίσης κλαδικό σημείο της  $\log z$  (για την απόδειξη βλ. π.χ. [1]). Η κλαδική τομή οπτικοποιείται ως μία καμπύλη η οποία ενώνει τα δύο κλαδικά σημεία  $z = 0$  και  $z = \infty$ . Απεικονίζοντας την κλαδική τομή, με τη βοήθεια της στερεογραφικής προβολής (8.3.3), στη σφαίρα Riemann  $\Sigma$  διαπιστώνουμε ότι η εικόνα της κλαδικής τομής είναι τόξο κύκλου που ενώνει το νότιο πόλο  $O(0, 0, 0)$  της  $\Sigma$  με το βόρειο πόλο  $N(0, 0, 2)$  αυτής.

Εξάλλου, για την συνάρτηση  $\log(zw)$ , από την (10.2.9) για  $z \neq 0$  και  $w \neq 0$ , ευρίσκουμε

$$\log(zw) = \ln|zw| + i\text{Arg}(zw) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

οπότε από την (8.4.6), με  $k = k_1 + k_2$ , λαμβάνουμε

$$\log(zw) = \ln|z| + \ln|w| + i\text{Arg}(z) + i\text{Arg}(w) + 2k_1\pi i + 2k_2\pi i, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z},$$

η οποία γράφεται ως

$$\log(zw) = \log z + \log w, \quad z, w \neq 0, \tag{10.2.11}$$

όπου στην τελευταία η ισότητα θεωρείται μεταξύ συνόλων, δηλαδή για κάθε  $b \in \log(zw)$  υπάρχουν  $b_1 \in \log z$  και  $b_2 \in \log w$  τέτοια ώστε  $b = b_1 + b_2$ .

Σημειώνουμε επίσης ότι, με παρόμοια διαδικασία, και υπό την ίδια έννοια ισότητας συνόλων, προκύπτει ο τύπος

$$\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w, \quad z, w \neq 0. \tag{10.2.12}$$

### Δυναμοσυνάρτηση

Με τη βοήθεια της μιγαδικής λογαριθμικής συνάρτησης, ορίζεται, για δοσμένο  $w \in \mathbb{C}$ , η (πλειότιμη) μιγαδική δυναμοσυνάρτηση

$$z^w = e^{w \log z}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (10.2.13)$$

Αρχικά, αναλύουμε την ειδική περίπτωση που ο  $w$  είναι ρητός πραγματικός αριθμός, δηλαδή  $w = \frac{p}{q}$ , όπου  $p$  και  $q$  ακέραιοι χωρίς κοινούς διαιρέτες. Τότε από την (10.2.13), με τη βοήθεια της (10.2.9), λαμβάνουμε

$$z^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}(\ln|z| + i\text{Arg}(z) + 2k\pi i)} = e^{\frac{p}{q}(\ln|z| + i\text{Arg}(z))} e^{2\pi i \frac{kp}{q}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (10.2.14)$$

η οποία για  $k = 0, 1, \dots, q-1$  λαμβάνει (λόγω του όρου  $e^{2\pi i \frac{kp}{q}}$ )  $q$  διαφορετικές τιμές. Για  $k = q, q+1, \dots, 2q-1$ , οι προηγούμενες τιμές της  $z^{\frac{p}{q}}$  επαναλαμβάνονται κοκ. Έτσι, η (10.2.14) δίνει τους  $q$  κλάδους της συνάρτησης  $z^{\frac{p}{q}}$ . Τα κλαδικά της σημεία είναι, όπως και στη μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση, τα  $z = 0$  και  $z = \infty$ . Η κλαδική τομή επιλέγεται, για  $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$ , να είναι ο θετικός πραγματικός ημιάξονας ( $z = x > 0$ ).

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για τη συνάρτηση  $(z - z_0)^{\frac{p}{q}}$ , της οποίας το (πεπερασμένο) κλαδικό σημείο είναι το  $z = z_0$ . Για  $w \in \mathbb{C}$ , που δεν είναι ρητοί, η συνάρτηση  $z^w$  έχει άπειρους κλάδους με κλαδικά σημεία τα  $z = 0$  και  $z = \infty$ .

**Παράδειγμα 10.2.8** Υπολογίστε τις τιμές του  $2^i$ .

**Λύση.** Από την (10.2.13), έχουμε

$$2^i = e^{i \log 2},$$

η οποία, με τη βοήθεια της (10.2.9) και αφού  $\text{Arg}(2) = 0$ , γράφεται

$$2^i = e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ή ισοδύναμα

$$2^i = e^{-2k\pi} [\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Από την τελευταία βλέπουμε ότι η  $2^i$  έχει άπειρους κλάδους, όπου ο κάθε ένας αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη τιμή του  $k$ . Ο πρωτεύων κλάδος (για  $k = 0$ ) έχει τιμή  $\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)$ .

△

**Παράδειγμα 10.2.9** Υπολογίστε τις τιμές του  $i^i$ .

**Λύση.** Από την (10.2.13), έχουμε

$$i^i = e^{i \log i},$$

ενώ από την (10.2.9), λαμβάνουμε

$$\log i = \ln |i| + i \operatorname{Arg}(i) + 2k\pi i = i \frac{\pi}{2} + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

οπότε συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες, ευρίσκουμε

$$i^i = e^{i(i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

δηλαδή βλέπουμε ότι όλες οι τιμές του  $i^i$  είναι πραγματικές.

△

**Παράδειγμα 10.2.10** Υπολογίστε τις τιμές του  $(1+i)^{1-i}$ .

**Λύση.** Από την (10.2.13), έχουμε

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i) \log(1+i)}.$$

Επειδή  $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$  και  $|1+i| = \sqrt{2}$ , από την τελευταία ευρίσκουμε

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)(\ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

η οποία, αφού  $e^{2k\pi i} = 1$ , γράφεται

$$(1+i)^{1-i} = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} e^{i(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2})},$$

και έτσι τελικά λαμβάνουμε

$$(1+i)^{1-i} = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

△

### Αντίστροφες τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις

Η εξίσωση

$$\sin w = z,$$

με τη βοήθεια της (10.2.3), γράφεται

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z,$$

η οποία οδηγεί στην εξίσωση δευτέρου βαθμού (ως προς  $e^{iw}$ )

$$(e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

που έχει ως λύσεις

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Έτσι, λαμβάνοντας τους λογαρίθμους και των δύο μελών της τελευταίας, ευρίσκουμε

$$w = -i \log \left( iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right),$$

η οποία μας οδηγεί στον ορισμό της μιγαδικής συνάρτησης τόξο ημιτόνου

$$\arcsin z = -i \log \left( iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (10.2.15)$$

η οποία είναι πλειότιμη μιγαδική συνάρτηση, αφού ορίζεται με τη βοήθεια του  $\log z$  και της δίτιμης συνάρτησης  $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$  (που παριστάνει τις δύο τετραγωνικές ρίζες της  $1 - z^2$  και έχει δύο κλαδικά σημεία τα  $z = \pm 1$ ). Η μονότιμη συνάρτηση που προκύπτει από την (10.2.15), λαμβάνοντας τους πρωτεύοντες κλάδους του λογαρίθμου και της τετραγωνικής ρίζας, ονομάζεται κύριος κλάδος ή πρωτεύουσα τιμή του τόξου ημιτόνου.

Με παρόμοιους τρόπους, ορίζονται και οι ακόλουθες πλειότιμες αντίστροφες τριγωνομετρικές και αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \arccos z &= -i \log \left( z + i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right), \\ \arctan z &= \frac{i}{2} \log \left( \frac{i + z}{i - z} \right), \quad z \neq \pm i, \\ \operatorname{arccot} z &= -\frac{i}{2} \log \left( \frac{z + i}{z - i} \right), \quad z \neq \pm i, \\ \operatorname{arcsinh} z &= \log \left( z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right), \\ \operatorname{arccosh} z &= \log \left( z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right), \\ \operatorname{arctanh} z &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right), \quad z \neq \pm 1, \\ \operatorname{arccoth} z &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right), \quad z \neq \pm 1. \end{aligned} \quad (10.2.16)$$

**Παράδειγμα 10.2.11** Υπολογίστε τις τιμές του  $\arccos 2$ .

**Λύση.** Στο πεδίο των πραγματικών αριθμών, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης του συνημιτόνου είναι η μονάδα. Έτσι, αναμένουμε η  $\arccos 2$  να δίνεται από μιγαδικούς αριθμούς.



Έστω  $w = \arccos 2$ , τότε  $\cos w = 2$ , και έτσι

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 2,$$

οπότε προκύπτει η εξίσωση δευτέρου βαθμού

$$(e^{iw})^2 - 4e^{iw} + 1 = 0,$$

η οποία έχει τις λύσεις

$$e^{iw} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Λαμβάνοντας λογαρίθμους και στα δύο μέλη της τελευταίας, έχουμε

$$w = -i \log(2 \pm \sqrt{3}).$$

Επειδή  $\text{Arg}(2 + \sqrt{3}) = \text{Arg}(2 - \sqrt{3}) = 0$ , με τη βοήθεια της τελευταίας και της (10.2.9), ευρίσκουμε

$$w = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Το  $\pm$  εκφράζει τους δύο κλάδους της τετραγωνικής ρίζας στην πρώτη των (10.2.16), ενώ το  $k$  εκφράζει την τάξη του κλάδου του μιγαδικού λογαρίθμου.

Εναλλακτικά, από την πρώτη των (10.2.16), για  $z = 2$ , λαμβάνουμε

$$\arccos 2 = -i \log\left(2 + i(-3)^{\frac{1}{2}}\right),$$

οπότε επανευρίσκουμε το αποτέλεσμα του πρώτου τρόπου, αφού  $(-3)^{\frac{1}{2}} = \pm i\sqrt{3}$ .

△

### 10.3 Ειδικά υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου

Στην παράγραφο αυτή διακρίνουμε ορισμένα ειδικά, σημαντικά και χρηστικά υποσύνολα του  $\mathbb{C}$ , τα οποία προσδιορίζονται από αλγεβρικές και μετρικές ιδιότητες του  $\mathbb{C}$ . Τα σύνολα αυτά χρησιμοποιούνται ως πεδία ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων και συμβάλλουν καθοριστικά στη μελέτη της έννοιας του ορίου, της συνέχειας και της ολομορφίας των μιγαδικών συναρτήσεων.

Έστω  $z_0 \in \mathbb{C}$  και  $\epsilon > 0$ . Το σύνολο

$$D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

ονομάζεται ανοικτός δίσκος με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $\epsilon$ , ενώ το σύνολο

$$\overline{D}_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}$$

ονομάζεται κλειστός δίσκος με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $\epsilon$ .

Έστω  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Ένα σημείο  $z_0 \in A$  ονομάζεται εσωτερικό σημείο του  $A$  αν υπάρχει ένας ανοικτός δίσκος  $D_\epsilon(z_0)$ , ο οποίος περιέχεται στο  $A$ .

**Ορισμός 10.3.1** Ένα υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται ανοικτό όταν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό, δηλαδή όταν για κάθε  $z \in A$  υπάρχει ένα  $\epsilon_z > 0$  με  $D_{\epsilon_z}(z) \subseteq A$ .

□

### Παραδείγματα ανοικτών συνόλων.

Τα σύνολα που ορίζονται από τις ανισότητες

$$(1) |z - z_0| < \epsilon \text{ (ανοικτός δίσκος)}$$

$$(2) 2 < |z| < 3 \text{ (δακτύλιος)}$$

$$(3) |z - i| > 4 \text{ (εξωτερικό κύκλου)}$$

$$(4) \operatorname{Im}(z) < 0 \text{ (κάτω ημιεπίπεδο)}$$

$$(5) -2 < \operatorname{Re}(z) < 2 \text{ (λωρίδα)}$$

είναι ανοικτά σύνολα.

△

Ένα  $A \subseteq \mathbb{C}$  ονομάζεται πολυγωνικά συνεκτικό αν κάθε δύο σημεία του συνδέονται με μία πολυγωνική γραμμή (δηλαδή ένωση διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων), η οποία ανήκει στο  $A$ .

### Παραδείγματα.

(α) Τα ανοικτά σύνολα των παραπάνω περιπτώσεων (1)-(5) είναι και πολυγωνικά συνεκτικά.

(β) Το ανοικτό σύνολο  $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \neq 1\}$  δεν είναι πολυγωνικά συνεκτικό.

△

Ένα μη κενό, ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ονομάζεται πεδίο ή τόπος.

Έστω  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Ένα σημείο  $z_0 \in \mathbb{C}$  ονομάζεται συνοριακό σημείο του  $A$  αν κάθε ανοικτός δίσκος με κέντρο το  $z_0$  περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του  $A$  και τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει στο  $A$ . Το σύνολο  $\partial A$  των συνοριακών σημείων του  $A$  ονομάζεται σύνορο του  $A$ .

**Παραδείγματα.**

(1)  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \epsilon\}$

(2)  $A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \text{ και } |z| = 3\}$

(3)  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 4\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$

(4)  $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$

(5)  $A = \{z \in \mathbb{C} : -2 < \text{Re}(z) < 2\}, \quad \partial A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = -2 \text{ και } \text{Re}(z) = 2\}.$

△

Ένα  $K \subseteq \mathbb{C}$  ονομάζεται *κλειστό* όταν περιέχει το σύνορό του  $\partial K$ , που ισοδυναμεί με το ότι το συμπλήρωμά του  $\mathbb{C} \setminus K$  είναι ανοικτό. Επί παραδείγματι, ο κλειστός δίσκος  $\overline{D}_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}$  είναι κλειστό σύνολο, αφού περιέχει το σύνορό του  $\partial \overline{D}_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \epsilon\}$ .

Ένα  $B \subseteq \mathbb{C}$  ονομάζεται *φραγμένο* όταν το σύνολο  $\{|z| : z \in B\}$  είναι φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , δηλαδή όταν υπάρχει  $M > 0$  έτσι ώστε να ισχύει ότι  $|z| \leq M$ , για κάθε  $z \in B$ .

**Παραδείγματα.** Από τα ανοικτά σύνολα των περιπτώσεων (1)-(5) του πρώτου παραδείγματος, φραγμένα είναι μόνο ο ανοικτός δίσκος και ο δακτύλιος.

△

**10.4 Όρια μιγαδικών συναρτήσεων**

Για τον ορισμό του ορίου μιας μιγαδικής συνάρτησης χρειαζόμαστε την έννοια του σημείου συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της, η οποία εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του ορίου.

Έστω  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Ένα  $z_0 \in \mathbb{C}$  ονομάζεται *σημείο συσσώρευσης* του συνόλου  $A$  όταν κάθε ανοικτός δίσκος  $D_\epsilon(z_0)$  περιέχει ένα (τουλάχιστον) σημείο του  $A$  διαφορετικό από το  $z_0$ , δηλαδή όταν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $z \in A$  με  $z \neq z_0$  και  $|z - z_0| < \epsilon$  ή ισοδύναμα  $0 < |z - z_0| < \epsilon$ . Εξάλλου, ένα σημείο  $z_0$  του  $A$ , το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$ , ονομάζεται *μεμονωμένο σημείο* του  $A$ .

**Σημείωση.** Είναι σαφές ότι για ένα ανοικτό  $A \subseteq \mathbb{C}$  όλα τα σημεία του  $A \cup \partial A$  είναι σημεία συσσώρευσης του  $A$ .

**Ορισμός 10.4.1** Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$  και  $z_0 \in \mathbb{C}$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ως όριο το μιγαδικό

αριθμό  $\ell$  (ή συγκλίνει προς το μιγαδικό αριθμό  $\ell$ ), καθώς το  $z$  τείνει στο  $z_0$ , τότε και μόνο τότε όταν για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  έτσι ώστε

$$\text{για κάθε } z \in A \text{ με } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \epsilon.$$

Αν το  $z_0$  είναι μεμονωμένο σημείο του  $A$  (οπότε  $z_0 \in A$ ) ως όριο της  $f$ , καθώς το  $z$  τείνει στο  $z_0$ , ορίζεται η τιμή  $f(z_0)$ .

□

Το όριο της  $f$  στο  $z_0$ , όταν υπάρχει, είναι μοναδικό και συμβολίζεται με

$$\ell = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

### Παρατηρήσεις.

(i) Για τον ορισμό της έννοιας του ορίου, δεν απαιτείται το  $z_0$  να ανήκει στο σύνολο  $A$  ούτε να ορίζεται η τιμή  $f(z_0)$ .

(ii) Στις περιπτώσεις πραγματικών συναρτήσεων, ένας πραγματικός αριθμός  $x_0$  προσεγγίζεται από δύο συγκεκριμένες κατευθύνσεις ( $x > x_0$  και  $x < x_0$ ). Όμως, στις μιγαδικές συναρτήσεις, η προσέγγιση  $z \rightarrow z_0$  επιτρέπεται κατά οποιονδήποτε δυνατό τρόπο, π.χ. κατά μήκος μιας καμπύλης που διέρχεται από το  $z_0$ .

△

**Παράδειγμα 10.4.1** Εξετάστε, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 - 1}{z - i}$ .

**Λύση.** Από την

$$\frac{z^4 - 1}{z - i} = \frac{(z^2 - 1)(z^2 + 1)}{z - i} = (z^2 - 1)(z + i), \quad z \neq i,$$

έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 - 1}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z^2 - 1)(z + i) = -4i.$$

△

**Παράδειγμα 10.4.2** Εξετάστε, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z}$ .

**Λύση.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(z) = \frac{z}{z}$ ,  $z \neq 0$ , και προσεγγίζουμε το σημείο 0

(i) κατά μήκος του θετικού πραγματικού ημιάξονα, δηλαδή θεωρούμε ότι  $z = x + i0$ ,  $x \rightarrow 0^+$ , οπότε έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x + i0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + i0}{x + i0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

(ii) κατά μήκος του θετικού φανταστικού ημιάξονα, δηλαδή θεωρούμε ότι  $z = 0 + iy$ ,  $y \rightarrow 0^+$ , οπότε

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(0 + iy) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{0 + iy}{0 + iy} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{iy}{-iy} = -1.$$

Οι δύο προηγούμενες προσεγγίσεις οδηγούν σε διαφορετικά όρια που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το ζητούμενο  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ .

△

Με παρόμοια διαδικασία επεξεργαζόμαστε και το ακόλουθο

**Παράδειγμα 10.4.3** Εξετάστε, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)}$ .

**Λύση.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)}$ ,  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ , και επιλέγουμε τις προσεγγίσεις του σημείου 0

(i) κατά μήκος της ημιευθείας  $z = x + ix$ ,  $x > 0$ , οπότε λαμβάνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x + ix) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Re}(x + ix)}{\operatorname{Im}(x + ix)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

(ii) κατά μήκος του θετικού φανταστικού ημιάξονα, δηλαδή θεωρούμε ότι  $z = 0 + iy$ ,  $y \rightarrow 0^+$ , οπότε

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(0 + iy) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Re}(0 + iy)}{\operatorname{Im}(0 + iy)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{0}{y} = 0$$

και έτσι συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το ζητούμενο  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ .

△

Η συσχέτιση του ορίου μιας μιγαδικής συνάρτησης με τα όρια του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της καταγράφεται στην ακόλουθη

**Πρόταση 10.4.1** Έστω η μιγαδική συνάρτηση  $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και  $z_0 = x_0 + iy_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0$
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$  και  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$ .

□

**Πρόταση 10.4.2 (Αλγεβρικές ιδιότητες ορίων)**

Έστω  $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  δύο μιγαδικές συναρτήσεις και  $z_0$  ένα σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα όρια  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  και  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ . Τότε, υπάρχουν επίσης τα όρια

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (\lambda f(z)), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

( $\lambda \in \mathbb{C}$  και για το τελευταίο όριο υποθέτουμε ότι  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$ ) και ισχύουν

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (\lambda f(z)) &= \lambda \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) &= \left( \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right) \left( \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \right), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}. \end{aligned}$$

□

**10.5 Συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις**

Η συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων ορίζεται με τη βοήθεια της έννοιας του ορίου όπως ακολουθεί.

**Ορισμός 10.5.1** Μία μιγαδική συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$ , ονομάζεται *συνεχής* σε ένα σημείο  $z_0 \in A$  όταν υπάρχει το  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  και ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Εξάλλου, η συνάρτηση  $f$  ονομάζεται *συνεχής* στο  $A$  όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $z_0 \in A$ .

□

Η συσχέτιση της συνέχειας μιας μιγαδικής συνάρτησης με τη συνέχεια του πραγματικού και του φανταστικού της μέρους καταγράφεται στο ακόλουθο

**Θεώρημα 10.5.1** Μία μιγαδική συνάρτηση  $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής στο σημείο  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$  τότε και μόνο τότε όταν οι πραγματικές συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  είναι συνεχείς στο σημείο  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

□

**Θεώρημα 10.5.2 (Αλγεβρικές ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων)**

Έστω  $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  δύο μιγαδικές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$ , οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα σημείο  $z_0 \in A$ . Τότε οι συναρτήσεις

$$f + g, \quad \lambda f, \quad fg \quad \text{και} \quad \frac{f}{g}$$

(όπου  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $g(z_0) \neq 0$ ) είναι συνεχείς στο  $z_0$ .

□

**Παραδείγματα.**

(1) Οι συναρτήσεις  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$ ,  $|\bar{z}|$  είναι συνεχείς στο  $\mathbb{C}$ .

(2) Η πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

είναι συνεχής στο  $\mathbb{C}$ .

(3) Η ρητή συνάρτηση

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0$$

είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(4) Η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \frac{z}{z}, & z \neq 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο  $z = 0$  διότι, όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 10.4.2, δεν υπάρχει το  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ .

△

**Θεώρημα 10.5.3** Έστω δύο μιγαδικές συναρτήσεις  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και  $g : B \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με τις ιδιότητες:  $f(A) \subseteq B$ , η  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $z_0 \in A$  και η  $g$  είναι συνεχής στο σημείο  $f(z_0) \in B$ . Τότε, η σύνθεση  $(g \circ f)(z) \equiv g(f(z)) : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής στο  $z_0$ .

□

Μία μιγαδική συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ονομάζεται *φραγμένη* στο  $A$  όταν το πεδίο τιμών  $f(A)$  αυτής είναι φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ , δηλαδή όταν υπάρχει ένα  $M > 0$  έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in A.$$

**Θεώρημα 10.5.4** Κάθε συνεχής μιγαδική συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με πεδίο ορισμού το κλειστό και φραγμένο υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  είναι φραγμένη.

□

**Θεώρημα 10.5.5 (Θεώρημα μεγίστης και ελαχίστης τιμής)**

Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το κλειστό και φραγμένο υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$ . Τότε, υπάρχουν σημεία  $z_\epsilon$  και  $z_\mu$  του  $A$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(z_\epsilon)| \leq |f(z)| \leq |f(z_\mu)|, \quad \forall z \in A.$$

□

## 10.6 Ασκήσεις

**Άσκηση 10.6.1** Λύστε τις μιγαδικές εξισώσεις

(i)  $\operatorname{Log} z = \frac{\pi}{2}i$

(ii)  $\operatorname{Log} z = \frac{3\pi}{2}i$

(iii)  $e^z = \pi i$

(iv)  $\sin z = \cosh 4$

(v)  $\overline{e^{iz}} = e^{i\bar{z}}$

(vi)  $z^{\frac{1}{2}} = 1 + i.$



**Άσκηση 10.6.2** Δείξτε ότι

$$|a^z| = a^{\operatorname{Re}z}, \quad a > 0.$$

**Άσκηση 10.6.3** Υπολογίστε τις τιμές των συναρτήσεων  $e^z$  και  $\log z$  στα σημεία

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = 2 + i, \quad z_4 = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

**Άσκηση 10.6.4** Υπολογίστε τις τιμές των  $(1 + i)^{4i}$  και  $(1 + i)^{-4i}$ .

**Άσκηση 10.6.5** Βρείτε τα όρια

(i)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$

(ii)  $\lim_{z \rightarrow 1-i} [x + i(2x + y)]$ .

**Άσκηση 10.6.6** Εξετάστε αν τα παρακάτω όρια υπάρχουν

(i)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$

(ii)  $\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{y}}} + ix^2 \right)$ .

**Άσκηση 10.6.7** Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Im}(z^3)}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$$

**Άσκηση 10.6.8** Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + 2i, & z \neq 0 \\ 2i, & z = 0 \end{cases}.$$

# Βιβλιογραφία

- [1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex Variables, Introduction and Applications*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [2] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, 8<sup>th</sup> Ed., McGraw-Hill, New York, 2009.
- [3] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [4] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*, Εκδόσεις Τσότρας, Αθήνα, 2013.
- [5] J. E. Marsden, *Basic complex analysis*, W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1973.
- [6] Σ. Α. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1977.
- [7] H. A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [8] A. Rybkin, *Complex Analysis Lecture Notes*, University of Alaska Fairbanks, 2014.
- [9] K. T. Tang, *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1*, Springer, Berlin, 2007.

## Κεφάλαιο 11

# Παραγωγίσιμες μιγαδικές συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται η έννοια της μιγαδικής παραγώγου και καταγράφονται οι αλγεβρικές ιδιότητές της. Στη συνέχεια διατυπώνονται οι σημαντικές συνθήκες (εξισώσεις) Cauchy-Riemann και εξετάζεται η συσχέτισή τους με την έννοια της μιγαδικής παραγώγου και ο ρόλος τους στον υπολογισμό παραγώγων στοιχειωδών συναρτήσεων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη σημαντική έννοια της ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης και στη μελέτη των κύριων ιδιοτήτων των ολομόρφων συναρτήσεων.

### 11.1 Μιγαδική παράγωγος

**Ορισμός 11.1.1** Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μία μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  και  $z_0 \in A$ . Ως *μιγαδική παράγωγος*  $f'(z_0)$  της  $f$  στο  $z_0$  ορίζεται το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (11.1.1)$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει στο  $\mathbb{C}$ . Στην προκειμένη περίπτωση, λέμε επίσης ότι υπάρχει η μιγαδική παράγωγος  $f'(z_0)$  ή ότι η συνάρτηση  $f$  είναι *παραγωγίσιμη* στο  $z_0$ .

□

**Σημείωση 11.1.1** Ενώτε, στον ορισμό της παραγώγου είναι χρηστικότερο η μεταβλητή  $z$  να εμφανίζεται υπό τη μορφή  $z = z_0 + h$ , οπότε η (11.1.1) γράφεται

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (11.1.2)$$

△

Μία μιγαδική συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ονομάζεται *παραγωγίσιμη* στο ανοικτό σύνολο  $A$  αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $z$  του  $A$ . Στην προκειμένη περίπτωση, η συνάρτηση

$$f' : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{με} \quad (f')(z) = f'(z)$$

ονομάζεται η *παράγωγος* της  $f$  στο  $A$ .

Ως παράδειγμα παραγωγίσιμης συνάρτησης στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών, αναφέρουμε την

$$f(z) = z^n, \quad z \in \mathbb{C} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

για την οποία ισχύει

$$f'(z) = n z^{n-1}.$$

Σημειώνουμε ότι στον ορισμό της παραγώγου της  $f$ , το  $z \in A$  προσεγγίζει το  $z_0$  κατά μήκος μιας οποιασδήποτε καμπύλης του  $A$  που διέρχεται από το  $z_0$  (με  $z \neq z_0$ ). Έτσι, η ύπαρξη της παραγώγου συνεπάγεται ότι η τιμή του ορίου, όπως προκύπτει από τις (11.1.1) και (11.1.2), πρέπει να είναι μοναδική ανεξάρτητα από την καμπύλη του  $A$  μέσω της οποίας προσεγγίζουμε το  $z_0$ .

**Πρόταση 11.1.1** Κάθε παραγωγίσιμη μιγαδική συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  σε ένα σημείο  $z_0$  του ανοικτού συνόλου  $A$  είναι συνεχής στο  $z_0$ .

**Απόδειξη.** Η σχέση

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0), \quad z \neq z_0$$

συνεπάγεται

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right] = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

από την οποία προκύπτει

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

που σημαίνει ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $z_0$ .

□

Όπως και στην περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων, ο αντίστροφος ισχυρισμός της πρότασης δεν ισχύει, όπως συνάγεται από το ακόλουθο

**Παράδειγμα 11.1.1** Η συνεχής συνάρτηση  $f(z) = \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο  $z \in \mathbb{C}$ .

**Λύση.** Πράγματι, για τυχόν  $z \in \mathbb{C}$  και  $h = \lambda + i\mu \neq 0$ , υπολογίζουμε

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = \frac{\lambda - i\mu}{\lambda + i\mu}.$$

Για  $\mu = 0$ , δηλαδή  $h = \lambda$ , οπότε προσεγγίζουμε το 0 κατά μήκος του πραγματικού άξονα, έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\lambda} = 1,$$

ενώ για  $\lambda = 0$ , δηλαδή  $h = i\mu$ , οπότε προσεγγίζουμε το 0 κατά μήκος του φανταστικού άξονα, λαμβάνουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{-i\mu}{i\mu} = -1.$$

Επειδή το όριο πρέπει να είναι το ίδιο για κάθε επιλογή του  $h \rightarrow 0$ , συνάγεται ότι δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$  και άρα η  $f(z) = \bar{z}$  δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα  $z \in \mathbb{C}$ .

△

**Παράδειγμα 11.1.2** Η συνάρτηση  $f(z) = |z|$  είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0.

**Λύση.** Για  $z \neq 0$ , έχουμε ότι

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{|z|}{z}.$$

Για  $z = x \in \mathbb{R}$ , οπότε προσεγγίζουμε το 0 κατά μήκος του πραγματικού άξονα, λαμβάνουμε

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Όμως, το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  δεν υπάρχει, διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $f(z) = |z|$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

△

**Παράδειγμα 11.1.3** Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(z) = |z|^2$  είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0.

**Λύση.** Για  $z \in \mathbb{C}$  και  $h \neq 0$ , έχουμε

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \frac{(z+h)\overline{(z+h)} - z\bar{z}}{h} = z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h}.$$

Έτσι, για  $z = 0$ , ευρίσκουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} = 0.$$

Όμως, για  $z \neq 0$ , σύμφωνα με το Παράδειγμα 11.1.1, έχουμε ότι δεν υπάρχει το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$  και άρα η  $f(z) = |z|^2$  δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα  $z \neq 0$ .

△

**Πρόταση 11.1.2 (Αλγεβρικές ιδιότητες της μιγαδικής παραγώγου)**

Αν οι συναρτήσεις  $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $z \in A$ , τότε και οι συναρτήσεις

$$af + bg \quad (a, b \in \mathbb{C}), \quad fg \quad \text{και} \quad \frac{f}{g} \quad (\text{αν } g(z) \neq 0 \text{ για κάθε } z \in A)$$

είναι παραγωγίσιμες στο  $z$  και ισχύουν

$$\begin{aligned} (af + bg)'(z) &= af'(z) + bg'(z) \\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \end{aligned}$$

□

Ως άμεσες συνέπειες της τελευταίας πρότασης, προκύπτουν οι ισχυρισμοί των ακόλουθων δύο παραδειγμάτων.

**Παράδειγμα 11.1.4** Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad z \in \mathbb{C},$$

όπου  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{C}$  και ισχύει

$$P'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1.$$

△

**Παράδειγμα 11.1.5** Κάθε ρητή συνάρτηση

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \text{ με } Q(z) \neq 0,$$

όπου  $P(z)$ ,  $Q(z)$  είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}.$$

△

**Θεώρημα 11.1.1 (Κανόνας της αλυσίδας)**

Έστω δύο μιγαδικές συναρτήσεις  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και  $g : B \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , όπου  $A$  και  $B$  ανοικτά υποσύνολα του  $\mathbb{C}$ , με τις ιδιότητες:  $f(A) \subseteq B$ , η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $z_0 \in A$  και η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $f(z_0) \in B$ . Τότε και η σύνθεση

$$g \circ f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (g \circ f)(z) = g(f(z)), \quad z \in A$$

των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $z_0$  και ισχύει

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

□

**Θεώρημα 11.1.2 (Κανόνας L'Hopital)**

Έστω  $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  δύο μιγαδικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$ , οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο  $z_0$  του  $A$ , όπου ισχύει  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  και  $g'(z_0) \neq 0$ . Τότε, υπάρχει το  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$  και υπολογίζεται από τον τύπο

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (11.1.3)$$

□

**Παράδειγμα 11.1.6** Βρείτε το όριο

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^9 - i}{z^{10} + 1}.$$

**Λύση.** Για τις συναρτήσεις  $f(z) = z^9 - i$  και  $g(z) = z^{10} + 1$ , ισχύουν  $f(i) = g(i) = 0$ , και  $g'(i) = 10i \neq 0$ , οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hopital (11.1.3), ευρίσκουμε

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^9 - i}{z^{10} + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{9z^8}{10z^9} = \frac{9}{10} \frac{i^8}{i^9} = -\frac{9}{10}i.$$

△

## 11.2 Συνθήκες Cauchy-Riemann

Η ύπαρξη μιγαδικής παραγώγου μιας μιγαδικής συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο  $z_0 = x_0 + iy_0$  του πεδίου ορισμού της συνεπάγεται την ύπαρξη μερικών παραγώγων πρώτης τάξης του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της  $f$  στην περιοχή του σημείου  $(x_0, y_0)$ , οι οποίες ικανοποιούν τις σημαντικές εξισώσεις *Cauchy-Riemann* και διατυπώνονται στο ακόλουθο

**Θεώρημα 11.2.1** Έστω μία μιγαδική συνάρτηση  $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , όπου  $A$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ . Τότε, υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των  $u$  και  $v$  στο σημείο  $(x_0, y_0)$  και ικανοποιούν τις συνθήκες *Cauchy-Riemann* (C-R)

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (11.2.1)$$

**Απόδειξη.** Στον ορισμό

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

της παραγώγου της συνάρτησης  $f$  στο  $z_0$ , επιλέγουμε

1.  $h = \lambda \in \mathbb{R}$ , οπότε

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \lambda, y_0) + iv(x_0 + \lambda, y_0) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \lambda, y_0) - u(x_0, y_0)}{\lambda} + i \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \lambda, y_0) - v(x_0, y_0)}{\lambda} \\ &= u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

2.  $h = i\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , οπότε

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \mu) + iv(x_0, y_0 + \mu) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\mu} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \mu) - u(x_0, y_0)}{\mu} + \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \mu) - v(x_0, y_0)}{\mu} \\ &= v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$



και εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη στις περιπτώσεις 1 και 2, επαληθεύουμε τις συνθήκες C-R.

□

Η αποδεικτική διαδικασία του Θεωρήματος 11.2.1 οδηγεί στο ακόλουθο

**Πόρισμα 11.2.1** Αν η μιγαδική συνάρτηση  $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , όπου  $A$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $z = x + iy \in A$ , τότε ισχύει

$$f'(z) = u_x(x, y) + i v_x(x, y) = v_y(x, y) - i u_y(x, y).$$

□

Ο αντίστροφος ισχυρισμός του Θεωρήματος 11.2.1 δεν ισχύει, δηλαδή η ύπαρξη των μερικών παραγώγων των  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  και η ισχύς των συνθηκών C-R στο  $(x_0, y_0)$  δεν εξασφαλίζουν την παραγωγισιμότητα της  $f(z)$  στο  $z_0 = x_0 + iy_0$ , όπως συνάγεται από το ακόλουθο

**Παράδειγμα 11.2.1** Η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} x - y + i \frac{x^2 + y^2}{x + y}, & z = x + iy \neq 0 \\ 0, & z = x + iy = 0 \end{cases}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες C-R στο  $(0, 0)$ , αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**Λύση.** Το πραγματικό και φανταστικό μέρος

$$u(x, y) = x - y, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

και

$$v(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

της συνάρτησης  $f$  έχουν ως μερικές παραγώγους στο  $(0, 0)$

$$u_x(0, 0) = 1 = v_y(0, 0) \quad \text{και} \quad u_y(0, 0) = -1 = -v_x(0, 0),$$

οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες C-R στο σημείο  $(0, 0)$ .

Όμως, η μιγαδική συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $z = 0$ , διότι η συνάρτηση

$$\frac{f(z) - 0}{z - 0}$$

τείνει στο  $1 + i$ , καθώς το  $z \rightarrow 0$  κατά μήκος του πραγματικού άξονα, και στο  $\frac{1+i}{2}$ , καθώς το  $z \rightarrow 0$  κατά μήκος της ευθείας  $y = x$  (οπότε  $z = x + ix$ ).

△

Για την πληρέστερη κατανόηση επεξεργαζόμαστε επίσης και το ακόλουθο

**Παράδειγμα 11.2.2** Η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες C-R στο  $(0, 0)$ , αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**Λύση.** Το πραγματικό και φανταστικό μέρος

$$u(x, y) = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

και

$$v(x, y) = \frac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

της συνάρτησης  $f$  έχουν μερικές παραγώγους στο  $(0, 0)$  και ικανοποιούν τις συνθήκες C-R στο σημείο αυτό, αφού ισχύουν

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1,$$

$$u_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^5} = 0,$$

$$v_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(h, 0) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^5} = 0,$$

$$v_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1.$$

Όμως, η μιγαδική συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $z = 0$ , διότι η συνάρτηση

$$\frac{f(z) - 0}{z - 0} = \frac{z^4}{|z|^4} = \left( \frac{z}{|z|} \right)^4$$

τείνει στο 1, καθώς το  $z \rightarrow 0$  κατά μήκος του πραγματικού άξονα, και τείνει στο  $-1$ , καθώς το  $z \rightarrow 0$  κατά μήκος της ευθείας  $y = x$  (οπότε  $z = x + ix$ ).

△

**Παράδειγμα 11.2.3** Η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

δεν έχει μιγαδική παράγωγο σε κανένα  $z \in \mathbb{C}$ .

**Λύση.** Οι συναρτήσεις

$$u(x, y) = x \quad \text{και} \quad v(x, y) = -y$$

έχουν μερικές παραγώγους

$$u_x(x, y) = 1 \quad , \quad u_y(x, y) = 0 \quad , \quad v_x(x, y) = 0 \quad , \quad v_y(x, y) = -1$$

στο  $\mathbb{R}^2$ . Όμως, επειδή ισχύει  $u_x \neq v_y$  για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , συνάγουμε ότι η  $f'(z)$  δεν υπάρχει σε κανένα  $z \in \mathbb{C}$ .

△

**Παράδειγμα 11.2.4** Η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = x^2y + ix, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα  $z \in \mathbb{C}$ .

**Λύση.** Οι συναρτήσεις  $u(x, y) = x^2y$  και  $v(x, y) = x$  έχουν μερικές παραγώγους

$$u_x(x, y) = 2xy \quad , \quad u_y(x, y) = x^2 \quad , \quad v_x(x, y) = 1 \quad , \quad v_y(x, y) = 0$$

στο  $\mathbb{R}^2$ . Οι συνθήκες C-R ισχύουν όταν  $2xy = 0$  και  $x^2 = -1$ . Όμως, το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων δεν έχει πραγματικές λύσεις, και επομένως, από το Θεώρημα 11.2.1, έπεται ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα  $z \in \mathbb{C}$ .

△

Εξάλλου, ικανές συνθήκες, οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ισχύει ο αντίστροφος ισχυρισμός του Θεωρήματος 11.2.1, διατυπώνονται στο ακόλουθο

### Θεώρημα 11.2.2 (Cauchy-Riemann)

Εστω  $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  και  $z_0 = x_0 + iy_0$  ένα σημείο του  $A$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι  $u_x, u_y, v_x, v_y$  σε ένα δίσκο  $D_\epsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon^2\}$ , ο οποίος περιέχεται στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $u$  και  $v$ , είναι συνεχείς στο σημείο  $(x_0, y_0)$  και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann στο  $(x_0, y_0)$ . Τότε, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

□

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 11.2.1 και 11.2.2, λαμβάνουμε το ακόλουθο

**Πόρισμα 11.2.2** Έστω  $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μία μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  της οποίας το πραγματικό και φανταστικό μέρος  $u$  και  $v$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους  $u_x, u_y, v_x, v_y$  στο  $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in A\}$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $z \in A$ .
2. Ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann (11.2.1) στο  $\mathcal{A}$ .

□

**Παράδειγμα 11.2.5** Η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = e^{2xy}[\cos(y^2 - x^2) + i \sin(y^2 - x^2)], \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{C}$ .

**Λύση.** Πράγματι, οι συναρτήσεις

$$u(x, y) = e^{2xy} \cos(y^2 - x^2) \quad \text{και} \quad v(x, y) = e^{2xy} \sin(y^2 - x^2)$$

έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους

$$u_x(x, y) = 2e^{2xy}[y \cos(y^2 - x^2) + x \sin(y^2 - x^2)] = v_y(x, y)$$

και

$$u_y(x, y) = 2e^{2xy}[x \cos(y^2 - x^2) - y \sin(y^2 - x^2)] = -v_x(x, y)$$

στο  $\mathbb{R}^2$ , οι οποίες πληρούν τις συνθήκες C-R σε κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Έτσι, από το Θεώρημα 11.2.2, η μιγαδική συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

△

**Παράδειγμα 11.2.6** Η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = (x^2 + y^2) + i 2xy, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

είναι παραγωγίσιμη μόνο στα σημεία  $z = x + i0$  (δηλαδή στον πραγματικό άξονα).

**Λύση.** Οι συναρτήσεις

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{και} \quad v(x, y) = 2xy$$

έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους

$$u_x(x, y) = 2x \quad , \quad u_y(x, y) = 2y \quad , \quad v_x(x, y) = 2y \quad , \quad v_y(x, y) = 2x$$

στο  $\mathbb{R}^2$ , οι οποίες ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη C-R  $u_x = v_y$  για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Όμως, η δεύτερη συνθήκη C-R  $u_y = -v_x$  ικανοποιείται αν  $2y = -2y$ , δηλαδή μόνο για  $y = 0$ . Έτσι, συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 11.2.1 και 11.2.2, συμπεραίνουμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη μόνο στον πραγματικό άξονα.

△

**Παράδειγμα 11.2.7** Η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = xy^2 + ix^2y, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

είναι παραγωγίσιμη μόνο στο  $z = 0$ .

**Λύση.** Οι συναρτήσεις

$$u(x, y) = xy^2 \quad \text{και} \quad v(x, y) = x^2y$$

έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους

$$u_x(x, y) = y^2 \quad , \quad u_y(x, y) = 2xy \quad , \quad v_x(x, y) = 2xy \quad , \quad v_y(x, y) = x^2$$

στο  $\mathbb{R}^2$ . Όμως, η πρώτη συνθήκη C-R  $u_x = v_y$  ισχύει όταν  $y^2 = x^2$ , δηλαδή  $y = \pm x$ , ενώ η δεύτερη συνθήκη C-R  $u_y = -v_x$  ισχύει όταν  $2xy = -2xy$ , δηλαδή  $x = 0$  ή  $y = 0$ . Επομένως, οι δύο συνθήκες C-R πληρούνται μόνο στο σημείο  $(x, y) = (0, 0)$  και άρα, σύμφωνα με τα Θεωρήματα 11.2.1 και 11.2.2, η μιγαδική συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη μόνο στο  $z = 0$ .

△

**Παράδειγμα 11.2.8** Βρείτε τα  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  για τα οποία η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = x^2 - iy^2$$

είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την αντίστοιχη παράγωγο  $f'(z)$ .

**Λύση.** Οι συναρτήσεις  $u(x, y) = x^2$  και  $v(x, y) = -y^2$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους

$$u_x(x, y) = 2x \quad , \quad u_y(x, y) = 0 \quad , \quad v_x(x, y) = 0 \quad , \quad v_y(x, y) = -2y$$

στο  $\mathbb{R}^2$ . Η πρώτη συνθήκη C-R πληρούται όταν  $2x = -2y$ , ενώ η δεύτερη συνθήκη C-R ισχύει πάντοτε. Άρα, σύμφωνα με τα Θεωρήματα 11.2.1 και 11.2.2, η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη μόνο στα σημεία της ευθείας  $y = -x$ , στα οποία, από το Πρόσχημα 11.2.1, η παράγωγος είναι

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x = -2y.$$

△

Σε διάφορες εφαρμογές είναι πιο χρηστική η διατύπωση των συνθηκών Cauchy-Riemann με τη βοήθεια πολικών συντεταγμένων, όπως καταγράφεται στο ακόλουθο

### Λήμμα 11.2.1 (Πολική μορφή συνθηκών C-R)

Έστω  $u, v : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $\mathcal{A}$  του  $\mathbb{R}^2$ , οι οποίες έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους  $u_x, u_y, v_x, v_y$  στο  $\mathcal{A}$ . Τότε, οι συνθήκες Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \quad \text{και} \quad u_y = -v_x$$

μετατρέπονται με τη βοήθεια του πολικού μετασχηματισμού

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta, \quad r \neq 0$$

στις εξισώσεις

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad , \quad u_\theta = -rv_r. \quad (11.2.2)$$

**Απόδειξη.** Θέτοντας στις συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta,$$

και εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας, ευρίσκουμε

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta,$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta,$$

$$(3) \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta,$$

$$(4) \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \theta.$$

Με τη βοήθεια των συνθηκών Cauchy-Riemann, οι (3) και (4) γράφονται

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta, \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \theta,\end{aligned}$$

οι οποίες συνδυαζόμενες με τις (1) και (2), οδηγούν στην (11.2.2).

□

### Πρόταση 11.2.1 (Πολική μορφή μιγαδικής παραγώγου)

Έστω  $f = u + iv : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μία μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  της οποίας το πραγματικό και φανταστικό μέρος  $u$  και  $v$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους  $u_x, u_y, v_x, v_y$  στο  $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in A\}$ , οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann (11.2.1). Τότε, η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $A$  και ισχύει

$$f'(z) = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = e^{-i\theta} f_r = \frac{e^{-i\theta}}{ir} (u_\theta + iv_\theta) = \frac{1}{iz} f_\theta, \quad z = re^{i\theta} \neq 0. \quad (11.2.3)$$

**Απόδειξη.** Από το Θεώρημα 11.2.2, έχουμε ότι η  $f(z)$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $z \in A$ . Για τον υπολογισμό της παραγώγου  $f'(z)$  εφαρμόζουμε το Πρόσχημα 11.2.1, την (11.2.2) και τις (1)-(4) της απόδειξης του Λήμματος 11.2.1, οπότε ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}f'(z) &= u_x + i v_x = \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta} \\ &= f_r e^{-i\theta}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 f'(z) = v_y - i u_y &= \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \theta \right) - i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta \right) \\
 &= \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left( -\frac{i}{r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \right) \\
 &= \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left( -\frac{i}{r} \right) (\cos \theta - i \sin \theta) \\
 &= \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \frac{e^{-i\theta}}{ir} \\
 &= \frac{1}{iz} f_\theta.
 \end{aligned}$$

□

### 11.3 Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

**Πρόταση 11.3.1** Η μιγαδική συνάρτηση

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = e^{az}, z \in \mathbb{C},$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{C}$  και ισχύει

$$f'(z) = a e^{az}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Απόδειξη.** Από τον ορισμό (10.2.1) της εκθετικής συνάρτησης έχουμε

$$f(z) = e^{az} = e^{a(x+iy)} = e^{ax} [\cos(ay) + i \sin(ay)] = u(x, y) + iv(x, y),$$

οπότε

$$u(x, y) = e^{ax} \cos(ay) \quad \text{και} \quad v(x, y) = e^{ax} \sin(ay),$$

οι οποίες έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους

$$u_x = a e^{ax} \cos(ay), \quad u_y = -a e^{ax} \sin(ay), \quad v_x = a e^{ax} \sin(ay), \quad v_y = a e^{ax} \cos(ay)$$

στο  $\mathbb{R}^2$  και για τις οποίες ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$u_x = a e^{ax} \cos(ay) = v_y \quad \text{και} \quad u_y = -a e^{ax} \sin(ay) = -v_x.$$

Έτσι, από το Θεώρημα 11.2.2, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $f(z)$  είναι παραγωγίσιμη για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και, από το Πρόσχημα 11.2.1, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= u_x(x, y) + i v_x(x, y) = a e^{ax} \cos(ay) + i a e^{ax} \sin(ay) \\
 &= a e^{ax} [\cos(ay) + i \sin(ay)] = a e^{ax} e^{iay} = a e^{az}.
 \end{aligned}$$



□

**Πρόταση 11.3.2** Η συνάρτηση

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \sin(az), \quad z \in \mathbb{C},$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{C}$  και ισχύει

$$f'(z) = a \cos(az), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Απόδειξη.** Από τον ορισμό (10.2.3) έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) = \sin(az) &= \frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{2i} = \frac{e^{ia(x+iy)} - e^{-ia(x+iy)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-ay}[\cos(ax) + i \sin(ax)] - e^{ay}[\cos(ax) - i \sin(ax)]}{2i} \\ &= \frac{\sin(ax)(e^{-ay} + e^{ay})}{2} + i \frac{\cos(ax)(e^{ay} - e^{-ay})}{2}, \end{aligned}$$

οπότε

$$u(x, y) = \frac{\sin(ax)(e^{-ay} + e^{ay})}{2} \quad \text{και} \quad v(x, y) = \frac{\cos(ax)(e^{ay} - e^{-ay})}{2}.$$

Εξάλλου, οι συναρτήσεις  $u$  και  $v$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{a \cos(ax)(e^{-ay} + e^{ay})}{2}, \quad u_y = \frac{a \sin(ax)(e^{ay} - e^{-ay})}{2}, \\ v_x &= \frac{-a \sin(ax)(e^{ay} - e^{-ay})}{2}, \quad v_y = \frac{a \cos(ax)(e^{ay} + e^{-ay})}{2} \end{aligned}$$

στο  $\mathbb{R}^2$  για τις οποίες ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann. Έτσι, από το Θεώρημα 11.2.2, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $f(z)$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και, εφαρμόζοντας το Πρόσμμα 11.2.1, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} f'(z) = u_x(x, y) + i v_x(x, y) &= \frac{a \cos(ax)(e^{-ay} + e^{ay})}{2} + i \frac{-a \sin(ax)(e^{ay} - e^{-ay})}{2} \\ &= \frac{a}{2} [e^{-ay}(\cos(ax) + i \sin(ax)) + e^{ay}(\cos(ax) - i \sin(ax))] \\ &= \frac{a}{2} [e^{iax} e^{-ay} + e^{-iax} e^{ay}] = \frac{a}{2} [e^{ia(x+iy)} + e^{-ia(x+iy)}] = a \cos(az). \end{aligned}$$

□

**Σημείωση 11.3.1** Ένας απλούστερος εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της παραγώγου, με εφαρμογή της Πρότασης 11.3.1, είναι ο ακόλουθος

$$f'(z) = \frac{(e^{iaz})' - (e^{-iaz})'}{2i} = \frac{iae^{iaz} - (-ia)e^{-iaz}}{2i} = a \frac{e^{iaz} + e^{-iaz}}{2} = a \cos(az).$$

△

Με παρόμοια διαδικασία αποδεικνύεται η ακόλουθη

**Πρόταση 11.3.3** Η συνάρτηση

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \cos(az), z \in \mathbb{C},$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{C}$  και ισχύει

$$f'(z) = -a \sin(az), \forall z \in \mathbb{C}.$$

□

**Πόρισμα 11.3.1** Οι συναρτήσεις

$$f(z) = \tan z, z \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad g(z) = \cot z, z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

είναι παραγωγίσιμες στα πεδία ορισμού τους με παραγώγους

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \text{και} \quad g'(z) = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

□

**Πρόταση 11.3.4** Η συνάρτηση

$$\text{Log} z = \ln |z| + i \text{Arg}(z), z \in \mathbb{C}, z \neq 0$$

είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Arg}(z) < 2\pi\}$$

με παράγωγο

$$(\text{Log} z)' = \frac{1}{z}. \quad (11.3.1)$$

**Απόδειξη.** Το πραγματικό μέρος  $u$  της  $\text{Log} z$  είναι

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad (11.3.2)$$

ενώ το φανταστικό μέρος  $v$  προκύπτει ως λύση της εξίσωσης

$$\tan v(x, y) = \frac{y}{x}. \quad (11.3.3)$$

Για την λύση της (11.3.3) παρατηρούμε τα εξής. Από την (8.4.3), βλέπουμε ότι η συνάρτηση  $\arctan(\frac{y}{x})$  είναι συνεχής σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός από την ημιευθεία  $z = x > 0$ , όπου παρουσιάζει μεταβολή στην τιμή της κατά  $2\pi$  με κάθε πλήρη περιστροφή της τελικής πλευράς της γωνίας ως προς την ημιευθεία αυτή. Έτσι, το φανταστικό μέρος  $v(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ , από την (8.4.3), είναι συνεχής συνάρτηση στο μιγαδικό επίπεδο εκτός της ημιευθείας  $z = x > 0$  και επομένως η συνάρτηση  $\text{Log}z$  είναι συνεχής σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την κλαδική τομή  $z = x > 0$  (βλ. Σχήμα 10.3).

Τώρα, με τη βοήθεια και του γνωστού τύπου

$$(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

υπολογίζουμε

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad v_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad v_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

και παρατηρούμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις  $u$  και  $v$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, οι οποίες πληρούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann. Επομένως, από το Θεώρημα 11.2.2, συνάγουμε ότι η συνάρτηση  $\text{Log}z$  είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Arg}(z) < 2\pi\}$  και από το Πρόσχημα 11.2.1, λαμβάνουμε

$$(\text{Log}z)' = u_x + iv_x = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}.$$

□

**Σημείωση 11.3.2** Ο έλεγχος της παραγωγισιμότητας της συνάρτησης και ο υπολογισμός της παραγώγου επιτυγχάνονται επίσης εναλλακτικά με χρήση πολικών συντεταγμένων  $(r, \theta)$ , οι οποίες οδηγούν στις

$$u = \ln r \quad \text{και} \quad v = \theta,$$

οι οποίες, όπως εύκολα επιβεβαιώνεται, ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann (11.2.2), οπότε από την Πρόταση 11.2.1, έχουμε

$$(\text{Log}z)' = e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial r} (\ln r) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

△

Εφαρμόζοντας παρόμοια διαδικασία, αποδεικνύεται ότι η  $\log z$  είναι επίσης παραγωγίσιμη και σε οποιοδήποτε άλλο κλάδο της, εκτός της κλαδικής τομής  $z = x > 0$ , και η παράγωγός της υπολογίζεται επίσης από τον τύπο (11.3.1).

**Παράδειγμα 11.3.1** Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

(i)  $e^{e^z}$ , (ii)  $\sin(e^z)$ , (iii)  $\frac{1}{e^z-1}$ .

**Λύση.**

(i) Από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης (κανόνας αλυσίδας) για τη σύνθεση των συναρτήσεων  $f(z) = e^z$  και  $g(z) = e^z$ , έχουμε

$$(e^{e^z})' = (g(f(z)))' = g'(f(z))f'(z) = e^{e^z} e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(ii) Ομοίως, για τις συναρτήσεις  $f(z) = e^z$  και  $g(z) = \sin z$ , ευρίσκουμε

$$(\sin(e^z))' = (g(f(z)))' = g'(f(z))f'(z) = \cos(e^z)e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(iii) Ομοίως, για τις  $f(z) = e^z$  και  $g(z) = \frac{1}{z-1}$ , έχουμε

$$\left(\frac{1}{e^z - 1}\right)' = (g(f(z)))' = g'(f(z))f'(z) = -\frac{1}{(e^z - 1)^2} e^z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z : e^z = 1\}.$$

△

## 11.4 Ολόμορφες συναρτήσεις

**Ορισμός 11.4.1** Μία μιγαδική συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό σύνολο  $A$  ονομάζεται *ολόμορφη* στο  $A$  όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του  $A$ . Ιδιαίτερως, η  $f$  ονομάζεται *ολόμορφη* σε ένα σημείο  $z_0 \in A$  όταν υπάρχει ένας ανοικτός δίσκος  $D_r(z_0)$ , ο οποίος περιέχεται στο  $A$ , και η  $f$  είναι ολόμορφη στον  $D_r(z_0)$ .

□

Μία ολόμορφη συνάρτηση  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ονομάζεται *ακεραία*.

Παραδείγματα ακεραίων συναρτήσεων αποτελούν οι μιγαδικές πολυωνυμικές, η εκθετική και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο.

**Πρόταση 11.4.1** Έστω  $f = u + iv : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μία ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα πεδίο  $\Omega$ , για την οποία ισχύει  $f'(z) = 0$  για κάθε  $z \in \Omega$ . Τότε, η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ .

**Απόδειξη.** Από το Πρόσμμα 11.2.1, έχουμε

$$f'(z) = u_x(x, y) + i v_x(x, y) = v_y(x, y) - i u_y(x, y), \quad z = x + iy \in \Omega.$$

Έτσι, επειδή  $f'(z) = 0$ , έπεται ότι  $u_x = u_y = 0$  και  $v_x = v_y = 0$ , δηλαδή  $\nabla u = (0, 0)$  και  $\nabla v = (0, 0)$  στο πεδίο  $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$  του  $\mathbb{R}^2$ . Όμως, όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, οι πραγματικές συναρτήσεις  $u$  και  $v$  θα πρέπει να είναι σταθερές στο  $\tilde{\Omega}$ , άρα και η μιγαδική συνάρτηση  $f = u + iv$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ .

□

**Σημείωση 11.4.1** Στην προηγούμενη πρόταση το σύνολο  $\Omega$  ως πεδίο είναι πολυγωνικά συνεκτικό. Η υπόθεση αυτή είναι απαραίτητη, διότι, π.χ. η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} 2, & |z| < 1 \\ 1, & |z| > 2 \end{cases}$$

είναι ολόμορφη με  $f'(z) = 0$ , αλλά η  $f$  δεν είναι σταθερή.

△

**Πόρισμα 11.4.1** Έστω  $f = u + iv : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στο πεδίο  $\Omega$  με την ιδιότητα οποιαδήποτε από τις τρεις συναρτήσεις: (i)  $\operatorname{Re}(f)$ , (ii)  $\operatorname{Im}(f)$  ή (iii)  $|f|$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ . Τότε, η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ .

**Απόδειξη.**

(i) Επειδή ισχύει  $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) = c$ , για κάθε  $(x, y) \in \tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$ , όπου  $c$  σταθερά, έχουμε  $u_x = u_y = 0$  στο  $\tilde{\Omega}$ . Εξάλλου, επειδή η  $f$  είναι ολόμορφη στο  $\Omega$ , ισχύουν οι συνθήκες C-R, οπότε έχουμε

$$v_y = u_x = 0 \quad \text{και} \quad v_x = -u_y = 0,$$

και έτσι, από το Πόρισμα 11.2.1, λαμβάνουμε

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0.$$

Άρα, από την Πρόταση 11.4.1, η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ .

(ii) Ο ισχυρισμός επιβεβαιώνεται με τη διαδικασία της περίπτωσης (i).

(iii) Αν  $|f(z)| = c$ , για κάθε  $z \in \Omega$ , όπου  $c \neq 0$ , τότε ισχύει  $u^2 + v^2 = c^2$ , για κάθε  $(x, y) \in \Omega$ , οπότε παραγωγίζοντας ως προς  $x$  και  $y$ , ευρίσκουμε

$$uu_x + vv_x = 0$$

και

$$uu_y + vv_y = 0.$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες C-R, στη δεύτερη εξίσωση, οδηγούμαστε στο ομογενές σύστημα

$$uu_x + vv_x = 0$$

$$vu_x - uv_x = 0,$$

το οποίο έχει μόνο τη μηδενική λύση  $u_x = v_x = 0$  διότι η ορίζουσά του είναι  $-u^2 - v^2 = -c^2 \neq 0$ . Άρα

$$f'(z) = u_x + i v_x = 0$$

και επομένως ο ισχυρισμός προκύπτει από την Πρόταση 11.4.1.

□

**Πόρισμα 11.4.2** Αν οι συναρτήσεις  $f(z)$  και  $g(z)$  είναι ολόμορφες σε ένα πεδίο  $\Omega$  και ισχύουν  $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(g)$  ή  $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g)$  στο  $\Omega$ , τότε υπάρχει μιγαδική σταθερά  $c$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$f(z) = g(z) + c, \quad \forall z \in \Omega.$$

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε π.χ. ότι  $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(g)$  στο  $\Omega$  και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(z) = f(z) - g(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad z = x + iy,$$

η οποία είναι ολόμορφη στο  $\Omega$ , αφού οι  $f(z)$  και  $g(z)$  είναι ολόμορφες και παρατηρούμε ότι ισχύει

$$u = \operatorname{Re}(h) = \operatorname{Re}(f) - \operatorname{Re}(g) = 0,$$

οπότε  $u_x = u_y = 0$  στο  $\Omega$  και (λόγω των συνθηκών C-R)  $v_x = -u_y = 0$  και  $v_y = u_x = 0$ . Εφαρμόζοντας τώρα το Πόρισμα 11.2.1, ευρίσκουμε

$$h'(z) = u_x + i v_x = 0,$$

στο  $\Omega$ , και επομένως, από την Πρόταση 11.4.1, έχουμε ότι  $h(z) = c$  στο  $\Omega$ .

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ο ισχυρισμός και για την περίπτωση  $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g)$ .

□

**Πόρισμα 11.4.3** Αν μία μιγαδική συνάρτηση  $f$  και η συζυγής της  $\bar{f}$  είναι ολόμορφες σε ένα πεδίο  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$  τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ .

**Απόδειξη.** Εφαρμόζοντας τις συνθήκες C-R για τις συναρτήσεις  $f = u + iv$  και  $\bar{f} = u - iv$ , προκύπτουν

$$u_x = v_y \quad \text{και} \quad u_y = -v_x$$

και

$$u_x = -v_y \quad \text{και} \quad u_y = v_x,$$

οι οποίες συνεπάγονται

$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$$

και έτσι ο ισχυρισμός επαληθεύεται ως εφαρμογή του Πορίσματος 11.2.1 και της Πρότασης 11.4.1.

□

## 11.5 Ασκήσεις

**Άσκηση 11.5.1** Βρείτε τα  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  για τα οποία η μιγαδική συνάρτηση

(i)  $f(z) = (x + cy)^2 + 2i(x - cy)$ ,  $c \in \mathbb{R}$

(ii)  $f(z) = e^{\bar{z}}$

(iii)  $f(z) = z \operatorname{Im}(z)$

(iv)  $f(z) = x^2 + iy^2$

(v)  $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

(vi)  $f(z) = z^2 - \bar{z}^2$ .

είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την αντίστοιχη παράγωγο  $f'(z)$ .

**Άσκηση 11.5.2** Αν η μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  είναι ολόμορφη στο πεδίο  $\Omega$  και ισχύει

$$au(x, y) + bv(x, y) = c$$

στο  $\Omega$ , όπου  $a, b, c$  πραγματικές σταθερές όχι όλες μηδέν, τότε δείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ .

**Άσκηση 11.5.3** Αν η μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = f(x + iy) = u(x) + i v(y)$  είναι ακεραία, τότε δείξτε ότι ισχύει

$$f(z) = az + b, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

**Άσκηση 11.5.4** Αν για την ακεραία μιγαδική συνάρτηση  $f = u + iv$  ισχύει

$$u(x, y)v(x, y) = c, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad c \neq 0,$$

τότε δείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή συνάρτηση.

**Άσκηση 11.5.5** Δείξτε ότι αν η συνάρτηση  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ολόμορφη στο πεδίο  $\Omega$  τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ .

**Άσκηση 11.5.6** Προσδιορίστε τις τιμές των σταθερών  $a, b, c$  και  $d$  έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(z) = (y^2 + axy + bx^2) + i(cy^2 + dxy + x^2), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

να είναι ακεραία.

# Βιβλιογραφία

- [1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex Variables, Introduction and Applications*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [2] M. Beck, G. Marchesi, D. Pixton, and L. Sabalka, *A First Course in Complex Analysis, version 1.4*, 2012.
- [3] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, 8<sup>th</sup> Ed., McGraw-Hill, New York, 2009.
- [4] Ε. Γ. Γαλανής, *Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1994.
- [5] J. P. D'Angelo, *An Introduction to Complex Analysis and Geometry*, Department of Mathematics, University of Illinois, 2009.
- [6] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*, Εκδόσεις Τσότρας, Αθήνα, 2013.
- [7] Y.-K. Kwok, *Applied Complex Variables for Scientists and Engineers*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge University Press, 2010.
- [8] Σ. Α. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1977.
- [9] H. A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1985.



## Κεφάλαιο 12

# Ολοκληρώσιμες μιγαδικές συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται αρχικά η έννοια του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος και καταγράφονται οι βασικές ιδιότητές του. Επίσης, καταγράφονται και τρόποι υπολογισμού βασικών μιγαδικών ολοκληρωμάτων. Εξετάζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων και των πεδίων ορισμού τους, οι οποίες εξασφαλίζουν την ανεξαρτησία του ολοκληρώματος από την καμπύλη ολοκλήρωσης. Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι συνεχείς συναρτήσεις, ορισμένες σε πεδίο, των οποίων υπάρχει αρχική, καθώς επίσης και οι ολόμορφες συναρτήσεις ορισμένες σε απλά συνεκτικό πεδίο. Για ολόμορφες συναρτήσεις ορισμένες σε απλά συνεκτικό πεδίο διατυπώνεται το κλασικό θεώρημα Cauchy-Goursat και εξετάζονται ορισμένες σημαντικές συνέπειες του (ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy), οι οποίες επίσης χρησιμοποιούνται και για τον υπολογισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων.

### 12.1 Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε την κατηγορία των μιγαδικών συναρτήσεων  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  πραγματικής μεταβλητής με πεδίο ορισμού ένα διάστημα  $I$  του  $\mathbb{R}$ . Η μεταβλητή των συναρτήσεων αυτών συμβολίζεται με  $t$  και η γενική μορφή τους, μέσω του πραγματικού και του φανταστικού μέρους, είναι

$$f(t) = u(t) + i v(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

όπου  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Σύμφωνα με το γενικό ορισμό της μιγαδικής παραγώγου (11.1.1), η παράγωγος  $f'(t)$  της  $f(t)$  ορίζεται όπως ακολουθεί

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο  $\mathbb{C}$  το αναγραφόμενο όριο.

Εξάλλου, όπως διαπιστώνεται εύκολα, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα  $t \in I$  τότε και μόνο τότε όταν οι  $u$  και  $v$  είναι παραγωγίσιμες στο  $t$  και στην προκειμένη περίπτωση ισχύει

$$f'(t) = u'(t) + i v'(t), \quad t \in I. \quad (12.1.1)$$

**Σημείωση 12.1.1** Για την παράγωγο μιγαδικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής, από την (12.1.1), συνάγουμε ότι ισχύουν οι γνωστοί κανόνες παραγωγίσιμης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου συναρτήσεων και ο κανόνας της αλυσίδας.

△

**Παράδειγμα 12.1.1** Η μιγαδική συνάρτηση  $f(t) = e^{at}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , όπου  $a \in \mathbb{C}$ , έχει ως παράγωγο  $f'(t) = ae^{at}$ .

**Λύση.** Πράγματι, αν  $a = \lambda + i\mu$  τότε έχουμε

$$f(t) = e^{at} = e^{\lambda t} e^{i\mu t} = e^{\lambda t} \cos(\mu t) + i e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

και με τη βοήθεια της (12.1.1) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f'(t) &= (e^{\lambda t} \cos(\mu t))' + i (e^{\lambda t} \sin(\mu t))' \\ &= \lambda e^{\lambda t} \cos(\mu t) - \mu e^{\lambda t} \sin(\mu t) + i \lambda e^{\lambda t} \sin(\mu t) + i \mu e^{\lambda t} \cos(\mu t) \\ &= (\lambda + i\mu) e^{\lambda t} (\cos(\mu t) + i \sin(\mu t)) \\ &= a e^{at}. \end{aligned}$$

△

**Ορισμός 12.1.1** Έστω  $f = u + iv : I \equiv [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Η συνάρτηση  $f$  ονομάζεται *ολοκληρώσιμη* στο  $[\alpha, \beta]$  αν οι πραγματικές συναρτήσεις  $u$  και  $v$  είναι ολοκληρώσιμες στο  $[\alpha, \beta]$  και στην περίπτωση αυτή ως ολοκλήρωμα της  $f = f(t)$  ορίζουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt.$$

□

Για το ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες που είναι όμοιες με εκείνες του ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης.

(i) Αν  $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  ολοκληρώσιμες και  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt.$$

(ii) Αν  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  ολοκληρώσιμη και  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t) dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t) dt.$$

(iii) Αν  $f = u + iv : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  ολοκληρώσιμη και  $F = U + iV$  είναι μία αρχική της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , δηλαδή ισχύει  $F' = f$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = F(\beta) - F(\alpha).$$

(iv) Αν  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt.$$

(v) Αν  $f : [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής, τότε

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^t f(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

**Παράδειγμα 12.1.2** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I = \int_{-1}^0 \cos(it) dt$ .

**Λύση.** Μια αρχική της  $f(t) = \cos(it)$  είναι η  $F(t) = \frac{1}{i} \sin(it)$ , οπότε από την προηγούμενη ιδιότητα (iii) ευρίσκουμε

$$I = F(0) - F(-1) = -\frac{1}{i} \sin(-i) = -i \sin i.$$

△

## 12.2 Καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου

Έστω μία μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής:  $z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ . Καθώς η μεταβλητή  $t$  διατρέχει τα στοιχεία του  $[\alpha, \beta]$  το σημείο  $(x(t), y(t))$  διαγράφει

ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, το οποίο σε συνήθεις συγκεκριμένες περιπτώσεις προσομοιάζει με την εποπτική εικόνα μιας καμπύλης. Έτσι, οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό της έννοιας της καμπύλης του μιγαδικού επιπέδου, η οποία είναι θεμελιώδης για τη Μιγαδική Ανάλυση.

**Ορισμός 12.2.1** Ένα υποσύνολο  $C$  του μιγαδικού επιπέδου ονομάζεται *καμπύλη* όταν υπάρχει μία *συνεχής* μιγαδική συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$$

έτσι ώστε

$$C = \{(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Η συνάρτηση  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  ονομάζεται *παραμέτρηση* της καμπύλης  $C$  και οι  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  παραμετρικές εξισώσεις. Επίσης, λέμε ότι η συνάρτηση  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  ορίζει την καμπύλη  $C$  και συνοπτικά γράφουμε

$$C : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta],$$

ή απλούστερα

$$C : z = z(t), t \in [\alpha, \beta].$$

Τα σημεία  $A(x(\alpha), y(\alpha))$  και  $B(x(\beta), y(\beta))$  είναι τα άκρα της καμπύλης, το  $A$  είναι η αρχή και το  $B$  το πέρας αυτής.

□

**Προσανατολισμένη καμπύλη.** Έστω  $C : z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  μία παραμετρική καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου. Η κατεύθυνση που αντιστοιχεί στη φορά κίνησης του σημείου  $z(t)$  επάνω στην καμπύλη, καθώς η παράμετρος  $t$  αυξάνει, ορίζει το θετικό προσανατολισμό της καμπύλης, ενώ η αντίθετη κατεύθυνση ορίζει τον αρνητικό προσανατολισμό αυτής (ως προς την παράμετρο  $t$ ).

Μία καμπύλη  $C : z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  ονομάζεται

- (i) *κλειστή* όταν τα άκρα της συμπίπτουν, δηλαδή:  $z(\alpha) = z(\beta)$ .
- (ii) *απλή* αν η συνάρτηση  $z(t)$  είναι 1-1 στο  $(\alpha, \beta)$ , δηλαδή αν για κάθε  $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$  με  $t_1 \neq t_2$  ισχύει  $z(t_1) \neq z(t_2)$ .
- (iii) *καμπύλη Jordan* όταν είναι απλή και κλειστή.

**Παράδειγμα 12.2.1** Το ευθύγραμμο τμήμα  $C$  που ενώνει δύο σημεία  $z_1$  και  $z_2$  του μιγαδικού επιπέδου και έχει αρχή το  $z_1$  και πέρας το  $z_2$  ( $z_1 \neq z_2$ ) ορίζεται από την παραμέτρηση

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0, 1]$$

και είναι μία απλή και μη κλειστή καμπύλη.

△

**Παράδειγμα 12.2.2** Ο κύκλος  $C$  με κέντρο το  $z_0 \in \mathbb{C}$  και ακτίνα  $R \in \mathbb{R}$  προσανατολισμένος αντιωρολογιακά ορίζεται από την παραμέτρηση

$$z(t) = z_0 + R e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

και είναι μία απλή κλειστή καμπύλη.

△

**Παράδειγμα 12.2.3** Η απλή και μη κλειστή καμπύλη

$$C : z(t) = e^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

είναι το άνω ημικύκλιο της περιφέρειας του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα 1, προσανατολισμένο αντιωρολογιακά.

△

**Παράδειγμα 12.2.4** Η έλλειψη με ημιάξονες  $a$  και  $b$  προσανατολισμένη αντιωρολογιακά έχει ως παραμέτρηση

$$z(t) = a \cos(t) + ib \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Στην περίπτωση  $a = b$  είναι περιφέρεια κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα  $a$ .

△

**Παράδειγμα 12.2.5** Η καμπύλη

$$C : z(t) = \begin{cases} e^{it}, & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ \frac{2t}{\pi} - 3, & \pi \leq t \leq 3\pi \end{cases}$$

δεν είναι κλειστή αφού ισχύουν  $z(-\pi/2) = -i$  και  $z(3\pi) = 3$ . Επίσης, δεν είναι απλή διότι  $z(0) = z(2\pi) = 1$ .

△

Έστω μία παραμετρική καμπύλη  $C : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ . Η παραμέτρηση  $z = z(-t), t \in [-\beta, -\alpha]$  ορίζει τον αντίθετο προσανατολισμό της καμπύλης (ως προς την παραμέτρηση). Η καμπύλη

$$C^- : z = z(-t), \quad t \in [-\beta, -\alpha]$$

ονομάζεται *αντίθετη* καμπύλη της  $C$ . Οι  $C$  και  $C^-$  έχουν το ίδιο σύνολο σημείων και αντίθετους προσανατολισμούς.

**Παράδειγμα 12.2.6** Αν η καμπύλη  $C$  ορίζεται από την παραμέτρηση

$$z(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

τότε η  $C^-$  ορίζεται από

$$z(t) = e^{-it}, \quad t \in [-2\pi, 0].$$

Η  $C$  διαγράφεται κατά φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, ενώ η  $C^-$  διαγράφεται κατά τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

△

**Ορισμός 12.2.2** Μία καμπύλη  $C : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$  του μιγαδικού επιπέδου ονομάζεται

- (i)  $C^1$  καμπύλη όταν η  $z(t)$  έχει συνεχή παράγωγο  $z'(t)$  για κάθε  $t \in [\alpha, \beta]$ .
- (ii) *τμηματικά*  $C^1$  καμπύλη όταν αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος  $C^1$  καμπύλες.
- (iii) *λεία* καμπύλη όταν είναι  $C^1$  και επιπλέον ισχύει  $z'(t) \neq 0$  για κάθε  $t \in [\alpha, \beta]$ .
- (iv) *τμηματικά λεία* καμπύλη όταν αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος διαδοχικές λείες καμπύλες.

□

Το τμήμα της καμπύλης από το σημείο  $z_1 = z(t_1)$  μέχρι το σημείο  $z_2 = z(t_2)$ , όπου  $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ , ονομάζεται *τόξο* της καμπύλης.

Ως *μήκος*  $L(C)$  μιας απλής και  $C^1$  καμπύλης

$$C : z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$L(C) = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2} dt. \quad (12.2.1)$$

Το μήκος απλής και τμηματικά  $C^1$  καμπύλης είναι το άθροισμα των μηκών των  $C^1$  τμημάτων της.

**Παράδειγμα 12.2.7** Υπολογίστε το μήκος της περιφέρειας  $C$  του κύκλου του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο το 0 και ακτίνα  $R$ .

**Λύση.** Η καμπύλη  $C$  ορίζεται από την παραμέτρηση

$$z(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

όπου

$$z'(t) = iRe^{it} \quad \text{και} \quad |z'(t)| = R, \quad t \in [0, 2\pi]$$

και είναι απλή και λεία. Έτσι, εφαρμόζοντας την (12.2.1), ευρίσκουμε

$$L(C) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

△

Για απλές κλειστές καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου ισχύει το ακόλουθο σημαντικό

### Θεώρημα 12.2.1 (Jordan)

Κάθε απλή κλειστή καμπύλη  $C$  του μιγαδικού επιπέδου (καμπύλη Jordan) χωρίζει το επίπεδο σε δύο πεδία που έχουν κοινό σύνορο την καμπύλη  $C$ . Το ένα από τα δύο πεδία είναι φραγμένο και ονομάζεται *εσωτερικό* της καμπύλης και συμβολίζεται με  $\text{εσ}(\Gamma)$ , ενώ το άλλο δεν είναι φραγμένο και ονομάζεται *εξωτερικό* της καμπύλης και συμβολίζεται με  $\text{εξ}(\Gamma)$ .

□

Μία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  ορίζεται ως *θετικά προσανατολισμένη* ως προς το εσωτερικό της αν ο προσανατολισμός της συμπίπτει με την φορά κίνησης παρατηρητή, ο οποίος κινούμενος επάνω στην  $C$  αφήνει το εσωτερικό της καμπύλης στα αριστερά του.

**Ορισμός 12.2.3** Ένα πεδίο  $\Omega$  ονομάζεται *απλά συνεκτικό* αν το  $\Omega$  περιέχει το εσωτερικό κάθε απλής κλειστής καμπύλης του. Δηλαδή, σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο δεν υπάρχουν οπές.

□

**Παράδειγμα 12.2.8** Το πεδίο  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  είναι απλά συνεκτικό.

Τα πεδία

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \quad \text{και} \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

δεν είναι απλά συνεκτικά.

△

### 12.3 Μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

**Ορισμός 12.3.1** Έστω  $A$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ ,  $C : z = z(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$   $C^1$  καμπύλη του  $A$  και συνεχής μιγαδική συνάρτηση  $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ . Ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f$  κατά μήκος της καμπύλης  $C$  ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt. \quad (12.3.1)$$

□

Αν η καμπύλη  $C$  είναι τμηματικά  $C^1$  τότε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων των  $C^1$  τμημάτων της. Εξάλλου, αν η καμπύλη  $C$  είναι κλειστή τότε θα συμβολίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f$  κατά μήκος της  $C$  με  $\oint_C f(z) dz$ .

**Παράδειγμα 12.3.1** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\oint_C z^3 dz$ , όπου  $C$  περιφέρεια κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα το 2, θετικά προσανατολισμένη.

**Λύση.** Η  $C$  ορίζεται από την  $C^1$  παραμέτρηση  $z(t) = 2e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , όπου  $z'(t) = 2ie^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , οπότε από τον ορισμό (12.3.1) του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \oint_C z^3 dz &= \int_0^{2\pi} 2^3 e^{3it} 2ie^{it} dt = 16i \int_0^{2\pi} e^{4it} dt \\ &= -16 \int_0^{2\pi} \sin(4t) + 16i \int_0^{2\pi} \cos(4t) dt = 0. \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 12.3.2** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C (z - z_0)^n dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

όπου  $C$  περιφέρεια κύκλου με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα το  $R$ , θετικά προσανατολισμένη.

**Λύση.** Η καμπύλη  $C$  ορίζεται από την  $C^1$  παραμέτρηση

$$z(t) = z_0 + Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

όπου

$$z'(t) = iRe^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Έτσι, από τον ορισμό (12.3.1) του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, έχουμε

$$\begin{aligned} \oint_C (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} R^n e^{int} i R e^{it} dt = i R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= -R^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt + i R^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt \\ &= \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z}, n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

△

**Σημείωση 12.3.1** Έστω  $C$  καμπύλη του  $\mathbb{C}$  και  $f : C \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού την καμπύλη  $C$ . Τότε, επειδή η καμπύλη  $C$  είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στη  $C$ , από το Θεώρημα 10.5.4, έχουμε ότι η  $f$  είναι φραγμένη στη  $C$ .

△

**Πρόταση 12.3.1** Έστω  $C$  μία τμηματικά  $C^1$  καμπύλη και  $f, g : C \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού την καμπύλη  $C$ . Τότε, ισχύουν

$$(1) \quad \int_{C^-} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

$$(2) \quad \int_C (af(z) + bg(z)) dz = a \int_C f(z) dz + b \int_C g(z) dz, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

(3) Έστω  $M > 0$  με  $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$  (βλ. Σημείωση 12.3.1). Τότε, ισχύει

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML, \quad (12.3.2)$$

όπου  $L$  είναι το μήκος της καμπύλης  $C$  που ορίζεται από τον τύπο (12.2.1).

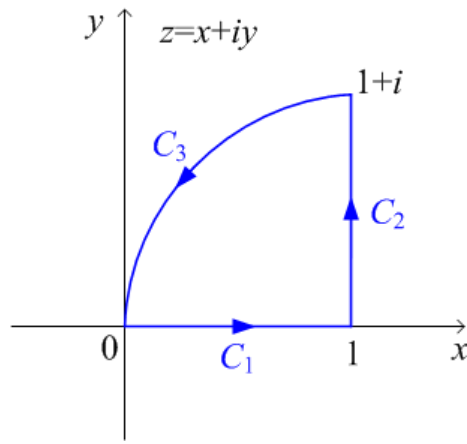
**Απόδειξη.** Οι (1) και (2) είναι απλές συνέπειες του Ορισμού 12.3.1 του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος και των ιδιοτήτων (i) και (ii), οι οποίες ακολουθούν τον Ορισμό 12.1.1.

(3) Υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι η  $C$  είναι  $C^1$  καμπύλη, οπότε από τον Ορισμό 12.3.1 του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος και την υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt \right| \\ &\leq \int_\alpha^\beta |f(z(t))| |z'(t)| dt \leq M \int_\alpha^\beta |z'(t)| dt = ML. \end{aligned}$$

□

**Παράδειγμα 12.3.3** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\oint_C \bar{z} dz$  κατά μήκος της κλειστής καμπύλης  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$  του Σχήματος 12.1.



Σχήμα 12.1: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.3.3.

**Λύση.** Από τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος για τμηματικά  $C^1$  καμπύλες, έχουμε

$$\oint_C \bar{z} dz = \int_{C_1} \bar{z} dz + \int_{C_2} \bar{z} dz + \int_{C_3} \bar{z} dz.$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα.

Το ευθύγραμμο τμήμα  $C_1$  ορίζεται από την παραμέτρηση  $z(t) = t$ ,  $t \in [0, 1]$ , όπου  $z'(t) = 1$ ,  $t \in [0, 1]$ , οπότε

$$\int_{C_1} \bar{z} dz = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα  $C_2$  ορίζεται από την παραμέτρηση  $z(t) = 1 + it$ ,  $t \in [0, 1]$ , όπου  $z'(t) = i$ ,  $t \in [0, 1]$ , οπότε

$$\int_{C_2} \bar{z} dz = \int_0^1 (1 - it)i dt = i + \frac{1}{2}.$$

Η καμπύλη  $C_3$  ορίζεται από την παραμέτρηση  $z(t) = 1 + e^{it}$ ,  $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , όπου  $z'(t) = ie^{it}$ ,  $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , οπότε

$$\int_{C_3} \bar{z} dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + e^{-it})ie^{it} dt = -1 + i\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Προσθέτοντας, τώρα, τα επιμέρους ολοκληρώματα ευρίσκουμε

$$\oint_C \bar{z} dz = \frac{\pi i}{2}.$$

△

Η τιμή του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος κατά μήκος καμπύλων με τα ίδια άκρα εξαρτάται γενικά από την καμπύλη. Όμως, υπάρχει μία ευρεία κατηγορία συναρτήσεων  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , όπου το  $\Omega$  είναι πεδίο, των οποίων το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της τμηματικά  $C^1$  καμπύλης ολοκλήρωσης του  $\Omega$ .

**Θεώρημα 12.3.1** Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής συνάρτηση στο πεδίο  $\Omega$ , η οποία έχει μία αρχική  $F$  στο  $\Omega$  (δηλαδή ισχύει  $F'(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in \Omega$ ). Τότε, για κάθε δύο σημεία  $a$  και  $b$  του  $\Omega$  ( $a \neq b$ ) και για κάθε τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  του  $\Omega$  με αρχή το  $a$  και πέρασ το  $b$  ισχύει

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a).$$

**Απόδειξη.** Από τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος και με εφαρμογή του κανόνα αλυσίδας, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} F'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [F(z(t))] dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 12.3.2** Για μία συνεχή μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  στο πεδίο  $\Omega$ , οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1. Το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της τμηματικά  $C^1$  καμπύλης ολοκλήρωσης του  $\Omega$ , δηλαδή για κάθε δύο τμηματικά  $C^1$  καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  του  $\Omega$  με τα ίδια άκρα ισχύει

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

2. Για κάθε κλειστή τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  του  $\Omega$  ισχύει

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

3. Η  $f$  έχει μία αρχική  $F$  στο  $\Omega$  (δηλαδή υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση  $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με  $F'(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in \Omega$ ).

**Απόδειξη.**

1 $\Rightarrow$ 2. Έστω  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$  μία τμηματικά  $C^1$  κλειστή καμπύλη του  $\Omega$ . Τότε, παρατηρούμε (π.χ.) ότι οι (τμηματικά  $C^1$  προσανατολισμένες) καμπύλες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2^- \cup \dots \cup \Gamma_m^-$  έχουν τα ίδια άκρα, οπότε από την υπόθεση έχουμε

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2^- \cup \dots \cup \Gamma_m^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2} f(z) dz - \dots - \int_{\Gamma_m} f(z) dz$$

και έτσι

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_m} f(z) dz = 0.$$

2 $\Rightarrow$ 1. Έστω  $A$  και  $B$  δύο σημεία του  $\Omega$  και  $C_1$  και  $C_2$  δύο τμηματικά  $C^1$  (προσανατολισμένες) παραμετρικές καμπύλες του  $\Omega$  με αρχή το  $A$  και πέρας το  $B$ . Τότε, η (τμηματικά  $C^1$ ) καμπύλη  $C = C_1 \cup C_2^-$  είναι κλειστή και άρα από την υπόθεση έχουμε ότι  $\oint_C f(z) dz = 0$ , οπότε ευρίσκουμε

$$\oint_{C_1} f(z) dz - \oint_{C_2} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2^-} f(z) dz = \oint_C f(z) dz = 0.$$

1 $\Rightarrow$ 3. Έστω  $z_0$  σταθεροποιημένο σημείο του  $\Omega$ . Τότε, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Έστω τώρα  $z$  (τυχόν) σημείο του  $\Omega$ . Τότε, υπάρχουν  $\rho > 0$  με  $D_\rho(z) \subseteq \Omega$  (αφού το  $\Omega$  είναι ανοικτό) και πολυγωνική γραμμή  $\Gamma$  με αρχή το  $z_0$  και πέρας το  $z$ , η οποία περιέχεται στο  $\Omega$  (αφού το  $\Omega$  είναι πολυγωνικά συνεκτικό) (Σχήμα 12.2). Έστω τώρα  $h \in \mathbb{C}$  με  $0 < |h| < \rho$  και  $w_h = z + h \in D_\rho(z)$  και  $\Gamma_h$  το ευθύγραμμο τμήμα του  $D_\rho(z)$  με άκρα τα σημεία  $z$  και  $w_h$ , το οποίο ορίζεται από την παραμέτρηση  $(1-t)z + tw_h = z + ht$ ,  $t \in [0, 1]$  και έχει μήκος  $|h|$ . Τώρα, επειδή οι καμπύλες  $\Gamma$  και  $\Gamma \cup \Gamma_h$  είναι τμηματικά  $C^1$  καμπύλες του  $\Omega$  με (κοινή) αρχή το σημείο  $z_0$  και πέρας το σημείο  $z$  και  $w_h$ , αντιστοίχως, έχουμε

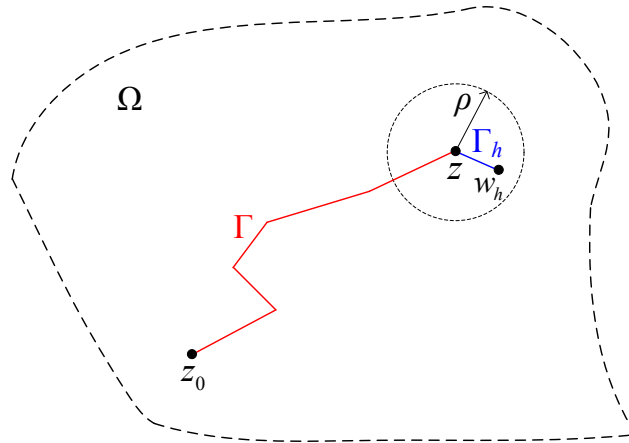
$$F(z+h) = F(z) + \int_{\Gamma_h} f(\zeta) d\zeta,$$

οπότε

$$(a) \quad \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\Gamma_h} f(\zeta) d\zeta - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\Gamma_h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta.$$

Όμως, η  $f$  είναι συνεχής στο  $z$  και έτσι για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει ένα  $\delta > 0$  με  $0 < \delta < \rho$  έτσι ώστε να ισχύει

$$(b) \quad |f(\zeta) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall \zeta \in \Omega \text{ με } |\zeta - z| < \delta.$$



Σχήμα 12.2: Γεωμετρική ερμηνεία της ανεξαρτησίας του επικαμπυλίου ολοκληρώματος.

Συνδυάζοντας τώρα τις (a), (b) και την ML ανισότητα (12.3.2), για  $h$  με  $0 < |h| < \delta$ , ευρίσκουμε

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{\Gamma_h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|} \epsilon |h| = \epsilon,$$

που σημαίνει ότι υπάρχει η παράγωγος  $F'(z)$  και ισχύει

$$F'(z) = f(z).$$

$3 \Rightarrow 1$ . βλ. Θεώρημα 12.3.1.

□

**Παράδειγμα 12.3.4** Υπολογίστε το  $\int_C e^z dz$ , όπου  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το  $z_1 = 1$  και πέρας το  $z_2 = 1 + i$ .

**Λύση.** Η συνάρτηση  $f(z) = e^z$  έχει ως μία αρχική την  $F(z) = e^z$  και, επομένως, έχουμε

$$\int_C e^z dz = e^{1+i} - e^1 = e(e^i - 1) = e(\cos 1 + i \sin 1 - 1).$$

△

**Παράδειγμα 12.3.5** Για κάθε κλειστή και τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  ισχύει

$$\oint_C z^n dz = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq -1.$$

**Λύση.** Η συνάρτηση  $f(z) = z^n$  έχει ως μία αρχική την  $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ,  $n \neq -1$ , οπότε από το Θεώρημα 12.3.2 (3  $\Rightarrow$  2), προκύπτει το ζητούμενο.

△

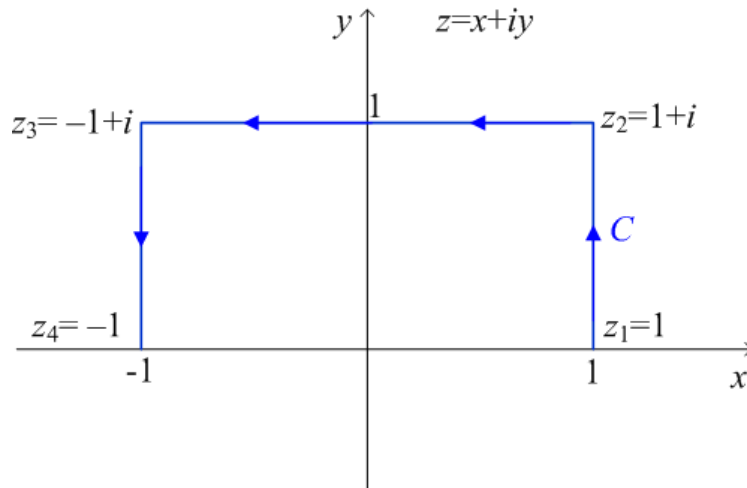
**Παράδειγμα 12.3.6** Υπολογίστε το  $\int_C z^3 dz$ , όπου  $C$  τμηματικά  $C^1$  καμπύλη με αρχή το  $z_1 = 1$  και τέλος το  $z_2 = \frac{i}{2}$ .

**Λύση.** Η  $F(z) = \frac{z^4}{4}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , είναι μία αρχική της  $f(z) = z^3$ , οπότε από το Θεώρημα 12.3.1, ευρίσκουμε

$$\int_C z^3 dz = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{i}{2} \right)^4 - 1^4 \right] = -\frac{15}{64}.$$

△

**Παράδειγμα 12.3.7** Υπολογίστε το  $\int_C \frac{1}{z^3} dz$ , όπου  $C$  η πολυγωνική γραμμή του Σχήματος 12.3 με αρχή το  $z_1 = 1$  και πέρασ το  $z_4 = -1$ .



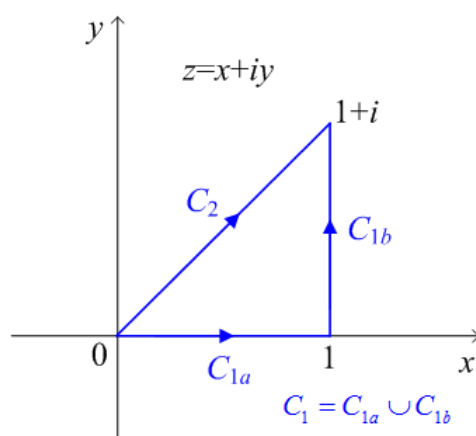
Σχήμα 12.3: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.3.7.

**Λύση.** Επιλέγουμε το πεδίο  $\Omega$  έτσι ώστε  $C \subseteq \Omega$  και  $0 \notin \Omega$ . Έτσι, η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z^3}$ ,  $z \in \Omega$  είναι συνεχής και έχει ως μία αρχική τη συνάρτηση  $F(z) = -\frac{1}{2z^2}$  στο  $\Omega$ . Άρα, από το Θεώρημα 12.3.1, έχουμε

$$\int_C \frac{1}{z^3} dz = F(-1) - F(1) = 0.$$

△

**Παράδειγμα 12.3.8** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα  $\int_{C_1} z dz$  και  $\int_{C_2} z dz$ , όπου οι καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  φαίνονται στο Σχήμα 12.4.



Σχήμα 12.4: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.3.8.

**Λύση.** Η συνάρτηση  $F(z) = \frac{z^2}{2}$  είναι μία αρχική της  $f(z) = z$ . Επομένως, από το Θεώρημα 12.3.1, ευρίσκουμε

$$\int_{C_1} z dz = F(1+i) - F(0) = \frac{(1+i)^2}{2} = i.$$

Εξάλλου, από το Θεώρημα 12.3.2 ( $3 \Rightarrow 1$ ), έχουμε

$$\int_{C_2} z dz = \int_{C_1} z dz = i.$$

△

## 12.4 Θεώρημα Cauchy

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε την ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων με κατάλληλα πεδία ορισμού, των οποίων το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος απλών κλειστών και τμηματικά  $C^1$  καμπυλών είναι μηδέν. Η κατηγορία αυτή περιέχει (όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο) τις συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις που έχουν μία αρχική συνάρτηση σε ένα πεδίο  $\Omega$ . Επίσης, περιέχει τις ολόμορφες συναρτήσεις σε απλά συνεκτικό πεδίο  $\Omega$ , όπως συνάγεται από το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων.

**Θεώρημα 12.4.1 (Cauchy-Goursat.)**

Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο  $\Omega$ . Τότε, για κάθε απλή, κλειστή και τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  του  $\Omega$  ισχύει

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

□

Οι υποθέσεις του θεωρήματος, ότι η συνάρτηση είναι ολόμορφη και το πεδίο ορισμού της είναι απλά συνεκτικό, είναι απαραίτητες, όπως συνάγεται από τις ακόλουθες περιπτώσεις συναρτήσεων.

(i) Η συνάρτηση  $f(z) = \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , δεν είναι ολόμορφη σε κανένα  $z \in \mathbb{C}$ , αλλά ισχύει

$$\oint_{|z|=1} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i \neq 0.$$

(ii) Η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , είναι ολόμορφη στο πεδίο  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ , το οποίο δεν είναι απλά συνεκτικό, αλλά ισχύει

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0.$$

**Παράδειγμα 12.4.1** Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\oint_C \cos(z^4) dz = 0,$$

για οποιαδήποτε απλή, κλειστή και τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  του  $\mathbb{C}$ .

**Λύση.** Η συνάρτηση  $f(z) = \cos(z^4)$  είναι ολόμορφη στο απλά συνεκτικό πεδίο  $\mathbb{C}$  και έτσι ο ισχυρισμός έπεται από το Θεώρημα Cauchy-Goursat.

△

**Παράδειγμα 12.4.2** Ισχύει ότι

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2 + 16} dz = 0,$$

όπου  $C$  ο μοναδιαίος κύκλος  $|z| = 1$  του  $\mathbb{C}$ .



**Λύση.** Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 16} = \frac{e^z}{(z - 4i)(z + 4i)}$$

είναι ολόμορφη σε κάθε απλά συνεκτικό πεδίο  $\Omega$  με  $\pm 4i \notin \Omega$ , το οποίο περιέχει την καμπύλη  $C$ , και έτσι ο ισχυρισμός συνάγεται ως συνέπεια του Θεωρήματος Cauchy-Goursat.

△

**Παράδειγμα 12.4.3** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^2 + z + 1},$$

όπου  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$ .

**Λύση.** Η εξίσωση  $z^2 + z + 1 = 0$  έχει τις ρίζες  $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  και  $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  για τις οποίες ισχύει  $|z_1| = |z_2| = 1$ , δηλαδή τα σημεία  $z_1$  και  $z_2$  ευρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου  $C$  κέντρου 0 και ακτίνας  $1/2$ . Άρα, επιλέγοντας ένα δίσκο  $D_r(0)$  με  $\frac{1}{2} < r < 1$  και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Cauchy-Goursat για τον κύκλο  $C$ , ο οποίος περιέχεται στον  $D_r(0)$ , και τη συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$ , η οποία είναι ολόμορφη στον  $D_r(0)$ , ευρίσκουμε  $I = 0$ .

△

**Πόρισμα 12.4.1** Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο  $\Omega$ . Τότε, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int_C f(z) dz$  είναι ανεξάρτητο από την τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  που βρίσκεται στο  $\Omega$  και ενώνει δύο σημεία  $A$  και  $B$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $A$  και  $B$  δύο σημεία του  $\Omega$  και  $C_1$  και  $C_2$  απλές τμηματικά  $C^1$  παραμετρικές καμπύλες του  $\Omega$  με αρχή το  $A$  και τέλος το  $B$ . Τότε η  $C_3 = C_1 \cup C_2^-$  είναι απλή κλειστή και τμηματικά  $C^1$  καμπύλη του  $\Omega$ . Υπολογίζουμε

$$\oint_{C_3} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz.$$

Όμως, από το Θεώρημα Cauchy-Goursat, έχουμε

$$\oint_{C_3} f(z) dz = 0$$

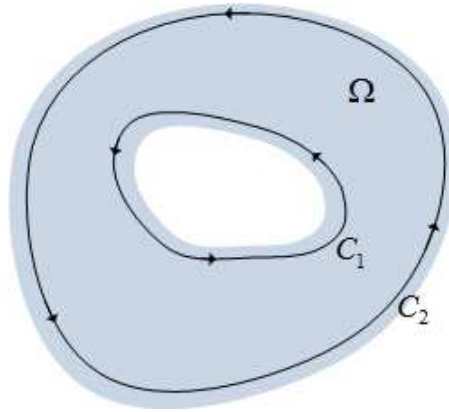
και ο ισχυρισμός αποδείχτηκε.

□

**Θεώρημα 12.4.2 (Αρχή της συνεχούς παραμόρφωσης)**

Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στο πεδίο  $\Omega$ . Θεωρούμε δύο απλές κλειστές και τμηματικά  $C^1$  θετικά προσανατολισμένες καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  του  $\Omega$  έτσι ώστε η  $C_1$  να βρίσκεται στο εσωτερικό της  $C_2$  και το μεταξύ τους χωρίο να περιέχεται στο  $\Omega$  (Σχήμα 12.5). Τότε, ισχύει

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$



Σχήμα 12.5: Γεωμετρική οπτικοποίηση του πεδίου  $\Omega$  του Θεωρήματος 12.4.2.

**Απόδειξη.** Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη

$$\Gamma = C_1^- \cup L^- \cup C_2 \cup L$$

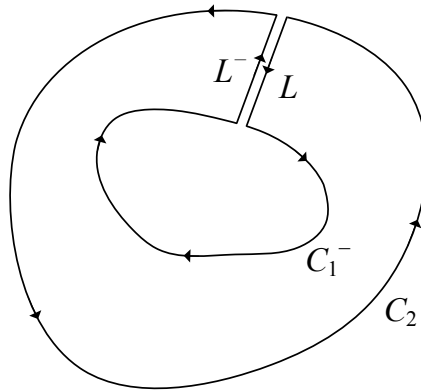
του Σχήματος 12.6 και σημειώνουμε ότι η παρουσία των ευθυγράμμων τμημάτων στην καμπύλη  $\Gamma$  συνεπάγεται ότι το εσωτερικό της  $\Gamma$  είναι απλά συνεκτικό σύνολο. Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 12.4.1 (Cauchy-Goursat) για την ολόμορφη συνάρτηση  $f$  και την καμπύλη  $\Gamma$ , ευρίσκουμε

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = - \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0.$$

□

**Παράδειγμα 12.4.4** Υπολογίστε το  $\oint_C \frac{1}{z} dz$ , όπου  $C$  η έλλειψη με καρτεσιανή εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (Σχήμα 12.7).

**Λύση.** Επιλέγουμε έναν κύκλο  $C_1$  με κέντρο το 0 και ακτίνα  $\rho$ , όπου  $0 < \rho < \min(a, b)$ , ο οποίος είναι απλή, κλειστή,  $C^1$ , θετικά προσανατολισμένη καμπύλη, ευρίσκεται στο εσωτερικό της  $C$  και η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , είναι ολόμορφη σε ένα πεδίο  $\Omega$  με  $0 \notin \Omega$



Σχήμα 12.6: Οπτικοποίηση των γεωμετρικών στοιχείων της απόδειξης του Θεωρήματος 12.4.2.

που περιέχει τις  $C$  και  $C_1$  και το μεταξύ τους χωρίο. Έτσι, εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz.$$

Όμως, από το Παράδειγμα 12.3.2, έχουμε

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i,$$

οπότε

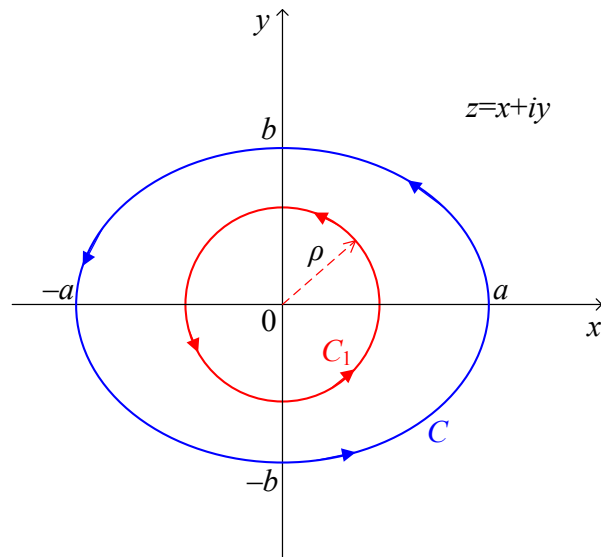
$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

△

Η αρχή της συνεχούς παραμόρφωσης επιδέχεται την ακόλουθη επέκταση για περισσότερες από δύο καμπύλες.

**Θεώρημα 12.4.3** Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στο πεδίο  $\Omega$ . Θεωρούμε τις απλές κλειστές και τμηματικά  $C^1$  θετικά προσανατολισμένες καμπύλες  $C_1, C_2, \dots, C_n$  του  $\Omega$  με τις ιδιότητες ότι η  $C_k$  βρίσκεται στο εσωτερικό της  $C$ , το εσωτερικό της  $C_k$  δεν έχει κοινά σημεία με το εσωτερικό της  $C_i$ , για  $i \neq k$ , και το χωρίο μεταξύ της  $C$  και της  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$  να περιέχεται στο  $\Omega$  (Σχήμα 12.8). Τότε, ισχύει

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz.$$



Σχήμα 12.7: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.4.4.

**Απόδειξη.** Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη  $\Gamma$  του Σχήματος 12.9, της οποίας το εσωτερικό είναι απλά συνεκτικό και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 12.4.1 (Cauchy-Goursat).

□

**Παράδειγμα 12.4.5** Υπολογίστε το  $\oint_C \frac{1}{z^2+1} dz$ , όπου  $C$  ο κύκλος  $|z| = 3$ .

**Λύση.** Ο παρανομαστής γράφεται ως  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$  και επομένως η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν είναι ολόμορφη στα σημεία  $z = i$  και  $z = -i$ , τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$ . Αναλύοντας σε απλά κλάσματα, ευρίσκουμε

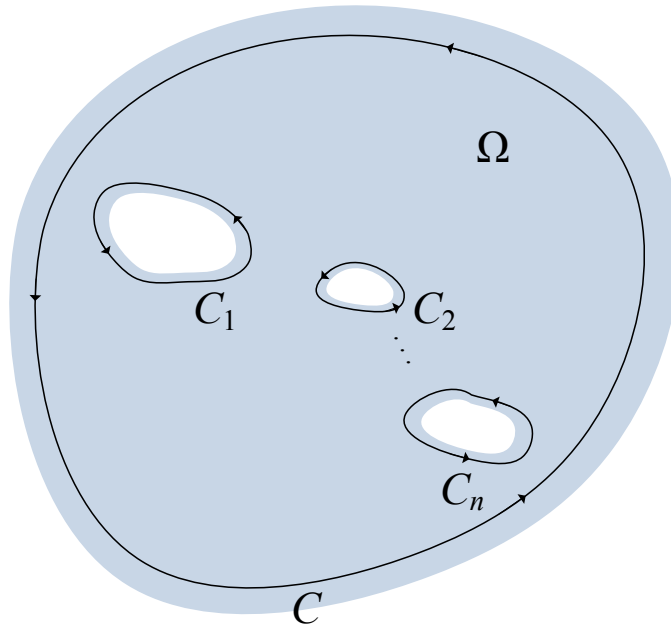
$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z - i} - \frac{1}{2i} \frac{1}{z + i},$$

και έτσι

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2i} \oint_C \left( \frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right) dz.$$

Εφαρμόζοντας, τώρα, το Θεώρημα 12.4.3, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz &= \frac{1}{2i} \oint_{C_1} \left( \frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right) dz + \frac{1}{2i} \oint_{C_2} \left( \frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right) dz \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{C_1} \frac{1}{z - i} dz - \frac{1}{2i} \oint_{C_1} \frac{1}{z + i} dz + \frac{1}{2i} \oint_{C_2} \frac{1}{z - i} dz - \frac{1}{2i} \oint_{C_2} \frac{1}{z + i} dz, \end{aligned}$$



Σχήμα 12.8: Γεωμετρική οπτικοποίηση του πεδίου  $\Omega$  του Θεωρήματος 12.4.3.

όπου  $C_1$  και  $C_2$  κύκλοι με κέντρα τα  $i$  και  $-i$  αντιστοίχως και κατάλληλες ακτίνες ώστε να βρίσκονται στο εσωτερικό της  $C$  (Σχήμα 12.10).

Επειδή η συνάρτηση  $\frac{1}{z+i}$  είναι ολόμορφη στη  $C_1$  και το εσωτερικό της και η  $\frac{1}{z-i}$  είναι ολόμορφη στη  $C_2$  και το εσωτερικό της, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 12.4.1 Cauchy-Goursat, έχουμε ότι

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z+i} dz = 0 \quad \text{και} \quad \oint_{C_2} \frac{1}{z-i} dz = 0.$$

Εξάλλου, από το Παράδειγμα 12.3.2, υπολογίζουμε

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z-i} dz = 2\pi i \quad \text{και} \quad \oint_{C_2} \frac{1}{z+i} dz = 2\pi i,$$

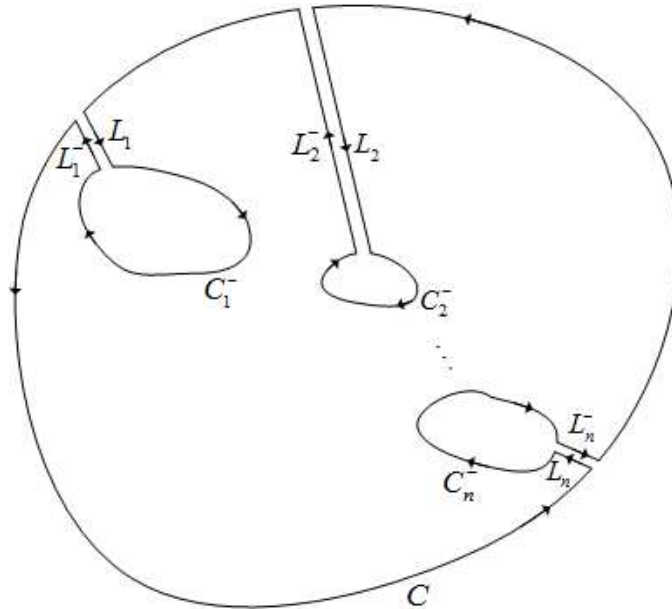
και άρα τελικά ευρίσκουμε

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i} 2\pi i - \frac{1}{2i} 2\pi i = 0.$$

△

## 12.5 Ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy

Ο ακόλουθος ολοκληρωτικός τύπος προσδιορίζει, με τη βοήθεια συγκεκριμένου επικαμπυλίου ολοκληρώματος, τις τιμές μιας ολόμορφης συνάρτησης στο εσωτερικά σημεία μιας απλής



Σχήμα 12.9: Οπτικοποίηση των γεωμετρικών στοιχείων της απόδειξης του Θεωρήματος 12.4.3.

κλειστή και τμηματικά  $C^1$  καμπύλης από τις τιμές της συνάρτησης επάνω στα σημεία της καμπύλης.

### Θεώρημα 12.5.1 (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)

Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο  $\Omega$  και  $C$  μια απλή κλειστή και τμηματικά  $C^1$  θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του  $\Omega$ . Αν  $z_0$  είναι ένα σημείο στο εσωτερικό της  $C$ , τότε

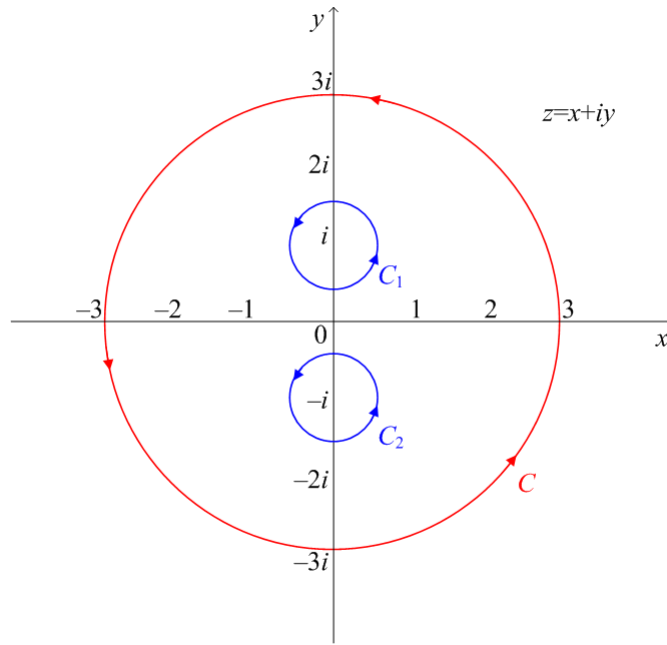
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (12.5.1)$$

**Απόδειξη.** Η συνάρτηση  $f$ , ως ολόμορφη, είναι συνεχής στο  $z_0$ . Έτσι, για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$(a) \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \quad \forall z \in \Omega \text{ με } |z - z_0| < \delta.$$

Εξάλλου, επειδή το  $z_0$  ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$ , υπάρχει ένα  $\rho > 0$  με  $\rho < \delta$  έτσι ώστε  $D_\rho(z_0) \subseteq \text{εσ}(C)$ . Τότε, εφαρμόζοντας την αρχή συνεχούς παραμόρφωσης (Θεώρημα 12.4.2) για την καμπύλη  $C$  και τον κύκλο  $C_\rho$  με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $\rho$ , ευρίσκουμε

$$(b) \quad \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$



Σχήμα 12.10: Καμπύλη ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 12.4.5.

Όμως, από το Παράδειγμα 12.3.2, έχουμε

$$(c) \quad \oint_{C_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

ενώ, με τη βοήθεια της (a), παρατηρούμε ότι ισχύει

$$(d) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\rho}, \quad \forall z \in C_\rho.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (d) και εφαρμόζοντας την ML ανισότητα (12.3.2), ευρίσκουμε

$$(e) \quad \left| \oint_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (b), (c) και (e), ευρίσκουμε

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \oint_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq 2\pi\epsilon,$$

από την οποία, για  $\epsilon \rightarrow 0$ , συνάγεται

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

□

**Παρατηρήσεις.**

(i) Ο τύπος (12.5.1) αναφέρεται συνήθως υπό τη χρηστικότερη μορφή

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

(ii) Το ολοκλήρωμα  $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  ορίζεται για κάθε  $z_0 \in \mathbb{C}$  με  $z_0 \notin C$  και ισχύει

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in \text{εσ}(C) \\ 0, & z_0 \in \text{εξ}(C) \end{cases},$$

όπου με  $\text{εσ}(C)$  και  $\text{εξ}(C)$  συμβολίζουμε το εσωτερικό και το εξωτερικό της καμπύλης  $C$ . Ο ισχυρισμός του πρώτου κλάδου προκύπτει από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy και του δεύτερου από το Θεώρημα Cauchy-Goursat.

**Παράδειγμα 12.5.1** Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{z^2 - 5z + 2i}{z + i} dz,$$

όπου  $C : |z| = 3$ .

**Λύση.** Η συνάρτηση  $f(z) = z^2 - 5z + 2i$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  και το σημείο  $z_0 = -i \in \text{εσ}(C)$ . Έτσι, εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, ευρίσκουμε

$$I = 2\pi i f(-i) = -\pi(14 + 2i).$$

△

**Παράδειγμα 12.5.2** Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{e^z}{z} dz,$$

όπου  $C : |z| = 1$ .

**Λύση.** Η συνάρτηση  $f(z) = e^z$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  και το σημείο  $z_0 = 0 \in \text{εσ}(C)$ , οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$



△

**Παράδειγμα 12.5.3** Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{e^{az}}{z^2 + 4} dz,$$

όπου  $C : |z| = 4$  και  $a \in \mathbb{C}$ .

**Λύση.** Αναλύουμε τη συνάρτηση  $\frac{1}{z^2+4}$  σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{4i} \frac{1}{z - 2i} - \frac{1}{4i} \frac{1}{z + 2i}$$

και έτσι το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \frac{1}{4i} \oint_C \frac{e^{az}}{z - 2i} dz - \frac{1}{4i} \oint_C \frac{e^{az}}{z + 2i} dz.$$

Η συνάρτηση  $f(z) = e^{az}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  και τα σημεία  $z_1 = 2i$  και  $z_2 = -2i$  ανήκουν στο εσωτερικό της  $C$ . Έτσι, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, ευρίσκουμε

$$I = \frac{1}{4i} 2\pi i f(2i) - \frac{1}{4i} 2\pi i f(-2i) = \frac{\pi}{2} e^{2ia} - \frac{\pi}{2} e^{-2ia} = \pi i \sin(2a).$$

△

Ο ολοκληρωτικός τύπος του επομένου θεωρήματος εκφράζει την τιμή της παραγώγου  $n$ -τάξεως μιάς ολόμορφης συνάρτησης σε ένα εσωτερικό σημείο μίας απλής κλειστής και τμηματικά  $C^1$  θετικά προσανατολισμένης καμπύλης με τη βοήθεια ενός μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος κατά μήκος της καμπύλης αυτής.

**Θεώρημα 12.5.2 (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους)**

Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο  $\Omega$  και  $C$  μια απλή κλειστή και τμηματικά  $C^1$  θετικά προσανατολισμένη παραμετρική καμπύλη του  $\Omega$ . Τότε, η  $f(z)$  έχει παραγώγους  $f^{(n)}(z_0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , οποιασδήποτε τάξης σε κάθε  $z_0$  που ανήκει στο εσωτερικό της  $C$ , οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (12.5.2)$$

□

**Παράδειγμα 12.5.4** Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{e^z}{z^{n+1}} dz,$$

όπου  $C : |z| = 1$  και  $n \in \mathbb{N}$ .

**Λύση.** Η συνάρτηση  $f(z) = e^z$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  με  $f^{(n)}(z) = e^z$  και το σημείο  $z_0 = 0 \in \text{εσ}(C)$ , οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, έχουμε

$$I = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{2\pi i}{n!}.$$

△

**Παράδειγμα 12.5.5** Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{4})^3} dz,$$

όπου  $C : |z| = 1$ .

**Λύση.** Η συνάρτηση  $f(z) = \sin z$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  και το σημείο  $z_0 = \frac{\pi}{4} \in \text{εσ}(C)$ , οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, με  $n = 2$ , λαμβάνουμε

$$I = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(\pi/4) = \pi i (-\sin(\pi/4)) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

△

**Πόρισμα 12.5.1** Κάθε ολόμορφη συνάρτηση  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  στο ανοικτό σύνολο  $\Omega$  έχει παραγώγους κάθε τάξης στο  $\Omega$ .

**Απόδειξη.** Έστω ένα  $z \in \Omega$  και ένα  $\rho > 0$  με  $D_\rho(z) \subseteq \Omega$ . Τότε, η συνάρτηση  $f : D_\rho(z) \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ολόμορφη και ο δίσκος  $D_\rho(z)$  είναι απλά συνεκτικό σύνολο. Εφαρμόζοντας, τώρα, τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, στη συνάρτηση  $f$  στον κύκλο  $C_r$  με κέντρο το  $z$  και ακτίνα  $r < \rho$ , συνάγουμε ότι η  $f$  έχει παραγώγους κάθε τάξης στο  $z$ .

□

## 12.6 Συνέπειες των ολοκληρωτικών τύπων Cauchy

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται, ως εφαρμογές των ολοκληρωτικών τύπων Cauchy, βασικά θεωρήματα αναφερόμενα σε σημαντικές ιδιότητες των ολομόρφων συναρτήσεων.

### Θεώρημα 12.6.1 (Ταυτότητας ολομόρφων συναρτήσεων)

Έστω  $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφες συναρτήσεις στο πεδίο  $\Omega$ . Αν υπάρχει  $z_0 \in \Omega$  και  $\rho > 0$  με  $D_\rho(z_0) \subseteq \Omega$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in D_\rho(z_0)$$

(δηλαδή οι  $f$  και  $g$  συμπίπτουν στον δίσκο  $D_\rho(z_0)$ ), τότε, ισχύει

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \Omega$$

(δηλαδή οι  $f$  και  $g$  συμπίπτουν στο  $\Omega$ ).

□

**Σημείωση 12.6.1** Το Θεώρημα 12.6.1 ισχύει επίσης και, υπό τη γενικότερη υπόθεση, ότι υπάρχει  $z_0 \in \Omega$  και ακολουθία  $z_n \in \Omega$  με  $z_n \neq z_m | n \neq m$ ,  $z_n \rightarrow z_0$  και  $f(z_n) = g(z_n)$ .

△

### Θεώρημα 12.6.2 (Αρχή Μεγίστου Μέτρου: τοπική μορφή)

Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη συνάρτηση στο πεδίο  $\Omega$ . Αν υπάρχουν  $z_0 \in \Omega$  και  $R > 0$  με  $D_R(z_0) \subseteq \Omega$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad \forall z \in D_R(z_0),$$

τότε η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ .

**Απόδειξη.** Έστω ένα (σταθεροποιημένο)  $r$  με  $0 < r < R$ . Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy (12.5.1) στον κύκλο  $C_r$  με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $r$ , ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)| \end{aligned}$$

και επομένως ευρίσκουμε

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})|) d\theta = 0.$$

Όμως, η συνάρτηση  $|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})|$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , είναι συνεχής, αφού η  $f$  είναι ολόμορφη, και  $\geq 0$ , από την υπόθεση. Έτσι, από γνωστή ιδιότητα του ολοκληρώματος Riemann πραγματικών συναρτήσεων, η συνάρτηση είναι ταυτοτικά μηδέν, δηλαδή ισχύει

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| = |f(z_0)|, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \forall r \in (0, R)$$

και επομένως η συνάρτηση  $|f|$  είναι σταθερή στο  $D_R(z_0)$ . Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 11.4.1, συνάγουμε ότι και η  $f$  είναι σταθερή στο  $D_R(z_0)$ . Τώρα, από το Θεώρημα 12.6.1 (ταυτότητας ολομόρφων συναρτήσεων), συμπεραίνουμε ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Omega$ .

□

### Θεώρημα 12.6.3 (Αρχή Μεγίστου Μέτρου)

Έστω  $\Omega$  ένα φραγμένο πεδίο του  $\mathbb{C}$ ,  $\bar{\Omega}$  η κλειστότητα του  $\Omega$  στο  $\mathbb{C}$  και  $f : \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι ολόμορφη στο  $\Omega$ . Τότε, η συνάρτηση  $|f|$  λαμβάνει το μέγιστο αυτής στο σύνορο  $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ .

**Απόδειξη.** Επειδή το  $\Omega$  είναι φραγμένο έχουμε ότι το  $\bar{\Omega}$  είναι κλειστό και φραγμένο. Έτσι, επειδή η  $|f|$  είναι συνεχής, από το Θεώρημα 10.5.5, έχουμε ότι υπάρχει ένα  $z_0 \in \bar{\Omega}$  έτσι ώστε να ισχύει

$$(*) \quad |f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad \forall z \in \bar{\Omega}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι  $z_0 \notin \partial\Omega$ , τότε  $z_0 \in \Omega$ , το οποίο είναι ανοικτό και έτσι υπάρχει ένα  $R > 0$  με  $D_R(z_0) \subseteq \Omega$ . Επομένως, από την (\*) και το Θεώρημα 12.6.2, η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Omega$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $\bar{\Omega}$ , η  $f$  είναι σταθερή και στο  $\bar{\Omega}$ .

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής. Αν η  $f$  είναι μη σταθερή στο  $\bar{\Omega}$  τότε οδηγούμαστε σε αντίφαση, ενώ αν η  $f$  είναι σταθερή, τότε η μέγιστη τιμή της λαμβάνεται σε κάθε σημείο του  $\bar{\Omega}$ , άρα και σε κάθε σημείο του συνόρου  $\partial\Omega$ .

□

**Θεώρημα 12.6.4 (Αρχή Ελαχίστου Μέτρου)**

Έστω  $\Omega$  ένα φραγμένο πεδίο του  $\mathbb{C}$ ,  $\bar{\Omega}$  η κλειστότητα του  $\Omega$  στο  $\mathbb{C}$  και  $f : \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής μη σταθερή συνάρτηση, η οποία είναι ολόμορφη στο  $\Omega$ . Τότε, η συνάρτηση  $|f|$  λαμβάνει την ελαχίστη τιμή της είτε σε κάποια ρίζα  $z_0 \in \bar{\Omega}$  της  $f$  είτε στο σύνορο  $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ .

**Απόδειξη.** Αν η  $f$  έχει μία ρίζα  $z_0$  στο  $\bar{\Omega}$  τότε η  $|f|$  λαμβάνει το ελάχιστό της στο  $z_0$ . Έστω ότι η  $f$  δεν έχει ρίζες στο  $\bar{\Omega}$ . Τότε, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 12.6.3 για τη συνάρτηση  $1/f$ .

□

**Θεώρημα 12.6.5 (Liouville)**

Κάθε ακέραια και φραγμένη μιγαδική συνάρτηση  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι σταθερή, δηλαδή υπάρχει μιγαδική σταθερά  $c$  για την οποία ισχύει  $f(z) = c$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

**Απόδειξη.** Από την υπόθεση ότι η  $f$  είναι φραγμένη, υπάρχει  $M > 0$  έτσι ώστε

$$(\alpha) \quad |f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Έστω  $a$  και  $b$  αυθαίρετοι σταθεροποιημένοι μιγαδικοί αριθμοί. Επιλέγουμε ένα πραγματικό αριθμό  $R > 0$  με  $R \geq 2(|a| + |b|)$  και παρατηρούμε ότι για κάθε  $\zeta \in \mathbb{C}$  με  $|\zeta| = R$ , ισχύουν

$$(\beta) \quad |\zeta - a| \geq \frac{1}{2}R \quad \text{και} \quad |\zeta - b| \geq \frac{1}{2}R.$$

Εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για τον κύκλο  $C$  με κέντρο το 0 και ακτίνα  $R$ , ευρίσκουμε

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - a} - \frac{1}{\zeta - b} \right) d\zeta,$$

οπότε από τις  $(\alpha)$  και  $(\beta)$  προκύπτει

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi RM|a - b|}{\left(\frac{1}{2}R\right)^2} = \frac{4M|a - b|}{R} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

η οποία συνεπάγεται  $|f(a) - f(b)| = 0$ , δηλαδή  $f(a) = f(b)$ .

□

**Θεώρημα 12.6.6 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)**

Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο  $P(z)$  με μιγαδικούς συντελεστές έχει μία (τουλάχιστον) μιγαδική ρίζα.

**Απόδειξη.** Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0,$$

για το οποίο ισχύει

$$P(z) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

είναι ακεραία. Εξάλλου, η σχέση

$$|P(z)| = |a_n||z|^n \left| \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \dots + 1 \right|$$

συνεπάγεται

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$$

και άρα

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0.$$

Έτσι, υπάρχει ένα  $R > 0$  με

$$(α) \quad |f(z)| \leq 1, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ με } |z| \geq R.$$

Εξάλλου, η συνάρτηση  $f$  ως ολόμορφη είναι συνεχής στο  $\mathbb{C}$  και επομένως είναι φραγμένη στον κλειστό δίσκο  $\overline{D}_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ , και άρα υπάρχει ένα  $M > 0$  με

$$(β) \quad |f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ με } |z| \leq R.$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (α) και (β), παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|f(z)| \leq 1 + M, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

δηλαδή η  $f$  είναι φραγμένη στο  $\mathbb{C}$ . Έτσι, από το Θεώρημα Liouville, έπεται ότι η  $f$  είναι σταθερή και άρα και η  $P$  είναι σταθερή, το οποίο συνιστά αντίφαση.

□

**Πόρισμα 12.6.1** Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο  $P(z)$  βαθμού  $n$  με μιγαδικούς συντελεστές έχει ακριβώς  $n$  ρίζες στο  $\mathbb{C}$ .

**Απόδειξη.** Από το Θεώρημα 12.6.6, έχουμε ότι υπάρχει  $z_0 \in \mathbb{C}$  με  $P(z_0) = 0$ . Ως γνωστόν, υπάρχει ένα πολυώνυμο  $Q(z)$  βαθμού  $n - 1$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$P(z) = (z - z_0)Q(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Έτσι, ο ισχυρισμός προκύπτει με διαδοχική εφαρμογή του Θεωρήματος 12.6.6.

□

### Θεώρημα 12.6.7 (Morera)

Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής μιγαδική συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

για κάθε κλειστή τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  του  $\Omega$ . Τότε, η  $f$  είναι ολόμορφη στο  $\Omega$ .

**Απόδειξη.** Έστω ένα  $z \in \Omega$ . Τότε, αφού το  $\Omega$  είναι ανοικτό, υπάρχει  $r > 0$  με  $D_r(z) \subseteq \Omega$ . Επειδή ο δίσκος  $D_r(z)$  είναι πεδίο, από το Θεώρημα 12.3.2 (2 $\Rightarrow$ 3) για τη συνάρτηση  $f$  στο δίσκο  $D_r(z)$ , υπάρχει μία συνάρτηση  $F : D_r(z) \rightarrow \mathbb{C}$  με  $F'(z) = f(z)$ . Έτσι, από το Πρόγραμμα 12.5.1, συνάγουμε ότι υπάρχει η  $F''$  της  $F$  στον  $D_r(z)$  και ισχύει

$$f'(z) = F''(z), \quad \forall z \in D_r(z),$$

δηλαδή η  $f$  είναι ολόμορφη στον  $D_r(z)$  και επομένως η  $f$  είναι ολόμορφη σε κάθε  $z \in \Omega$ .

□

## 12.7 Ασκήσεις

**Άσκηση 12.7.1** Υπολογίστε τα μήκη των καμπυλών

- (i)  $z(t) = 3t + i, \quad t \in [-1, 1]$
- (ii)  $z(t) = i + e^{\pi it}, \quad t \in [0, 1]$
- (iii)  $z(t) = i \sin t, \quad t \in [-\pi, \pi]$
- (iv)  $z(t) = t - ie^{-it}, \quad t \in [0, 2].$

**Άσκηση 12.7.2** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_C \bar{z} dz$ , όπου η καμπύλη  $C$  δίνεται από τις περιπτώσεις (i)-(iv) του προηγούμενου παραδείγματος.

**Άσκηση 12.7.3** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i)  $I = \int_C \frac{z+1}{z} dz$

(ii)  $I = \int_C \frac{1}{z^2+z} dz$

(iii)  $I = \int_C \sin^2 z dz,$

όπου  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο 4 και πέρασ το σημείο  $4i$ .

**Άσκηση 12.7.4** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \frac{1}{z^2 - 2z - 8} dz,$$

όπου  $C : |z| = r$  για  $r = 1, 3$  και  $5$ .

**Άσκηση 12.7.5** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i)  $I = \oint_C \frac{z^2}{4-z^2} dz, \quad C : |z+1| = 2$

(ii)  $I = \oint_C \frac{\sin z}{z} dz, \quad C : |z| = 1$

(iii)  $I = \oint_C \frac{e^z}{z^2-3z} dz, \quad C : |z| = 2$

(iv)  $I = \oint_C \frac{e^z}{z^2-3z} dz, \quad C : |z| = 4.$

**Άσκηση 12.7.6** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i)  $I = \oint_C \frac{\sin z + \cos z}{(z-\frac{\pi}{2})(z-\pi)} dz, \quad C : |z| = 4$

(ii)  $I = \oint_C \frac{\cos z}{(z-\pi i)(z-\frac{\pi i}{2})} dz, \quad C : |z-1| + |z+1| = 4$

(iii)  $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{tz}}{(z^2+4)^2} dz, \quad t > 0, \quad C : |z| = 3.$



# Βιβλιογραφία

- [1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex Variables, Introduction and Applications*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [2] M. Beck, G. Marchesi, D. Pixton, and L. Sabalka, *A First Course in Complex Analysis, version 1.4*, 2012.
- [3] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [4] Ε. Γ. Γαλανής, *Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1994.
- [5] J. P. D'Angelo, *An Introduction to Complex Analysis and Geometry*, Department of Mathematics, University of Illinois, 2009.
- [6] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*, Εκδόσεις Τσότρας, Αθήνα, 2013.
- [7] J. E. Marsden, *Basic complex analysis*, W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1973.
- [8] D. E. Marshall, *Complex Analysis*, Department of Mathematics, University of Washington, 2014.
- [9] J. H. Mathews and R. W. Howell, *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*, 3<sup>rd</sup> Ed., Jones and Bartlett Publishers, Toronto, 1997.
- [10] Σ. Α. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1977.
- [11] H. A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [12] Λ. Ν. Τσίτσας, *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός*, 2<sup>η</sup> Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2003.

## Κεφάλαιο 13

# Μιγαδικές δυναμοσειρές και εφαρμογές

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται οι έννοιες της μιγαδικής δυναμοσειράς (σειρά Taylor) και της σειράς Laurent, οι οποίες χρησιμοποιούνται εδώ συστηματικά για την παράσταση και τη μελέτη ολομόρφων συναρτήσεων σε ανοικτούς δίσκους και σε ανοικτούς δακτυλίους, αντιστοίχως. Με τη βοήθεια του αναπτύγματος σε σειρά Taylor διαπιστώνεται ότι μία ολόμορφη συνάρτηση έχει παραγώγους κάθε τάξεως. Εξάλλου, οι σειρές Laurent χρησιμοποιούνται για την ταξινόμηση των μεμονωμένων ανωμαλιών καθώς επίσης και για τον υπολογισμό των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Τέλος, διατυπώνεται το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, το οποίο εφαρμόζεται κατά ουσιαστικό τρόπο στον υπολογισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων.

### 13.1 Ακολουθίες μιγαδικών συναρτήσεων

Μία ακολουθία  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , όπου  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι μιγαδικές συναρτήσεις με (κοινό) πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται *ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων* και συμβολίζεται με  $(f_n)$  ή  $(f_n(z))$  ή και ακόμη απλούστερα με  $f_n$  ή  $f_n(z)$ .

Η συνάρτηση  $f_n$  αναφέρεται και ως ο γενικός όρος της ακολουθίας. Εξάλλου, η αρίθμηση των όρων της ακολουθίας μπορεί να αρχίζει από το 0 ή από ένα φυσικό αριθμό  $m$  και στις περιπτώσεις αυτές γράφουμε  $(f_n)_{n \geq 0}$  και  $(f_n)_{n \geq m}$ .

**Ορισμός 13.1.1** Μία ακολουθία  $(f_n)$  μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με (κοινό) πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$  λέμε ότι *συγκλίνει σημειακά* προς τη μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  και συμβολίζουμε  $f_n \rightarrow f$  σημειακά στο  $\Omega$  όταν υπάρχει στο  $\mathbb{C}$  το  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ ,  $\forall z \in \Omega$  και ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad \forall z \in \Omega,$$

δηλαδή όταν για κάθε  $\epsilon > 0$  και  $z \in \Omega$  υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon, z)$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

□

**Παράδειγμα 13.1.1** Η ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων

$$f_n(z) = z^n, \quad z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

συγκλίνει σημειωκά προς τη συνάρτηση  $f(z) = 0$ ,  $\forall z \in \Omega$ .

**Λύση.** Πράγματι, από το Παράδειγμα 9.1.1, για κάθε  $z \in \Omega$ , έχουμε  $f_n(z) = z^n \rightarrow 0$ .

△

**Παράδειγμα 13.1.2** Η ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων

$$f_n(z) = \frac{n^2 z}{1 + n^2 z}, \quad z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$$

συγκλίνει σημειωκά προς τη συνάρτηση

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \begin{cases} 1, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$$

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι ισχύουν

$$f_n(0) = 0 \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad f_n(z) = \frac{z}{\frac{1}{n^2} + z} \rightarrow \frac{z}{z} = 1, \quad z \neq 0.$$

△

Στον ορισμό της σημειωκής σύγκλισης ακολουθίας μιγαδικών συναρτήσεων ο φυσικός αριθμός  $N$  εξαρτάται από το  $\epsilon$ , αλλά και από το σημείο  $z \in \Omega$ . Η ειδική σημειωκή σύγκλιση, όπου υπάρχει  $N$  ο οποίος εξαρτάται μόνο από το  $\epsilon$ , είναι η λεγόμενη ομοιόμορφη σύγκλιση, η οποία εισάγεται με τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 13.1.2** Μία ακολουθία ( $f_n$ ) μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  λέμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  και συμβολίζουμε  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$  (ή επίσης  $f_n \rightrightarrows f$  στο  $\Omega$ ), όταν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$ , εξαρτώμενος μόνον από το  $\epsilon$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall n \geq N \quad \text{και} \quad \forall z \in \Omega.$$

□

Διατυπώνοντας την άρνηση του ορισμού της ομοιόμορφης σύγκλισης, συνάγουμε ότι ισχύει η επομένη

**Πρόταση 13.1.1** Έστω  $(f_n)$  ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , η οποία συγκλίνει σημειακά προς μία συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1. Η ακολουθία  $f_n$  δεν συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f$ .
2. Υπάρχουν  $\epsilon > 0$ , μία υποακολουθία  $(f_{k_n})$  της  $(f_n)$ , μία ακολουθία  $(z_n)$  του  $\Omega$  και  $N \in \mathbb{N}$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|f_{k_n}(z_n) - f(z_n)| \geq \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

□

Είναι σαφές ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας μιγαδικών συναρτήσεων συνεπάγεται τη σημειακή σύγκλιση αυτής προς την ίδια συνάρτηση  $f$ . Όμως, δεν ισχύει ο αντίστροφος ισχυρισμός, όπως συνάγεται από το ακόλουθο

**Παράδειγμα 13.1.3** Η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(z) = \frac{1}{nz}, \quad z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

συγκλίνει σημειακά αλλά όχι ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f = 0$ .

**Λύση.** Από την  $|f_n(z)| = \frac{1}{|z|n}$ ,  $z \in \Omega$ , έχουμε ότι  $f_n(z) \rightarrow 0$ ,  $\forall z \in \Omega$ , δηλαδή η  $f_n$  συγκλίνει προς την  $f = 0$  σημειακά στο  $\Omega$ .

Όμως, για το  $\epsilon = \frac{1}{2}$  και την ακολουθία  $z_n = \frac{1}{n+1}$  του  $\Omega$ , παρατηρούμε ότι ισχύει

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1 > \frac{1}{2} = \epsilon,$$

οπότε υπάρχει  $N \in \mathbb{N}$  έτσι ώστε να ισχύει

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \epsilon, \quad \forall n \geq N$$

και έτσι, από την Πρόταση 13.1.1, συνάγουμε ότι η  $f_n$  δεν συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f$ .

△

**Παράδειγμα 13.1.4** Η ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων

$$f_n(z) = \frac{n^2 z}{1 + n^2 z}, \quad z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$$

συγκλίνει σημειακά προς τη συνάρτηση

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \begin{cases} 1, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

(Παράδειγμα 13.1.2), αλλά όχι ομοιόμορφα.

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) - f\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

οπότε από την Πρόταση 13.1.1 (για  $\epsilon = \frac{1}{2}$ ), συμπεραίνουμε ότι η  $f_n$  δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $f$ .

△

### Θεώρημα 13.1.1 (Κριτήριο Cauchy για ακολουθίες συναρτήσεων)

Για μία ακολουθία  $(f_n)$  μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

- Υπάρχει μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  με  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$ .
- Για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N \text{ και } \forall z \in \Omega.$$

**Απόδειξη.**  $1 \Rightarrow 2$ . Απλή συνέπεια του ορισμού.

$2 \Rightarrow 1$ . Από την υπόθεση 2, έχουμε ότι η  $f_n(z)$  είναι ακολουθία Cauchy μιγαδικών αριθμών για κάθε  $z \in \Omega$  και άρα είναι συγκλίνουσα στο  $\mathbb{C}$ . Έτσι, ορίζεται η μιγαδική συνάρτηση

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z),$$

οπότε πάλι από την 2 (διατυπωμένη για  $\frac{\epsilon}{2}$ ) για τυχόν  $z \in \Omega$  και  $n \geq N$ , έχουμε

$$|f_n(z) - f(z)| = |f_n(z) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

που σημαίνει ότι  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$ .

□

**Θεώρημα 13.1.2** Έστω  $(f_n)$  ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση. Θεωρούμε την ακολουθία

$$s_n := \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \Omega\} \text{ του } [0, +\infty], \quad (13.1.1)$$

για την οποία ισχύει

$$|f_n(z) - f(z)| \leq s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \forall z \in \Omega. \quad (13.1.2)$$

Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1.  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$ .
2. Η ακολουθία  $(s_n)$  του  $[0, +\infty]$ , η οποία ορίζεται από την (13.1.1), είναι μηδενική.

**Απόδειξη.**  $1 \Rightarrow 2$ . Από την υπόθεση 1 και τον Ορισμό 13.1.2, για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$  έτσι ώστε να ισχύει

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq N \text{ και } \forall z \in \Omega,$$

οπότε, από την (13.1.1), λαμβάνουμε

$$s_n \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

δηλαδή  $s_n \rightarrow 0$ .

$2 \Rightarrow 1$ . Από την υπόθεση 2 και τον ορισμό της μηδενικής ακολουθίας, για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$(*) \quad s_n = |s_n| < \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

οπότε συνδυάζοντας τις (13.1.2) και την (\*), ευρίσκουμε

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \forall z \in \Omega,$$

δηλαδή  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$ .

□

**Παράδειγμα 13.1.5** Η ακολουθία  $f_n(z) = z^n$ ,  $0 < |z| < 1$ , συγκλίνει σημειακά στη συνάρτηση  $f = 0$ , αλλά όχι ομοιόμορφα.

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\sup\{|f_n(z) - f(z)| : 0 < |z| < 1\} = \sup\{|z|^n : 0 < |z| < 1\} = 1 \neq 0$$

και, άρα, από το Θεώρημα 13.1.2, έχουμε ότι η  $f_n$  δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $f$ .

△

**Πόρισμα 13.1.1** Για μία ακολουθία  $(f_n)$  μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , και μία μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1.  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$ .
2. Υπάρχει μία μηδενική ακολουθία  $\omega_n$  (του  $[0, +\infty]$ ) και ένας φυσικός αριθμός  $N$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \omega_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \forall z \in \Omega.$$

**Απόδειξη.**  $1 \Rightarrow 2$ . Επιλέγουμε ως ακολουθία  $\omega_n$  την ακολουθία  $s_n$  του  $[0, +\infty]$ , η οποία ορίζεται από την (13.1.1).

$2 \Rightarrow 1$ . Αποδεικνύεται όπως η συνεπαγωγή  $2 \Rightarrow 1$  στο προηγούμενο θεώρημα.

□

**Παράδειγμα 13.1.6** Η ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων

$$f_n(z) = \frac{z}{n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

συγκλίνει σημειωκά αλλά όχι ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f = 0$  στο  $\mathbb{C}$ , αλλά συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f = 0$  για  $|z| < 1$ .

**Λύση.** Για  $\epsilon = \frac{1}{2}$  και  $z = n$ , παρατηρούμε ότι ισχύει  $f_n(n) = 1 \geq \frac{1}{2}$ , οπότε από την Πρόταση 13.1.1 συμπεραίνουμε ότι η  $f_n$  δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Για  $|z| < 1$ , παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|f_n(z) - f(z)| = |f_n(z)| = \frac{|z|}{n} < \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

οπότε, από το Πόρισμα 13.1.1, συνάγουμε ότι η  $f_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f = 0$ .

△

**Παράδειγμα 13.1.7** Η ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων

$$f_n(z) = \frac{1}{1+nz}, \quad z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots \right\}$$

συγκλίνει σημειακά προς τη συνάρτηση

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \begin{cases} 0, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases},$$

ομοιόμορφα στο σύνολο  $\Omega_1 = \{z \in \Omega : |z| \geq 2\}$  και δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο  $\Omega_2 = \{z \in \Omega : |z| < 2\}$ .

**Λύση.** Είναι σαφές ότι η ακολουθία  $f_n$  συγκλίνει σημειακά προς τη συνάρτηση  $f$ . Εξάλλου, παρατηρούμε ότι για κάθε  $|z| \geq 2$  και  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$\left| \frac{1}{1+nz} \right| \leq \frac{1}{|1-|nz||} \leq \frac{1}{2n-1} \rightarrow 0,$$

οπότε από το Πρόσμημα 13.1.1, έχουμε ότι η ακολουθία  $f_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f$  στο σύνολο  $\Omega_1$ .

Τέλος, για το σύνολο  $\Omega_2$ , επιλέγουμε το  $\epsilon = \frac{1}{2}$  και την ακολουθία  $z_n = \frac{1}{n}$ , οπότε έχουμε

$$|f_n(z_n) - f(z_n)| = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2},$$

οπότε από την Πρόταση 13.1.1, συμπεραίνουμε ότι η  $f_n$  δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $f$ .

△

**Πρόταση 13.1.2** Έστω  $(f_n)$  ακολουθία φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  στο  $\Omega$ . Τότε, η συνάρτηση  $f$  είναι φραγμένη.

**Απόδειξη.** Από την υπόθεση  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$  και τον Ορισμό 13.1.2 για  $\epsilon = 1$ , υπάρχει  $N = N(1) \in \mathbb{N}$  με

$$(a) \quad |f_n(z) - f(z)| < 1, \quad \forall n \geq N \text{ και } \forall z \in \Omega.$$

Αφού, τώρα, η  $f_N$  είναι φραγμένη συνάρτηση, υπάρχει  $M > 0$  με

$$(b), \quad |f_N(z)| \leq M, \quad \forall z \in \Omega.$$

οπότε, συνδυάζοντας τις (a) και (b), ευρίσκουμε

$$|f(z)| \leq |f_N(z) - f(z)| + |f_N(z)| < 1 + M, \quad \forall z \in \Omega$$

και άρα η  $f$  είναι, πράγματι, φραγμένη.

□



Μία σημειακά συγκλίνουσα ακολουθία συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων δεν συγκλίνει πάντοτε προς συνεχή συνάρτηση, όπως συνάγεται από το Παράδειγμα 13.1.4. Όμως, για ομοιόμορφα συγκλίνουσες ακολουθίες μιγαδικών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο

**Θεώρημα 13.1.3** Έστω  $(f_n)$  ακολουθία συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  στο  $\Omega$ . Τότε, η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής.

**Απόδειξη.** Από την υπόθεση  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$  και τον Ορισμό 13.1.2, για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$  με

$$(a) \quad |f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n \geq N \text{ και } \forall z \in \Omega.$$

Έστω  $w$  τυχόν (σταθεροποιημένο) σημείο του  $\Omega$ . Αφού, η συνάρτηση  $f_N$  είναι συνεχής στο  $w$ , υπάρχει  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  έτσι ώστε να ισχύει

$$(b) \quad |f_N(z) - f_N(w)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall z \in \Omega \text{ με } |z - w| < \delta.$$

Συνδυάζοντας, τώρα τις (a) και (b), για κάθε  $z \in \Omega$  με  $|z - w| < \delta$ , λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &\leq |f_N(w) - f(w)| + |f_N(z) - f_N(w)| + |f_N(z) - f(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής στο τυχόν σημείο  $w \in \Omega$ .

□

Για μία ακολουθία  $f_n$  συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει σημειακά προς μία συνάρτηση  $f$ , δεν ισχύει πάντοτε ότι  $\int_C f_n(z) dz \rightarrow \int_C f(z) dz$ , όπως συνάγεται από το ακόλουθο παράδειγμα ακολουθίας πραγματικών συναρτήσεων.

**Παράδειγμα 13.1.8** Η ακολουθία συνεχών πραγματικών συναρτήσεων

$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n, \quad x \in [0, 1]$$

συγκλίνει σημειακά προς τη συνάρτηση  $f = 0$ , αλλά ισχύει

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n}{2n+2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

**Λύση.** Είναι σαφές ότι η ακολουθία  $f_n$  συγκλίνει σημειακά προς τη συνάρτηση  $f = 0$  και ευρίσκουμε

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx(1 - x^2)^n dx = -\frac{n}{2n+2} [(1 - x^2)^{n+1}] \Big|_0^1 = \frac{n}{2n+2}.$$

△

Όμως, για ομοιόμορφα συγκλίνουσες ακολουθίες μιγαδικών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο

**Θεώρημα 13.1.4** Έστω  $(f_n)$  ακολουθία συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$ , η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  στο  $\Omega$  και  $C$  τμηματικά  $C^1$  καμπύλη του  $\Omega$ . Τότε, ισχύει

$$\int_C f_n(z) dz \rightarrow \int_C f(z) dz.$$

**Απόδειξη.** Από το Θεώρημα 13.1.3, η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Omega$  και άρα υπάρχει το  $\int_C f(z) dz$ . Εξάλλου, από τον ορισμό της έννοιας του μήκους καμπύλης (12.2.1), έχουμε ότι η τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  έχει πεπερασμένο μήκος  $L(C)$ . Τώρα, αφού  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$  (άρα και στην καμπύλη  $C \subseteq \Omega$ ), για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$(*) \quad |f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{L(C)}, \quad \forall n \geq N \text{ και } \forall z \in C.$$

Έτσι, με τη βοήθεια της (\*) και της ML ανισότητας (12.3.2), ευρίσκουμε

$$\left| \int_C f_n(z) dz - \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_C (f_n - f)(z) dz \right| < \frac{\epsilon}{L(C)} L(C) = \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

η οποία αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

**Λήμμα 13.1.1** Έστω  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ανοικτό,  $z_0 \in \Omega$  και  $r > 0$  με

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega.$$

Τότε, υπάρχει  $\rho > r$  με

$$D_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\} \subseteq \Omega.$$

(Σχήμα 13.1)

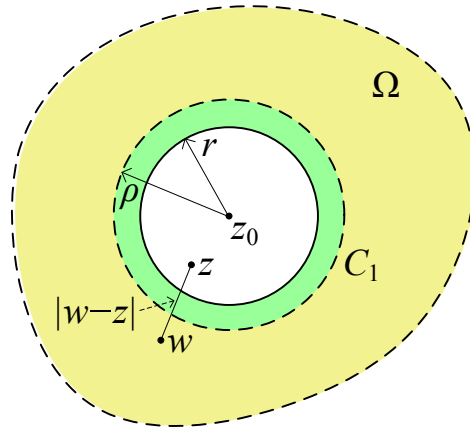
**Απόδειξη.** Περιγράφουμε συνοπτικά τη βασική ιδέα της απόδειξης. Ορίζουμε, αρχικά, τη συνεχή συνάρτηση

$$f : \overline{D}_r(z_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(z) := \inf\{|w - z| : w \in \Omega \setminus \overline{D}_r(z_0)\},$$

για την οποία ισχύει  $f(z) > 0$ ,  $\forall z \in \overline{D}_r(z_0)$ . Επειδή ο κλειστός δίσκος  $\overline{D}_r(z_0)$  είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του  $\Omega$ , από το Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης Τιμής 10.5.5, υπάρχει  $z_1 \in \overline{D}_r(z_0)$  με

$$0 < f(z_1) \leq f(z), \quad \forall z \in \overline{D}_r(z_0),$$

οπότε π.χ. για  $\rho = f(z_1) + r$ , έχουμε  $D_\rho(z_0) \subseteq \Omega$ .



Σχήμα 13.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της απόδειξης του Λήμματος 13.1.1.

□

**Θεώρημα 13.1.5** Έστω  $(f_n)$  ακολουθία ολομόρφων μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με πεδίο ορισμού ένα πεδίο  $\Omega$  υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ , η οποία συγκλίνει προς μία μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  στο  $\Omega$  ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega.$$

Τότε, ισχύουν

1. Η  $f$  είναι ολόμορφη στο  $\Omega$ .
2. Η ακολουθία συναρτήσεων  $(f'_n)$  συγκλίνει σημειακά προς τη συνάρτηση  $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο  $\overline{D}_r(z_0)$  του  $\Omega$ .

**Απόδειξη.**

1. Έστω  $z_0 \in \Omega$ . Τότε, υπάρχει  $r > 0$  με  $D_r(z_0) \subseteq \overline{D}_r(z_0) \subseteq \Omega$ . Πράγματι, αφού το  $\Omega$  είναι ανοιχτό, υπάρχει  $\delta > 0$  με  $D_\delta(z_0) \subseteq \Omega$ , οπότε π.χ. για  $r = \frac{\delta}{2}$  θα έχουμε  $\overline{D}_r(z_0) \subseteq D_\delta(z_0) \subseteq \Omega$ . Εξάλλου, από το Λήμμα 13.1.1 υπάρχει  $\rho > 0$  με  $D_r(z_0) \subseteq \overline{D}_\rho(z_0) \subseteq \Omega$ . Επειδή από την υπόθεση  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $\overline{D}_\rho(z_0)$ , έχουμε ότι  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στον  $D_r(z_0)$ . Οπότε, από το Θεώρημα 13.1.3, η  $f$  είναι συνεχής στο δίσκο  $D_r(z_0)$ .

Έστω τώρα μία απλή κλειστή και τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  του  $D_r(z_0)$ . Επειδή οι  $f_n$  είναι ολόμορφες στον ανοιχτό δίσκο  $D_r(z_0)$ , ο οποίος είναι απλά συνεκτικό σύνολο, από το Θεώρημα Cauchy-Goursat 12.4.1, έχουμε

$$\oint_C f_n(z) dz = 0,$$

οπότε από το Θεώρημα 13.1.4, έχουμε

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

και άρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Morera 12.6.7, συνάγουμε ότι η  $f$  είναι ολόμορφη στο δίσκο  $D_r(z_0)$ .

2. Έστω  $\overline{D}_r(z_0)$  τυχόν κλειστός δίσκος  $\Omega$ . Τότε, από το Λήμμα 13.1.1, υπάρχει  $\rho > r$  με  $\overline{D}_r(z_0) \subseteq D_\rho(z_0) \subseteq \overline{D}_\rho(z_0) \subseteq \Omega$ . Θεωρούμε τον κύκλο  $C_\rho$  με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $\rho$ , ο οποίος περιέχεται στο  $\Omega$  και εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους (12.5.2), οπότε έχουμε

$$(a) \quad f'_n(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad \forall z \in \overline{D}_r(z_0).$$

Όμως, ισχύει

$$(b) \quad \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} \leq \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{(\rho - r)^2}, \quad \forall z \in \overline{D}_r(z_0) \text{ και } \zeta \in C_\rho.$$

Εξάλλου, από την υπόθεση ότι  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο  $\overline{D}_\rho(z_0)$ , έχουμε ότι για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει ένας φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$(c) \quad |f_n(z) - f(z)| < \frac{(\rho - r)^2}{\rho} \epsilon, \quad \forall n \geq N \text{ και } \forall z \in \overline{D}_\rho(z_0),$$

οπότε συνδυάζοντας τις (a), (b) και (c), και αφού ισχύει  $|\zeta - z| \geq \rho - r$ , λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} |f'_n(z) - f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{(\rho - r)^2}{\rho} \epsilon \frac{1}{(\rho - r)^2} 2\pi\rho = \epsilon, \quad \forall n \geq N \text{ και } \forall z \in \overline{D}_r(z_0), \end{aligned}$$

δηλαδή  $f'_n \Rightarrow f'$  ομοιόμορφα στο δίσκο  $\overline{D}_r(z_0)$ .

□

## 13.2 Σειρές μιγαδικών συναρτήσεων

Μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ , όπου  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι μιγαδικές συναρτήσεις με (κοινό) πεδίο ορισμού το υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται *σειρά μιγαδικών συναρτήσεων* και συμβολίζεται με  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  ή  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ .

Η ακολουθία  $(S_n)$  των μιγαδικών συναρτήσεων

$$S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n := \sum_{k=1}^n f_k : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς και συμβολίζεται επίσης με  $\sum_{k=1}^n f_k$ .

Όταν η αρίθμηση των όρων της ακολουθίας  $f_n$  αρχίζει από το 0 ή από το φυσικό αριθμό  $m$ , τότε για την αντίστοιχη σειρά γράφουμε  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  ή  $\sum_{n=m}^{\infty} f_n$ .

**Ορισμός 13.2.1** Μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  λέμε ότι συγκλίνει σημειακά προς τη μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και συμβολίζουμε  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$  σημειακά στο  $\Omega$ , όταν η ακολουθία  $(S_n)$  των μερικών αθροισμάτων της σειράς συγκλίνει σημειακά προς τη συνάρτηση  $f$  στο  $\Omega$ , δηλαδή όταν, για κάθε  $z \in \Omega$ , η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  των μιγαδικών αριθμών συγκλίνει στο  $\mathbb{C}$  και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z), \quad \forall z \in \Omega,$$

δηλαδή όταν για κάθε  $\epsilon > 0$  και για κάθε  $z \in \Omega$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon, z)$ , εξαρτώμενος από τα  $\epsilon$  και  $z$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(z) - f(z) \right| < \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

□

**Ορισμός 13.2.2** Μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με (κοινό) πεδίο ορισμού το υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$  λέμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και συμβολίζουμε  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$  ομοιόμορφα στο  $\Omega$ , όταν η ακολουθία  $(S_n)$  των μερικών αθροισμάτων της σειράς συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f$  στο  $\Omega$ , δηλαδή όταν, για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$ , εξαρτώμενος μόνον από το  $\epsilon$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(z) - f(z) \right| < \epsilon, \quad \forall n \geq N \text{ και } \forall z \in \Omega.$$

□

### Θεώρημα 13.2.1 (Κριτήριο Cauchy για σειρές συναρτήσεων)

Για μία σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1. Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα προς μία μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  στο  $\Omega$ .
2. Για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$\left| \sum_{k=m+1}^n f_k(z) \right| < \epsilon, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ με } n > m \geq N \text{ και } \forall z \in \Omega.$$

**Απόδειξη.** Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 13.1.1 (Κριτήριο Cauchy για ακολουθίες συναρτήσεων) στην ακολουθία  $(S_n)$  των μερικών αθροισμάτων της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

□

Το ακόλουθο κριτήριο είναι το πιο χρηστικό θεωρητικό και πρακτικό εργαλείο για τον έλεγχο της ομοιόμορφης σύγκλισης σειρών συναρτήσεων.

### Θεώρημα 13.2.2 (Κριτήριο Weierstrass)

Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  μία σειρά μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση. Αν υπάρχει ακολουθία  $(M_n)$  του  $[0, +\infty)$  για την οποία ισχύουν

$$(i) \quad |f_n(z)| \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \forall z \in \Omega$$

(ii) Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  είναι συγκλίνουσα, δηλαδή ισχύει  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ , τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f$  στο  $\Omega$ .

**Απόδειξη.** Από την υπόθεση (ii) και το Θεώρημα 9.2.1 (Κριτήριο Cauchy για σειρές μιγαδικών αριθμών), για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\epsilon)$  έτσι ώστε να ισχύει

$$(*) \quad \left| \sum_{k=m+1}^n M_k \right| < \epsilon, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ με } n > m \geq N,$$

οπότε συνδυάζοντας τις υποθέσεις (i), (ii) και την (\*), ευρίσκουμε

$$\left| \sum_{k=m+1}^n f_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k < \epsilon, \\ \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ με } n > m \geq N \text{ και } \forall z \in \Omega$$

και έτσι από το Θεώρημα 13.2.1 (Κριτήριο Cauchy για σειρές συναρτήσεων) συνάγουμε ότι η  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f$  στο  $\Omega$ .

□

**Παράδειγμα 13.2.1** Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z^2-1)^n}$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2\}$ .

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|z^2 - 1| \geq |z^2| - 1 \geq 3, \text{ όταν } |z| \geq 2,$$

οπότε έχουμε

$$\frac{1}{|(z^2 - 1)^n|} = \frac{1}{|z^2 - 1|^n} \leq \frac{1}{3^n}, \text{ όταν } |z| \geq 2.$$

Έτσι, επειδή η γεωμετρική σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  συγκλίνει, από το Κριτήριο Weierstrass, συνάγουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων.

△

**Παράδειγμα 13.2.2** Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο  $\overline{D}_r(0)$  με  $0 \leq r < 1$  και σημειακά στον ανοικτό δίσκο  $D_1(0)$ .

**Λύση.** Για  $z \in \overline{D}_r(0)$ , ισχύει

$$\frac{|z|^n}{n} \leq \frac{r^n}{n} \leq r^n.$$

Έτσι, επειδή η γεωμετρική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  συγκλίνει, από το Κριτήριο Weierstrass, συνάγουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων στο δίσκο  $\overline{D}_r(0)$  με  $0 \leq r < 1$ .

Έστω τώρα  $z_0 \in D_1(0)$ . Τότε, υπάρχει ένα  $\rho > 0$  έτσι ώστε  $\overline{D}_\rho(z_0) \subseteq D_1(0)$ . Όμως, από τον προηγούμενο ισχυρισμό, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο  $\overline{D}_\rho(z_0)$ , άρα συγκλίνει και σημειακά στον κλειστό δίσκο, ο οποίος περιέχει το  $z_0$ .

△

**Παράδειγμα 13.2.3** Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$  συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο  $\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 1 + \delta\}$ ,  $\delta > 0$ .

**Λύση.** Για  $z = x + iy$ , από την

$$n^{-z} = e^{-z \ln n},$$

έχουμε

$$|n^{-z}| = |e^{-(x+iy) \ln n}| = |e^{-x \ln n} e^{-iy \ln n}| = |e^{-x \ln n}| |e^{-iy \ln n}| = |e^{-x \ln n}| = n^{-x},$$

οπότε για  $x \geq 1 + \delta$  έχουμε

$$|n^{-z}| = n^{-x} \leq n^{-1-\delta}.$$

Έτσι, επειδή η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$  συγκλίνει (ως αρμονική τάξης  $1 + \delta > 1$ ), από το Κριτήριο Weierstrass, συνάγεται η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων.

△

Η συνάρτηση

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad z \in \Omega_{\delta}$$

αναφέρεται ως συνάρτηση ζήτα του Riemann και έχει σημαντικές εφαρμογές στη Θεωρία Αριθμών, στη Φυσική και στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση μιας σειράς συναρτήσεων  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  προς τη συνάρτηση  $f$  μεταφέρει τη συνέχεια, την ολοκληρωσιμότητα και την ολομορφία των συναρτήσεων  $f_n$  στη συνάρτηση  $f$ , σύμφωνα με το ακόλουθο

**Θεώρημα 13.2.3** Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  μία σειρά μιγαδικών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$ , η οποία συγκλίνει σημειακά προς μία μιγαδική συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  στο  $\Omega$  και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega.$$

Τότε, ισχύουν

1. Αν οι συναρτήσεις  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχείς τότε η συνάρτηση  $f$  είναι επίσης συνεχής.
2. Αν οι συναρτήσεις  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχείς τότε για κάθε τμηματικά  $C^1$  καμπύλη του  $\Omega$  ισχύει

$$\int_C f(z) dz = \int_C \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_C f_n(z) dz \right).$$

3. Αν οι συναρτήσεις  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ολόμορφες τότε και η συνάρτηση  $f$  είναι ολόμορφη στο  $\Omega$  και ισχύει ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$  των παραγώγων  $f'_n$  στο  $\Omega$  συγκλίνει προς την παράγωγο  $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  της συνάρτησης  $f$  σημειακά στο  $\Omega$  και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο  $\overline{D}_r(z_0)$  του  $\Omega$ .

**Απόδειξη.** Εφαρμόζουμε τα Θεωρήματα 13.1.3, 13.1.4 και 13.1.5 για την ακολουθία  $(S_n)$  των μερικών αθροισμάτων της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

□

**Παράδειγμα 13.2.4** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  είναι ολόμορφη στο δίσκο  $D_1(0)$  και υπολογίστε την παράγωγο  $f'$  της  $f$ .

**Λύση.** Για  $z \in D_1(0)$ , ισχύει

$$\frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$



και επειδή η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  συγκλίνει (ως αρμονική τάξης δύο), από το Κριτήριο Weierstrass, συνάγουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  στο δίσκο  $D_1(0)$ . Εφαρμόζοντας, τώρα, τον ισχυρισμό 3 του Θεωρήματος 13.2.3, έχουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι ολόμορφη στον  $D_1(0)$  με παράγωγο

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^n)'}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}, \quad z \in D_1(0).$$

△

**Παράδειγμα 13.2.5** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $\zeta(z)$  του Riemann είναι ολόμορφη στο σύνολο  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$  και υπολογίστε την παράγωγό της.

**Λύση.** Έστω ένας κλειστός δίσκος  $\overline{D}_\rho(z_0) \subseteq \Omega$ . Τότε, επιλέγοντας ένα  $\delta > 0$  με  $1 + \delta < \operatorname{Re}(z_0) - \rho$ , παρατηρούμε ότι  $\overline{D}_\rho(z_0) \subseteq \Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 1 + \delta\}$ . Από το Παράδειγμα 13.2.3, έχουμε ότι η σειρά συναρτήσεων  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$  συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $\zeta(z)$  στο σύνολο  $\Omega_\delta$  άρα και στο δίσκο  $\overline{D}_\rho(z_0)$ . Έτσι, εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό 3 του Θεωρήματος 13.2.3, έχουμε ότι η συνάρτηση  $\zeta(z)$  είναι ολόμορφη στο  $\Omega$  με παράγωγο

$$\zeta'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-z})' = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-z \ln n})' = - \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) n^{-z}, \quad z \in \Omega.$$

△

**Παράδειγμα 13.2.6** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \left( \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz,$$

όπου  $C$  ο κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα  $\rho$  με  $0 < \rho < 1$ .

**Λύση.** Αρχικά, έχουμε

$$\oint_C \left( \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz = \oint_C \frac{1}{z} dz + \oint_C \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz.$$

Όμως, από το Παράδειγμα 12.3.2, έχουμε

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Για τον υπολογισμό του δευτέρου ολοκληρώματος εργαζόμαστε ως εξής. Έστω κλειστός δίσκος  $\overline{D}_r(0) \subseteq D_1(0)$ . Τότε, για κάθε  $z \in \overline{D}_r(0)$ , ισχύει

$$|z|^n \leq r^n$$

και επειδή η γεωμετρική σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  συγκλίνει, από το Κριτήριο Weierstrass, συνάγουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  στο δίσκο  $\overline{D}_r(0)$ .

Έτσι, σύμφωνα με τον ισχυρισμό 2 του Θεωρήματος 13.2.3, έχουμε

$$\oint_C \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \oint_C z^n dz \right),$$

Όμως, από το Παράδειγμα 12.3.2, έχουμε ότι

$$\oint_C z^n dz = 0$$

και, άρα, ευρίσκουμε

$$\oint_C \left( \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz = 2\pi i.$$

△

### 13.3 Ορισμός και ιδιότητες μιγαδικής δυναμοσειράς

Μια σειρά της μορφής  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  με  $a_n, z_0, z \in \mathbb{C}$  ονομάζεται *μιγαδική δυναμοσειρά* με κέντρο το  $z_0$ .

**Ορισμός 13.3.1** Λέμε ότι μία μιγαδική δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  συγκλίνει (αντιστοίχως αποκλίνει) στο σημείο  $w$  (ή για  $z = w$ ) όταν η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n$  (των μιγαδικών αριθμών) συγκλίνει στο  $\mathbb{C}$  (αντιστοίχως αποκλίνει).

Εξάλλου, το υποσύνολο

$$\Sigma = \left\{ w \in \mathbb{C} : \text{η σειρά } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n \text{ συγκλίνει} \right\}$$

του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται *πεδίο* ή *σύνολο σύγκλισης* της δυναμοσειράς.

□

Είναι σαφές ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για  $z = z_0$  και έχει ως άθροισμα το  $a_0$ .

#### Παράδειγμα 13.3.1 (Γεωμετρική Σειρά)

Η γεωμετρική σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  συγκλίνει για  $|z| < 1$  και αποκλίνει για  $|z| \geq 1$  και ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1. \quad (13.3.1)$$

**Λύση.** Από το γνωστό τύπο

$$\sum_{n=0}^N z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1$$

(άθροισμα των  $N$  πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου), συνάγεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & |z| < 1 \\ \text{δεν υπάρχει,} & |z| \geq 1 \end{cases},$$

διότι  $\lim_{N \rightarrow \infty} z^{N+1} = 0$  για  $|z| < 1$  και η ακολουθία  $z^n$  για  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z| \geq 1$  δεν είναι μηδενική αφού  $|z^n| = |z|^n \geq 1 > 0$ .

△

**Παράδειγμα 13.3.2** Δείξτε ότι

$$1 + 2z + z^2 + (2z)^3 + z^4 + (2z)^5 + \dots + z^{2n} + (2z)^{2n+1} + \dots = \frac{1}{1-z^2} + \frac{2z}{1-4z^2}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

**Λύση.** Το άθροισμα των αρτίων όρων υπολογίζεται, με εφαρμογή της (13.3.1), ως

$$1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n} + \dots = \frac{1}{1-z^2}, \quad |z| < 1.$$

Αντιστοίχως, το άθροισμα των περιττών όρων υπολογίζεται

$$2z + (2z)^3 + (2z)^5 + \dots + (2z)^{2n+1} + \dots = 2z(1 + (2z)^2 + (2z)^4 + \dots + (2z)^{2n} + \dots) = 2z \frac{1}{1-(2z)^2}, \quad |z| < \frac{1}{2},$$

οπότε το ζητούμενο έπεται άμεσα.

△

**Λήμμα 13.3.1 (Abel)**

Έστω μία μιγαδική δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ , η οποία συγκλίνει για ένα σημείο  $z_1 \neq z_0$ . Τότε, η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στον ανοικτό δίσκο  $D_{|z_1-z_0|}(z_0)$ .

**Απόδειξη.** Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι  $z_0 = 0$  (οπότε  $z_1 \neq 0$ ). Έστω  $z \in D_{|z_1|}(0)$ , τότε  $|\frac{z}{z_1}| < 1$ . Επειδή, από την υπόθεση, η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$  συγκλίνει, έχουμε  $a_n z_1^n \rightarrow 0$ , οπότε υπάρχει ένας  $n_0 \in \mathbb{N}$  έτσι ώστε να ισχύει

$$|a_n| |z_1|^n \leq 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Τώρα, υπολογίζουμε

$$|a_n z^n| = |a_n| |z_1|^n \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq \left| \frac{z}{z_1} \right|^n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Όμως, από το Παράδειγμα 13.3.1, η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{z_1} \right)^n$  συγκλίνει, αφού  $\left| \frac{z}{z_1} \right| < 1$ . Έτσι, από το Κριτήριο Σύγκρισης, συνάγουμε ότι η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  συγκλίνει.

□

Άμεσες συνέπειες του Λήμματος Abel είναι οι ιδιότητες

- 1) Το πεδίο σύγκλισης μιας δυναμοσειράς είναι δίσκος.
- 2) Αν η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  αποκλίνει σε ένα  $z_1 \neq z_0$  τότε αυτή αποκλίνει επίσης και στο εξωτερικό  $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{|z_1 - z_0|}(z_0)$  του κλειστού δίσκου  $\overline{D}_{|z_1 - z_0|}(z_0)$ .

**Ορισμός 13.3.2** Έστω μία μιγαδική δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ . Τότε, το

$$R = \sup \left\{ \rho : \text{η σειρά } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ συγκλίνει στο δίσκο } D_{\rho}(z_0) \right\} \in [0, +\infty]$$

ονομάζεται η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

□

**Πρόταση 13.3.1** Έστω μία μιγαδική δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R$ . Τότε, ισχύουν

1. Αν  $R = 0$ , η δυναμοσειρά συγκλίνει (απολύτως) μόνο για  $z = z_0$ .
2. Αν  $R = +\infty$ , η δυναμοσειρά συγκλίνει (απολύτως) για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ .
3. Αν  $R \in (0, +\infty)$ , τότε η δυναμοσειρά
  - (i) συγκλίνει απολύτως στο δίσκο  $D_R(z_0)$
  - (ii) αποκλίνει για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z - z_0| > R$
  - (iii) μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z - z_0| = R$ .

**Απόδειξη.** Αποδεικνύουμε ενδεικτικά τις 3(i) και 3(ii).

3(i): Έστω  $z \in D_R(z_0)$ . Τότε, από τον ορισμό της ακτίνας σύγκλισης υπάρχει  $r$  με  $|z - z_0| < r < R$ , οπότε  $z \in D_r(z_0)$ , έτσι ώστε η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  να συγκλίνει.

3(ii): Έστω ότι υπάρχει ένα  $z_1 \in \mathbb{C}$  με  $|z_1 - z_0| > R$  και η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$  συγκλίνει. Τότε, από το Λήμμα Abel, η σειρά συγκλίνει στο δίσκο  $D_{|z_1 - z_0|}(z_0)$ , οπότε από τον ορισμό της ακτίνας σύγκλισης θα έχουμε  $|z_1 - z_0| \leq R$ , αντίφαση.

□

Στις πραγματικές δυναμοσειρές η ακτίνα σύγκλισης  $R$  ορίζει το διάστημα  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , το οποίο συσχετίζεται με το σύνολο σύγκλισης  $\Sigma$  της δυναμοσειράς ως εξής

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \Sigma \subseteq [x_0 - R, x_0 + R].$$

Στις μιγαδικές δυναμοσειρές το διάστημα  $(x_0 - R, x_0 + R)$  αντικαθίσταται από το δίσκο  $D_R(z_0)$ . Πιο συγκεκριμένα, έστω μία μιγαδική δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R \neq 0$ . Όπως συνάγεται από την τελευταία πρόταση, η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στον ανοικτό δίσκο  $D_R(z_0)$ , αποκλίνει στο εξωτερικό του κλειστού δίσκου  $\overline{D}_R(z_0)$ , ενώ στην περιφέρεια του  $D_R(z_0)$  η δυναμοσειρά μπορεί να συγκλίνει ή μπορεί να αποκλίνει. Δηλαδή, το σύνολο σύγκλισης  $\Sigma$  της δυναμοσειράς συσχετίζεται με τους δίσκους  $D_R(z_0)$  και  $\overline{D}_R(z_0)$  ως εξής

$$D_R(z_0) \subseteq \Sigma \subseteq \overline{D}_R(z_0).$$

**Πρόταση 13.3.2** Έστω μία μιγαδική δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R$  και  $\delta \in (0, +\infty)$ , έτσι ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες

1. Για κάθε  $z$  με  $|z - z_0| < \delta$ , η δυναμοσειρά συγκλίνει
2. Για κάθε  $z$  με  $|z - z_0| > \delta$ , η δυναμοσειρά αποκλίνει.

Τότε ισχύει  $R = \delta$ .

**Απόδειξη.** Από την υπόθεση 1 έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει στον ανοικτό δίσκο  $D_\delta(z_0)$  και έτσι από τον Ορισμό 13.3.2 της ακτίνας σύγκλισης έχουμε  $\delta \leq R$ . Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει  $\delta < R$ , θεωρούμε ένα  $w \in \mathbb{C}$  με  $\delta < |w - z_0| < R$  και παρατηρούμε, με τη βοήθεια της ιδιότητας 2 της υπόθεσης και της ιδιότητας 3(i) της Πρότασης 13.3.1, ότι η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n$  συγκλίνει και συγχρόνως αποκλίνει, αντίφαση. Άρα, πράγματι, ισχύει  $R = \delta$ .

□

### Θεώρημα 13.3.1 (Cauchy-Hadamard)

Έστω μία μιγαδική δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει το  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$ . Τότε, ισχύει

$$R = \frac{1}{\rho} = \begin{cases} 0, & \text{αν } \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho}, & \text{αν } 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \rho = 0 \end{cases} . \quad (13.3.2)$$

**Απόδειξη.** Έστω  $\rho \in (0, +\infty)$ . Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $z_0 = 0$  και θεωρούμε τη δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Τότε για  $|z| < \frac{1}{\rho}$  έχουμε  $\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} |z| \rightarrow \rho |z| < 1$ . Έτσι, από το Κριτήριο Ρίζας, η δυναμοσειρά συγκλίνει. Εξάλλου, για  $|z| > \frac{1}{\rho}$  έχουμε ότι  $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \rightarrow \rho |z| > 1$  και έτσι, από το Κριτήριο Ρίζας, η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα, από την Πρόταση 13.3.2, προκύπτει ότι  $R = \frac{1}{\rho}$ .

□

**Σημείωση 13.3.1** Αν δεν υπάρχει το  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  στο  $[0, +\infty]$  τότε υπάρχουν υπακολουθίες της  $\sqrt[n]{|a_n|}$  οι οποίες συγκλίνουν προς διαφορετικά όρια στο  $[0, +\infty]$ . Στην περίπτωση αυτή ως  $\rho$  θεωρούμε το μεγαλύτερο από τα όρια των συγκλινουσών υπακολουθιών της  $\sqrt[n]{|a_n|}$  στο  $[0, +\infty]$ .

Επί παραδείγματι, για την ακολουθία  $a_n : 1, 2^2, 1, 2^4, 1, 2^6, \dots, 1, 2^{2n}, \dots$ , θέτοντας  $b_n \equiv \sqrt[n]{|a_n|}$ , βλέπουμε ότι υπάρχουν μόνο δύο συγκλίνουσες υπακολουθίες στο  $[0, +\infty]$ , οι  $b_{2n+1} = 1$  και  $b_{2n} = 2$ , και άρα  $\rho = 2$ .

△

**Παράδειγμα 13.3.3** Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης  $R$  της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{1+i} \right)^n.$$

**Λύση.** Για την ακολουθία  $a_n = \frac{1}{(1+i)^n}$ , έχουμε

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}},$$

οπότε  $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$  και άρα  $R = \sqrt{2}$ .

△

**Παράδειγμα 13.3.4** Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης  $R$  της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{\text{Log}(2in)} \right)^n.$$

**Λύση.** Για την ακολουθία  $a_n = \frac{1}{(\text{Log}(2in))^n}$ , έχουμε

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{|\text{Log}(2in)|} = \frac{1}{\sqrt{(\ln(2n))^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}} \rightarrow 0,$$

οπότε  $\rho = 0$  και άρα  $R = +\infty$ .

△

**Πόρισμα 13.3.1** Έστω μία δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  με  $a_n \neq 0$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , και έστω ότι υπάρχει το  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  στο  $[0, +\infty]$ . Τότε, η ακτίνα σύγκλισης  $R$  της δυναμοσειράς δίνεται από

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \quad (13.3.3)$$

□

**Παράδειγμα 13.3.5** Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης  $R$  της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} z^n.$$

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{\left| \frac{i^n}{n^2} \right|}{\left| \frac{i^{n+1}}{(n+1)^2} \right|} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \rightarrow 1,$$

και έτσι, από την (13.3.3), έχουμε  $R = 1$ .

△

**Πρόταση 13.3.3** Έστω μία δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R > 0$ . Τότε, η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο  $\overline{D}_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$  με  $\rho < R$ .

**Απόδειξη.** Έστω ένα (σταθεροποιημένο)  $w \in \mathbb{C}$  με  $\rho < |w - z_0| < R$ . Τότε, η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n$  συγκλίνει και άρα  $a_n(w - z_0)^n \rightarrow 0$ . Έτσι, υπάρχει φυσικός αριθμός  $N$  με

$$|a_n(w - z_0)^n| \leq 1, \quad \forall n \geq N,$$

οπότε

$$(*) \quad |a_n| \leq \frac{1}{|w - z_0|^n}, \quad \forall n \geq N.$$

Έστω τώρα  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z - z_0| \leq \rho$ . Τότε, με τη βοήθεια της (\*), υπολογίζουμε

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| |z - z_0|^n \leq \frac{|z - z_0|^n}{|w - z_0|^n} \leq \frac{\rho^n}{|w - z_0|^n}, \quad \forall n \geq N.$$

Όμως, επειδή  $\frac{\rho}{|w - z_0|} < 1$ , η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{(w - z_0)^n}$  συγκλίνει και επομένως, από το Θεώρημα 13.2.2 (Κριτήριο Weierstrass), η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο δίσκο  $\overline{D}_\rho(z_0)$ .

□

Έστω μία μιγαδική δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R \in (0, +\infty]$ . Τότε, η συνάρτηση

$$f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

αναφέρεται ως η συνάρτηση που ορίζει ή παριστά η δυναμοσειρά.

### Θεώρημα 13.3.2 (Θεώρημα παραγωγίσιμης δυναμοσειράς)

Έστω  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  μία δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης  $R \in (0, +\infty]$ . Τότε, η συνάρτηση

$$f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

την οποία ορίζει η δυναμοσειρά, είναι παραγωγίσιμη στο δίσκο  $D_R(z_0)$  και ισχύει

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}, \quad \forall z \in D_R(z_0). \quad (13.3.4)$$

□

**Παράδειγμα 13.3.6** Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad |z| < 1.$$

**Λύση.** Εφαρμόζοντας την (13.3.4) στη γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

ευρίσκουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1,$$

από την οποία προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

△



Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  παραγωγίσιμη μιγαδική συνάρτηση στο ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$ . Τότε, ορίζονται οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f^{(0)} : A &\rightarrow \mathbb{C}, & f^{(0)}(z) &= f(z) \\ f^{(1)} : A &\rightarrow \mathbb{C}, & f^{(1)}(z) &= f'(z) \\ f^{(2)} : A &\rightarrow \mathbb{C}, & f^{(2)}(z) &= f''(z) \\ & & \vdots & \\ f^{(k+1)} : A &\rightarrow \mathbb{C}, & f^{(k+1)}(z) &= (f^{(k)})'(z), \end{aligned}$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι αναφερόμενες παράγωγοι (ανώτερης τάξης).

**Ορισμός 13.3.3** Μία μιγαδική συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται *απεριόριστα παραγωγίσιμη* στο  $A$ , όταν υπάρχουν οι παράγωγοι

$$f^{(k)}(z), \quad \forall z \in A, \quad k = 1, 2, \dots$$

□

Εξάλλου, ορίζουμε

**Ορισμός 13.3.4** Μία μιγαδική συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται (τοπικά) *αναλυτική* (ή *παραστάσιμη με δυναμοσειρά*) στο σημείο  $z_0 \in A$  όταν υπάρχουν ένα  $r > 0$  με  $D_r(z_0) \subseteq A$  και μία δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , η οποία συγκλίνει για κάθε  $z \in D_r(z_0)$  και ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \forall z \in D_r(z_0).$$

Η  $f$  ονομάζεται *αναλυτική* στο  $A$  όταν είναι τοπικά αναλυτική σε κάθε  $z_0 \in A$ .

□

**Πρόταση 13.3.4** Έστω  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  μία δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης  $R \in (0, +\infty)$ . Τότε, η συνάρτηση

$$f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

την οποία ορίζει η δυναμοσειρά, είναι απεριορίστα παραγωγίσιμη (και άρα ολόμορφη) στο δίσκο σύγκλισης  $D_R(z_0)$  και ισχύουν

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k}, \quad z \in D_R(z_0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (13.3.5)$$

και

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (13.3.6)$$

**Απόδειξη.** Ο ισχυρισμός ότι η  $f$  είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και η (13.3.5) έπονται από το Θεώρημα 13.3.2 (παραγωγίσιμη δυναμοσειρών), ενώ η (13.3.6) προκύπτει από την (13.3.5) για  $z = z_0$ .

□

### Πόρισμα 13.3.2 (Μοναδικότητα δυναμοσειρών)

Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό σύνολο  $A$ . Αν η  $f$  είναι παραστάσιμη από τις δυναμοσειρές  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  και  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  στους δίσκους  $D_r(z_0)$  και  $D_R(z_0)$ , τότε ισχύουν

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Απόδειξη.** Από την (13.3.6), έχουμε  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = b_n$ .

□

### Πρόταση 13.3.5 (Θεώρημα ολοκλήρωσης δυναμοσειράς)

Έστω  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  μία δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης  $R \in (0, +\infty)$  και

$$f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

η συνάρτηση την οποία ορίζει η δυναμοσειρά. Τότε, για κάθε τμηματικά  $C^1$  καμπύλη  $C$  του δίσκου  $D_R(z_0)$  ισχύει

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n dz. \quad (13.3.7)$$

□

**Παράδειγμα 13.3.7** Απόδειξτε ότι ισχύει

$$\operatorname{Log}(1 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1.$$

**Λύση.** Από το Παράδειγμα 13.3.1, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n = \frac{1}{1+\zeta}, \quad |\zeta| < 1.$$

Θεωρούμε ένα σταθεροποιημένο  $z \in D_1(0)$  και μία τμηματικά  $C^1$  καμπύλη του δίσκου  $D_1(0)$  με αρχή το 0 και πέρας το  $z$  και εφαρμόζουμε τον τύπο (13.3.7), οπότε έχουμε

$$\int_C \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_C \zeta^n d\zeta.$$

Περαιτέρω, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{1+\zeta}$  έχει ως αρχική την  $F(z) = \text{Log}(1+\zeta)$ , ενώ η συνάρτηση  $g(z) = \zeta^n$  έχει ως αρχική την  $G(z) = \frac{\zeta^{n+1}}{n+1}$ . Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 12.3.1 στην τελευταία, ευρίσκουμε

$$F(z) - F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (G(z) - G(0)),$$

από την οποία προκύπτει ο ζητούμενος τύπος.

△

## 13.4 Μιγαδικές σειρές Taylor

Όπως είδαμε, μία μιγαδική δυναμοσειρά ορίζει στο δίσκο σύγκλισής της μία ολόμορφη συνάρτηση. Αναφύεται έτσι το εξής ερώτημα: αν μία ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε ένα δίσκο μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά. Θετική απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνει το επόμενο

**Θεώρημα 13.4.1 (Taylor)** Έστω  $f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο  $D_R(z_0)$ . Τότε, υπάρχει μοναδική δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ , η οποία συγχλίνει στο δίσκο  $D_R(z_0)$  και ισχύουν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D_R(z_0), \quad (13.4.1)$$

όπου

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

**Απόδειξη.** Η συνάρτηση

$$g : D_R(0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = f(z_0 + z)$$

είναι ολόμορφη στο δίσκο  $D_R(0)$ . Τότε, για τυχόν σταθεροποιημένο  $z \in D_R(0)$ , από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy (12.5.1), έχουμε

$$(*) \quad g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

όπου  $C$  είναι ο κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα  $\rho$  με  $|z| < \rho < R$ . Σημειώνουμε ότι ισχύει  $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$  και εκφράζουμε το  $\frac{1}{\zeta - z}$  ως εξής

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n.$$

Όμως, από το Θεώρημα 13.3.3, η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$  συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}$  και επομένως η σειρά  $\frac{g(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$  συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}$ . Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.2.3, ευρίσκουμε

(\*\*)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \end{aligned}$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{g^{(n)}(0)}{n!},$$

βάσει του ολοκληρωτικού τύπου Cauchy για παραγώγους (12.5.2). Έτσι, συνδυάζοντας τις (\*) και (\*\*), ευρίσκουμε

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι ισχύει  $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(z_0)$  και  $f(z) = g(z - z_0)$  και έτσι ευρίσκουμε το ανάπτυγμα

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Τέλος, η μοναδικότητα του ανάπτυγματος συνάγεται από το Πόρισμα 13.3.2.

□

Η σειρά που εμφανίζεται στην (13.4.1) ονομάζεται *σειρά Taylor* της συνάρτησης  $f(z)$  στο σημείο  $z_0$ . Η σειρά Taylor στο  $z_0 = 0$  ονομάζεται *σειρά Maclaurin*.

**Πόρισμα 13.4.1** Έστω  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση (ακραία). Τότε, για κάθε  $z_0 \in \mathbb{C}$ , υπάρχει δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , η οποία συγκλίνει για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (13.4.2)$$

**Απόδειξη.** Έστω  $z_0 \in \mathbb{C}$  και  $r > 0$ . Τότε, η συνάρτηση  $f : D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ολόμορφη στο δίσκο. Επομένως, από το Θεώρημα 13.4.1 (Taylor), υπάρχει δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  για την οποία ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \forall z \in D_r(z_0),$$

όπου

$$(*) \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Έστω τώρα ένα τυχόν  $w \in \mathbb{C}$  με  $|w| \geq r$  και  $\rho > 0$  με  $\rho > |w|$ . Από το Θεώρημα 13.4.1 στο δίσκο  $D_\rho(z_0)$ , υπάρχει δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  για την οποία ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n = f(z), \quad \forall z \in D_\rho(z_0),$$

οπότε έχουμε

$$(**) \quad b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Συνδυάζοντας τις (\*) και (\*\*) και  $|w| < \rho$ , ευρίσκουμε

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(w - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n,$$

και άρα πράγματι ισχύει η (13.4.2).

□

**Θεώρημα 13.4.2** Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό σύνολο  $A$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1. Η  $f$  είναι ολόμορφη
2. Η  $f$  είναι αναλυτική

**Απόδειξη.** 1.  $\Rightarrow$  2. Συνάγεται από το Θεώρημα 13.4.1 (Taylor).

2.  $\Rightarrow$  1. Συνάγεται από την Πρόταση 13.3.4.

□

Ως εφαρμογή του Θεωρήματος 13.4.1 (Taylor), διατυπώνουμε τα αναπτύγματα των στοιχειωδών μιγαδικών συναρτήσεων  $e^z$ ,  $\sin z$  και  $\cos z$ .

**Πρόταση 13.4.1** Οι στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις  $e^z$ ,  $\sin z$  και  $\cos z$  έχουν τα ακόλουθα αναπτύγματα σε σειρές Taylor στο 0 (σειρές Maclaurin)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (13.4.3)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (13.4.4)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (13.4.5)$$

**Απόδειξη.**

(13.4.3): Για τη συνάρτηση  $f(z) = e^z$ , έχουμε  $f^{(n)}(z) = e^z$  για  $z \in \mathbb{C}$  και  $n = 1, 2, \dots$ , οπότε  $f^{(n)}(0) = 1$ . Έτσι, εφαρμόζοντας το Πόρισμα 13.4.1, ευρίσκουμε το ανάπτυγμα (13.4.3).

(13.4.4): Για τη συνάρτηση  $f(z) = \sin z$  έχουμε

$$f^{(2n+1)}(z) = (-1)^n \cos z \quad \text{και} \quad f^{(2n)}(z) = (-1)^n \sin z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

οπότε

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad \text{και} \quad f^{(2n)}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Έτσι, από το Πόρισμα 13.4.1, ευρίσκουμε το ανάπτυγμα (13.4.4).

(13.4.5): Επιβεβαιώνεται με παρόμοια διαδικασία.

□

**Παράδειγμα 13.4.1** Αναπτύξτε σε σειρές Maclaurin τις συναρτήσεις

$$(1) \sin(z^2) \quad (2) e^{2z} \quad (3) \frac{1}{1-z} \quad (4) \frac{1}{z^2-5z+6} \quad (5) \frac{6-2z}{z^2-6z+8}.$$

**Λύση.**

Εφαρμόζοντας τις (13.4.4) και (13.4.3), αντιστοίχως, ευρίσκουμε

$$(1) \quad \sin(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

$$(2) \quad e^{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

$$(3) \quad \text{Υπολογίζουμε τις παραγώγους } f^{(n)}(z) \text{ της } f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z \neq 1$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}, \quad z \neq 1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

οπότε έχουμε  $f^{(n)}(0) = n!$  και εφαρμόζοντας την (13.4.1), λαμβάνουμε

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

(4) Από την ανάλυση

$$\frac{1}{z^2-5z+6} = \frac{1}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}},$$

και τους τύπους

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |z| < 2,$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n, \quad |z| < 3,$$

οι οποίοι προκύπτουν από την περίπτωση (3), λαμβάνουμε

$$\frac{1}{z^2-5z+6} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) z^n, \quad |z| < 2.$$

(5) Από την ανάλυση

$$\frac{6-2z}{z^2-6z+8} = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4-z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{4}},$$

και εφαρμόζοντας τη διαδικασία της περίπτωσης (4), ευρίσκουμε

$$\frac{6-2z}{z^2-6z+8} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) z^n, \quad |z| < 2.$$

△

**Παράδειγμα 13.4.2** Αναπτύξτε σε σειρά Maclaurin τη συνάρτηση σφάλματος

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

**Λύση.**

Εφαρμόζοντας την (13.4.3), για  $z = -t^2$ , ευρίσκουμε

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}.$$

Η συνάρτηση  $e^{-t^2}$  είναι ακέραια. Θεωρούμε ένα σταθεροποιημένο  $z \in \mathbb{C}$  και μία τμηματικά  $C^1$  καμπύλη του  $\mathbb{C}$  με αρχή το 0 και πέρας το  $z$  και εφαρμόζουμε την (13.3.7), οπότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \right) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \int_0^z t^{2n} dt \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} z^{2n+1}. \end{aligned}$$

△

Το ανάπτυγμα (13.4.3) οδηγεί στον αναλυτικό ορισμό της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης με τη βοήθεια δυναμοσειράς.

**Ορισμός 13.4.1** Η μιγαδική συνάρτηση

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad e^z \equiv \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (13.4.6)$$

ορίζεται ως μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

□



Ο ορισμός αποτελεί εναλλακτική αναδιατύπωση τους αλγεβρικού ορισμού (10.2.1) της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης και είναι περισσότερο χρηστικός στη μελέτη κυρίως των αναλυτικών ιδιοτήτων (συνέχεια, παραγωγή, ολοκλήρωση) αυτής. Ενδεικτικά, αποδεικνύουμε τις ιδιότητες

(i) Η  $e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$  είναι ολόμορφη (άρα και συνεχής) με παράγωγο  $(e^z)' = e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

(ii)  $e^{z+w} = e^z e^w$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Η (i) προκύπτει αμέσως με εφαρμογή του Θεωρήματος 13.3.2 (παραγωγής δυναμοσειράς). Για την (ii) θεωρούμε, για ένα σταθεροποιημένο  $a \in \mathbb{C}$ , τη συνάρτηση

$$f(z) = e^z e^{a-z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

η οποία είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  και από την (i) ισχύει

$$f'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0.$$

Αφού το  $\mathbb{C}$  είναι πεδίο, από την Πρόταση 11.4.1, έχουμε ότι η  $f$  είναι σταθερή συνάρτηση και άρα, για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ , ισχύει

$$f(z) = f(0) = e^a,$$

δηλαδή

$$e^z e^{a-z} = e^a, \quad \forall z, a \in \mathbb{C},$$

από την οποία, για  $a = z + w$ , συνάγεται η (ii).

**Πρόταση 13.4.2** Για κάθε  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , ισχύει

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

δηλαδή ο αλγεβρικός ορισμός (10.2.1) και ο αναλυτικός ορισμός (13.4.6) ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

**Απόδειξη.** Εφαρμόζοντας την (ii), τον ορισμό (13.4.6) και την

$$i^{2k} = (-1)^k \quad \text{και} \quad i^{2k+1} = (-1)^k i, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (13.4.7)$$

ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} \\ &= e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = e^x (\cos y + i \sin y). \end{aligned}$$

□

Κατά παρόμοιο τρόπο, τα αναπτύγματα (13.4.4) και (13.4.5) οδηγούν στον αναλυτικό ορισμό των μιγαδικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων  $\sin$  και  $\cos$ .

**Ορισμός 13.4.2** Η μιγαδική συνάρτηση

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (13.4.8)$$

ορίζεται ως μιγαδικό ημίτονο και η μιγαδική συνάρτηση

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (13.4.9)$$

ορίζεται ως μιγαδικό συνημίτονο.

□

Η συσχέτιση της μιγαδικής εκθετικής με τις μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι η ακόλουθη

**Πρόταση 13.4.3** Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ , ισχύει

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(τύπος του Euler).

**Απόδειξη.** Από τους ορισμούς (13.4.3)-(13.4.5) και την (13.4.7), έχουμε

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

□

## 13.5 Σειρές Laurent

Στην παράγραφο αυτή μελετούμε ολόμορφες συναρτήσεις σε δακτυλίους και αποδεικνύουμε ότι αναπτύσσονται σε σειρές Laurent, οι οποίες γενικεύουν τις σειρές Taylor.

Μία σειρά της μορφής

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

ονομάζεται *σειρά Laurent* με κέντρο το  $z_0$ . Η σειρά (Taylor)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  ονομάζεται το *κανονικό μέρος* και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$  το *κύριο μέρος* της σειράς Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ .

Η σειρά Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  συγκλίνει τότε και μόνο τότε όταν οι σειρές  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$  συγκλίνουν. Έτσι, το σύνολο σύγκλισης

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{η σειρά } \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ συγκλίνει}\}$$

της σειράς Laurent είναι η τομή του συνόλου σύγκλισης του κανονικού μέρους με το σύνολο σύγκλισης του κυρίου μέρους. Το κανονικό μέρος, ως σειρά Taylor, ορίζει μία ολόμορφη συνάρτηση

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in D_{R_2}(z_0),$$

όπου  $R_2$  είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Εξάλλου, το κύριο μέρος της σειράς Laurent, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού  $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$ , ανάγεται στη σειρά (Taylor)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$ , η οποία ορίζει μία ολόμορφη συνάρτηση

$$h(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n, \quad \zeta \in D_{1/R_1}(0),$$

με  $R_1 = \frac{1}{\rho}$ , όπου  $\rho$  είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Έτσι, ορίζεται η ολόμορφη συνάρτηση

$$f_1(z) = h\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}, \quad |z-z_0| > R_1.$$

Αν  $R_1 < R_2$ , τότε το σύνολο σύγκλισης της σειράς Laurent είναι ο *δακτύλιος* (Σχήμα 13.2)

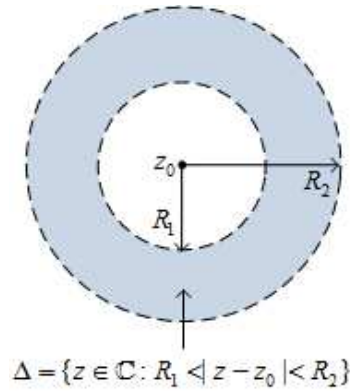
$$\Delta(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\},$$

και η σειρά Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  συγκλίνει στην ολόμορφη συνάρτηση

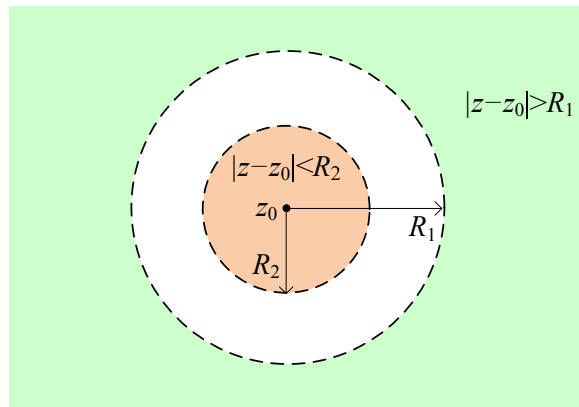
$$f(z) := f_1(z) + f_2(z), \quad z \in \Delta(z_0, R_1, R_2).$$

Αν  $R_1 > R_2$ , τότε τα σύνολα σύγκλισης του κανονικού και του κυρίου μέρους δεν έχουν κοινά σημεία και επομένως η σειρά Laurent δεν συγκλίνει για κανένα  $z \in \mathbb{C}$  (Σχήμα 13.3).

Οι παρατηρήσεις αυτές συνιστούν απόδειξη του ακόλουθου



Σχήμα 13.2: Δακτύλιος σύγκλισης της σειράς Laurent.

Σχήμα 13.3: Οπτικοποίηση των πεδίων σύγκλισης του κανονικού και του κυρίου μέρους της σειράς Laurent για  $R_1 > R_2$ .

**Θεώρημα 13.5.1** Μία σειρά Laurent συγκλίνει προς μία ολόμορφη συνάρτηση στο δακτύλιο σύγκλισης.

□

**Πρόταση 13.5.1** Έστω  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$  μία σειρά μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ , η οποία συγκλίνει σημειακά στο δακτύλιο

$$\Delta(z_0, R, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}, \text{ όπου } R > 0.$$

Τότε, η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$  συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε δακτύλιο

$$\Delta(z_0, r, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}, \text{ όπου } r > R.$$

**Απόδειξη.** Έστω ένα (σταθεροποιημένο)  $w \in \mathbb{C}$  με  $R < |w - z_0| < r$ . Τότε, από την υπόθεση, η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(w-z_0)^n}$  συγκλίνει, οπότε η ακολουθία  $\frac{b_n}{(w-z_0)^n}$  είναι μηδενική και άρα υπάρχει φυσικός αριθμός  $N$  με

$$(*) \quad \frac{|b_n|}{|w - z_0|^n} \leq 1, \quad \forall n \geq N.$$

Έστω τώρα  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z - z_0| > r$ , οπότε  $|w - z_0| < |z - z_0|$ , δηλαδή  $\frac{|w - z_0|}{|z - z_0|} < 1$ . Τότε, με τη βοήθεια της (\*), ευρίσκουμε

$$\left| \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \right| \leq \frac{|w - z_0|^n}{|z - z_0|^n}, \quad \forall n \geq N.$$

Όμως, η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{|w - z_0|}{|z - z_0|} \right)^n$  συγκλίνει, αφού  $\left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ , οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.2.2 (Κριτήριο Weierstrass), συμπεραίνουμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο δακτύλιο  $\Delta(z_0, r, \infty)$ .

□

Εξάλλου, ισχύει και ο αντίστροφος ισχυρισμός του Θεωρήματος 13.5.1, όπως συνάγεται από το ακόλουθο

**Θεώρημα 13.5.2 (Laurent)** Έστω  $\Delta = \Delta(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$  ένας δακτύλιος, όπου  $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$  με  $R_1 < R_2$  και  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στο δακτύλιο  $\Delta$ . Τότε, υπάρχει μοναδική σειρά Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  για την οποία ισχύουν

(i) Η σειρά Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  συγκλίνει σημειακά στο δακτύλιο  $\Delta$  και ισχύει

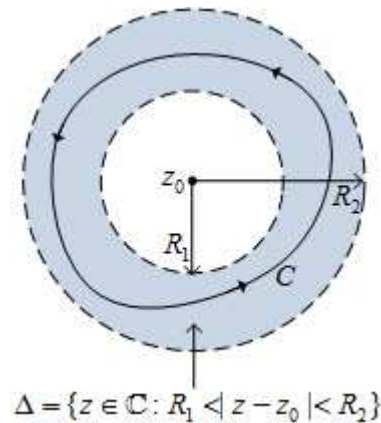
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in \Delta. \quad (13.5.1)$$

(ii)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (13.5.2)$$

όπου  $C$  μία οποιαδήποτε απλή, κλειστή, τμηματικά  $C^1$ , θετικά προσανατολισμένη παραμετρική καμπύλη (πεπερασμένου μήκους) του δακτυλίου  $\Delta$ , η οποία περικλείει τον κύκλο  $|z - z_0| = R_1$  (Σχήμα 13.4).

(iii) Η σειρά Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδακτύλιο  $\overline{\Delta}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$  του  $\Delta$ , όπου  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ .



Σχήμα 13.4: Γεωμετρική παράσταση των υποθέσεων του Θεωρήματος Laurent 13.5.2.

#### Απόδειξη.

(i) Για την πληρέστερη κατανόηση, αποδεικνύουμε το θεώρημα για  $z_0 = 0$ . Για ένα τυχόν (σταθεροποιημένο)  $z \in \Delta$ , επιλέγουμε  $\rho_1, \rho_2 \in (0, +\infty)$  έτσι ώστε

$$R_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R_2$$

και θεωρούμε τους κύκλους  $C_1$  με κέντρο το 0 και ακτίνα  $\rho_1$ ,  $C_2$  με κέντρο το 0 και ακτίνα  $\rho_2$  και  $C_3$  με κέντρο το  $z$  και ακτίνα  $\rho_3$  (Σχήμα 13.5). Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη

$$\Gamma = C_1^- \cup L^- \cup C_2 \cup l \cup C_3^- \cup l^- \cup L$$

του Σχήματος 13.5, της οποίας το εσωτερικό είναι απλά συνεκτικό και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 12.4.1 (Cauchy-Goursat) για την ολόμορφη συνάρτηση  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  και την καμπύλη  $\Gamma$ , οπότε ευρίσκουμε

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = - \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{C_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

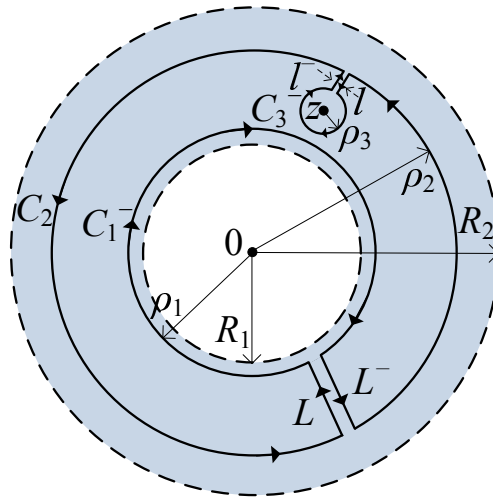
Εξάλλου, εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy (12.5.1) στον κλειστό δίσκο  $\overline{D}_{\rho_3}(z)$ , ο οποίος είναι απλά συνεκτικό σύνολο, έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

οπότε συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες, ευρίσκουμε

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv f_1(z) + f_2(z).$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις (α)  $\zeta \in C_1$  και (β)  $\zeta \in C_2$ .



Σχήμα 13.5: Οπτικοποίηση των γεωμετρικών στοιχείων της απόδειξης του Θεωρήματος Laurent 13.5.2.

Στην περίπτωση (α), παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\left| \frac{\zeta}{z} \right| = \frac{|\zeta|}{|z|} = \frac{\rho_1}{|z|} < 1$$

και θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$\phi_n(\zeta) = \left( \frac{\zeta}{z} \right)^n, \quad \zeta \in C_1.$$

Αφού  $\left| \frac{\zeta}{z} \right| < 1$ , εφαρμόζοντας την Πρόταση 13.3.1, συνάγουμε ότι η γεωμετρική σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta}{z} \right)^n$  συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = \frac{z}{z-\zeta}$  στον κύκλο  $C_1$ , δηλαδή ισχύει

$$-\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta}{z} \right)^n = \frac{1}{\zeta - z}$$

ομοιόμορφα ως προς  $\zeta$  στον κύκλο  $C_1$ . Εξάλλου, επειδή η συνάρτηση  $f(\zeta)$ ,  $\zeta \in C_1$  είναι φραγμένη, αφού η  $f$  είναι συνεχής και ο κύκλος  $C_1$  είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, διαπιστώνεται εύκολα ότι ισχύει

$$(*) \quad -\frac{f(\zeta)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta}{z} \right)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

ομοιόμορφα ως προς  $\zeta$  στον κύκλο  $C_1$ .

Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 13.2.3 και την (\*) για τον κύκλο  $C_1$  του δακτυλίου  $\Delta$ ,

ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 f_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{z} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n d\zeta \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(\zeta) \zeta^n d\zeta \right) \frac{1}{z^{n+1}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} d\zeta \right) z^{-n} \\
 &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n},
 \end{aligned}$$

όπου

$$(a) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} d\zeta, \quad n \geq 1.$$

Τώρα, για την περίπτωση (β), παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\left| \frac{z}{\zeta} \right| = \frac{|z|}{|\zeta|} = \frac{|z|}{\rho_2} < 1,$$

οπότε η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$  συγχλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \frac{\zeta}{\zeta-z}$  ως προς  $\zeta$  στον κύκλο  $C_2$ , δηλαδή ισχύει

$$\frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \frac{1}{\zeta - z}.$$

Εξάλλου, επειδή η συνάρτηση  $f(\zeta)$ ,  $\zeta \in C_2$  είναι φραγμένη στον κύκλο  $C_2$ , συνάγεται ότι ισχύει

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

ομοιόμορφα ως προς  $\zeta$  στον  $C_2$ . Έτσι, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση (α), συνάγουμε

$$\begin{aligned}
 f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\zeta \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,
 \end{aligned}$$



όπου

$$(b) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0.$$

Συνοψίζοντας, συμπεραίνουμε ότι

$$f(z) \equiv f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

(ii) Συνδυάζοντας τις (a) και (b), έχουμε

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \begin{cases} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, & n \leq -1 \\ \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, & n \geq 0 \end{cases}.$$

Θεωρούμε τώρα μία καμπύλη  $C$  με τις ιδιότητες της εκφώνησης, λαμβάνουμε υπόψη ότι η συνάρτηση  $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$  είναι ολόμορφη στο δακτύλιο  $\Delta_0 = \Delta(0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$  και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 12.4.2 για την  $C$  και τον κύκλο  $C_1$  καθώς επίσης για την  $C$  και τον κύκλο  $C_2$ , ευρίσκουμε

$$\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad n \leq -1$$

και

$$\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0,$$

οι οποίες ενοποιούνται στον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Για την περίπτωση  $z_0 \neq 0$ , εφαρμόζουμε την προηγούμενη απόδειξη για τη συνάρτηση

$$g(z) = f(z + z_0), \quad z \in \Delta_0,$$

όπου ισχύει  $g(0) = f(z_0)$ .

(iii) Η σειρά (Taylor)  $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο  $\overline{D}_{\rho_2}(z_0)$ , όπου  $r_2 < \rho_2 < R_2$ , ο οποίος (από την επιλογή του) περιέχει τον κλειστό δακτύλιο  $\overline{\Delta}(z_0, r_1, r_2)$  και επομένως η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο δακτύλιο  $\overline{\Delta}(z_0, r_1, r_2)$ .

Εξάλλου, σύμφωνα με την Πρόταση 13.5.1, η σειρά  $f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο δακτύλιο

$$\Delta(z_0, \rho_1, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \rho_1\}, \quad \text{όπου } R_1 < \rho_1 < r_1,$$

ο οποίος περιέχει τον κλειστό δακτύλιο  $\overline{\Delta}(z_0, r_1, r_2)$  και άρα η σειρά  $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$  συγχλίνει ομοιόμορφα στο δακτύλιο  $\overline{\Delta}(z_0, r_1, r_2)$ .

Επομένως, η σειρά Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f_1(z) + f_2(z)$$

συγχλίνει ομοιόμορφα στο δακτύλιο  $\overline{\Delta}(z_0, r_1, r_2)$ .

Μένει ακόμη η απόδειξη της μοναδικότητας του αναπτύγματος Laurent. Προς τούτο, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη σειρά Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  έτσι ώστε να ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad \forall z \in \Delta.$$

Θεωρούμε έναν κλειστό δακτύλιο  $\overline{\Delta}(z_0, r_1, r_2)$  του  $\Delta$  με  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$  και έναν κύκλο  $C_\rho$  του κλειστού δακτυλίου  $\overline{\Delta}(z_0, r_1, r_2)$  με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $\rho$  με  $r_1 < \rho < r_2$ . Τότε, εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους (12.5.2), ευρίσκουμε

(c)

$$\begin{aligned} 2\pi i a_n &= \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \oint_{C_\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta \\ &= \oint_{C_\rho} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta + \oint_{C_\rho} \sum_{m=1}^{\infty} b_{-m}(\zeta - z_0)^{-m-n-1} d\zeta. \end{aligned}$$

Όμως, επειδή ο κύκλος  $C_\rho$  είναι υποσύνολο του κλειστού δακτυλίου  $\overline{\Delta}(z_0, r_1, r_2)$ , όπου σύμφωνα με την Πρόταση 13.5.1, η σειρά Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  συγχλίνει ομοιόμορφα, έχουμε ότι οι σειρές  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\zeta - z_0)^{k-n-1}$  και  $\sum_{m=1}^{\infty} b_{-m}(\zeta - z_0)^{-m-n-1}$  συγχλίνουν ομοιόμορφα στον κύκλο  $C_\rho$ . Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.2.3 (ολοκλήρωσης ομοιόμορφα συγχλίνουσας σειρές μιγαδικών συναρτήσεων), λαμβάνουμε

$$\oint_{C_\rho} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \oint_{C_\rho} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta$$

(d)

$$\oint_{C_\rho} \sum_{m=1}^{\infty} b_{-m}(\zeta - z_0)^{-m-n-1} d\zeta = \sum_{m=1}^{\infty} b_{-m} \oint_{C_\rho} (\zeta - z_0)^{-m-n-1} d\zeta.$$

Εξάλλου, από το Παράδειγμα 12.3.2, έχουμε

$$(e) \quad \oint_{C_\rho} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = 2\pi i \delta_{kn} = \begin{cases} 2\pi i, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}.$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (c), (d) και (e), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} 2\pi i a_n &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \oint_{C_\rho} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta + \sum_{m=1}^{\infty} b_{-m} \oint_{C_\rho} (\zeta - z_0)^{-m-n-1} d\zeta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \oint_{C_\rho} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = 2\pi i b_n, \end{aligned}$$

δηλαδή  $b_n = a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

□

**Πόρισμα 13.5.1** Έστω  $r_2 \in (0, +\infty]$  και  $f : D_{r_2}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση. Τότε, για κάθε  $r_1 < r_2$ , για το ανάπτυγμα (13.5.1) της  $f$  σε σειρά Laurent στο δακτύλιο  $\Delta(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$  ισχύει  $a_n = 0$ ,  $\forall n \leq -1$ .

**Απόδειξη.** Από το Θεώρημα Laurent 13.5.2 για την  $f$  στο δακτύλιο  $\Delta(z_0, r_1, r_2)$ , έχουμε ότι

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

όπου  $C$  καμπύλη, η οποία περιγράφεται στο Θεώρημα Laurent 13.5.2.

Επειδή, για  $n \leq -1$ , η ολοκληρωτέα συνάρτηση  $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$  είναι ολόμορφη στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$ , από το Θεώρημα Cauchy-Goursat 12.4.1, έχουμε  $a_n = 0$ ,  $\forall n \leq -1$ .

□

**Πόρισμα 13.5.2** Έστω  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r_1 \in (0, +\infty]$  και  $f : \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r_1\} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση. Τότε για κάθε  $r_2 > r_1$  για το ανάπτυγμα (13.5.1) της  $f$  σε σειρά Laurent στο δακτύλιο  $\Delta(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$  ισχύει  $a_n = 0$ ,  $\forall n \geq 1$ .

**Απόδειξη.** Για τυχόν  $R > R_2$  θεωρούμε τον κύκλο  $C_R$  με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $R$ . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 12.4.2 στα ολοκληρώματα του τύπου (13.5.2), συνάγεται ότι

$$(a) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Περαιτέρω, θεωρούμε την παραμέτρηση  $\zeta = z_0 + Re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  του κύκλου  $C_R$  και υπολογίζουμε

$$(b) \quad \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{R^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} i R e^{i\theta} d\theta = \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{e^{in\theta}} d\theta.$$

Επειδή η συνάρτηση  $f$  ως ολόμορφη είναι και συνεχής στον κύκλο  $C_R$ , συνάγουμε ότι είναι φραγμένη στον κύκλο  $C_R$ , δηλαδή υπάρχει ένα  $M > 0$  έτσι ώστε να ισχύει

$$(c) \quad |f(z_0 + Re^{i\theta})| \leq M, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Συνδυάζοντας τις (a), (b) και (c), ευρίσκουμε

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^n} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^n} 2\pi = \frac{M}{R^n} \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } R \rightarrow \infty, \quad \forall n \geq 1,$$

η οποία συνεπάγεται

$$|a_n| = 0, \quad \text{δηλαδή } a_n = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

□

Ως εφαρμογή του τελευταίου πορίσματος επεξεργαζόμαστε το ακόλουθο

**Παράδειγμα 13.5.1** Αναπτύξτε σε σειρά Laurent τη συνάρτηση

$$f(z) = e^{1/z}$$

στο δακτύλιο

$$\Delta(0, 0, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}.$$

**Λύση.** Από το Πόρισμα 13.5.2, έχουμε ότι  $a_n = 0$ ,  $\forall n \geq 1$  και επομένως ισχύει

$$e^{1/z} = \sum_{n=-\infty}^0 a_n z^n.$$

Τώρα, εφαρμόζοντας τον τύπο (13.4.3) για το  $\frac{1}{z}$ , ευρίσκουμε

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

△

**Παράδειγμα 13.5.2** Αναπτύξτε σε σειρά Laurent στο δακτύλιο

$$\Delta(0, 0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

Λύση.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) z^n, \quad z \in \Delta(0, 0, 1).
 \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 13.5.3** Αναπτύξτε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2}$$

σε σειρά Laurent στους δακτυλίους

$$\Delta_1 = \Delta(1, 0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 1\}$$

και

$$\Delta_2 = \Delta(2, 0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 2| < 1\}.$$

Λύση.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} \\
 &= \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n, \quad z \in \Delta_1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1+(z-2)} \\
 &= \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n, \quad z \in \Delta_2.
 \end{aligned}$$

△

Το ανάπτυγμα Laurent δοσμένης συνάρτησης εξαρτάται από την επιλογή του δακτυλίου, όπως συνάγεται από το ακόλουθο

**Παράδειγμα 13.5.4** Αναπτύξτε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}$$

σε σειρά Laurent στους δακτυλίους

$$\Delta_1 = \Delta(0, 1, 2) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$$

και

$$\Delta_2 = \Delta(0, 2, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}.$$

**Λύση.**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad z \in \Delta_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n 2^n + 1] \frac{1}{z^{n+1}}, \quad z \in \Delta_2. \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 13.5.5** Αναπτύξτε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

σε σειρά Laurent στο δακτύλιο

$$\Delta(1, 0, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \infty\}.$$

**Λύση.** Θέτουμε  $w = z - 1$  και έχουμε

$$\begin{aligned} f(w+1) &= \frac{e^{(2w+2)}}{w^3} = \frac{e^2}{w^3} \left( 1 + 2w + \frac{(2w)^2}{2!} + \frac{(2w)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \frac{e^2}{w^3} + \frac{2e^2}{w^2} + \frac{2e^2}{w} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2 w}{3} + \dots, \end{aligned}$$

οπότε

$$f(z) = \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2(z-1)}{3} + \dots, \quad z \in \Delta(1, 0, \infty).$$

△

## 13.6 Αναλυτική συνέχιση

Η αναλυτική συνέχιση ολομόρφων συναρτήσεων συνίσταται σε μία τεχνική επέκτασης (διεύρυνσης) του πεδίου ορισμού μιας ολόμορφης συνάρτησης έτσι ώστε να διατηρείται η ολομορφία της. Η αναλυτική συνέχιση επεκτείνει τον ορισμό της ολόμορφης συνάρτησης σε ένα νέο πεδίο, όπου η αντίστοιχη σειρά Taylor, η οποία ορίζει αρχικά τη συνάρτηση, είναι αποκλίνουσα.

Για να αποσαφηνίσουμε τον χαρακτήρα της αναλυτικής συνέχισης, επεξεργαζόμαστε το ακόλουθο

**Παράδειγμα 13.6.1** Θεωρούμε τις ολόμορφες συναρτήσεις

$$f : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

και

$$g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = \frac{1}{1-z},$$

για τις οποίες ισχύουν

$$D_1(0) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \forall z \in D_1(0),$$

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in D_1(0),$$

δηλαδή η συνάρτηση  $g$  επεκτείνει το πεδίο ορισμού  $D_1(0)$  της  $f$  στο πεδίο ορισμού  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  με διατήρηση της ολομορφίας της  $f$ .

△

Τα δεδομένα του παραδείγματος οδηγούν στον ορισμό.

### Ορισμός 13.6.1 (Αναλυτική συνέχιση)

Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση στο ανοικτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$  και  $U$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  με  $\Omega \subseteq U$ . Μία ολόμορφη συνάρτηση  $g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  για την οποία ισχύει

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \Omega$$

ονομάζεται *αναλυτική συνέχιση* της  $f$  στο  $U$ .

□

Στο προηγούμενο παράδειγμα η συνάρτηση  $g$  είναι αναλυτική συνέχιση της  $f$  στο  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

**Πρόταση 13.6.1** Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση και  $U \subseteq \mathbb{C}$  με  $\Omega \subseteq U$ . Αν υπάρχει αναλυτική συνέχιση  $g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  της συνάρτησης  $f$ , τότε η  $g$  είναι μοναδική.

**Απόδειξη.** Έστω ότι υπάρχει και άλλη αναλυτική επέκταση  $h : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  της συνάρτησης  $f$ . Τότε, θα ισχύει

$$h(z) = f(z) = g(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

Έστω τώρα  $z_0 \in \Omega$ . Επειδή το  $\Omega$  είναι ανοικτό υπάρχει  $\rho > 0$  έτσι ώστε  $D_\rho(z_0) \subseteq \Omega$ , οπότε από το Θεώρημα 12.6.1 (ταυτότητας ολομόρφων συναρτήσεων) συνάγουμε ότι

$$h(z) = g(z), \quad \forall z \in U.$$

□



**Σημείωση 13.6.1** Υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις για τις οποίες δεν υπάρχει αναλυτική συνέχιση. Ένα συγκεκριμένο σχετικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad |z| < 1,$$

η οποία είναι ολόμορφη στο δίσκο  $D_1(0)$  αλλά, όπως αποδεικνύεται με διαδικασία αντίφασης, δεν έχει αναλυτική συνέχιση. Επειδή τα επιχειρήματα και οι υπολογισμοί στη διατύπωση της αντίφασης είναι πολύπλοκοι, δεν περιγράφουμε τη σχετική επεξεργασία της.

△

### Θεώρημα 13.6.1 (Αρχή αναλυτικής συνέχισης)

Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και  $g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις στα πεδία  $\Omega$  και  $U$ . Αν  $\Omega \cap U \neq \emptyset$  και ισχύει

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \Omega \cap U,$$

τότε υπάρχει μοναδική ολόμορφη συνάρτηση  $h : \Omega \cup U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , έτσι ώστε  $h = f|_{\Omega}$  και  $h = g|_U$  (η  $h$  είναι η αναλυτική συνέχιση (αναλυτική επέκταση) τόσο της συνάρτησης  $f$  όσο και της συνάρτησης  $g$  στο  $\Omega \cup U$ ).

**Απόδειξη.** Η συνάρτηση

$$h : \Omega \cup U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega \\ g(z), & z \in U \end{cases}$$

είναι ολόμορφη στο  $\Omega \cup U$ , αφού οι  $f$  και  $g$  είναι ολόμορφες στα  $\Omega$  και  $U$ , δηλαδή η  $h$  είναι αναλυτική συνέχιση τόσο της  $f$  όσο και της  $g$  στο  $\Omega \cup U$ . Η μοναδικότητα της  $h$  εξασφαλίζεται από την Πρόταση 13.6.1.

□

Στη σχετική βιβλιογραφία ως αναλυτική συνέχιση αναφέρεται συνήθως η αρχή της αναλυτικής συνέχισης η οποία διατυπώνεται στο προηγούμενο θεώρημα.

**Παράδειγμα 13.6.2** Η ολόμορφη συνάρτηση

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt, \quad z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

έχει ως αναλυτική επέκταση τη συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

**Λύση.** Υπολογίζοντας το γενικευμένο ολοκλήρωμα, ευρίσκουμε

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \Omega$$

και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $g(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  είναι ολόμορφη και συμπίπτει με τη συνάρτηση  $f(z)$  στο  $\Omega$ .

△

**Παράδειγμα 13.6.3** Η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

είναι η αναλυτική επέκταση της συνάρτησης

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n, \quad z \in D_1(-1) = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 1\}.$$

**Λύση.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n = -\frac{1}{z}, \quad |z+1| < 1$$

και, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.3.2 (παραγώγισης δυναμοσειράς), ευρίσκουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n = \frac{1}{z^2}, \quad |z+1| < 1$$

και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $g(z) = \frac{1}{z^2}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  είναι ολόμορφη και συμπίπτει με τη συνάρτηση  $f(z)$  στο  $\Omega$ .

△

Σημειώνουμε επίσης ότι οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\sin z$  και  $\cos z$  είναι οι αναλυτικές επεκτάσεις στο  $\mathbb{C}$  των πραγματικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων  $\sin x$  και  $\cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

## 13.7 Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία

Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  και  $z_0$  ένα σημείο του  $\mathbb{C}$ . Το σημείο  $z_0$  ονομάζεται *μεμονωμένο ανώμαλο σημείο* της

συνάρτησης  $f$  αν η  $f$  δεν είναι ολόμορφη στο  $z_0$ , αλλά υπάρχει  $R > 0$ , έτσι ώστε η  $f$  να είναι ολόμορφη στο σύνολο  $\{z \in A : 0 < |z - z_0| < R\}$ .

Επί παραδείγματι, το  $z_0 = 0$  είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$ , ενώ το  $z_0 = 0$  δεν είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης  $g(z) = \text{Log}z$ ,  $z \neq 0$ , διότι η λογαριθμική συνάρτηση δεν είναι ολόμορφη στα σημεία της κλαδικής της τομής  $\{z \in \mathbb{C} : z = x > 0\}$  (βλ. Παράγραφο 11.3).

Αν το  $z_0$  είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης  $f$ , τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 13.5.2 (Laurent), η  $f$  αναπτύσσεται σε σειρά Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R. \quad (13.7.1)$$

### Ταξινόμηση μεμονωμένων ανωμάτων σημείων

Ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο  $z_0$  της συνάρτησης  $f$  ονομάζεται:

1. *αιρόμενο ανώμαλο σημείο* (ή *απαλείψιμη ανωμαλία*) όταν το κύριο μέρος της  $f$  στο ανάπτυγμα (13.7.1) είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει

$$a_{-n} = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

2. *πόλος* όταν το κύριο μέρος της  $f$  στο ανάπτυγμα (13.7.1) περιέχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων, δηλαδή όταν υπάρχει  $k \in \mathbb{N}$  έτσι ώστε να ισχύει

$$a_{-k} \neq 0 \quad \text{και} \quad a_{-n} = 0, \quad \forall n > k.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, το  $k$  ονομάζεται *τάξη* του πόλου και το  $z_0$  *πόλος τάξης*  $k$ . Ο πόλος τάξης  $k = 1$  αναφέρεται και ως *απλός πόλος*.

3. *ουσιώδες ανώμαλο σημείο* όταν το κύριο μέρος της  $f$  στο ανάπτυγμα (13.7.1) περιέχει άπειρο πλήθος μη μηδενικών όρων, δηλαδή ισχύει

$$a_{-n} \neq 0 \quad \text{για} \quad \text{άπειρο} \quad \text{πλήθος} \quad n \in \mathbb{N}.$$

### Θεώρημα 13.7.1 (Riemann)

Έστω  $A$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in A$  και  $f : A \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη συνάρτηση. Τότε η  $f$  έχει το  $z_0$  ως αιρόμενο ανώμαλο σημείο τότε και μόνο τότε όταν η  $f$  είναι τοπικά φραγμένη στο  $z_0$ , δηλαδή όταν υπάρχουν  $R > 0$  και  $M > 0$  έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

□

**Πόρισμα 13.7.1** Έστω  $A$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in A$  και  $f : A \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη συνάρτηση. Τότε το  $z_0$  είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της  $f$  αν και μόνο αν υπάρχει στο  $\mathbb{C}$  το  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

□

**Παράδειγμα 13.7.1** Χαρακτηρίστε το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \neq 0.$$

**Λύση.**

Για το μεμονωμένο ανώμαλο σημείο  $z_0 = 0$  της συνάρτησης  $f$  ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

οπότε, από την προηγούμενη πρόταση, συνάγεται ότι το  $z_0 = 0$  είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της  $f$ .

Εναλλακτικά, από το ανάπτυγμα

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots,$$

έχουμε, για  $z \neq 0$ , ότι

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots,$$

οπότε  $a_{-n} = 0$  για κάθε  $n = 1, 2, \dots$  και άρα το  $z_0 = 0$  είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της  $f$ .

△

**Θεώρημα 13.7.2** Έστω  $A$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in A$  και  $f : A \setminus \{z_0\} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση. Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

1. Το  $z_0$  είναι πόλος της  $f$  τάξης  $k$ .
2. Υπάρχει  $k \in \mathbb{N}$  και συνάρτηση  $g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη με  $g(z_0) \neq 0$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z), \quad \forall z \in A \setminus z_0.$$

3.  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

□

**Παράδειγμα 13.7.2** Χαρακτηρίστε το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων των συναρτήσεων

$$f(z) = \frac{(z-2)^2}{z^2+2z+5} \quad \text{και} \quad g(z) = \frac{5}{(z+2)(z+i)^4}.$$

**Λύση.** Από την

$$f(z) = \frac{(z-2)^2}{(z+1+2i)(z+1-2i)},$$

βλέπουμε ότι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία  $z_1 = -1 - 2i$  και  $z_2 = -1 + 2i$  είναι απλοί πόλοι της  $f(z)$ .

Εξάλλου, από τον τύπο της  $g(z)$ , παρατηρούμε ότι τα  $z_3 = -2$  και  $z_4 = -i$  είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία αυτής και ειδικότερα το  $z_3$  είναι απλός πόλος και το  $z_4$  είναι πόλος τάξης 4 της  $g$ .

△

**Πρόταση 13.7.1** Έστω  $A$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in A$  και  $f : A \setminus \{z_0\} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση. Τότε το  $z_0$  είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο τότε και μόνο τότε όταν δεν υπάρχει το  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  στο  $\tilde{\mathbb{C}}$ .

□

**Ορισμός 13.7.1** Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη συνάρτηση στο πεδίο  $\Omega$ . Ένα  $z_0 \in \Omega$  ονομάζεται *ρίζα τάξης  $k$*  της  $f$  αν ισχύουν

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

□

**Πρόταση 13.7.2** Έστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη συνάρτηση στο πεδίο  $\Omega$ ,  $z_0 \in \Omega$  με  $f(z_0) = 0$  και η  $f$  όχι ταυτοτικά μηδέν. Τότε, το  $z_0$  είναι ρίζα τάξης  $k$  τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει μία ολόμορφη συνάρτηση  $g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  με  $g(z_0) \neq 0$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad \forall z \in \Omega,$$

δηλαδή το  $z_0$  είναι ρίζα τάξης  $k$  της συνάρτησης  $f$  τότε και μόνο τότε όταν το  $z_0$  είναι πόλος τάξης  $k$  της συνάρτησης  $\frac{1}{f}$ .

□

**Παράδειγμα 13.7.3** Βρείτε το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων των συναρτήσεων

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} \quad \text{και} \quad g(z) = \frac{1}{z \sin z}.$$

**Λύση.**

Παρατηρούμε ότι τα σημεία  $z_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , είναι απλές ρίζες της συνάρτησης  $\frac{1}{f(z)} = \sin z$  και επομένως είναι απλοί πόλοι της  $f(z)$ .

Εξάλλου, τα σημεία  $z_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$ , είναι απλές ρίζες της  $\frac{1}{g(z)} = z \sin z$  και άρα απλοί πόλοι της  $g(z)$ . Το  $z_0 = 0$ , ως ρίζα τάξης 2 της  $\frac{1}{g(z)}$ , είναι πόλος τάξης 2 της  $g(z)$ .

△

**Παράδειγμα 13.7.4** Βρείτε το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων της συνάρτησης

$$f(z) = ze^{\frac{1}{z}}, \quad z \neq 0.$$

**Λύση.** Από το Παράδειγμα 13.5.1, συνάγουμε ότι η συνάρτηση  $f$  αναπτύσσεται στη σειρά Laurent

$$f(z) = z \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \dots, \quad z \neq 0,$$

από την οποία παρατηρούμε ότι το  $z_0 = 0$  είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της  $f(z)$ .

△

**Παράδειγμα 13.7.5** Βρείτε το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων των συναρτήσεων

$$f(z) = \frac{z+1}{z}, \quad |z| > 0 \quad \text{και} \quad g(z) = \frac{1}{z(z+1)}, \quad 0 < |z| < 1.$$

**Λύση.** Από την  $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$ , συνάγουμε ότι  $a_{-1} = 1$  και  $a_{-n} = 0$  για κάθε  $n > 1$ , οπότε το  $z_0 = 0$  είναι απλός πόλος της  $f(z)$ .

Εξάλλου, από το ανάπτυγμα της  $g$  σε σειρά Laurent

$$g(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad 0 < |z| < 1,$$

όπου  $a_{-1} = 1$  και  $a_{-n} = 0$  για κάθε  $n > 1$ , συμπεραίνουμε ότι το  $z_0 = 0$  είναι απλός πόλος της  $g(z)$ .

△

**Παράδειγμα 13.7.6** Βρείτε το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων των συναρτήσεων

$$(α) \frac{\cos z}{z^2} \quad (β) \frac{e^z - 1}{z^2} \quad (γ) \frac{z+1}{z-1} \quad (δ) \frac{e^z}{z} \quad (ε) \frac{z}{e^z - 1}$$

**Λύση:**

(α) Από την

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z}{4!} + \dots,$$

παρατηρούμε ότι το σημείο  $z_0 = 0$  είναι πόλος τάξης 2 της συνάρτησης  $\frac{\cos z}{z^2}$ .

(β) Επειδή

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left( z + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots,$$

η συνάρτηση  $\frac{e^z - 1}{z^2}$  έχει απλό πόλο στο σημείο  $z_0 = 0$ .

(γ) Από την

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{z-1+2}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1},$$

βλέπουμε ότι το μεμονωμένο ανώμαλο σημείο  $z_1 = 1$  της συνάρτησης  $\frac{z+1}{z-1}$  είναι απλός πόλος.

Εναλλακτικά, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα και με εφαρμογή του Θεωρήματος 13.7.2.

(δ) Από το ανάπτυγμα

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \dots,$$

βλέπουμε ότι το μεμονωμένο ανώμαλο σημείο  $z_0 = 0$  είναι απλός πόλος.

(ε) Επειδή υπάρχει στο  $\mathbb{C}$  το

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z} = 1,$$

από το Πόρισμα 13.7.1, έχουμε ότι το μεμονωμένο ανώμαλο σημείο  $z_0 = 0$  είναι απαλείψιμη ανωμαλία.

△

### 13.8 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα χρησιμοποιούνται συστηματικά για τον υπολογισμό μιγαδικών επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων καθώς επίσης και γενικευμένων ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων.

Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  και  $z_0$  ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης  $f$ . Τότε, η  $f$  είναι ολόμορφη σε ένα δακτύλιο

$$\Delta(z_0, 0, R) = \{z \in A : 0 < |z - z_0| < R\}$$

και, επομένως, αναπτύσσεται στη σειρά Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \Delta(z_0, 0, R).$$

**Ορισμός 13.8.1** Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  και  $z_0$  ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης  $f$ . Τότε, ως ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $\text{Res}(f, z_0)$  της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $z_0$  ορίζεται ο συντελεστής  $a_{-1}$  στο προαναφερόμενο ανάπτυγμα της  $f$  σε σειρά Laurent, δηλαδή ορίζουμε

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}. \quad (13.8.1)$$

□

Από τον τύπο (13.5.2) του Θεωρήματος 13.5.2 (Laurent) (για  $n = -1$ ), προκύπτει

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz. \quad (13.8.2)$$

Σημειώνουμε ότι, από τον ορισμό του αιρούμενου μεμονωμένου ανώμαλου σημείου  $z_0$ , έχουμε ότι ισχύει  $\text{Res}(f, z_0) = 0$  για κάθε αιρούμενο ανώμαλο σημείο  $z_0$ .

**Παράδειγμα 13.8.1** Υπολογίστε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο

$$\text{Res} \left( \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}, 0 \right).$$

**Λύση.** Επειδή η συνάρτηση  $\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$  είναι ολόμορφη στο δίσκο  $D_{\frac{1}{2}}(0)$ , αναπτύσσεται σε σειρά Taylor και επομένως  $a_{-1} = 0$ , δηλαδή

$$\text{Res} \left( \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}, 0 \right) = 0.$$



△

**Παράδειγμα 13.8.2** Βρείτε τα  $\text{Res}(f, 0)$  και  $\text{Res}(g, 0)$  των συναρτήσεων

$$f(z) = e^{\frac{4}{z}}, \quad z \neq 0 \quad \text{και} \quad g(z) = \frac{4z - 6}{z(2 - z)}, \quad 0 < |z| < 2.$$

**Λύση.** Από τα αναπτύγματα

$$f(z) = 1 + \frac{4}{z} + \frac{4^2}{2!z^2} + \dots, \quad z \neq 0$$

και

$$g(z) = -\frac{3}{z} + \frac{1}{2-z} = -\frac{3}{z} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \quad 0 < |z| < 2,$$

συμπεραίνουμε ότι  $\text{Res}(f, 0) = 4$  και  $\text{Res}(g, 0) = -3$ .

△

### Θεώρημα 13.8.1 (Ολοκληρωτικών Υπολοίπων)

Εστω  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το απλά συνεκτικό πεδίο  $\Omega$ , η οποία είναι ολόμορφη στο σύνολο  $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , όπου  $z_k \in \Omega$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Τότε, για κάθε απλή, κλειστή και τμηματικά  $C^1$  θετικά προσανατολισμένη καμπύλη  $C$  του  $\Omega$  που περιέχει στο εσωτερικό της τα σημεία  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , ισχύει

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k). \quad (13.8.3)$$

□

**Παράδειγμα 13.8.3** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C z^2 \sin \frac{1}{z} dz,$$

όπου  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ .

**Λύση.** Από το ανάπτυγμα

$$z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) = z - \frac{1}{3!z} + \dots,$$

προκύπτει ότι

$$\operatorname{Res}\left(z^2 \sin \frac{1}{z}, 0\right) = -\frac{1}{6},$$

και άρα

$$I = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

△

Στο ακόλουθο πόρισμα δίνεται ένας άμεσος τρόπος εύρεσης του ολοκληρωτικού υπολοίπου (χωρίς τη χρήση του αναπτύγματος σε σειρά Laurent).

**Πόρισμα 13.8.1** Εστω  $\Omega$  απλά συνεκτικό πεδίο,  $z_0 \in \mathbb{C}$  και  $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση. Αν το  $z_0$  είναι πόλος τάξης  $k$  της συνάρτησης  $f$ , τότε ισχύει

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[ (z - z_0)^k f(z) \right]. \quad (13.8.4)$$

□

**Παράδειγμα 13.8.4** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \frac{ze^z}{z^2 - 1} dz,$$

όπου  $C$  ο κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα  $\frac{3}{2}$ , θετικά προσανατολισμένος.

**Λύση.**

Τα  $z_1 = -1$  και  $z_2 = 1$  είναι απλοί πόλοι της  $f(z) = \frac{ze^z}{z^2 - 1}$  και ευρίσκονται εντός του  $C$ . Από την (13.8.4), υπολογίζουμε

$$\operatorname{Res}(f(z), 1) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{ze^z}{z + 1} = \frac{e}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f(z), -1) = \lim_{z \rightarrow -1} [(z + 1)f(z)] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{ze^z}{z - 1} = \frac{e^{-1}}{2},$$

και άρα εφαρμόζοντας την (13.8.3) για το  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ , ευρίσκουμε

$$I = 2\pi i \left( \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i (e + e^{-1}).$$

△

**Παράδειγμα 13.8.5** Υπολογίστε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$(\alpha) \operatorname{Res} \left( \frac{e^{z^2}}{z-1}, 1 \right), \quad (\beta) \operatorname{Res} \left( \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}, i \right).$$

**Λύση.**

(α) Το  $z = 1$  είναι απλός πόλος της συνάρτησης και επομένως

$$\operatorname{Res} \left( \frac{e^{z^2}}{z-1}, 1 \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (z-1) \frac{e^{z^2}}{z-1} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} e^{z^2} = e.$$

(β) Ο παρονομαστής  $(z^2 + 1)^2 = (z + i)^2(z - i)^2$  έχει ως διπλή ρίζα το  $z_0 = i$ . Εξάλλου, επειδή για την ολόμορφη συνάρτηση  $g(z) = \frac{z^2-1}{(z+i)^2}$  στο  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ , ισχύει  $g(i) \neq 0$ , από το Θεώρημα 13.7.2, έχουμε ότι το  $z_0 = i$  είναι πόλος τάξης 2. Εφαρμόζοντας τώρα την (13.8.4), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z-i)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow i} \left[ \frac{z^2-1}{(z+i)^2} \right]' \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z(z+i)^2 - 2(z+i)(z^2-1)}{(z+i)^4} = \frac{2i(2i)^2 - 2(2i)(-2)}{(2i)^4} = 0. \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 13.8.6** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \frac{1}{z^2(z-1)} dz,$$

όπου  $C$  ο κύκλος: (i)  $|z| = 1/2$ , (ii)  $|z-1| = 1/2$ , (iii)  $|z| = 2$ , θετικά προσανατολισμένος.

**Λύση.** Η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$  έχει το  $z = 0$  πόλο τάξης 2 και το  $z = 1$  πόλο τάξης 1, όπου, από την (13.8.4), υπολογίζουμε

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{1}{z^2(z-1)} \right] = - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-1)^2} = -1,$$

και

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (z-1) \frac{1}{z^2(z-1)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z^2} = 1.$$

(i) Επειδή μόνο το  $z = 0$  βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου  $|z| = 1/2$ , από το Θεώρημα 13.8.1, έχουμε

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -2\pi i.$$

(ii) Επειδή μόνο το  $z = 1$  βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου  $|z - 1| = 1/2$ , όπως και στην περίπτωση (i), ευρίσκουμε

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1) = 2\pi i.$$

(iii) Επειδή και οι δύο πόλοι  $z = 0$  και  $z = 1$  βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου  $|z| = 2$ , εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.8.1, έχουμε

$$I = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1)) = 2\pi i(-1 + 1) = 0.$$

△

**Παράδειγμα 13.8.7** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz,$$

όπου  $C$  είναι η κλειστή καμπύλη που ορίζεται από το άνω ημικύκλιο  $\{2e^{it} : t \in [0, \pi]\}$  και το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία  $(-2, 0)$  και  $(2, 0)$  του πραγματικού άξονα, θετικά προσανατολισμένη.

**Λύση.** Η εξίσωση  $z^4 + 1 = 0$  έχει ως ρίζες τις

$$z_0 = e^{\pi i/4}, \quad z_1 = e^{3\pi i/4}, \quad z_2 = e^{5\pi i/4}, \quad z_3 = e^{7\pi i/4},$$

οι οποίες είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ . Υπολογίζουμε, με τη βοήθεια της (13.8.4) και του κανόνα L'Hopital (11.1.3), τα

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{z - z_0}{z^4 + 1} \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}} = -\frac{e^{\pi i/4}}{4}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} [(z - z_1)f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left( \frac{z - z_1}{z^4 + 1} \right) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{9\pi i/4}} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4}, \end{aligned}$$

στα  $z_0 = e^{\pi i/4}$  και  $z_1 = e^{3\pi i/4}$ , τα οποία είναι τα μόνα που ευρίσκονται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης  $C$ . Εφαρμόζοντας, τώρα, το Θεώρημα 13.8.1, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} I &= \oint_C f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)) \\ &= \frac{2\pi i}{4} (-e^{\pi i/4} + e^{-\pi i/4}) = -\frac{2\pi i}{4} 2i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

△

### 13.9 Υπολογισμός πραγματικών ολοκληρωμάτων

Στην παράγραφο αυτή εφαρμόζονται οι τεχνικές και τα αποτελέσματα της μελέτης των ολοκληρωτικών υπολοίπων για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων.

**A. Ολοκληρώματα της μορφής**  $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ ,

όπου η ρητή συνάρτηση  $R$  είναι συνεχής για  $\theta \in [0, 2\pi]$  και δεν έχει πόλους στο μοναδιαίο κύκλο. Ολοκληρώματα αυτού του τύπου αναφέρονται συνήθως ως *τριγωνομετρικά*.

Για τον υπολογισμό εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό

$$z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (13.9.1)$$

ο οποίος απεικονίζει το διάστημα  $[0, 2\pi]$  στο μοναδιαίο κύκλο  $C : |z| = 1$ , όπου ισχύουν

$$\begin{aligned} dz &= izd\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}, \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \\ \sin \theta &= \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Με τη χρήση του μετασχηματισμού (13.9.1), το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_C \tilde{R}(z) dz,$$

όπου η  $\tilde{R}(z)$  είναι ρητή συνάρτηση του  $z$  της μορφής

$$\tilde{R}(z) = R \left( \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right).$$

Η  $\tilde{R}(z)$  είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του κύκλου  $C$  εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.8.1 (Ολοκληρωτικών Υπολοίπων), υπολογίζουμε

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(\tilde{R}, z_k).$$

**Παράδειγμα 13.9.1** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}.$$

**Λύση.** Θέτοντας  $z = e^{i\theta}$ , λαμβάνουμε

$$I = \int_C \frac{1}{2 + \frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = -i \oint_C \frac{2}{z^2 + 4z + 1} dz,$$

όπου  $C$  ο κύκλος  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει ως απλούς πόλους τα σημεία  $z_1 = -2 + \sqrt{3}$  και  $z_2 = -2 - \sqrt{3}$ , από τα οποία μόνον ο  $z_1$  βρίσκεται στο εσωτερικό της  $C$ , οπότε, από την (13.8.4), ευρίσκουμε

$$\text{Res} \left( \frac{2}{z^2 + 4z + 1}, z_1 \right) = \frac{2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.8.1, υπολογίζουμε

$$I = -i 2\pi i \text{Res} \left( \frac{2}{z^2 + 4z + 1}, z_1 \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

△

**Παράδειγμα 13.9.2** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta}, \quad 0 < a < 1.$$

**Λύση.** Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (13.9.1), ευρίσκουμε

$$I = \oint_C \frac{1}{1 + a^2 - a \left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = -i \oint_C \frac{dz}{-az^2 + (1 + a^2)z - a},$$

όπου  $C : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{-az^2 + (1+a^2)z - a}$  έχει ως απλούς πόλους τα  $z_1 = a$  και  $z_2 = \frac{1}{a}$ , από τα οποία (επειδή  $0 < a < 1$ ) μόνον ο  $z_1$  βρίσκεται στο εσωτερικό της  $C$ , οπότε, από την (13.8.4), λαμβάνουμε

$$\text{Res} \left( \frac{1}{-az^2 + (1 + a^2)z - a}, a \right) = -\frac{1}{a^2 - 1}$$

και άρα, από το Θεώρημα 13.8.1, υπολογίζουμε

$$I = -i 2\pi i \left( -\frac{1}{a^2 - 1} \right) = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

△

**Παράδειγμα 13.9.3** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta.$$

**Λύση.** Θέτουμε  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , οπότε

$$I = \oint_C \frac{1}{2^4} \left( z + \frac{1}{z} \right)^4 \frac{dz}{iz} = -\frac{i}{16} \oint_C \frac{(z^2 + 1)^4}{z^5} dz,$$

όπου  $C$  ο κύκλος  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Η ολοκληρωτέα συνάρτηση  $f(z) = \frac{(z^2+1)^4}{z^5}$  έχει το  $z = 0$  πόλο τάξης 5, όπου, με τη βοήθεια της (13.8.4), υπολογίζουμε

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^4}{dz^4} \left[ z^5 \frac{(z^2 + 1)^4}{z^5} \right] = \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^4}{dz^4} [(z^2 + 1)^4] = \frac{144}{24} = 6.$$

Εξάλλου, επειδή το  $z = 0$  ευρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου  $C$ , εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.8.1, ευρίσκουμε

$$I = -\frac{i}{16} 2\pi i \text{Res}(f, 0) = \frac{3\pi}{4}.$$

△

## B. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ,

όπου η πραγματική συνάρτηση  $f$  έχει αναλυτική (ολόμορφη) επέκταση  $\tilde{f}$  στο  $\mathbb{C}$ , εκτός πεπερασμένου πλήθους ανώμαλων σημείων, τα οποία δεν ευρίσκονται στον πραγματικό άξονα. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων της μορφής αυτής βασίζεται στο ακόλουθο

**Λήμμα 13.9.1** Εστω  $f : \mathbb{C}^+ \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το πεδίο  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z \geq 0\}$ , η οποία είναι ολόμορφη στο σύνολο  $\mathbb{C}^+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , όπου τα  $z_k \in \mathbb{C}^+$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Αν υπάρχουν  $\rho > 0$ ,  $M > 0$  και  $\delta > 0$ , έτσι ώστε

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+ \text{ με } |z| > \rho, \quad (13.9.2)$$

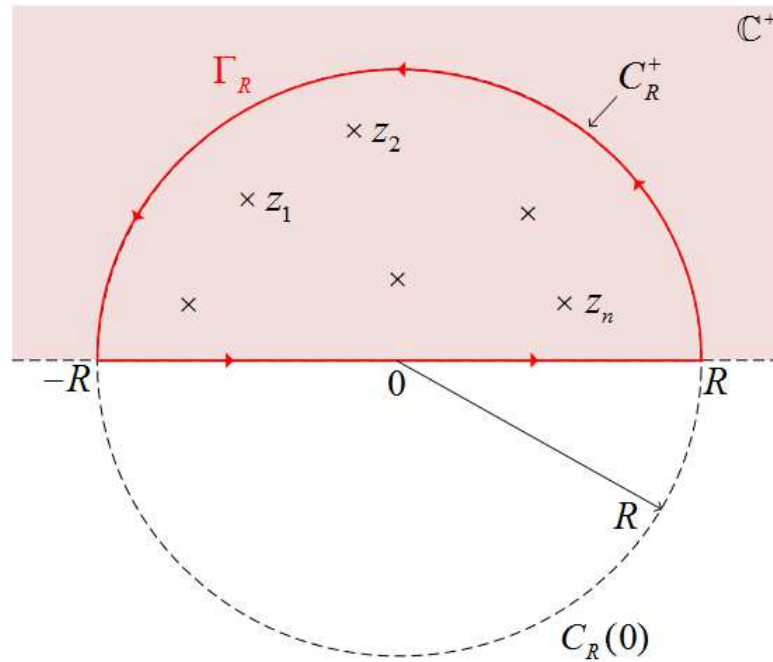
τότε ισχύει

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} f(z) dz = 0, \quad (13.9.3)$$

όπου  $C_R^+ := C_R(0) \cap \mathbb{C}^+$  με  $C_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$  (Σχήμα 13.6).

**Απόδειξη.** Επιλέγουμε  $R > \rho$ , έτσι ώστε τα σημεία  $z_1, z_2, \dots, z_n$  να ευρίσκονται εντός του κύκλου  $C_R(0)$ . Τότε, λαμβάνοντας υπόψη την (13.9.2) και εφαρμόζοντας την ML ανισότητα (12.3.2), ευρίσκουμε

$$\left| \int_{C_R^+} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^{1+\delta}} \pi R = \frac{\pi M}{R^\delta} \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } R \rightarrow \infty.$$



Σχήμα 13.6: Γεωμετρικά στοιχεία του Λήμματος 13.9.1.

□

**Παράδειγμα 13.9.4** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

πληρεί τις υποθέσεις του Λήμματος 13.9.1.

**Λύση.** Η συνάρτηση  $f$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}^+$  εκτός από τα δύο μεμονωμένα ανώμαλα σημεία  $z_0 = e^{i\pi/4}$  και  $z_1 = e^{3i\pi/4}$ . Εξάλλου, από την ιδιότητα (7) της Πρότασης 8.1.3, για  $|z| > 1$ , έχουμε

$$(*) \quad |z|^4 - 1 \leq |1 + z^4| \Rightarrow \frac{1}{|1 + z^4|} \leq \frac{1}{|z|^4 - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|^4}} \frac{1}{|z|^4}.$$

Επιλέγοντας τώρα π.χ. το  $\rho = 2$ , για  $|z| > \rho = 2$ , έχουμε τις συνεπαγωγές

$$(**) \quad |z| > 2 \Rightarrow \frac{1}{|z|^4} < \frac{1}{2^4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{|z|^4} > \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|^4}} < \frac{16}{15} \equiv M.$$

Έτσι, συνδυάζοντας τις (\*) και (\*\*), συνάγουμε ότι η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί την (13.9.2) με  $\delta = 3$ .



△

Ορίζουμε τώρα την έννοια της αναλυτικής συνέχισης μιγαδικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής.

**Ορισμός 13.9.1** Έστω  $f = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής. Μία μιγαδική συνάρτηση  $g = g(z) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , η οποία είναι ολόμορφη στο σύνολο  $\Omega = \mathbb{C}^+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ , όπου  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z \geq 0\}$  και τα  $z_k \in \mathbb{C}^+$  είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της  $g(z)$ , και για την οποία ισχύει

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (13.9.4)$$

ονομάζεται *αναλυτική συνέχιση (αναλυτική επέκταση)* της  $f$  στο  $\mathbb{C}^+$  και συνήθως αντί  $g$  γράφουμε επίσης  $f$ .

□

**Παράδειγμα 13.9.5** Η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  είναι αναλυτική συνέχιση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , στο  $\mathbb{C}^+$ .

**Λύση.** Η  $f(z)$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}^+$  εκτός από τους δύο απλούς πόλους  $z_0 = e^{i\pi/4}$  και  $z_1 = e^{3i\pi/4}$  και ισχύει

$$\frac{1}{1+z^4} \Big|_{z=x} = \frac{1}{1+x^4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

△

Στο ακόλουθο θεώρημα διατυπώνεται ένας βασικός τύπος υπολογισμού ολοκληρωμάτων της περίπτωσης B.

**Θεώρημα 13.9.1** Έστω μία ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση  $f = f(z) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , όπου  $\Omega = \mathbb{C}^+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  και τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία  $z_k \notin \mathbb{R}$  ( $k = 1, \dots, n$ ), η οποία αποτελεί αναλυτική συνέχιση στο  $\mathbb{C}^+$  της πραγματικής συνάρτησης  $f = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και πληρεί τις υποθέσεις του Λήμματος 13.9.1. Τότε, ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k). \quad (13.9.5)$$

**Απόδειξη.** Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.8.1 για την ολόμορφη συνάρτηση  $f(z)$  στο σύνολο  $\Omega$  και το ημικύκλιο  $\Gamma_R$  του Σχήματος 13.6, ευρίσκουμε

$$(*) \quad \oint_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k),$$

όπου η ακτίνα  $R$  του ημικυκλίου έχει επιλεγεί έτσι ώστε η  $\Gamma_R$  να περιέχει στο εσωτερικό της όλα τα ανώμαλα σημεία  $z_1, z_2, \dots, z_n$  της  $f(z)$ . Εξάλλου, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$(**) \quad \oint_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{C_R^+} f(z) dz,$$

όπου  $C_R^+ := C_R(0) \cap \mathbb{C}^+$  με  $C_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ . Συνδυάζοντας τώρα τις (\*) και (\*\*), και λαμβάνοντας υπόψη την (13.9.4), ευρίσκουμε

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k) - \int_{C_R^+} f(z) dz.$$

Λαμβάνοντας στην τελευταία το όριο για  $R \rightarrow \infty$  και εφαρμόζοντας το Λήμμα 13.9.1, προκύπτει ο ζητούμενος τύπος (13.9.5).

□

**Σημείωση 13.9.1** Το Θεώρημα 13.9.1 διατυπώνεται και για συνάρτηση  $f = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία έχει ως αναλυτική συνέχιση στο  $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}$  τη συνάρτηση  $f = f(z) : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$  που δεν έχει πόλους στον πραγματικό άξονα και πληρεί τις αντίστοιχες υποθέσεις του Λήμματος 13.9.1. Στην προκειμένη περίπτωση, ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k), \quad (13.9.6)$$

όπου  $z_1, z_2, \dots, z_n$  είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της  $f(z)$  στο  $\mathbb{C}^-$ .

△

**Παράδειγμα 13.9.6** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

**Λύση.** Σύμφωνα με το Παράδειγμα 13.9.5, η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  αποτελεί αναλυτική συνέχιση στο  $\mathbb{C}^+$  της ολοκληρωτέας συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ . Η  $f(z)$  έχει ως απλούς πόλους τα σημεία

$$z_1 = e^{i\pi/4}, \quad z_2 = e^{3i\pi/4}, \quad z_3 = e^{5i\pi/4}, \quad z_4 = e^{7i\pi/4},$$

από τα οποία μόνον οι  $z_1$  και  $z_2$  ευρίσκονται στο  $\mathbb{C}^+$ , όπου υπολογίζουμε, όπως στο Παράδειγμα 13.8.7,

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = -\frac{e^{\pi i/4}}{4}$$

και

$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{e^{-\pi i/4}}{4}.$$

Εξάλλου, επειδή η συνάρτηση  $f(z)$ , σύμφωνα με το Παράδειγμα 13.9.4, πληρεί τις υποθέσεις του Λήμματος 13.9.1, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.9.1, ευρίσκουμε

$$I = 2\pi i(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)) = 2\pi i \left( -\frac{e^{\pi i/4}}{4} + \frac{e^{-\pi i/4}}{4} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

△

### Γ. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx$ , $k > 0$ ,

όπου η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ρητή συνάρτηση, η οποία δεν έχει πόλους στον πραγματικό άξονα και η αναλυτική της επέκταση στο  $\mathbb{C}^+$  (ή στο  $\mathbb{C}^-$ ) έχει συγκεκριμένες ιδιότητες, οι οποίες αναφέρονται στις υποθέσεις του ακόλουθου σημαντικού λήμματος.

#### Λήμμα 13.9.2 (Jordan)

Εστω  $f : \mathbb{C}^+ \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το πεδίο  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}z \geq 0\}$ , για την οποία ισχύει

$$\forall R > 0, \exists K(R) > 0 \text{ με } |f(z)| \leq K(R), \forall z \in C_R^+, \quad (13.9.7)$$

όπου  $C_R^+ := C_R(0) \cap \mathbb{C}^+$  με  $C_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$  (Σχήμα 13.6). Αν ισχύει  $K(R) \rightarrow 0$  καθώς  $R \rightarrow \infty$ , τότε έχουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} f(z)e^{ikz} dz = 0, \quad k > 0. \quad (13.9.8)$$

**Απόδειξη.** Θέτοντας  $z = Re^{i\theta}$ , λαμβάνουμε

$$\int_{C_R^+} f(z)e^{ikz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{ikR \cos \theta} e^{-kR \sin \theta} iRe^{i\theta} d\theta.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την ιδιότητα (iv), η οποία ακολουθεί τον Ορισμό 12.1.1, με τη βοήθεια της (13.9.7), ευρίσκουμε

$$(*) \quad \left| \int_{C_R^+} f(z)e^{ikz} dz \right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{-kR \sin \theta} R d\theta \leq K(R)R \int_0^\pi e^{-kR \sin \theta} d\theta.$$

Εξάλλου, υπολογίζουμε

$$(**) \quad \int_0^\pi e^{-kR \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kR \sin \theta} d\theta,$$

Επειδή ισχύει  $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , από τις (\*) και (\*\*) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R^+} f(z) e^{ikz} dz \right| &\leq 2K(R)R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2kR\frac{\theta}{\pi}} d\theta \\ &= \frac{K(R)\pi}{k} (1 - e^{-kR}) \rightarrow 0, \text{ καθώς } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο αποδεικνύεται με εφαρμογή του Λήμματος 13.9.2 και χρήση παρόμοιων τεχνικών με το αντίστοιχο θεώρημα της περίπτωσης Β, παρέχει το βασικό τύπο υπολογισμού των ολοκληρωμάτων της περίπτωσης Γ.

**Θεώρημα 13.9.2** Έστω  $f = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  πραγματική συνάρτηση, η οποία έχει ως αναλυτική συνέχιση στο  $\mathbb{C}^+$  τη συνάρτηση  $f = f(z) : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  που δεν έχει πόλους στον πραγματικό άξονα και πληρεί τις υποθέσεις του Λήμματος 13.9.2 (Jordan). Τότε, για  $k > 0$ , ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z) e^{ikz}, z_k), \quad (13.9.9)$$

όπου  $z_1, z_2, \dots, z_n$  είναι οι πόλοι της  $f(z)$  στο  $\mathbb{C}^+$ .

□

**Παράδειγμα 13.9.7** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(kx)}{x^2 + a^2} dx \quad \text{και} \quad K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(kx)}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0.$$

**Λύση.** Τα ολοκληρώματα  $J$  και  $K$  αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx, \quad k > 0.$$

Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + a^2} = \frac{z}{(z - ia)(z + ia)},$$

για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματος 13.9.2, έχει δύο απλούς πόλους  $z_1 = -ia$  και  $z_2 = ia$  και εφόσον  $a > 0$  μόνο ο πόλος  $z_2$  ευρίσκεται στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο  $\mathbb{C}^+$ . Εφαρμόζοντας την (13.9.9), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \text{Res}(f(z) e^{ikz}, z_2) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \left[ (z - ia) \frac{z e^{ikz}}{z + a^2} \right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z e^{ikz}}{z + ia} = \pi i e^{-ka} \end{aligned}$$

και έτσι ευρίσκουμε

$$J = 0 \quad \text{και} \quad K = \pi e^{-ka}.$$

△

**Δ.** Ολοκληρώματα της μορφής  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$ ,  $\alpha > 1$ ,

όπου η συνθήκη  $\alpha > 1$  εξασφαλίζει τη σύγκλιση του ολοκληρώματος.

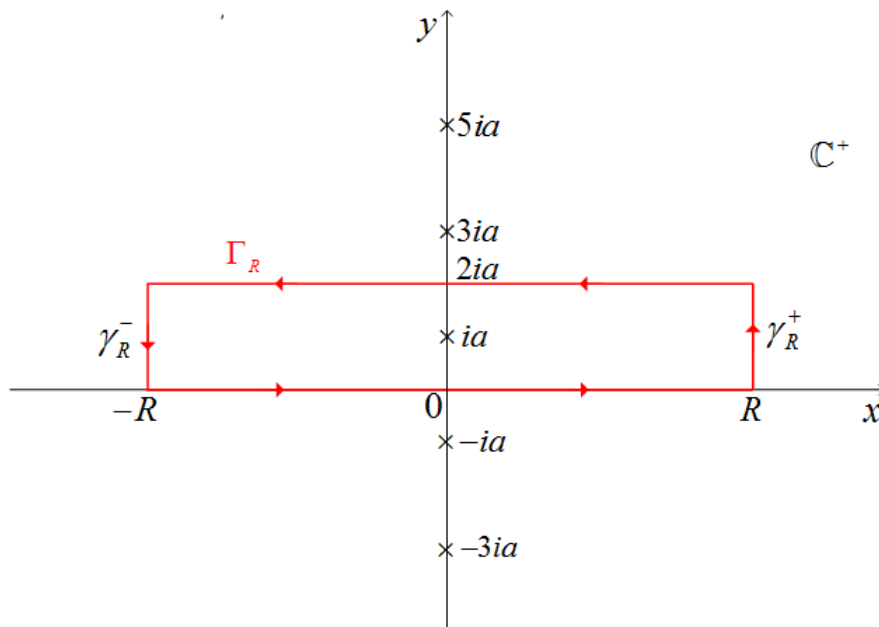
Θέτοντας  $x = e^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , λαμβάνουμε

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{e^{\alpha t} + 1} dt$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση  $f(t) = \frac{e^t}{e^{\alpha t} + 1}$  έχει ως αναλυτική συνέχιση στο  $\mathbb{C}^+$  τη συνάρτηση  $f(z) = \frac{e^z}{e^{\alpha z} + 1}$ , η οποία έχει ως απλούς πόλους τα σημεία

$$z_k = \frac{i\pi}{\alpha}(2k + 1) = i(2k + 1)a, \quad a = \frac{\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

οι οποίοι βρίσκονται στο φανταστικό άξονα και ισχύει  $|z_k - z_{k+1}| = 2a$  (Σχήμα 13.7). Λόγω



Σχήμα 13.7: Γεωμετρικά στοιχεία για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της περίπτωσης Δ.

του ότι οι πόλοι  $z_k$  είναι απείρου πλήθους, η καμπύλη ολοκλήρωσης  $C_R^+$  που χρησιμοποιήσαμε στις περιπτώσεις Β και Γ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί εδώ. Έτσι, θεωρούμε την κλειστή

καμπύλη  $\Gamma_R$  του Σχήματος 13.7 και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 13.8.1, οπότε λαμβάνοντας υπόψη ότι μόνο ο πόλος  $z_0 = ia$  βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης  $\Gamma_R$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_R} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ia) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \left[ (z - ia) \frac{e^z}{e^{\alpha z} + 1} \right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \left[ \frac{e^z + (z - ia)e^z}{\alpha e^{\alpha z}} \right] = -2ia e^{ia}, \end{aligned} \quad (13.9.10)$$

όπου για τον υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε και τον κανόνα L'Hopital (11.1.3). Τώρα, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_R} f(z) dz &= \int_{-R}^R f(t) dt + \int_{\gamma_R^+} f(z) dz + \int_{R+2ia}^{-R+2ia} f(z) dz + \int_{\gamma_R^-} f(z) dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (13.9.11)$$

και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{R+2ia}^{-R+2ia} \frac{e^z}{e^{\alpha z} + 1} dz = \int_R^{-R} \frac{e^{\zeta+2ia}}{e^{\alpha(\zeta+2ia)} + 1} d\zeta = -e^{2ia} \int_{-R}^R \frac{e^\zeta}{e^{\alpha\zeta} + 1} d\zeta \Rightarrow \\ I_3 &= -e^{2ia} I_1, \end{aligned} \quad (13.9.12)$$

ενώ για τα  $I_2$  και  $I_4$  εργαζόμαστε ως εξής

$$I_{2,4} = \int_{\gamma_R^\pm} f(z) dz = \pm \int_{\pm R}^{\pm R+2ia} \frac{e^z}{e^{\alpha z} + 1} dz = \pm \int_0^{2a} \frac{e^{\pm R+iy}}{e^{\alpha(\pm R+iy)} + 1} idy,$$

οπότε, και με τη βοήθεια της ιδιότητας (7) της Πρότασης 8.1.3, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} |I_{2,4}| &\leq \int_0^{2a} \left| \frac{e^{\pm R+iy}}{e^{\alpha(\pm R+iy)} + 1} \right| dy = \int_0^{2a} \frac{e^{\pm R}}{|e^{\pm\alpha R+i\alpha y} + 1|} dy \\ &\leq \int_0^{2a} \frac{e^{\pm R}}{|e^{\pm\alpha R} - 1|} dy = \frac{2a}{|e^{\pm(\alpha-1)R} - e^{\mp R}|} \rightarrow 0, \text{ καθώς } R \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (13.9.13)$$

Έτσι, αφού  $I_1 \rightarrow I$ , καθώς  $R \rightarrow \infty$ , από τις (13.9.10)-(13.9.13), ευρίσκουμε, για  $R \rightarrow \infty$ , ότι ισχύει

$$-2iae^{ia} = I - e^{2ia} I \Rightarrow I = \frac{2iae^{ia}}{e^{2ia} - 1} = \frac{a}{\sin a}$$

και επειδή  $a = \frac{\pi}{\alpha}$ , λαμβάνουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1} = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 1. \quad (13.9.14)$$

**Ε. Ολοκληρώματα με πεπερασμένο πλήθος απλών πόλων στον πραγματικό άξονα.**

Για τους υπολογισμούς χρειαζόμαστε το ακόλουθο

**Λήμμα 13.9.3** Έστω συνάρτηση  $f : \Delta \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη συνάρτηση στο δακτύλιο  $\Delta = \Delta(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ , όπου το  $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$  είναι απλός πόλος της  $f(z)$ . Τότε, αν  $C_r = \{z \in \mathbb{C} : z = x_0 + re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$  είναι ημικύκλιο κέντρου  $z_0$  και ακτίνας  $r < R$ , ισχύει

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f, x_0). \quad (13.9.15)$$

**Απόδειξη.** Το ανάπτυγμα της  $f$  σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο  $z_0 = x_0$  γράφεται

$$f(z) = \frac{\operatorname{Res}(f, x_0)}{z - x_0} + g(z),$$

όπου  $g$  ολόμορφη συνάρτηση στο δίσκο  $D_R(x_0)$ . Έτσι, λαμβάνουμε

(\*)

$$\begin{aligned} \int_{C_r} f(z) dz &= \operatorname{Res}(f, x_0) \int_{C_r} \frac{dz}{z - x_0} + \int_{C_r} g(z) dz \\ &= \operatorname{Res}(f, x_0) \int_0^\pi \frac{ir e^{i\theta} d\theta}{r e^{i\theta}} + ir \int_0^\pi g(x_0 + r e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \\ &= i\pi \operatorname{Res}(f, x_0) + ir \int_0^\pi g(x_0 + r e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Όμως, επειδή η  $g$  ως ολόμορφη (άρα και συνεχής) στο δίσκο  $\overline{D}_r(x_0)$  είναι φραγμένη, υπάρχει ένα  $M > 0$ , έτσι ώστε

$$|g(x_0 + r e^{i\theta})| \leq M, \quad \theta \in [0, \pi],$$

και άρα έχουμε

$$(**) \quad \left| \int_0^\pi g(x_0 + r e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |g(x_0 + r e^{i\theta}) e^{i\theta}| d\theta \leq M\pi,$$

οπότε, η (13.9.15) προκύπτει από τις (\*) και (\*\*), καθώς  $r \rightarrow 0$ .

□

**Παράδειγμα 13.9.8** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

**Λύση.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ , η οποία έχει ως απλό πόλο το σημείο  $z_0 = 0$ , και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 12.4.1 (Cauchy-Goursat) για τη συνάρτηση  $f$  και την (θετικά προσανατολισμένη) καμπύλη  $\Gamma$  του Σχήματος 13.8, οπότε έχουμε

$$(a) \quad \oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^{-r} f(x) dx - \int_{C_r} f(z) dz + \int_r^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

όπου  $C_R = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$ . Τώρα, εφαρμόζοντας το Λήμμα 13.9.2 (Jordan), έχουμε ότι

$$(b) \quad \int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0, \text{ καθώς } R \rightarrow +\infty.$$

Περαιτέρω, από το Λήμμα 13.9.3, συνάγουμε ότι

$$(c) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = i\pi \operatorname{Res}(f, 0) = \pi i,$$

και άρα, από τις (a), (b) και (c), ευρίσκουμε, καθώς  $r \rightarrow 0$  και  $R \rightarrow +\infty$ , ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx &= 0 \Rightarrow \\ - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx &= \pi i \Rightarrow \\ 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \pi i \Rightarrow \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

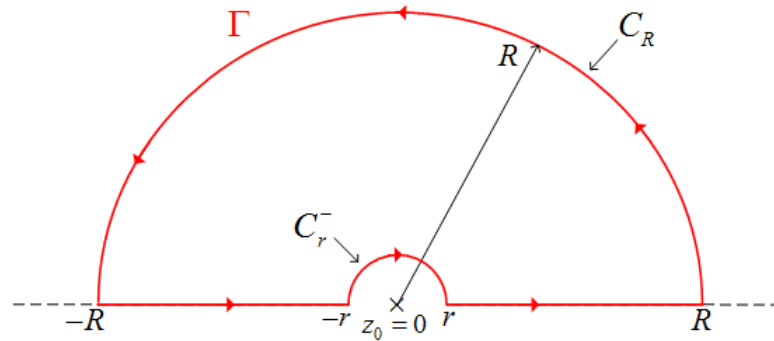
△

## 13.10 Ασκήσεις

**Άσκηση 13.10.1** Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων  $f_n(z) = nz^n$  συγκλίνει σημειακά στη συνάρτηση  $f(z) = 0$  στον ανοικτό δίσκο  $D_1(0)$  και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο  $\overline{D}_r(0)$  με  $0 < r < 1$ .

**Άσκηση 13.10.2** Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{z^n+1}$  συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο  $\overline{D}_r(0)$  με ακτίνα  $0 < r < 1$ .



Σχήμα 13.8: Καμπύλη ολοκλήρωσης  $\Gamma$  του Παραδείγματος 13.9.8.

**Άσκηση 13.10.3** Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^2}$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .

**Άσκηση 13.10.4** Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στον ανοικτό δίσκο  $D_1(0)$ .

**Άσκηση 13.10.5** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin(nz)$  είναι ολόμορφη στο πεδίο  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \text{Im}(z) < 1\}$ .

**Άσκηση 13.10.6** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$  είναι ολόμορφη στο πεδίο  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ .

**Άσκηση 13.10.7** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^p n^{-z}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , είναι ολόμορφη στο πεδίο  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 1\}$ .

**Άσκηση 13.10.8** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  και υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\oint_C f(z) dz$ , όπου  $C$  είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

**Άσκηση 13.10.9** Βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

στους δακτυλίους

$$\Delta_1 = \Delta(0, 0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

και

$$\Delta_2 = \Delta(0, 1, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

**Άσκηση 13.10.10** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$$

είναι η αναλυτική επέκταση της συνάρτησης

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

**Άσκηση 13.10.11** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$$

είναι η αναλυτική επέκταση της συνάρτησης

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \sin t \, dt, \quad z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

**Άσκηση 13.10.12** Βρείτε την αναλυτική επέκταση της συνάρτησης

$$f(z) = \int_0^{\infty} te^{-zt} \, dt, \quad z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

στο  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Άσκηση 13.10.13** Βρείτε το είδος των μεμονωμένων ανωμαλών σημείων της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z^2}{\sin^2 z}.$$

**Άσκηση 13.10.14** Δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a \cos \theta} \, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad |a| < 1.$$

**Άσκηση 13.10.15** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} \, d\theta.$$

**Άσκηση 13.10.16** Δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos^2 \theta} \, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad 0 < b < a.$$

**Άσκηση 13.10.17** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

**Άσκηση 13.10.18** Δείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{16}.$$

**Άσκηση 13.10.19** Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}.$$

**Άσκηση 13.10.20** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{(x+b)^2+a^2} dx, \quad k > 0, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

**Άσκηση 13.10.21** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax) \cos(bx)}{x^2+c^2} dx, \quad c > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

**Άσκηση 13.10.22** Δείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

**Άσκηση 13.10.23** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2+1)^2} dx.$$

# Βιβλιογραφία

- [1] M. Beck, G. Marchesi, D. Pixton, and L. Sabalka, *A First Course in Complex Analysis, version 1.4*, 2012.
- [2] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications, 8<sup>th</sup> Ed.*, McGraw-Hill, New York, 2009.
- [3] K. Kodaira, *Complex analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 107, Cambridge University Press, 2007.
- [4] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*, Εκδόσεις Τσότρας, Αθήνα, 2013.
- [5] J. E. Marsden, *Basic complex analysis*, W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1973.
- [6] D. E. Marshall, *Complex Analysis*, Department of Mathematics, University of Washington, 2014.
- [7] J. H. Mathews and R. W. Howell, *Complex Analysis for Mathematics and Engineering, 3<sup>d</sup> Ed.*, Jones and Bartlett Publishers, Toronto, 1997.
- [8] Σ. Α. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1977.
- [9] H. A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [10] Λ. Ν. Τσίτσας, *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός, 2<sup>η</sup> Έκδοση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2003.

Μέρος ΙΙΙ

Ανάλυση Fourier

## Κεφάλαιο 14

# Σειρές Fourier

Η Θεωρία των σειρών Fourier εντάσσεται στην *Ανάλυση Fourier* και αποτελεί ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία της Μαθηματικής Ανάλυσης, τα οποία παίζουν σημαντικό ρόλο σε όλα σχεδόν τα πεδία των φυσικών και τεχνολογικών επιστημών. Οι σειρές Fourier χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση περιοδικών συναρτήσεων ή περιοδικών σημάτων με τη βοήθεια απείρων αθροισμάτων (σειρών) των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο καθώς επίσης και των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων. Σκοπός της μελέτης των σειρών Fourier υπήρξε αρχικά η επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών μερικών διαφορικών εξισώσεων και, μετέπειτα, η χρήση τους επεκτάθηκε στην ανάλυση όλων των κυματομορφών που εμφανίζονται από τη Θεωρία Σημάτων μέχρι την Κβαντική Φυσική.

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά ορίζεται η έννοια της σειράς Fourier πραγματικών συναρτήσεων και εξετάζονται οι βασικές ιδιότητές της. Στη συνέχεια, μελετάται η κατηγορία των συναρτήσεων, οι οποίες αναπτύσσονται σε σειρά Fourier και διατυπώνονται οι τύποι παραγωγίσιμης και ολοκλήρωσης σειρών Fourier.

### 14.1 Περιοδικές συναρτήσεις

Οι περιοδικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται συστηματικά και αποτελεσματικά στη Θεωρία σειρών Fourier και τις εφαρμογές της.

Μία συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει

$$f(x + p) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (14.1.1)$$

όπου  $p \in \mathbb{R}$  με  $p > 0$ , ονομάζεται *περιοδική συνάρτηση* με περίοδο  $p$  ( $p$ -περιοδική συνάρτηση). Ο μικρότερος  $p > 0$ , για τον οποίο ισχύει η (14.1.1), αναφέρεται ως *θεμελιώδης περίοδος* της συνάρτησης  $f$ .

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\sin x$  και  $\cos x$  και η μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^{ix}$

είναι οι πρωταρχικές περιοδικές συναρτήσεις με (θεμελιώδη) περίοδο  $2\pi$ .

**Σημείωση 14.1.1** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $p$ -περιοδική συνάρτηση. Τότε, ισχύει

$$f(x + np) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } n \in \mathbb{Z}.$$

Πράγματι, για  $n \in \mathbb{N}$ , ισχύουν

$$(i) \quad f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = \dots = f(x + np)$$

$$(ii) \quad f(x) = f(x - p + p) = f(x - p) = f(x - 2p) = \dots = f(x - np).$$

△

Έστω μία συνάρτηση  $f : [a, a + p] \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $a, p \in \mathbb{R}$  με  $p > 0$ . Τότε, μία  $p$ -περιοδική συνάρτηση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται  $p$ -περιοδική επέκταση της  $f$ , όταν ισχύει

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, a + p]. \quad (14.1.2)$$

**Πρόταση 14.1.1** Έστω μία συνάρτηση  $f : [a, a + p] \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $a, p \in \mathbb{R}$  με  $p > 0$ . Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

1. Ισχύει  $f(a) = f(a + p)$ .
2. Υπάρχει  $p$ -περιοδική επέκταση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  της  $f$ .

**Απόδειξη.**

$$2 \Rightarrow 1. \quad f(a) = F(a) = F(a + p) = f(a + p).$$

Για την απόδειξη της συνεπαγωγής  $1 \Rightarrow 2$  χρειαζόμαστε την ιδιότητα

$$(I) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ υπάρχει μοναδικός } n \in \mathbb{Z} \text{ με } x + np \in [a, a + p],$$

η οποία αποδεικνύεται ως εξής.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [a - (n + 1)p, a - np] \cup [a, a + p] \bigcup_{n=1}^{\infty} (a + np, a + (n + 1)p]$$

και διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$$(i) \quad x \in [a, a + p] \Rightarrow x = x + 0p \in [a, a + p]$$

$$(ii) \quad x > a + p : \exists n \in \mathbb{N} \text{ με } x - np \in [a, a + p]$$

$$(iii) \quad x < a : \exists m \in \mathbb{N} \text{ με } x + (m + 1)p \in [a, a + p]$$

και η ιδιότητα αποδείχτηκε.

1  $\Rightarrow$  2. Η συνάρτηση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $F(x) = f(x + np)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , είναι μία  $p$ -περιοδική επέκταση της συνάρτησης  $f$ .

□

**Πόρισμα 14.1.1** Η  $p$ -περιοδική επέκταση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μίας συνάρτησης  $f : [a, a + p] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μοναδική.

□

Εξάλλου, για μία συνάρτηση  $f : (a, a + p] \rightarrow \mathbb{R}$ , υπάρχει πάντοτε  $p$ -περιοδική επέκταση, η οποία προσδιορίζεται ως εξής. Θεωρούμε την επέκταση

$$\tilde{f} : [a, a + p] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a + p), & x = a \\ f(x), & x \in (a, a + p] \end{cases}$$

και εν συνεχεία την  $p$ -περιοδική επέκταση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  της  $\tilde{f}$ , η οποία είναι και  $p$ -περιοδική επέκταση της  $f$ .

Με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε, επίσης, ότι και μία συνάρτηση  $f : [a, a + p) \rightarrow \mathbb{R}$  έχει επίσης  $p$ -περιοδική επέκταση στο  $\mathbb{R}$ .

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση  $f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $p \in \mathbb{R}$  με  $p > 0$ , λέγεται

(i) *άρτια* όταν ισχύει  $f(-x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in [p, p]$

(ii) *περιττή* όταν ισχύει  $f(-x) = -f(x)$ , για κάθε  $x \in [p, p]$ .

Εξάλλου, για μία συνάρτηση  $f : [0, p] \rightarrow \mathbb{R}$ , η άρτια συνάρτηση

$$f_\alpha : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, p] \\ f(-x), & x \in [-p, 0] \end{cases} \quad (14.1.3)$$

και η περιττή συνάρτηση

$$f_\pi : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\pi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, p] \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & x \in [-p, 0) \end{cases}, \quad (14.1.4)$$

αναφέρονται, αντιστοίχως, ως *άρτια* και η *περιττή επέκταση* της συνάρτησης  $f$  στο  $[-p, p]$ .



## 14.2 Τριγωνομετρικές σειρές

Στην παράγραφο αυτή εισάγεται η γενική έννοια της τριγωνομετρικής σειράς και εξετάζεται η σύγκλιση της.

Αρχικά, υπενθυμίζουμε την έννοια του τριγωνομετρικού πολυωνύμου. Μία συνάρτηση

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad (14.2.1)$$

όπου  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , ονομάζεται *τριγωνομετρικό πολυώνυμο* (βαθμού  $n$ , όταν  $|a_n| + |b_n| \neq 0$ ).

Για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο  $T$ , ισχύει

$$T(x + 2\pi) = T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή το  $T(x)$  είναι  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση.

Μία σειρά της μορφής

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad x, a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad (14.2.2)$$

ορίζεται ως *τριγωνομετρική σειρά* και η ακολουθία των τριγωνομετρικών πολυωνύμων

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (14.2.3)$$

είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της τριγωνομετρικής σειράς.

Εξάλλου, μία σειρά της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_n \in \mathbb{C} \quad (14.2.4)$$

αναφέρεται ως *εκθετική ή μιγαδική τριγωνομετρική σειρά* και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (14.2.5)$$

αναφέρεται *εκθετικό ή μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο*.

Θέτοντας

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

παρατηρούμε ότι η τριγωνομετρική σειρά (14.2.2) και το τριγωνομετρικό πολυώνυμο (14.2.3) εκφράζονται υπό τη μορφή (14.2.4) και (14.2.5), αντιστοίχως.

Αλλά και αντιστρόφως, θέτοντας

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

παρατηρούμε ότι η τριγωνομετρική σειρά (14.2.4) και το τριγωνομετρικό πολυώνυμο (14.2.5) ανάγονται στις (14.2.2) και (14.2.3).

Πολλές φορές, στις εφαρμογές, εμφανίζονται και τριγωνομετρικές σειρές της μορφής

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{p} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{p} \right) \right), \quad (14.2.6)$$

όπου οι συναρτήσεις

$$a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{p} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{p} \right)$$

είναι  $2p$ -περιοδικές. Στη σειρά (14.2.6) αντιστοιχεί η εκθετική σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{p}}. \quad (14.2.7)$$

Υπενθυμίζουμε, τώρα, τους ορισμούς της σημειακής και της ομοιόμορφης σύγκλισης τριγωνομετρικής σειράς. Η τριγωνομετρική σειρά (14.2.2) συγκλίνει σημειακά προς μία συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν η ακολουθία  $T_n(x)$  των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει σημειακά προς την  $f(x)$ , δηλαδή ισχύει

$$T_n(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Εξάλλου, η τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν η ακολουθία  $T_n(x)$  των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει ομοιόμορφα προς την  $f(x)$ . Οι έννοιες της σημειακής και της ομοιόμορφης σύγκλισης για την εκθετική τριγωνομετρική σειρά (14.2.4) ορίζονται με παρόμοιο τρόπο.

Σημειώνουμε ότι, αν η τριγωνομετρική σειρά (14.2.2) συγκλίνει σημειακά στο  $\mathbb{R}$  προς τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τότε η  $f$  είναι  $2\pi$ -περιοδική. Άρα, για τη μελέτη της σύγκλισης και των ιδιοτήτων της  $f$  αρκεί να περιοριστούμε σε ένα κλειστό διάστημα του  $\mathbb{R}$  μήκους  $2\pi$ , όπου, συνήθως, θεωρούμε το διάστημα  $[-\pi, \pi]$ .

Για  $m, n \in \mathbb{N}$ , ισχύουν οι τύποι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0, \quad (14.2.8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0, \quad (14.2.9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m \\ \pi, & \text{αν } n = m \end{cases}, \quad (14.2.10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m \\ \pi, & \text{αν } n = m \end{cases}, \quad (14.2.11)$$

οι οποίοι είναι γνωστοί ως τύποι ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο και αποδεικνύονται με χρήση βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

Ενδεικτικά, αποδεικνύουμε την (14.2.10). Για  $n \neq m$ , χρησιμοποιώντας βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \\ & \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)) dx = \\ & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n+m} \sin((n+m)x) + \frac{1}{n-m} \sin((n-m)x) \right] \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0, \end{aligned}$$

ενώ, για  $n = m$ , έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2nx) + 1) dx = \pi.$$

Επίσης, για  $m, n \in \mathbb{Z}$ , ισχύουν και οι ακόλουθοι τύποι

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n \neq 0 \end{cases}, \quad (14.2.12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n \neq m \end{cases}. \quad (14.2.13)$$

**Θεώρημα 14.2.1** Έστω ότι η τριγωνομετρική σειρά (14.2.2) συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $\mathbb{R}$  προς τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε, η  $f$  είναι  $2\pi$ -περιοδική, συνεχής και οι συντελεστές

$a_n$  και  $b_n$  δίνονται από τους τύπους

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0, \quad (14.2.14)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1. \quad (14.2.15)$$

**Απόδειξη.** Αφού η τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $\mathbb{R}$  προς τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , θα συγκλίνει επίσης και σημειωτικά, δηλαδή θα ισχύει

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (14.2.16)$$

Εξάλλου, από την ομοιόμορφη σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς και το Θεώρημα 13.2.3, ισχυρισμός 1, έχουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  άρα και ολοκληρώσιμη στο  $[-\pi, \pi]$ .

**Υπολογισμός  $a_0$**

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.2.3, ισχυρισμός 2, ευρίσκουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right), \quad (14.2.17)$$

από την οποία, με την βοήθεια των (14.2.8), λαμβάνουμε την (14.2.14) για  $n = 0$ .

**Υπολογισμός  $a_n$**

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (14.2.16) με τη φραγμένη συνάρτηση  $\cos(mx)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 13.2.3, ισχυρισμός 2, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(mx) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx \right) \end{aligned} \quad (14.2.18)$$

και από τους τύπους (14.2.8), (14.2.9) και (14.2.10) συνάγουμε την (14.2.14) για  $n \geq 1$ .

**Υπολογισμός  $b_n$**

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (14.2.16) με τη φραγμένη συνάρτηση  $\sin(mx)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , και εφαρμόζουμε τη διαδικασία υπολογισμού των  $a_n$ .

□

Υπό τις προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, οι συντελεστές  $a_0$ ,  $a_n$  και  $b_n$  δίνονται επίσης από τους τύπους

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0, \quad (14.2.19)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1, \quad (14.2.20)$$

για τυχόν  $a \in \mathbb{R}$ .

Εξάλλου, όταν η εκθετική τριγωνομετρική σειρά (14.2.4) συγκλίνει ομοιόμορφα προς μία συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τότε οι συντελεστές  $c_n$  αυτής δίνονται από τον τύπο

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (14.2.21)$$

Τέλος, αν η σειρά (14.2.6) συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η  $f$  είναι  $2p$ -περιοδική και συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα και ολοκληρώσιμη στο  $[-p, p]$  και οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (14.2.22)$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (14.2.23)$$

Κατά παρόμοιο τρόπο, υπό τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 14.2.1, συνάγουμε ότι οι συντελεστές της (14.2.24) δίνονται από

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{p}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (14.2.24)$$

### 14.3 Ορισμός σειράς Fourier

**Ορισμός 14.3.1** Έστω  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (14.3.1)$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0, \quad (14.3.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1, \quad (14.3.3)$$

ορίζεται ως σειρά *Fourier* της συνάρτησης  $f$  και οι συντελεστές  $a_n$  και  $b_n$  ως συντελεστές *Fourier* της  $f$ .

Για να δηλώσουμε ότι η (14.3.1) είναι η σειρά *Fourier* της συνάρτησης  $f$  και οι  $a_n$  και  $b_n$  οι συντελεστές της σειράς *Fourier*, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (14.3.4)$$

και

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (14.3.5)$$

Εξάλλου, η εκθετική σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (14.3.6)$$

όπου οι συντελεστές  $c_n$  δίνονται από τον τύπο

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (14.3.7)$$

ορίζεται ως εκθετική σειρά *Fourier* και οι  $c_n$  ως (μυγαδικοί) συντελεστές *Fourier* της  $f$  και επίσης συμβολίζουμε

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (14.3.8)$$

και

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (14.3.9)$$

□

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι επιπλέον άρτια, τότε η συνάρτηση  $f(x) \cos(nx)$  είναι άρτια ενώ η  $f(x) \sin(nx)$  είναι περιττή, οπότε έχουμε

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{και} \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14.3.10)$$

δηλαδή η σειρά Fourier ανάγεται στη σειρά συνημιτόνων

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

η οποία αναφέρεται παρακάτω και ως *συνημιτονική σειρά Fourier*.

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή, τότε η συνάρτηση  $f(x) \cos(nx)$  είναι περιττή ενώ η  $f(x) \sin(nx)$  είναι άρτια, οπότε έχουμε

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{και} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14.3.11)$$

δηλαδή η σειρά Fourier ανάγεται στη σειρά ημιτόνων

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

η οποία αναφέρεται παρακάτω και ως *ημιτονική σειρά Fourier*.

Εξάλλου, για σειρές Fourier της μορφής

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right), \quad (14.3.12)$$

και

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}, \quad (14.3.13)$$

οι οποίες αντιστοιχούν σε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις  $f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$ , οι συντελεστές δίνονται, αντιστοίχως, από

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (14.3.14)$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (14.3.15)$$

και

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-\frac{in\pi x}{p}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (14.3.16)$$

### Παράδειγμα 14.3.1

Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

**Λύση.**

Αρχικά, ευρίσκουμε

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0,$$

και στη συνέχεια με παραγοντική ολοκλήρωση, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi n} \left( [x \sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \, dx \right) = 0, \quad n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi n} \left( [-x \cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx \right) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

△

### Παράδειγμα 14.3.2

Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

**Λύση.**

Αρχικά, υπολογίζουμε

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

και στη συνέχεια, εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \quad n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx) \, dx = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$



οπότε έχουμε

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x).$$

△

### Παράδειγμα 14.3.3

Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f : (-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

**Λύση.**

Υπολογίζουμε

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 1 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 2 dx = \frac{3}{2}$$

και στη συνέχεια, εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση, λαμβάνουμε

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{n\pi} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 1 - 2 \cos(n\pi) \right], \quad n \geq 1,$$

οπότε προκύπτει

$$f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{2(-1)^{n+1} + 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right].$$

△

### Παράδειγμα 14.3.4

Βρείτε την ημιτονική σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \pi, \quad 0 < x \leq \pi.$$

**Λύση.**

Αρχικά, θεωρούμε την περιττή επέκταση  $f_\pi$  της  $f$  στο  $[-\pi, \pi]$

$$f_\pi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f_\pi(x) = \begin{cases} \pi, & 0 < x \leq \pi \\ 0, & x = 0 \\ -\pi, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της περιττής συνάρτησης  $f_\pi$ , με τη βοήθεια της (14.3.11), ως εξής

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \quad \text{και} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\pi(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{n} (1 - (-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{2k-1}, & n = 2k-1 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$f(x) \sim 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)x), \quad x \in (0, \pi].$$

△

### Παράδειγμα 14.3.5

Βρείτε τη συνημιτονική σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{\pi}{2} \\ 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

**Λύση.**

Η άρτια επέκταση  $f_\alpha$  της  $f$  στο  $[-\pi, \pi]$  είναι

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

και οι συντελεστές Fourier της άρτιας συνάρτησης  $f_\alpha$  υπολογίζονται, με τη βοήθεια της (14.3.10), ως εξής

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\alpha(x) dx = 1, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\alpha(x) \cos(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_n &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos((2k-1)x).$$

△

Για μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  και για ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$\mathcal{T}_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R}$$

υπολογίζουμε με τη βοήθεια των τύπων ορθογωνιότητας (14.2.8)-(14.2.11) και των (14.2.14)

και (14.2.15), οι οποίοι δίνουν τους συντελεστές Fourier,

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathcal{T}_n(x)|^2 dx = \\
& \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left( \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)) \right) dx \\
& + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)) \right)^2 dx = \\
& \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{A_0^2}{4} - A_0 f(x) \right) dx + \sum_{k=1}^n \left( \pi A_k^2 - 2A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right) \\
& + \sum_{k=1}^n \left( \pi B_k^2 - 2B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) = \\
& \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \left( \frac{\pi A_0^2}{2} - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right) + \sum_{k=1}^n \left( \pi A_k^2 - 2A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right) \\
& + \sum_{k=1}^n \left( \pi B_k^2 - 2B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) = \\
& \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left( \frac{A_0^2}{2} - A_0 a_0 \right) + \sum_{k=1}^n \pi (A_k^2 - 2A_k a_k) + \sum_{k=1}^n \pi (B_k^2 - 2B_k b_k)
\end{aligned}$$

και συμπληρώνοντας τα τετράγωνα σε κάθε παρένθεση, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathcal{T}_n(x)|^2 dx = \\
& \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left[ \frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k - a_k)^2 + \sum_{k=1}^n (B_k - b_k)^2 \right] \\
& - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right]. \tag{14.3.17}
\end{aligned}$$

Θέτοντας στο πρώτο μέλος της (14.3.17), αντί  $\mathcal{T}_n(x)$  το πολυώνυμο Fourier  $T_n(x)$ , προκύπτει η ανισότητα

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{14.3.18}$$

**Θεώρημα 14.3.1 (Βέλτιστης τετραγωνικής προσέγγισης)**

Έστω  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρώσιμη συνάρτηση,

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R}$$

το τριγωνομετρικό πολυώνυμο Fourier της  $f$ , όπου οι συντελεστές  $a_n$  και  $b_n$  δίνονται από τους τύπους (14.2.14) και (14.2.15), και

$$\mathcal{T}_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R}$$

τυχόν τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Τότε, ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathcal{T}_n(x)|^2 dx,$$

ενώ η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε, όταν

$$A_0 = a_0, \quad A_n = a_n \quad \text{και} \quad B_n = b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Απόδειξη.** Ο ισχυρισμός προκύπτει από την (14.3.17), όταν λάβουμε υπόψη ότι τα  $a_n$  και  $b_n$  είναι σταθερά, οπότε το τετραγωνικό σφάλμα γίνεται ελάχιστο όταν

$$A_0 = a_0, \quad A_n = a_n \quad \text{και} \quad B_n = b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

□

**Πόρισμα 14.3.1 (Ανισότητα Bessel)**

Έστω  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρώσιμη συνάρτηση και  $a_n$  και  $b_n$  οι συντελεστές Fourier της  $f$ , οι οποίοι δίνονται από τους τύπους (14.2.14) και (14.2.15). Τότε, ισχύει η ανισότητα

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (14.3.19)$$

**Απόδειξη.** Η ανισότητα (14.3.19) συνάγεται αμέσως από την ανισότητα (14.3.18).

□

**Πόρισμα 14.3.2 (Λήμμα Riemann)**

Έστω  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρώσιμη συνάρτηση και  $a_n$  και  $b_n$  οι συντελεστές Fourier της  $f$ , οι οποίοι δίνονται από τους τύπους (14.2.14) και (14.2.15). Τότε, ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

**Απόδειξη.** Από την ανισότητα Bessel έχουμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  συγκλίνει, οπότε  $(a_n^2 + b_n^2) \rightarrow 0$ . Όμως, ισχύει  $a_n^2, b_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2$  και άρα συνάγουμε  $a_n^2 \rightarrow 0$  και  $b_n^2 \rightarrow 0$ .

□

### Πρόταση 14.3.1 (Ταυτότητα Parseval)

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , και

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

η σειρά Fourier της συνάρτησης  $f$ . Τότε, ισχύει η ταυτότητα Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (14.3.20)$$

□

### Πρόταση 14.3.2 (Μοναδικότητα παράστασης σειρών Fourier)

Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι συνεχείς στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$  (άρα και στο  $\mathbb{R}$ ), και

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

οι σειρές Fourier των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ . Αν ισχύουν

$$A_0 = a_0, \quad A_n = a_n \quad \text{και} \quad B_n = b_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

τότε οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες, δηλαδή ισχύει

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Έτσι, μία  $2\pi$ -περιοδική συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  καθορίζεται (ορίζεται πλήρως) από τους συντελεστές Fourier αυτής.)

□

## 14.4 Σύγκλιση σειράς Fourier

Υπενθυμίζουμε ότι η σειρά Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

συγκλίνει σημειακά (ομοιόμορφα) στο  $\mathbb{R}$  προς τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

της σειράς συγκλίνει σημειακά (ομοιόμορφα) στο  $\mathbb{R}$  προς τη συνάρτηση  $f$ .

Η σειρά Fourier της συνάρτησης  $f$  δεν συγκλίνει πάντοτε σημειακά αλλά, και όταν συγκλίνει σημειακά, δεν συγκλίνει υποχρεωτικά προς τη συνάρτηση  $f$ .

Σημειώνουμε, αρχικά, ότι καταχωρούνται στην παράγραφο αυτή, αλλά και στην επόμενη, και ορισμένα γενικά αποτελέσματα, τα οποία παρουσιάζουν ισχυρό θεωρητικό χαρακτήρα, και πλήρεις αποδείξεις τους προϋποθέτουν την εφαρμογή προχωρημένων τεχνικών και εξειδικευμένων επιχειρημάτων που θεωρούμε εκτός του σκοπού του βιβλίου. Στις περιπτώσεις αυτές, είτε καταχωρούμε τα αποτελέσματα χωρίς απόδειξη είτε αρκούμαστε σε συνοπτική περιγραφή της κύριας ιδέας της απόδειξης. Πάντως, σε κάθε περίπτωση, επεξεργασόμαστε αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και εφαρμογές που αποσαφηνίζουν τον τρόπο εφαρμογής τους.

Για τη μελέτη της σύγκλισης σειρών Fourier χρειαζόμαστε ορισμένες βασικές έννοιες συναφείς με τη συνέχεια και τη διαφορισμότητα συναρτήσεων, οι οποίες καθορίζονται στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 14.4.1** Μια συνάρτηση  $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται

(i) *τμηματικά συνεχής* στο  $[a, b]$ , όταν είναι συνεχής στο  $[a, b]$  εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του, όπου όμως υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα πλευρικά όρια, δηλαδή όταν υπάρχει διαμέριση

$$(*) \quad [a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b]$$

του  $[a, b]$ , έτσι ώστε η  $f$  να είναι συνεχής σε κάθε ανοικτό διάστημα  $(x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , και επιπλέον υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα πλευρικά όρια

$$f(x_k^+) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) \quad \text{και} \quad f(x_k^-) = \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x).$$

(ii) *τμηματικά  $C^1$*  στο  $[a, b]$ , όταν υπάρχει η παράγωγος  $f'$  της  $f$  και είναι συνεχής στο  $[a, b]$  εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του, όπου όμως υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  οι πλευρικές

οριακές τιμές της  $f'$ , δηλαδή όταν υπάρχει μία διαμέριση (\*), έτσι ώστε η  $f'$  να είναι συνεχής σε κάθε ανοικτό διάστημα  $(x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , και επιπλέον υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα πλευρικά όρια

$$f'(x_k^+) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} f'(x) \quad \text{και} \quad f'(x_k^-) = \lim_{x \rightarrow x_k^-} f'(x).$$

(iii) τμηματικά  $C^2$  στο  $[a, b]$ , όταν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος  $f''$  της  $f$  και είναι συνεχής στο  $[a, b]$  εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του, όπου όμως υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  οι πλευρικές οριακές τιμές της  $f''$ , δηλαδή όταν υπάρχει μία διαμέριση (\*), έτσι ώστε η  $f''$  να είναι συνεχής σε κάθε ανοικτό διάστημα  $(x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , και επιπλέον υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα πλευρικά όρια

$$f''(x_k^+) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} f''(x) \quad \text{και} \quad f''(x_k^-) = \lim_{x \rightarrow x_k^-} f''(x).$$

□

Εξάλλου, μία συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται τμηματικά συνεχής (τμηματικά  $C^1$ , τμηματικά  $C^2$ ) όταν η συνάρτηση  $f$  είναι τμηματικά συνεχής (τμηματικά  $C^1$ , τμηματικά  $C^2$ ) σε κάθε κλειστό υποδιάστημα  $[a, b]$  του  $\mathbb{R}$ .

Σημειώνουμε ότι μία  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τμηματικά συνεχής (τμηματικά  $C^1$ , τμηματικά  $C^2$ ) στο  $\mathbb{R}$  όταν η  $f$  είναι τμηματικά συνεχής (τμηματικά  $C^1$ , τμηματικά  $C^2$ ) στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ .

Για να διατυπώσουμε το ακόλουθο βασικό θεώρημα, χρειαζόμαστε την έννοια της συνθήκης Dirichlet. Μία συνάρτηση  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί τη συνθήκη Dirichlet σε ένα σημείο  $x_0 \in [-\pi, \pi]$  όταν υπάρχουν τα πλευρικά όρια  $f'(x_0^+)$  και  $f'(x_0^-)$  για  $x_0 \in (-\pi, \pi)$ ,  $f'(-\pi^+)$  για  $x_0 = -\pi$  και  $f'(\pi^-)$  για  $x_0 = \pi$ . Σημειώνουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα σημείο  $x_0 \in [-\pi, \pi]$ , αλλά δεν ικανοποιούν τη συνθήκη Dirichlet στο  $x_0$ . Για παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [0, \pi], \\ 0, & x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$ , αλλά δεν ικανοποιεί τη συνθήκη Dirichlet στο  $x_0$  αφού δεν υπάρχει η  $f'(0^+)$ .

#### Θεώρημα 14.4.1

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδική και τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο  $[-\pi, \pi]$ , η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη Dirichlet στο σημείο  $x_0 \in (-\pi, \pi)$ . Τότε, η σειρά Fourier της συνάρτησης  $f$  συγκλίνει στο σημείο  $x_0$  και ισχύει

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$



□

**Πόρισμα 14.4.1** Έστω μία  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 \in (-\pi, \pi)$  και επίσης ικανοποιεί τη συνθήκη Dirichlet στο σημείο  $x_0$ . Τότε, η σειρά Fourier της  $f$  συγκλίνει στο σημείο  $x_0$  και ισχύει

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)) = f(x_0).$$

□

#### Θεώρημα 14.4.2

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδική και τμηματικά  $C^1$  συνάρτηση στο  $[-\pi, \pi]$ . Τότε, η σειρά Fourier της συνάρτησης  $f$  συγκλίνει σημειακά για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και ισχύει

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

**Πόρισμα 14.4.2** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και τμηματικά  $C^1$  στο  $[-\pi, \pi]$ . Τότε, η σειρά Fourier της  $f$  συγκλίνει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και ισχύει

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

**Πόρισμα 14.4.3** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδική, συνεχής και τμηματικά  $C^1$  συνάρτηση στο  $[-\pi, \pi]$  με σειρά Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Τότε, ισχύουν

1. Οι σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  συγκλίνουν.
2.  $na_n \rightarrow 0$  και  $nb_n \rightarrow 0$ .

□

**Πόρισμα 14.4.4** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδική, συνεχής και τμηματικά  $C^1$  συνάρτηση στο  $[-\pi, \pi]$ . Τότε, η σειρά Fourier της συνάρτησης  $f$  συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο  $[-\pi, \pi]$ .

□

### Παράδειγμα 14.4.1

Εξετάστε αν η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

συγκλίνει σημειωτικά προς την περιοδική επέκταση της συνάρτησης  $f$  στο  $\mathbb{R}$ .

### Λύση.

Θεωρούμε, αρχικά, την επέκταση της  $f$  στο  $[-\pi, \pi]$

$$\tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi] \\ \pi, & x = -\pi \end{cases}$$

και στη συνέχεια την  $2\pi$ -περιοδική επέκταση  $F$  της  $\tilde{f}$ .

Εφαρμόζοντας τώρα την (14.3.2) για την  $\tilde{f}$ , υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 1 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = 1 + \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} [\sin(nx)] \Big|_{-\pi}^0 + \left[ x \frac{\sin(nx)}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi} \cos(nx) \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο, με τη βοήθεια της (14.3.3), ευρίσκουμε

$$b_n = \frac{(-1)^n(1 - \pi) - 1}{n\pi}, \quad n \geq 1.$$

Έτσι, προκύπτει η σειρά Fourier της συνάρτησης  $F$  στο  $\mathbb{R}$

$$F(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-\pi) - 1}{n\pi} \sin(nx),$$

άρα και της  $f$  στο  $(-\pi, \pi]$ .

Τώρα, όσον αφορά τη σημειακή σύγκλιση της σειράς Fourier στη συνάρτηση  $F$  στο  $\mathbb{R}$ , παρατηρούμε τα εξής: τα σημεία ασυνέχειας της  $\tilde{f}$  είναι τα σημεία  $-\pi$ ,  $0$  και  $\pi$ , οπότε τα σημεία ασυνέχειας της  $F$  είναι τα σημεία  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , για τα οποία ισχύουν

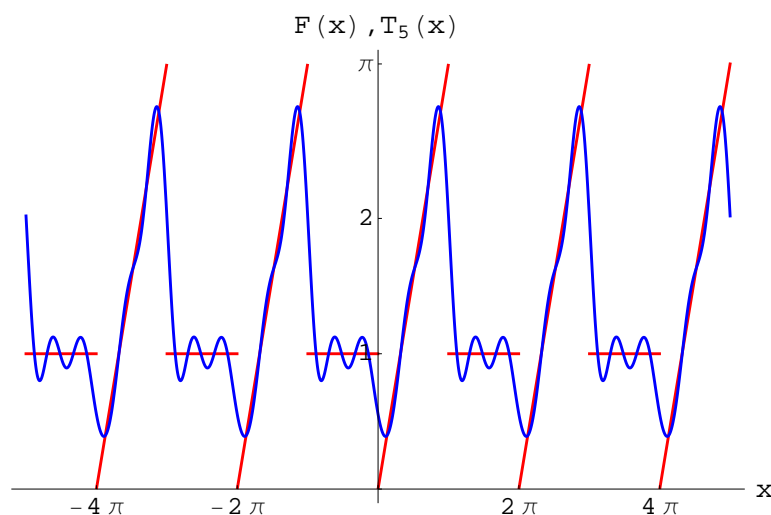
$$\frac{F(2k\pi^+) + F(2k\pi^-)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

και

$$\frac{F((2k-1)\pi^+) + F((2k-1)\pi^-)}{2} = \frac{1 + \pi}{2}.$$

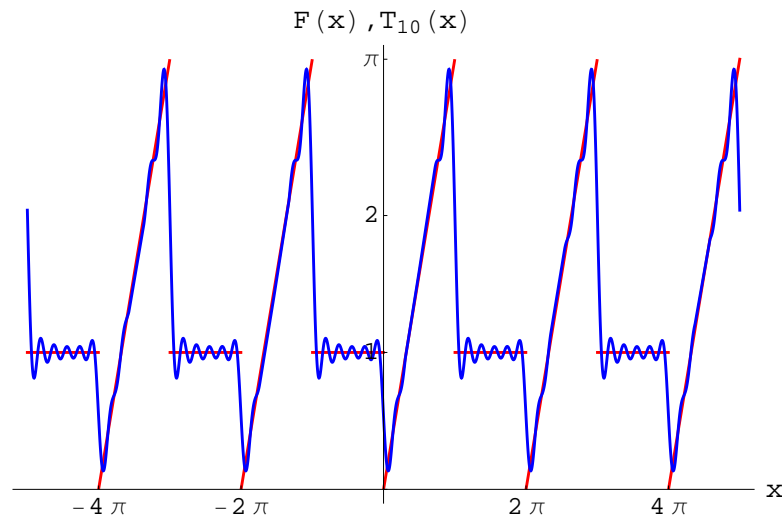
Επιπλέον, η συνάρτηση  $F$  είναι τμηματικά  $C^1$  και, έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 14.4.2, ευρίσκουμε ότι η σειρά Fourier της συνάρτησης  $F$  συγκλίνει σημειακά στο  $[-\pi, \pi]$  προς τη συνάρτηση

$$g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi), x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1+\pi}{2}, & x = -\pi, \pi \end{cases}.$$



Σχήμα 14.1: Γραφικές παραστάσεις της  $F(x)$  και του τριγωνομετρικού πολυωνύμου  $T_5(x)$  του Παραδείγματος 14.4.1.

Στα Σχήματα 14.1 και 14.2 απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών πολυωνύμων  $T_5$  και  $T_{10}$  που αντιστοιχούν στη σειρά Fourier της συνάρτησης  $F$ . Όπως



Σχήμα 14.2: Γραφικές παραστάσεις της  $F(x)$  και του τριγωνομετρικού πολυωνύμου  $T_{10}(x)$  του Παραδείγματος 14.4.1.

παρατηρούμε, καθώς το πλήθος των όρων της σειράς Fourier αυξάνεται, επιτυγχάνεται καλύτερη προσέγγιση στα σημεία συνέχειας της  $F$ . Ειδικότερα, στα σημεία συνέχειας της συνάρτησης  $F$ , τα οποία ευρίσκονται στην περιοχή ενός σημείου ασυνέχειας της συνάρτησης  $F$ , τα γραφήματα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων  $T_5$  και  $T_{10}$  παρουσιάζουν ταλαντώσεις. Τα μέγιστα πλάτη των ταλαντώσεων αυτών παρουσιάζονται σε σημεία, τα οποία μετακινούνται προς σημεία ασυνέχειας της  $F$ , καθώς το πλήθος των όρων του τριγωνομετρικού πολυωνύμου αυξάνει. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε από τον Αμερικανό Μαθηματικό και Φυσικό Josiah Willard Gibbs και για αυτό αναφέρεται ως *φαινόμενο Gibbs*. Σημειώνουμε ότι το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται στις προσεγγίσεις συναρτήσεων από σειρές Fourier σε περιοχές των σημείων ασυνέχειας.

△

#### Παράδειγμα 14.4.2

Εξετάστε αν η ημιτονική σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \pi, \quad 0 < x \leq \pi$$

συγκλίνει σημειωτικά προς την περιττή επέκταση της συνάρτησης  $f$  στο  $[-\pi, \pi]$ .

**Λύση.**

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 14.3.4, η ημιτονική σειρά Fourier της  $f$  είναι

$$f(x) \sim 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)x).$$

Για τη σημειακή σύγκλιση της σειράς Fourier στην περιοδική επέκταση  $F$  της συνάρτησης  $f$  στο  $\mathbb{R}$ , παρατηρούμε τα εξής: τα σημεία ασυνέχειας της περιττής επέκτασης  $f_\pi$  της  $f$  είναι τα σημεία  $-\pi$ ,  $0$  και  $\pi$ , οπότε τα σημεία ασυνέχειας της  $F$  είναι τα σημεία  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , για τα οποία ισχύουν

$$\frac{F(k\pi^+) + F(k\pi^-)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0.$$

Επιπλέον, η συνάρτηση  $F$  είναι τμηματικά  $C^1$  και, έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 14.4.2, ευρίσκουμε ότι η σειρά Fourier της συνάρτησης  $F$  συγκλίνει σημειακά στο  $[-\pi, \pi]$  προς τη συνάρτηση

$$g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi), x \neq 0 \\ 0, & x = -\pi, 0, \pi \end{cases}.$$

△

### Παράδειγμα 14.4.3

Εξετάστε αν η συνημιτονική σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{\pi}{2} \\ 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

συγκλίνει σημειακά προς την άρτια επέκταση της συνάρτησης  $f$  στο  $[-\pi, \pi]$ .

**Λύση.**

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 14.3.5, η συνημιτονική σειρά Fourier της  $f$  είναι

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos((2k-1)x).$$

Τα σημεία ασυνέχειας της άρτιας επέκτασης  $f_\alpha$  της  $f$  είναι τα σημεία  $-\frac{\pi}{2}$  και  $\frac{\pi}{2}$ , οπότε τα σημεία ασυνέχειας της περιοδικής επέκτασης  $F$  της  $f_\alpha$  είναι τα σημεία  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , για τα οποία ισχύουν

$$\frac{F((2k+1)\frac{\pi}{2}^+) + F((2k+1)\frac{\pi}{2}^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 14.4.2 και επειδή ισχύει  $F((2k+1)\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ , ευρίσκουμε ότι η σειρά Fourier της συνάρτησης  $F$  συγκλίνει σημειακά στο  $[-\pi, \pi]$  προς την άρτια επέκταση  $f_\alpha$  της  $f$ .

△

**Παράδειγμα 14.4.4**

Βρείτε τη συνημιτονική σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

και αποδείξτε ότι

(i) η συνημιτονική σειρά Fourier συγκλίνει σημειακά προς την άρτια επέκταση  $f_\alpha$  της  $f$  στο  $[-\pi, \pi]$ ,

(ii) ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

(iii) ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Λύση.**

Αρχικά, θεωρούμε την άρτια επέκταση της  $f$  στο  $[-\pi, \pi]$

$$f_\alpha : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

της οποίας οι συντελεστές Fourier υπολογίζονται ως εξής

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\alpha(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\alpha(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = 0, \quad n \geq 1. \tag{14.4.1}$$

Έτσι, προκύπτει η συνημιτονική σειρά Fourier της συνάρτησης  $f$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

(i) Η περιοδική επέκταση  $F$  της  $f_\alpha$  είναι συνεχής για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα και για κάθε  $x \in [-\pi, \pi]$  και, έτσι ο ισχυρισμός συνάγεται από το Θεώρημα 14.4.2.

(ii) Εφαρμόζοντας τον προηγούμενο ισχυρισμό για  $x = \pi$ , λαμβάνουμε

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi),$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(iii) Εφαρμόζοντας την ταυτότητα Parseval, ευρίσκουμε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

οπότε

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

και άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

△

## 14.5 Ολοκλήρωση και παραγωγή σειράς Fourier

### Θεώρημα 14.5.1 (Ολοκλήρωση σειράς Fourier)

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , και

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

η σειρά Fourier της συνάρτησης  $f$ . Τότε, ισχύουν

(i)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^x f(s) ds &= \int_{-\pi}^x \frac{a_0}{2} ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^x (a_n \cos(ns) + b_n \sin(ns)) ds \\ &= \frac{a_0}{2}(\pi + x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin(nx) - b_n(\cos(nx) - (-1)^n)), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (14.5.1)$$

(ii) Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$  συγκλίνει.

□

### Παράδειγμα 14.5.1

Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \pi \\ -1, & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases},$$

και, με τη βοήθεια αυτής, αναπτύξτε σε σειρά Fourier τη συνάρτηση

$$g(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

### Λύση.

Αρχικά, υπολογίζοντας τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης  $f$ , ευρίσκουμε ότι

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x).$$

Περαιτέρω, εφαρμόζοντας την (14.5.1), λαμβάνουμε

$$\int_{-\pi}^x f(s) ds = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^x \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)s) ds,$$

οπότε

$$|x| - \pi = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{4}{\pi(2n-1)} (\cos((2n-1)x) + 1) \right)$$

και έτσι ευρίσκουμε το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $g$  σε σειρά Fourier

$$|x| = \pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} (\cos((2n-1)x) + 1).$$

△

### Παράδειγμα 14.5.2

Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

και, με τη βοήθεια αυτής, αναπτύξτε σε σειρά Fourier τη συνάρτηση

$$g(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi].$$



**Λύση.**

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος, ευρίσκουμε

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

και

$$x^2 = \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (\cos(nx) - (-1)^n).$$

△

**Λήμμα 14.5.1** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και τμηματικά  $C^1$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , και

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$f'(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

οι σειρές Fourier των συναρτήσεων  $f$  και  $f'$ . Τότε, για τους συντελεστές Fourier  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  της  $f$  και τους συντελεστές Fourier  $A_0$ ,  $A_n$ ,  $B_n$  της  $f'$ , ισχύουν

$$A_0 = 0, \quad A_n = nb_n \quad \text{και} \quad B_n = -na_n.$$

□

**Θεώρημα 14.5.2 (Παραγωγή σειράς Fourier)**

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και τμηματικά  $C^1$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , και

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

η σειρά Fourier της συνάρτησης  $f$ . Τότε, ισχύει

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)).$$

Επιπλέον, αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος  $f'' : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  της  $f$  στο  $[-\pi, \pi]$ , τότε, η σειρά Fourier της συνάρτησης  $f'$  συγκλίνει σημειωτικά στο  $[-\pi, \pi]$  προς τη συνάρτηση  $f' : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , δηλαδή ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

□

### Παράδειγμα 14.5.3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x^2 - \pi^2)^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Υπολογίστε με τη βοήθεια του Θεωρήματος 14.5.2, τις παραγώγους  $f'$  και  $f''$ .

**Λύση.**

Υπολογίζοντας τους συντελεστές Fourier, ευρίσκουμε

$$f(x) \sim \frac{48\pi^4}{90} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} \cos(nx). \quad (14.5.2)$$

Εξάλλου, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει παραγώγους

$$f'(x) = 4x(x^2 - \pi^2), \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4\pi^2, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

οι οποίες είναι συνεχείς συναρτήσεις και επιπλέον η συνάρτηση  $f$  έχει και τρίτη παράγωγο

$$f'''(x) = 24x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Έτσι, εφαρμόζοντας διαδοχικά το Θεώρημα 14.5.2, ευρίσκουμε

$$f'(x) = 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx).$$

και

$$f''(x) = 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

△

## 14.6 Ασκήσεις

**Άσκηση 14.6.1** Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = x, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

**Άσκηση 14.6.2** Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Άσκηση 14.6.3** Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq \pi \\ 0, & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

**Άσκηση 14.6.4** Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x \leq \pi \\ 0, & -\pi < x \leq 0 \end{cases}.$$

**Άσκηση 14.6.5** Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4, & 2 < x \leq 4 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

# Βιβλιογραφία

- [1] N. J. De Lillo, *Advanced Calculus with Applications*, Macmillan Publishing Co., New York, 1982.
- [2] S. Hildebrandt, *Analysis 1*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [3] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος και Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙβ*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1999.
- [4] A. L. Schoenstadt, *An Introduction to Fourier Analysis*, Department of Applied Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 2005.
- [5] J. P. Solovej, *Fourier Series–Notes for Analysis 1*, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, 2012.
- [6] E. Stade, *Fourier Analysis*, Wiley, New Jersey, 2005.
- [7] W. T. Tsai, *Applied Mathematics, Part 4: Fourier Analysis*, Department of Engineering Science and Ocean Engineering, National Taiwan University, Taipei, 1997.

## Κεφάλαιο 15

# Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform–DFT), ο οποίος είναι το πεπερασμένο διακριτό αντίστοιχο των σειρών Fourier, αποτελεί το σημαντικότερο εργαλείο ευρείας χρήσεως της ψηφιακής τεχνολογίας. Ο DFT μπορεί να θεωρηθεί ως μία προσέγγιση των συνήθων σειρών Fourier αλλά και από μόνος του έχει σημαντικό ενδιαφέρον. Ο μετασχηματισμός απέκτησε ιδιαίτερη σπουδαιότητα από τις εφαρμογές του, οι οποίες εμπλέκουν επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, ο DFT μετασχηματίζει πεπερασμένες ακολουθίες πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών (διακριτά σήματα) σε μιγαδικές ακολουθίες, οι οποίες διατηρούν όλη την πληροφορία του αρχικού σήματος. Οι βασικές ιδιότητες του DFT συμβάλλουν αποτελεσματικά στην επεξεργασία του αρχικού σήματος και την ανακατασκευή αυτού.

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει μία εισαγωγή στον DFT. Αρχικά, ορίζεται η έννοια του DFT και διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητές του. Στη συνέχεια καταγράφονται συσχετίσεις του DFT με τις μιγαδικές ρίζες της μονάδας και τον πίνακα Fourier. Καταχωρούνται επίσης διάφορες αντιπροσωπευτικές εφαρμογές του μετασχηματισμού.

### 15.1 Ορισμός DFT

Στην παράγραφο αυτή, ορίζεται η έννοια του DFT και εξετάζεται ο αντίστροφός του.

#### Ορισμός 15.1.1 (Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier)

Έστω μία πεπερασμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών

$$f(n), n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (N \geq 1).$$

Η ακολουθία

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-2\pi ink/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (15.1.1)$$

ορίζεται ως Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) της ακολουθίας  $f(n)$ .

□

Ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την αρχική ακολουθία  $f(n)$  προσδιορίζεται στο ακόλουθο

### Θεώρημα 15.1.1 (Αντίστροφος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier)

Για το διακριτό μετασχηματισμό Fourier  $F(k)$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) της ακολουθίας  $f(n)$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ), ο οποίος ορίζεται από την (15.1.1), ισχύει

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{2\pi ink/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (15.1.2)$$

**Απόδειξη.** Από την (15.1.1) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{2\pi ink/N} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{m=0}^{N-1} f(m)e^{-2\pi imk/N} \right) e^{2\pi ink/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(m)e^{-2\pi imk/N} e^{2\pi ink/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i(n-m)k/N}. \end{aligned}$$

Εξάλλου, για  $n \neq m$ , από τον τύπο του αθροίσματος της γεωμετρικής προόδου, λαμβάνουμε

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left( e^{\frac{2\pi i(n-m)k}{N}} \right) = \frac{\left( e^{\frac{2\pi i(n-m)N}{N}} \right) - 1}{e^{\frac{2\pi i(n-m)}{N}} - 1} = \frac{e^{2\pi i(n-m)} - 1}{e^{\frac{2\pi i(n-m)}{N}} - 1} = \frac{0}{e^{\frac{2\pi i(n-m)}{N}} - 1} = 0,$$

ενώ για  $n = m$  έχουμε

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left( e^{\frac{2\pi i(n-m)k}{N}} \right) = N$$

και επομένως ισχύει

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{2\pi ink/N} = \frac{1}{N} f(n)N = f(n).$$

□

Για να δηλώσουμε ότι η ακολουθία  $F(k)$  είναι ο DFT της  $f(n)$ , οπότε η  $f(n)$  είναι ο αντίστροφος DFT της  $F(k)$ , χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $f(n) \longleftrightarrow F(k)$ , ενώ το  $(f(n), F(k))$  αναφέρεται και ως ζεύγος διακριτού μετασχηματισμού Fourier.

**Παράδειγμα 15.1.1** Υπολογίστε

(i) τον DFT της ακολουθίας

$$f(n) : 1, 1, 0, 0$$

(ii) τον αντίστροφο DFT της ακολουθίας

$$F(k) : 1, 0, 1, 0.$$

**Λύση.**

(i) Εφαρμόζοντας την (15.1.1), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^3 f(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} \\ &= f(0) + f(1)e^{-\frac{\pi ik}{2}} + f(2)e^{-\pi ik} + f(3)e^{-\frac{3\pi ik}{2}} \\ &= 1 + e^{-\frac{\pi ik}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$F(k) : 2, 1 - i, 0, 1 + i.$$

(ii) Από την (15.1.2), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 F(k)e^{i\frac{2k\pi n}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \left( F(0) + F(1)e^{\frac{\pi in}{2}} + F(2)e^{\pi in} + F(3)e^{\frac{3\pi in}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{4}(1 + e^{\pi in}), \quad n = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

και άρα

$$f(n) : 1/2, 0, 1/2, 0.$$

△

## 15.2 Ο DFT ως γινόμενο πινάκων

Για την παράσταση του DFT ως γινομένου πινάκων χρειαζόμαστε τις ρίζες της μιγαδικής εξίσωσης

$$w^N = 1, \quad N \in \mathbb{N}$$

( $N$ -οστές ρίζες της μονάδας), οι οποίες δίνονται από

$$w_n = e^{\frac{2\pi i n}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

όπου ισχύει

$$w_0 = w_N = 1, \quad w_1 = w_{N+1} = e^{\frac{2\pi i}{N}} \text{ και γενικά } w_n = w_{n+N},$$

οπότε οι  $N$ -οστές ρίζες της μονάδας γράφονται

$$w_0 = w^0 = 1, \quad w_1 = w^1 = w, \quad w_2 = w^2, \dots, \quad w_{N-1} = w^{N-1}, \quad \text{όπου } w_1 = e^{\frac{2\pi i}{N}} \equiv w.$$

Εξάλλου, σημειώνουμε ότι ισχύει η

$$w^n = w^{n \bmod N}, \quad n \geq N,$$

όπου  $n \bmod N$  είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $n$  με το  $N$ .

Υπενθυμίζουμε ότι οι ρίζες  $w_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) παρίστανται γεωμετρικά από τις κορυφές ενός κανονικού  $N$ -γώνου (πολυγώνου με  $N$  ίσες πλευρές), το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα 1.

Περαιτέρω, σημειώνουμε ότι και οι μιγαδικοί αριθμοί

$$\xi_n = e^{-\frac{2\pi i n}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = \overline{w_n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

αποτελούν επίσης  $N$ -οστές ρίζες της μονάδας, όπου

$$\xi_0 = \xi^0 = 1, \quad \xi_1 = \xi^1 = \xi, \quad \xi_2 = \xi^2, \dots, \quad \xi_{N-1} = \xi^{N-1}, \quad \text{όπου } \xi_1 = e^{-\frac{2\pi i}{N}} \equiv \xi$$

και επιπλέον ισχύει

$$\xi^{-n} = \overline{\xi^n} = w^n.$$

Οι  $\xi_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ), οι οποίες αντιστοιχούν επίσης στις κορυφές ενός κανονικού  $N$ -γώνου εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο, διαφέρουν από τις  $w_n$  ως προς τη φορά διαγραφής καθώς τα  $w_n$  διαγράφονται αντισωρολογιακά ενώ τα  $\xi_n$  ωρολογιακά για  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

Ο πίνακας Fourier τάξης  $N$  και ο αντίστροφός του ορίζονται με τη βοήθεια των  $\xi_n$  και  $w_n$ , όπως ακολουθεί.



**Ορισμός 15.2.1 (Πίνακας Fourier τάξης  $N$ )**

Ο  $N \times N$  πίνακας

$$\mathcal{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{N-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \dots & \xi^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{N-1} & \xi^{N-2} & \dots & \xi \end{bmatrix}, \quad (15.2.1)$$

όπου το  $(j, k)$  στοιχείο του δίνεται από

$$\mathcal{F}_N(j, k) = \xi^{jk} = (\overline{w})^{jk} = w^{-jk}, \quad j, k = 0, \dots, N-1,$$

ορίζεται ως ο πίνακας *Fourier* τάξης  $N$ .

□

Εξάλλου, παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος πίνακας  $\mathcal{F}_N^{-1}$  του πίνακα Fourier τάξης  $N$  δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{F}_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{N-2} & \dots & w \end{bmatrix}, \quad (15.2.2)$$

όπου ισχύει

$$\mathcal{F}_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\mathcal{F}_N}.$$

Σημειώνουμε ότι οι είσοδοι των πινάκων  $\mathcal{F}_N$  και  $\mathcal{F}_N^{-1}$  αριθμούνται από 0 έως  $N-1$ , δηλαδή το πάνω αριστερά στοιχείο είναι το  $(0,0)$  (και όχι το  $(1,1)$ ) και το κάτω δεξιά είναι το  $(N-1, N-1)$  (και όχι το  $(N, N)$ ).

Επί παραδείγματι, ο πίνακας Fourier τάξης 2 και ο αντίστροφός του δίνονται από

$$\mathcal{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ενώ ο πίνακας Fourier τάξης 4 και ο αντίστροφός του από

$$\mathcal{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_4^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}.$$

Με τη βοήθεια των πινάκων  $\mathcal{F}_N$  και  $\mathcal{F}_N^{-1}$  διατυπώνονται στην ακόλουθη πρόταση ισοδύναμοι ορισμοί για τον DFT και τον αντίστροφό του, όπου οι ακολουθίες  $f(n)$  και  $F(k)$  ( $n, k = 0, 1, \dots, N-1$ ) θεωρούνται ως διανύσματα στήλες (δηλαδή  $N \times 1$  πίνακες).

**Πρόταση 15.2.1 (DFT και αντίστροφος DFT με χρήση του πίνακα Fourier)**

Έστω  $f(n)$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) ακολουθία μιγαδικών αριθμών,  $F(k)$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) ο DFT αυτής και

$$\mathbf{f} = [f(1) \ f(2) \ \dots \ f(n)]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{F} = [F(1) \ F(2) \ \dots \ F(n)]^T$$

οι αντίστοιχοι  $N \times 1$  πίνακες. Τότε ισχύουν

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}_N \mathbf{f} \quad \text{και} \quad \mathbf{f} = \mathcal{F}_N^{-1} \mathbf{F}. \quad (15.2.3)$$

**Απόδειξη.** Υπολογίζοντας τα γινόμενα πινάκων που εμφανίζονται στις (15.2.3) λαμβάνουμε

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \xi^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

και

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) w^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

δηλαδή επανευρίσκουμε τους τύπους (15.1.1) και (15.1.2).

□

**Παράδειγμα 15.2.1** Υπολογίστε τον DFT του  $\mathbf{f} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ .

**Λύση.** Από την (15.2.3) ευρίσκουμε

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}_4 \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

△

**Παράδειγμα 15.2.2** Υπολογίστε τον αντίστροφο DFT του  $\mathbf{F} = [3 \ 0 \ 6]^T$ .

**Λύση.** Από την (15.2.3) έχουμε

$$\mathbf{f} = \mathcal{F}_3 \mathbf{F} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

△

Οι (15.2.3) σε συνδυασμό με την ιδιότητα

$$\mathcal{F}_N^{-1} \mathbf{X} = \frac{1}{N} \overline{\mathcal{F}_N \mathbf{X}} = \frac{1}{N} \overline{\mathcal{F}_N \overline{\mathbf{X}}}. \quad (15.2.4)$$

προσφέρουν επίσης έναν αποδοτικό τρόπο υπολογισμού του αντιστρόφου DFT, όταν υπάρχει διαθέσιμο κάποιο πρόγραμμα (αλγόριθμος) υπολογισμού του DFT.

Πιο συγκεκριμένα, όταν έχουμε ένα πρόγραμμα progDFT, το οποίο υλοποιεί έναν αλγόριθμο υπολογισμού του DFT, τότε με το ίδιο πρόγραμμα υπολογίζουμε με τη βοήθεια της (15.2.4) και τον αντίστροφο DFT  $\mathbf{x}$  ενός διανύσματος  $\mathbf{X}$ , εφαρμόζοντας τη διαδικασία

- 1) Υπολογισμός  $\overline{\mathbf{X}}$ .
- 2) Υπολογισμός του DFT  $\mathbf{Y}$  του  $\overline{\mathbf{X}}$  θέτοντας την είσοδο  $\overline{\mathbf{X}}$  στο progDFT.
- 3) Ο αντίστροφος DFT  $\mathbf{x}$  προκύπτει ως  $\frac{1}{N} \overline{\mathbf{Y}}$ .

### 15.3 Ιδιότητες DFT

Οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες του DFT προκύπτουν ως άμεσες συνέπειες του ορισμού του μετασχηματισμού.

- *Γραμμικότητα*

$$\begin{aligned} f_1(n) \longleftrightarrow F_1(k) \text{ και } f_2(n) \longleftrightarrow F_2(k) &\Rightarrow \\ a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \longleftrightarrow a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k), & \quad (15.3.1) \end{aligned}$$

όπου  $a_1, a_2$  αυθαίρετες σταθερές.

- *Συμμετρία*

$$f(n) \longleftrightarrow F(k) \Rightarrow \frac{1}{N} F(n) \longleftrightarrow f(-k). \quad (15.3.2)$$

- Χρονική μετατόπιση

$$f(n) \longleftrightarrow F(k) \Rightarrow f(n - n_0) \longleftrightarrow F(k)e^{-i2\pi kn_0/N}. \quad (15.3.3)$$

- Μετατόπιση συχνότητας

$$f(n) \longleftrightarrow F(k) \Rightarrow e^{i2\pi nk_0/N} f(n) \longleftrightarrow F(k - k_0). \quad (15.3.4)$$

- Συνέλιξη στο χρόνο

**Ορισμός 15.3.1** Έστω δύο ακολουθίες  $f_1(n)$  και  $f_2(n)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), οι οποίες είναι  $N$ -περιοδικές για δοσμένο (σταθεροποιημένο)  $N$ , δηλαδή ισχύουν

$$f_\lambda(n + N) = f_\lambda(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lambda = 1, 2.$$

Τότε, η ακολουθία  $f_1 * f_2$ , η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$(f_1 * f_2)(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f_1(m)f_2(n - m), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (15.3.5)$$

ονομάζεται συνέλιξη των  $f_1$  και  $f_2$ .

□

Η ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο εκφράζεται από το ακόλουθο

**Θεώρημα 15.3.1** Υπό τις προϋποθέσεις του Ορισμού 15.3.1, ισχύει

$$(f_1 * f_2)(n) \longleftrightarrow F_1(k)F_2(k), \quad (15.3.6)$$

όπου  $F_1(k)$  και  $F_2(k)$  είναι οι DFT των ακολουθιών  $f_1(n)$  και  $f_2(n)$ .

**Απόδειξη.** Με τη βοήθεια των (15.1.2) και (15.3.5) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(n) &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} F_1(k)e^{2\pi imk/N} \right) \left( \sum_{j=0}^{N-1} F_2(j)e^{2\pi i(n-m)j/N} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{N-1} F_2(j)F_1(k)e^{2\pi inj/N} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi im(k-j)/N} \right). \end{aligned}$$

Όμως, ισχύει

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi im(k-j)/N} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$$

και έτσι λαμβάνουμε

$$(f_1 * f_2)(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_2(k) F_1(k) e^{2\pi i n k / N},$$

η οποία, βάσει του ορισμού (15.1.2) του αντιστρόφου DFT, αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

□

- *Συνέλιξη στη συχνότητα*

Υπό τις προϋποθέσεις του Ορισμού 15.3.1, ισχύει η συνεπαγωγή

$$\begin{aligned} f_1(n) \longleftrightarrow F_1(k) \text{ και } f_2(n) \longleftrightarrow F_2(k) &\Rightarrow \\ (f_1 f_2)(n) = f_1(n) f_2(n) \longleftrightarrow \frac{1}{N} (F_1 * F_2)(k). &\quad (15.3.7) \end{aligned}$$

Τέλος, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το ακόλουθο βασικό θεώρημα, το οποίο είναι ιδιαίτερα χρηστικό στη μελέτη εφαρμογών της Θεωρίας Σημάτων

### Θεώρημα 15.3.2 (Θεώρημα Parseval για τον DFT)

Για τις μιγαδικές ακολουθίες  $f_1(n)$  και  $f_2(n)$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) και τους αντίστοιχους DFT  $F_1(k)$  και  $F_2(k)$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) αυτών, ισχύει

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_1(n) \bar{f}_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_1(k) \bar{F}_2(k). \quad (15.3.8)$$

**Απόδειξη.** Με τη βοήθεια των (15.1.1) και (15.1.2), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(n) \bar{f}_2(n) &= \sum_{n=0}^{N-1} f_1(n) \overline{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_2(k) e^{2\pi i n k / N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(n) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{F}_2(k) e^{-2\pi i n k / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{F}_2(k) \sum_{n=0}^{N-1} f_1(n) e^{-2\pi i n k / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_1(k) \bar{F}_2(k). \end{aligned}$$

□

Ο τύπος (15.3.8) για  $f_1 = f_2 = f$  οδηγεί στον

$$\sum_{m=0}^{N-1} |f(m)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2, \quad (15.3.9)$$

ο οποίος συνήθως αναφέρεται ως *τύπος Parseval*.

## 15.4 Εφαρμογές DFT

Στην παράγραφο αυτή επεξεργαζόμαστε ορισμένα παραδείγματα υπολογισμών του DFT και του αντιστρόφου του καθώς επίσης και ορισμένες αντιπροσωπευτικές εφαρμογές.

**Παράδειγμα 15.4.1** Βρείτε τον DFT της  $g(n) = (f * f)(n)$ , όπου

$$f(n) : 1, 1, 0, 0.$$

**Λύση.** Ο DFT της  $\mathbf{f} = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  υπολογίζεται, με τη βοήθεια της (15.2.3), όπως ακολουθεί

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}_4 \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - i \\ 0 \\ 1 + i \end{bmatrix},$$

οπότε

$$F(k) : 2, 1 - i, 0, 1 + i,$$

και άρα

$$F(k)F(k) : 4, (1 - i)^2, 0, (1 + i)^2.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την (15.3.6), ευρίσκουμε ότι ο DFT  $G(k)$  της  $g(n)$  δίνεται από

$$G(k) : 4, -2i, 0, 2i.$$

△

**Παράδειγμα 15.4.2** Βρείτε τον DFT της σταθερής ακολουθίας

$$f(n) = 1, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

**Λύση.** Με τη βοήθεια του ορισμού (15.1.1), υπολογίζουμε

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i n k / N} = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ N, & n = 0 \end{cases}$$

$$: N, 0, \dots, 0, \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

△

**Παράδειγμα 15.4.3** Βρείτε τον DFT της ακολουθίας

$$f(n) = e^{2\pi i n k_0 / N}, \quad n = 0, \dots, N - 1,$$

όπου  $k_0$  (σταθεροποιημένος) ακέραιος με  $0 \leq k_0 < N$ .

**Λύση.** Η ακολουθία  $f(n)$  με τη βοήθεια της σταθερής ακολουθίας

$$g(n) = 1, \quad n = 0, \dots, N - 1$$

γράφεται

$$f(n) = e^{2\pi i n k_0 / N} g(n).$$

Έτσι, από την ιδιότητα μετατόπισης συχνότητας (15.3.4), έχουμε

$$f(n) \longleftrightarrow G(k - k_0).$$

Εξάλλου, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, ο DFT  $G(k)$  της  $g(n)$  δίνεται από

$$G(k) : N, 0, \dots, 0, \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

και επομένως ευρίσκουμε

$$F(k) = G(k - k_0) = \begin{cases} 0, & k \neq k_0 \\ N, & k = k_0 \end{cases}.$$

△

**Παράδειγμα 15.4.4** Υπολογίστε τον DFT κάθε μίας από τις ακολουθίες

(i)  $f(n) : 1, 0, \dots, 0, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$

(ii)  $g(n) : 0, 1, \dots, 0, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$

**Λύση.**

(i) Από το Παράδειγμα 15.4.2, έχουμε

$$1, 1, \dots, 1 \leftrightarrow N, 0, \dots, 0,$$

οπότε, από την ιδιότητα συμμετρίας (15.3.2) του DFT, συμπεραίνουμε

$$1, 0, \dots, 0 \leftrightarrow 1, 1, \dots, 1,$$

δηλαδή ισχύει

$$F(k) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$g(n) = f(n - 1) : 0, 1, \dots, 0.$$

Εξάλλου, από την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο (15.3.3) του DFT, έχουμε

$$f(n - 1) \longleftrightarrow F(k)e^{-i2\pi k/N},$$

οπότε, συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, ευρίσκουμε

$$G(k) = e^{-i2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

△

**Παράδειγμα 15.4.5** Προσδιορίστε την ακολουθία  $g$  υπό τις προϋποθέσεις

$$f * g \leftrightarrow \{15, -2i\sqrt{3}, 2i\sqrt{3}\} \quad \text{και} \quad f \leftrightarrow \{5, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\}.$$

**Λύση.** Από την ιδιότητα συνέλιξης στο χρόνο (15.3.6) του DFT, για την ακολουθία  $h(n) = f(n) * g(n)$  έχουμε

$$G(k) = \frac{F(k)G(k)}{F(k)} = \frac{H(k)}{F(k)}, \quad k = 0, 1, 2,$$

από την οποία προκύπτουν

$$G(0) = \frac{H(0)}{F(0)} = \frac{15}{5} = 3,$$

$$G(1) = \frac{H(1)}{F(1)} = \frac{-2i\sqrt{3}}{-1 - i\sqrt{3}} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$G(2) = \frac{H(2)}{F(2)} = \frac{2i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2},$$

δηλαδή

$$G(k) : 3, \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}, \quad k = 0, 1, 2.$$



Έτσι, από την (15.2.3), ευρίσκουμε

$$\mathbf{g} = \mathcal{F}_3^{-1} \mathbf{G} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$g(n) : 2, 0, 1.$$

△

**Παράδειγμα 15.4.6** Έστω  $f(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  δοσμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και  $F(k)$  ο DFT της  $f(n)$  με  $F(k) \neq 0$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Προσδιορίστε την ακολουθία  $h(n)$  όταν είναι γνωστός ο DFT  $G(k)$  της ακολουθίας  $g(n) = h(n) * f(n)$ .

**Λύση.** Από την (15.3.6), έχουμε

$$G(k) = H(k)F(k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

όπου  $H(k)$  ο DFT της ακολουθίας  $h(n)$ , οπότε

$$H(k) = \frac{G(k)}{F(k)},$$

και έτσι η  $h(n)$  προσδιορίζεται από τον αντίστροφο DFT της  $H(k)$ .

△

#### Παράδειγμα 15.4.7 (Κρουστική απόκριση γραμμικών συστημάτων)

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα με είσοδο μία ακολουθία  $f(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  και αντίστοιχη ακολουθία εξόδου  $g(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ , η οποία ορίζεται ως  $g(n) = f(n) * h(n)$ . Προσδιορίστε την είσοδο  $f(n)$  έτσι ώστε  $G(k) = H(k) \neq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , όπου  $G(k)$  και  $H(k)$  οι DFT των  $g(n)$  και  $h(n)$ .

**Λύση.** Εφαρμόζοντας την (15.3.6) και την υπόθεση, έχουμε

$$G(k) = H(k)F(k) = H(k), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

οπότε

$$F(k) = 1, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

η οποία, λόγω του αποτελέσματος του Παραδείγματος 15.4.4, συνεπάγεται

$$f(n) : 1, 0, \dots, 0, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

△

**Παράδειγμα 15.4.8 (Φιλτράρισμα συχνοτήτων)**

Έστω ότι η ακολουθία  $f(n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ , προκύπτει από δειγματοληψία  $N$  δειγμάτων της συνάρτησης αναλογικού σήματος  $\cos(2\pi mt)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < \frac{N}{2}$ . Τότε, αποδείξτε ότι ο DFT της  $f(n)$  είναι ο

$$F(k) = \begin{cases} \frac{N}{2}, & k = m, k = N - m \\ 0, & k \neq m, N - m \end{cases}.$$

**Λύση.** Από την υπόθεση έχουμε

$$f(n) = \cos(2\pi mn/N),$$

οπότε, από τον ορισμό (15.1.1) του DFT, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi mn/N) e^{-2\pi i kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{e^{2\pi i mn/N} + e^{-2\pi i mn/N}}{2} \right) e^{-2\pi i kn/N} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n(m-k)/N} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n(-m-k)/N} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{2\pi i(m-k)/N} \right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{2\pi i(-m-k)/N} \right)^n \\ &= \begin{cases} \frac{N}{2}, & k = m, k = -m \\ 0, & k \neq \pm m \end{cases}, \end{aligned}$$

και έτσι ο ισχυρισμός επιβεβαιώνεται με τη βοήθεια της  $N$ -περιοδικότητας του DFT.

△

**15.5 Ασκήσεις**

**Άσκηση 15.5.1** Υπολογίστε

(i) τον DFT της ακολουθίας

$$f(n) : 2, 3, -1, 1$$

(ii) τον αντίστροφο DFT της ακολουθίας

$$F(k) : 5, 3 - 2i, -3, 3 + 2i.$$

**Άσκηση 15.5.2** Δείξτε ότι για τον DFT  $F(k)$  της πραγματικής ακολουθίας  $f(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  ισχύει

$$F(N - k) = \overline{F(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

**Άσκηση 15.5.3** Υπολογίστε τους DFT των ακολουθιών

(i) 
$$f(n) = \cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

(ii) 
$$g(n) = \cos\left(\frac{4\pi}{N}n - \frac{\pi}{4}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

**Άσκηση 15.5.4** Υπολογίστε τους DFT των ακολουθιών

(i) 
$$f(n) = \sin\left(\frac{4\pi}{N}n\right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

(ii) 
$$g(n) = \sin\left(\frac{4\pi}{N}n - \theta\right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

**Άσκηση 15.5.5** Υπολογίστε τον DFT  $F(k)$  της ακολουθίας  $f(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , όπου το  $N$  είναι άρτιος και

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ άρτιος} \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

και εξετάστε αν η ακολουθία  $F(k)$  είναι πραγματική.

**Άσκηση 15.5.6**

(i) Υπολογίστε τον αντίστροφο DFT της ακολουθίας

$$F(k) = \begin{cases} 1, & k = 4 \\ 0, & k \neq 4 \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, 29.$$

(ii) Υπολογίστε τον DFT της ακολουθίας

$$g(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right), \quad m, n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

# Βιβλιογραφία

- [1] E. K. Blum and S. V. Lototsky, *Mathematics of Physics and Engineering*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2006.
- [2] V. Britanak, P. Yip and K. R. Rao, *Discrete Cosine and Sine Transforms*, Elsevier, Oxford, 2007.
- [3] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [4] B. Osgood, *Lecture Notes for the Fourier Transform and its Applications*, Department of Electrical Engineering, Stanford University, 2007.

## Κεφάλαιο 16

# Μετασχηματισμός Fourier

Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier, ο οποίος είναι μία γενίκευση της σειράς Fourier, είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός που απεικονίζει πραγματικές ή μιγαδικές συναρτήσεις  $f(t)$  του χρόνου  $t$ , οι οποίες ορίζονται σε άπειρα διαστήματα και δεν είναι κατά ανάγκη περιοδικές, σε μιγαδικές συναρτήσεις  $\hat{f}(\omega)$  της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ . Η συνάρτηση  $\hat{f}$  αναφέρεται συνήθως ως *μετασχηματισμός Fourier* της συνάρτησης  $f$ . Η αντιστοιχία αυτή είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή για δοσμένη συνάρτηση  $\hat{f}$  προσδιορίζεται με τη βοήθεια του *αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier* η  $f$  της οποίας η  $\hat{f}$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier.

Είναι ένα χρηστικό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη πολυάριθμων και σημαντικών εφαρμογών σε διάφορους κλάδους των Θετικών και Εφαρμοσμένων Επιστημών, όπως είναι τα γραμμικά συστήματα, οι επικοινωνίες, η επεξεργασία σήματος, και η κυματική διάδοση. Όπως ο μετασχηματισμός Laplace, έτσι και ο μετασχηματισμός Fourier, είναι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί, οι οποίοι χρησιμοποιούνται κατά ουσιαστικό τρόπο και στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Εξάλλου, στη Θεωρία Πληροφορίας επιτρέπει την εξέταση μιας κυματομορφής τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και της συχνότητας.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται η έννοια του μετασχηματισμού Fourier και διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητές της. Υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί Fourier στοιχειωδών συναρτήσεων και διατυπώνονται και επεξεργάζονται ορισμένες βασικές εφαρμογές.

### 16.1 Ορισμός μετασχηματισμού Fourier

Εκτός της έννοιας της σειράς Fourier, άλλες θεμελιώδεις έννοιες της Ανάλυσης Fourier είναι εκείνες του *μετασχηματισμού Fourier* και του *αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier*, τις οποίες ορίζουμε στην παράγραφο αυτή. Για τους ορισμούς χρειαζόμαστε την έννοια της τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης, την οποία και υπενθυμίζουμε. Μία συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ονομάζεται *τοπικά ολοκληρώσιμη* όταν για κάθε διάστημα  $[a, b]$  του  $\mathbb{R}$  υπάρχει το (ορισμένο) ολοκλήρωμα  $\int_a^b f(x) dx$  στο  $\mathbb{C}$ . Εξάλλου, σημειώνουμε ότι μία  $2p$ -περιοδική

συνάρτηση είναι τοπικά ολοκληρώσιμη τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει το ολοκλήρωμα  $\int_{-p}^p f(x) dx$  στο  $\mathbb{C}$ .

### Ορισμός 16.1.1 (Μετασχηματισμός Fourier)

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $f$  ορίζεται η συνάρτηση

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (16.1.1)$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο  $\mathbb{C}$  το αναγραφόμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα. Ο μετασχηματισμός Fourier συμβολίζεται επίσης με  $\mathcal{F}\{f\}$  ή αναλυτικότερα με  $\mathcal{F}\{f(t)\}$ .

□

Οι συναρτήσεις

$$R(\omega) = \operatorname{Re}(\hat{f}(\omega)), \quad X(\omega) = \operatorname{Im}(\hat{f}(\omega)), \quad A(\omega) = |\hat{f}(\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg(\hat{f}(\omega)),$$

όπου

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)},$$

αναφέρονται, αντιστοίχως, ως το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, το πλάτος (μέτρο) και η φάση του μετασχηματισμού Fourier.

### Ορισμός 16.1.2 (Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier)

Έστω  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $g$  ορίζεται η συνάρτηση

$$\check{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \check{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t} dt, \quad (16.1.2)$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο  $\mathbb{C}$  το αναγραφόμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συμβολίζεται επίσης με  $\mathcal{F}^{-1}\{g\}$  ή αναλυτικότερα με  $\mathcal{F}^{-1}\{g(t)\}$ .

□

### Πρόταση 16.1.1

Η υπόθεση ότι υπάρχει το  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  είναι ικανή (αλλά όχι αναγκαία) για την υπάρξη του μετασχηματισμού Fourier  $\hat{f}$  της συνάρτησης  $f$  και του αντιστρόφου του  $\check{f}$ .

**Απόδειξη.** Ο ισχυρισμός συνάγεται από τη σχέση

$$|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)e^{i\omega t}| = |f(t)|, \quad \forall t, \omega \in \mathbb{R}.$$

□

### Πρόταση 16.1.2

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  τοπικά ολοκληρώσιμη, τμηματικά συνεχής και τοπικά τμηματικά  $C^1$  συνάρτηση, της οποίας υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ . Τότε, ισχύει

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Μία συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , η οποία πληρεί τις υποθέσεις της Πρότασης 16.1.2, αναπαράγεται (ανακτάται) από τον μετασχηματισμό Fourier της  $\hat{f}$  μέσω του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier, υπό την έννοια του ακόλουθου πορίσματος.

### Πόρισμα 16.1.1

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής και τοπικά τμηματικά  $C^1$  συνάρτηση, της οποίας υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ . Τότε, ισχύει

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (16.1.3)$$

□

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση  $\hat{f}(\omega)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier της  $f(t)$ , οπότε η  $f(t)$  είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της  $\hat{f}(\omega)$ , χρησιμοποιείται ενίοτε και ο συμβολισμός

$$f(t) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega).$$

Οι  $f(t)$  και  $\hat{f}(\omega)$  που συνδέονται μέσω των σχέσεων (16.1.1) και (16.1.3) αναφέρονται ως ζεύγος μετασχηματισμού Fourier.

**Παράδειγμα 16.1.1** Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του ορθογώνιου παλμού

$$p_T(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}. \quad (16.1.4)$$

**Λύση.** Για την  $f(t) = p_T(t)$ , με τη βοήθεια του ορισμού (16.1.1) του μετασχηματισμού Fourier, υπολογίζουμε

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-T}^T = \frac{2}{\omega} \sin(T\omega), \quad \omega \neq 0,$$

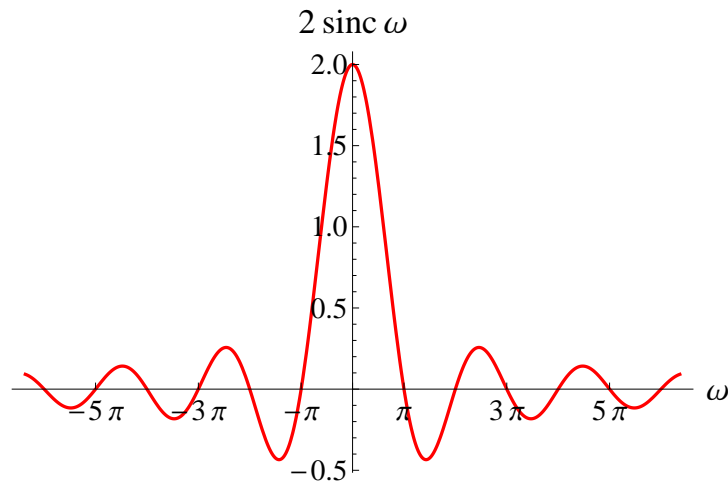
$$\hat{f}(0) = \int_{-T}^T dt = 2T,$$

δηλαδή

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(T\omega), & \omega \neq 0 \\ 2T, & \omega = 0 \end{cases} = 2T \operatorname{sinc}(T\omega),$$

όπου

$$\operatorname{sinc} z \equiv \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}.$$



Σχήμα 16.1: Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier  $\hat{f}(\omega) = 2 \operatorname{sinc} \omega$  του ορθογώνιου παλμού  $p_1(t)$  ( $T = 1$ ).

△

**Παράδειγμα 16.1.2** Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0,$$

όπου

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

η συνάρτηση Heaviside (ή συνάρτηση μοναδιαίου βήματος).



Λύση.

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-(a+i\omega)t} dt \\
 &= -\frac{1}{a+i\omega} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ e^{-(a+i\omega)t} \right]_0^b \\
 &= -\frac{1}{a+i\omega} \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-(a+i\omega)b}) - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{a+i\omega} \\
 &= \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{a}{a^2+\omega^2} - i \frac{\omega}{a^2+\omega^2}.
 \end{aligned}$$

△

### Μετασχηματισμοί Fourier άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, από την

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$$

και τον ορισμό (16.1.1) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt, \quad (16.1.5)$$

οπότε λαμβάνουμε

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad (16.1.6)$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt, \quad (16.1.7)$$

από τις οποίες προκύπτουν

$$R(-\omega) = R(\omega), \quad \text{δηλαδή η } R \text{ είναι άρτια συνάρτηση}$$

και

$$X(-\omega) = -X(\omega), \quad \text{δηλαδή η } X \text{ είναι περιττή συνάρτηση.}$$

Εξάλλου, σημειώνουμε ότι ισχύει

$$\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega) \Leftrightarrow \eta \ f \ \text{είναι πραγματική συνάρτηση.}$$

### Άρτιες συναρτήσεις

Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι άρτια, τότε, επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην (16.1.7) είναι περιττή (ως γινόμενο της άρτιας συνάρτησης  $f$  και της περιττής συνάρτησης  $\sin(\omega t)$ ), έχουμε

$$X(\omega) = 0.$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier  $\hat{f}(\omega)$  είναι πραγματική συνάρτηση και, έτσι, από την (16.1.5), λαμβάνουμε

$$\hat{f}(\omega) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt.$$

Εξάλλου, σημειώνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η  $\hat{f}$  και η  $f$  είναι πραγματικές συναρτήσεις τότε η  $f$  είναι άρτια.

Περαιτέρω, επειδή η  $R$  είναι άρτια, με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε με τη βοήθεια του ορισμού (16.1.3) του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier, ότι ισχύει

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos(\omega t) d\omega.$$

### Περιττές συναρτήσεις

Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι περιττή τότε, επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην (16.1.6) είναι περιττή (ως γινόμενο της περιττής συνάρτησης  $f$  και της άρτιας συνάρτησης  $\cos(\omega t)$ ), έχουμε

$$R(\omega) = 0,$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier  $\hat{f}(\omega)$  είναι γνήσια φανταστική συνάρτηση και από την (16.1.5) λαμβάνουμε

$$\hat{f}(\omega) = iX(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.$$

Σημειώνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η  $\hat{f}$  είναι γνήσια φανταστική και η  $f$  είναι πραγματική συνάρτηση, τότε η  $f$  είναι περιττή.

Επίσης, επειδή η  $X$  είναι περιττή συνάρτηση, με τη βοήθεια του ορισμού (16.1.3) του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier, βλέπουμε ότι ισχύει

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin(\omega t) d\omega.$$

## 16.2 Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Στην παράγραφο αυτή καταγράφουμε τις βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, οι οποίες προκύπτουν ως άμεσες συνέπειες των ορισμών (16.1.1) και (16.1.3) του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου του.

**Πρόταση 16.2.1** Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις,  $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$  και  $\hat{g} = \mathcal{F}\{g\}$  οι μετασχηματισμοί Fourier των  $f$  και  $g$ . Τότε, ισχύουν

- Γραμμικότητα

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

- Συμμετρία

$$\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = 2\pi f(-\omega).$$

- Κλιμάκωση χρόνου

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

- Μετατόπιση χρόνου

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

- Μετατόπιση συχνότητας

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} = \hat{f}(\omega - \omega_0), \quad \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

- Παραγωγή στο χρόνο

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n \hat{f}(\omega), \quad n \in \mathbb{N},$$

υπό τις προϋποθέσεις ότι υπάρχει η  $f^{(n)}$  και ο μετασχηματισμός Fourier αυτής.

- Παραγωγή στη συχνότητα

$$\mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\} = \hat{f}^{(n)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N},$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $t^n f(t)$ .

- Συζυγής συνάρτηση

$$\mathcal{F}\{\bar{f}(t)\} = \overline{\hat{f}(-\omega)}.$$

**Απόδειξη.** Ενδεικτικά αποδεικνύουμε τις ιδιότητες κλιμάκωσης χρόνου και παραγώγισης στο χρόνο.

Κλιμάκωση χρόνου: από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt.$$

Διακρίνουμε, τώρα, τις δύο περιπτώσεις (i)  $a > 0$  και (ii)  $a < 0$ .

(i) Πολλαπλασιάζουμε το ολοκλήρωμα με  $\frac{a}{|a|} = 1$  και τον εκθέτη με  $\frac{a}{a} = 1$ , οπότε ευρίσκουμε

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}at} a dt.$$

Θέτουμε  $u = at$ , οπότε  $du = a dt$  και έτσι λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u} du = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

(ii) Πολλαπλασιάζουμε το ολοκλήρωμα με  $\frac{|a|}{a} = 1$  και τον εκθέτη με  $-\frac{|a|}{a} = 1$ , και χρησιμοποιώντας ότι  $a = -|a|$ , έχουμε

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(-|a|t)e^{-i\frac{\omega}{a}(-|a|t)} |a| dt.$$

Θέτουμε  $u = -|a|t$ , οπότε  $du = -|a|dt$  και έτσι ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= -\frac{1}{|a|} \int_{\infty}^{-\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u} du \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u} du \\ &= \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

Παραγώγιση στο χρόνο: αποδεικνύουμε την ιδιότητα για  $n = 1$  και εφαρμόζουμε τέλεια επαγωγή. Από τον ορισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ως προς  $t$ , ευρίσκουμε

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)\hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

από την οποία συνάγουμε ότι

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = (i\omega)\hat{f}(\omega).$$

□

Ως εφαρμογή των ιδιοτήτων της πρότασης επεξεργαζόμαστε στο ακόλουθο παράδειγμα το μετασχηματισμό Fourier της γενικευμένης συνάρτησης (κατανομής) δέλτα, η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau). \quad (16.2.1)$$

### Παράδειγμα 16.2.1 (Μετασχηματισμός Fourier της κατανομής δέλτα)

Από την (16.2.1), για  $\tau = 0$  και  $f(t) = e^{-i\omega t}$ , λαμβάνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1,$$

δηλαδή ισχύει

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1. \quad (16.2.2)$$

Περαιτέρω, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων συμμετρίας, μετατόπισης χρόνου και συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier, ευρίσκουμε

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (16.2.3)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} \quad (16.2.4)$$

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \quad (16.2.5)$$

△

Εξάλλου, ως εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier της κατανομής δέλτα, υπολογίζουμε στο ακόλουθο παράδειγμα το μετασχηματισμό Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης.

### Παράδειγμα 16.2.2 (Μετασχηματισμός Fourier περιοδικής συνάρτησης)

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια  $2p$ -περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα  $[-p, p]$  και

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

η εκθετική σειρά Fourier της συνάρτησης  $f$ , όπου  $\omega_0 = \frac{\pi}{p}$  και  $c_n$  οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier που ορίζονται από τον τύπο (14.3.7).

Με τη βοήθεια του τύπου (14.5.1), αποδεικνύεται ότι

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathcal{F}\{e^{in\omega_0 t}\},$$

οπότε εφαρμόζοντας την ιδιότητα (16.2.5), ευρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της περιοδικής συνάρτησης  $f$  δίνεται από

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0).$$

△

Στη συνέχεια εξετάζουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνέλιξης δύο τοπικά ολοκληρωσίμων συναρτήσεων, η οποία ορίζεται όπως ακολουθεί.

### Ορισμός 16.2.1 (Συνέλιξη συναρτήσεων)

Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η συνάρτηση

$$\begin{aligned} f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, (f * g)(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \end{aligned} \quad (16.2.6)$$

ορίζεται ως συνέλιξη των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

□

### Πρόταση 16.2.2 (Θεώρημα συνέλιξης)

Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και  $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$  και  $\hat{g} = \mathcal{F}\{g\}$  οι μετασχηματισμοί Fourier των  $f$  και  $g$ . Τότε, ισχύουν οι ιδιότητες

- Συνέλιξη στο χρόνο

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega), \quad (16.2.7)$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει τη συνέλιξη συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου στο γινόμενο των συναρτήσεων στο πεδίο της συχνότητας.

- Συνέλιξη στη συχνότητα

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega), \quad (16.2.8)$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει το γινόμενο συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου στη συνέλιξη των συναρτήσεων στο πεδίο της συχνότητας.

**Απόδειξη.** Η ιδιότητα συνέλιξης στο χρόνο αποδεικνύεται ως εξής.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{(f * g)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y) dy \right) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y) e^{-i\omega t} dt \right) dy \\
 &\quad (t-y = u \Rightarrow t = y+u) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(y) e^{-i\omega(u+y)} du \right) dy \\
 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y} dy \right) \\
 &= \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).
 \end{aligned}$$

Εξάλλου, με παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύεται η ιδιότητα συνέλιξης στη συχνότητα.

□

Στη συνέχεια, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το Θεώρημα ροπών και το Θεώρημα Parseval.

### Πρόταση 16.2.3 (Θεώρημα ροπών)

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, της οποίας υπάρχουν οι ροπές

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

και  $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$  ο μετασχηματισμός Fourier της  $f$ . Τότε, ισχύει

$$m_n = i^n \hat{f}^{(n)}(0).$$

**Απόδειξη.** Θεωρούμε τη σειρά Taylor της συνάρτησης  $e^{-i\omega t}$

$$e^{-i\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!}$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα ολοκλήρωσης δυναμοσειρών 13.3.5 στη δυναμοσειρά

$$f(t)e^{-i\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \frac{(-i\omega t)^n}{n!},$$

οπότε ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!} \right) dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^n}{n!} \left( \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Όμως, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Taylor για την  $\hat{f}(\omega)$  έχουμε

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}^{(n)}(0) \frac{\omega^n}{n!}.$$

Έτσι, εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των τελευταίων δύο σειρών, επιβεβαιώνουμε τον ισχυρισμό.

□

### Θεώρημα 16.2.1 (Θεώρημα Parseval)

Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις,  $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$  και  $\hat{g} = \mathcal{F}\{g\}$  οι μετασχηματισμοί Fourier των  $f$  και  $g$ . Τότε, ισχύουν

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\bar{\hat{g}}(\omega) d\omega. \quad (16.2.9)$$

**Απόδειξη.**

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{i\omega t} d\omega} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\hat{g}}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\hat{g}}(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\bar{\hat{g}}(\omega) d\omega.
 \end{aligned}$$



□

**Πόρισμα 16.2.1 (Θεώρημα Plancherel)**

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση και  $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$  οι μετασχηματισμός Fourier της  $f$ . Τότε, ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (16.2.10)$$

□

**16.3 Εφαρμογές μετασχηματισμού Fourier**

**Παράδειγμα 16.3.1** Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων  $\cos(\omega_0 t)$  και  $\sin(\omega_0 t)$ .

**Λύση.**

Από την

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

και την (16.2.5), έχουμε

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}(2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)) = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)).$$

Με παρόμοιο τρόπο, επίσης, ευρίσκουμε

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)).$$

△

**Παράδειγμα 16.3.2** Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}\sin(\omega_0 t)\right\} = -\omega\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)),$$

όπου  $\delta$  η δέλτα κατανομή.

**Λύση.** Εφαρμόζοντας την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο και το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}\sin(\omega_0 t)\right\} &= (i\omega)\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} \\ &= (i\omega)[i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))] \\ &= -\omega\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)).\end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 16.3.3** Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του διαμορφωμένου σήματος ενός παλμού, το οποίο περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = p_T(t) \cos(\omega_0 t).$$

**Λύση.**

*A' τρόπος.* Για τις συναρτήσεις  $f_1(t) = p_T(t)$  και  $f_2(t) = \cos(\omega_0 t)$ , από τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων 16.1.1 και 16.3.1, έχουμε ότι

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = \hat{f}_1(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(T\omega), \quad \omega \neq 0$$

και

$$\mathcal{F}\{f_2(t)\} = \hat{f}_2(\omega) = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)).$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα συνέλιξης στη συχνότητα, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega - y) \hat{f}_2(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin(T(\omega - y))}{\omega - y} \pi(\delta(y - \omega_0) + \delta(y + \omega_0)) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(T(\omega - y))}{\omega - y} \delta(y - \omega_0) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(T(\omega - y))}{\omega - y} \delta(y + \omega_0) dy \\ &= \frac{\sin(T(\omega - \omega_0))}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(T(\omega + \omega_0))}{\omega + \omega_0}.\end{aligned}$$

*B' τρόπος.* Από την

$$p_T(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{i\omega_0 t} p_T(t) + \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t} p_T(t)$$

και, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης συχνότητας, λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}\{p_T(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} \left( \hat{f}_1(\omega - \omega_0) + \hat{f}_1(\omega + \omega_0) \right),$$

όπου  $\hat{f}_1(\omega)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier της  $p_T(t)$

$$\hat{f}_1(\omega) = \frac{2 \sin(T\omega)}{\omega}, \quad \omega \neq 0.$$

△

**Παράδειγμα 16.3.4** Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = p_{T/2}(t + T/2) - p_{T/2}(t - T/2),$$

όπου ο ορθογώνιος παλμός  $p_T(t)$  ορίζεται από την (16.1.4).

**Λύση.**

Από το Παράδειγμα 16.1.1, έχουμε

$$\mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\} = \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega T/2), & \omega \neq 0 \\ T, & \omega = 0 \end{cases} \equiv \hat{g}(\omega).$$

Εφαρμόζοντας, τώρα, την ιδιότητα της μετατόπισης χρόνου στη συνάρτηση  $f$ , ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= e^{i\omega T/2} \hat{g}(\omega) - e^{-i\omega T/2} \hat{g}(\omega) \\ &= \begin{cases} \frac{4i \sin^2(\omega T/2)}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

△

**Παράδειγμα 16.3.5** Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του τριγωνικού παλμού

$$q_T(t) = 1 - \frac{|t|}{T}, \quad |t| \leq T.$$

**Λύση.** Ο τριγωνικός παλμός εκφράζεται με τη βοήθεια του ορθογωνίου παλμού ως εξής

$$q_T(t) = \frac{1}{T} (p_{T/2} * p_{T/2})(t).$$

Όμως, από το Παράδειγμα 16.1.1, έχουμε

$$\mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\} = \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega T/2), & \omega \neq 0 \\ T, & \omega = 0 \end{cases} \equiv \hat{g}(\omega)$$

και, έτσι, εφαρμόζοντας την ιδιότητα συνέλιξης στο χρόνο, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{q_T(t)\} &= \frac{1}{T}\hat{g}^2(\omega) \\ &= \begin{cases} \frac{4\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}, & \omega \neq 0 \\ T, & \omega = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

△

### Παράδειγμα 16.3.6 (Χαμηλοπερατό φίλτρο συχνοτήτων)

Σε ιδανικό σύστημα χαμηλοπερατού φίλτρου συχνοτήτων εισέρχεται γνωστό σήμα  $f(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $f(\omega)$ . Στην έξοδο κόβονται οι υψηλές συχνότητες, δηλαδή κόβονται οι συχνότητες για  $|\omega| > \omega_0$ . Βρείτε το σήμα εξόδου  $g(t)$ .

#### Λύση.

Επειδή στην έξοδο αποκόπτονται οι υψηλές συχνότητες, για το μετασχηματισμό Fourier  $\hat{g}(\omega)$  της εξόδου  $g(t)$  ισχύει

$$(*) \quad \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)p_{\omega_0}(\omega),$$

όπου  $p_{\omega_0}(\omega)$  η συνάρτηση του ορθογωνίου παλμού, η οποία ορίζεται από την (16.1.4). Από το Παράδειγμα 16.1.1, έχουμε ότι

$$\mathcal{F}\{p_{\omega_0}(t)\} = \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega_0\omega), & \omega \neq 0 \\ 2\omega_0, & \omega = 0 \end{cases}.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την ιδιότητα συμμετρίας, λαμβάνουμε ότι για τη συνάρτηση

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ \frac{\omega_0}{\pi}, & t = 0 \end{cases},$$

ισχύει

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = p_{\omega_0}(-\omega) = p_{\omega_0}(\omega).$$

Τώρα, εφαρμόζοντας την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο στην (\*), ευρίσκουμε ότι η συνάρτηση εξόδου  $g(t)$  δίνεται από

$$g(t) = f(t) * h(t).$$

△

**Παράδειγμα 16.3.7 (Χαμηλοπερατό χρονικό φίλτρο)**

Σε ιδανικό σύστημα εισέρχεται σήμα  $f(t)$  με γνωστό μετασχηματισμό Fourier  $\hat{f}(\omega)$ . Στην έξοδο κόβεται η  $f(t)$  για  $|t| > T$ . Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier  $\hat{g}(\omega)$  της συνάρτησης εξόδου  $g(t)$ .

**Λύση.**

Η συνάρτηση της εξόδου εκφράζεται ως εξής

$$g(t) = f(t)p_T(t),$$

όπου  $p_T(t)$  η συνάρτηση του ορθογωνίου παλμού, η οποία ορίζεται από την (16.1.4). Από το Παράδειγμα 16.1.1, έχουμε

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega T), & \omega \neq 0 \\ 2T, & \omega = 0 \end{cases} \equiv \hat{h}(\omega).$$

Τώρα, από την ιδιότητα συνέλιξης στη συχνότητα, λαμβάνουμε

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left( \hat{f}(\omega) * \hat{h}(\omega) \right).$$

△

**Παράδειγμα 16.3.8 (Μετασχηματισμός Fourier Γκαουσιανής συνάρτησης)**

Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της Γκαουσιανής συνάρτησης  $f(t) = e^{-\pi t^2}$  είναι

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}.$$

**Λύση.**

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i\omega t} dt$$

και παραγωγίζοντας ως προς  $\omega$  λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} (-it) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi t) e^{-\pi t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{dt} e^{-\pi t^2} \right) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Στην τελευταία κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και ευρίσκουμε

$$\hat{f}'(\omega) = \frac{i}{2\pi} \left[ e^{-\pi t^2} e^{-i\omega t} \right] \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} \left( \frac{d}{dt} e^{-i\omega t} \right) dt$$

και επειδή

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-\pi t^2} e^{-i\omega t}) = 0,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\omega) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} (-i\omega) e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i\omega t} dt, \end{aligned}$$

δηλαδή η συνάρτηση  $\hat{f}(\omega)$  ικανοποιεί τη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$\hat{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2\pi} \hat{f}(\omega),$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$\hat{f}(\omega) = c e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}},$$

όπου  $c = \hat{f}(0)$ , οπότε ευρίσκουμε

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(0) e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}.$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$$

και έτσι τελικά λαμβάνουμε

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}.$$

△

## 16.4 Ασκήσεις

**Άσκηση 16.4.1** Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \sin(at) \cos(bt), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

**Άσκηση 16.4.2** Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$g(t) = f(at + b), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

συναρτήσεως του μετασχηματισμού Fourier  $\hat{f}(\omega)$  της συνάρτησης  $f(t)$ .

**Άσκηση 16.4.3** Αν

$$\mathcal{F}\{e^{i\varphi(t)}\} = \hat{f}(\omega), \quad \text{όπου } \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

τότε δείξτε ότι

$$\mathcal{F}\{\cos(\varphi(t))\} = \frac{\hat{f}(\omega) + \overline{\hat{f}(-\omega)}}{2},$$

$$\mathcal{F}\{\sin(\varphi(t))\} = \frac{\hat{f}(\omega) - \overline{\hat{f}(-\omega)}}{2i}.$$

**Άσκηση 16.4.4** Δείξτε ότι ισχύει

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad a > 0.$$

**Άσκηση 16.4.5** Δείξτε, με τη βοήθεια του Θεωρήματος Parseval, ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt = \frac{\pi}{ab(a + b)}, \quad a, b \neq 0, \quad a \neq -b.$$

**Άσκηση 16.4.6** Δείξτε ότι ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} dt = a\pi.$$

**Άσκηση 16.4.7** Δείξτε ότι ισχύει

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}(1 + a|t|)\} = \frac{4a^3}{(a^2 + \omega^2)^2}.$$

**Άσκηση 16.4.8**

(i) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με μετασχηματισμό Fourier  $\hat{f}(\omega)$ , δείξτε ότι ισχύει

$$\mathcal{F}\{f'(t) * \frac{1}{\pi t}\} = |\omega|\hat{f}(\omega).$$

(ii) Δείξτε ότι ισχύει

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t^2}\right\} = -|\omega|.$$

**Άσκηση 16.4.9**

(i) Για μία συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με μετασχηματισμό Fourier  $\hat{f}(\omega)$ , δείξτε ότι ισχύει

$$\mathcal{F}\{f(t) * e^{i\omega t}\} = \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}.$$

(ii) Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, αποδείξτε το θεώρημα συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier.



# Βιβλιογραφία

- [1] E. K. Blum and S. V. Lototsky, *Mathematics of Physics and Engineering*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2006.
- [2] B. Osgood, *Lecture Notes for the Fourier Transform and its Applications*, Department of Electrical Engineering, Stanford University, 2007.
- [3] A. L. Schoenstadt, *An Introduction to Fourier Analysis*, Department of Applied Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 2005.
- [4] J. P. Solovej, *Fourier Series–Notes for Analysis 1*, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, 2012.
- [5] E. Stade, *Fourier Analysis*, Wiley, New Jersey, 2005.
- [6] W. T. Tsai, *Applied Mathematics, Part 4: Fourier Analysis*, Department of Engineering Science and Ocean Engineering, National Taiwan University, Taipei, 1997.