Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 12

Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΜΕΛΕΤΗ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ FOURIER

- Απόκριση συχνότητας
- Απόκριση ΓΧΑ συστήματος σε Περιοδική Είσοδο και σε μη-Περιοδική Είσοδο
- Περιγραφή Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης με μετασχηματισμό Fourier
- Αντίστροφα συστήματα

1. Απόκριση Συχνότητας

Παράδειγμα 1 (*)

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει απόκριση συχνότητας που δίνεται από τη σχέση:

$$H(\Omega)=\frac{5+j\Omega}{6+5j\Omega-\Omega^2}$$

(α) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα.
(β) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.
(γ) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t)=e^{-5t}u(t)$.

Απάντηση: (α) Γνωρίζουμε ότι η απόκριση συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Για τη δοθείσα απόκριση συχνότητας έχουμε:

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{5+j\Omega}{6+5j\Omega-\Omega^2}\Rightarrow Y(\Omega)(6+5j\Omega-\Omega^2)$$

$$=X(\Omega)(5+j\Omega)\Rightarrow (j\Omega)^2Y(\Omega)+5j\Omega Y(\Omega)+6Y(\Omega)=j\Omega X(\Omega)+5X(\Omega)$$

Θα μετατρέψουμε την παραπάνω αλγεβρική σχέση σε διαφορική εξίσωση λαμβάνοντας υπόψη ότι από την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier, ισχύει:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\}=(j\Omega)^2Y(\Omega),\quad F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}=(j\Omega)Y(\Omega),\quad F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=(j\Omega)X(\Omega)$$

οπότε λαμβάνουμε τη σχέση:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\}+5F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}+6y(t)=F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}+5\,x(t)$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+5\,x(t)$$

(β) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος θα υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμού Fourier στη δοθείσα απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$. Αναλύουμε τη δοθείσα κλασματική μορφή της απόκρισης συχνότητας σε απλά κλάσματα, και έχουμε:

$$H(\Omega)=\frac{5+j\Omega}{6+5j\Omega-\Omega^2}=\frac{5+j\Omega}{(2+j\Omega)(3+j\Omega)}=\frac{3}{2+j\Omega}-\frac{2}{3+j\Omega}$$

Βρίσκουμε:

$$h(t)=F^{-1}\{H(\Omega)\}=3\,F^{-1}\left\{\frac{1}{2+j\Omega}\right\}-2\,F^{-1}\left\{\frac{1}{3+j\Omega}\right\}=(3e^{-2t}-2e^{-3t})u(t)$$

(γ) Για τον υπολογισμό της εξόδου $y(t)$ του συστήματος, θα εργαστούμε στο πεδίο της συχνότητας λόγω της υπολογιστικής απλότητας που εξασφαλίζει. Αρχικά θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της εισόδου $X(\omega)$:

$$X(\Omega)=F\{e^{-5t}u(t)\}=\frac{1}{5+j\Omega}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της εξόδου:

$$Y(\Omega)=H(\Omega)\,X(\Omega)=\frac{5+j\Omega}{(2+j\Omega)(3+j\Omega)}\,\frac{1}{(5+j\Omega)}=\frac{1}{(2+j\Omega)(3+j\Omega)}$$

Γράφουμε το $Y(\Omega)$ ως άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$Y(\Omega)=\frac{1}{(2+j\Omega)(3+j\Omega)}=\frac{1}{(2+j\Omega)}-\frac{1}{(3+j\Omega)}$$

Τέλος, με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ανακτούμε την έξοδο $y(t)$:

$$y(t)=F^{-1}\{Y(\Omega)\}=\cdots=(e^{-2t}-e^{-3t})\,u(t)$$

2. Απόκριση ΓΧΑ συστήματος σε Περιοδική Είσοδο και σε μη-Περιοδική Είσοδο

📖 Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)=2e^{-3t}u(t)$ όταν δέχεται στην είσοδο το σήμα $x(t)=2cos(3t+\pi/3)$.

Απάντηση: Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι:

$$H(\Omega) = \frac{2}{3 + j\Omega}$$

Το πλάτος είναι:

$$|H(\Omega)| = \left|\frac{2}{3 + j\Omega}\right| = \frac{2}{|3 + j\Omega|} = \frac{2}{\sqrt{9 + \Omega^2}}$$

και η φάση είναι:

$$\theta_H(\Omega) = \measuredangle H(\Omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{3}\right)$$

Το σήμα εισόδου $x(t) = 2cos(3t + \pi/3)$ έχει συχνότητα $\Omega_0 = 3$ (rad/sec) και σε ανάπτυγμα σειράς Fourier, γράφεται:

$$x(t) = 2cos(3t + \pi/3) = e^{j(3t+\pi/3)} + e^{-j(3t+\pi/3)} = e^{j3t}e^{j\pi/3} + e^{-j3t}e^{-j\pi/3}$$

Με βάση τη σχέση:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\Omega_0)X_k\, e^{jk\Omega_0 t}$$

η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t) = H(3)\left\{e^{j3t}e^{\frac{j\pi}{3}}\right\} + H(-3)\left\{e^{-j3t}e^{-\frac{j\pi}{3}}\right\}$$

όπου:

$$H(3) = \frac{2}{3 + 3j} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-\frac{j\pi}{4}} \qquad \text{και} \qquad H(-3) = \frac{2}{3 - 3j} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{j\pi/4}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-\frac{j\pi}{4}}\left\{e^{j3t}e^{\frac{j\pi}{3}}\right\} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{\frac{j\pi}{4}}\left\{e^{-j3t}e^{-\frac{j\pi}{3}}\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left\{e^{j3t}e^{\frac{j\pi}{12}}\right\} + \frac{\sqrt{2}}{3}\left\{e^{-j3t}e^{\frac{j\pi}{12}}\right\} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η συχνότητα της εξόδου είναι ίδια με τη συχνότητα της εισόδου. Το πλάτος της εξόδου είναι το γινόμενο των πλατών της εισόδου επί της απόκρισης συχνότητας, ενώ η φάση έχει μετατοπιστεί από $\pi/3$ σε $\pi/12$, δηλαδή κατά $\pi/4$.

Παράδειγμα 3 (*)

Να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$ όταν δέχεται στην είσοδο το σήμα $x(t) = (2e^{-t} + e^{-4t})\,u(t)$.

Απάντηση: Από τον Πίνακα 4.2 η απόκριση συχνότητας του συστήματος βρίσκεται:

$$H(\Omega) = \frac{2}{3 + j\Omega}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της εισόδου είναι:

$$X(\Omega) = \frac{2}{1 + j\Omega} + \frac{1}{4 + j\Omega}$$

και ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου δίνεται από τη σχέση:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{2}{3+j\Omega}\left(\frac{2}{1+j\Omega} + \frac{1}{4+j\Omega}\right) = \cdots = \frac{6(3+j\Omega)}{(1+j\Omega)(3+j\Omega)(4+j\Omega)}$$
$$= \frac{6}{(1+j\Omega)(4+j\Omega)} = \frac{C_1}{1+j\Omega} + \frac{C_2}{4+j\Omega}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές C_1 και C_2 από τις σχέσεις:

$$C_1 = \frac{6}{(1+j\Omega)(4+j\Omega)}(1+j\Omega)\bigg|_{j\Omega=-1} = 2$$

$$C_2 = \frac{6}{(1+j\Omega)(4+j\Omega)}(4+j\Omega)\bigg|_{j\Omega=-4} = -2$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου είναι:

$$Y(\Omega) = \frac{2}{1+j\Omega} - \frac{2}{4+j\Omega}$$

Άρα το σήμα εξόδου $y(t)$ είναι:

$$y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})\, u(t)$$

3. Περιγραφή Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης με μετασχηματισμό Fourier

📖 Παράδειγμα 4 (*)

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = 15\,x(t) - 2\frac{dx(t)}{dt}$$

Απάντηση: (α) Έχουμε λύσει αυτό το πρόβλημα στο πεδίο του χρόνου και η λύση είναι:

$$h(t) = \frac{1}{2}(21e^{-3t} - 25e^{-5t})u(t)$$

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα στο πεδίο της συχνότητας με χρήση του μετασχηματισμού Fourier και θα συγκρίνουμε τις λύσεις. Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και με βάση τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier, λαμβάνουμε:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t)\right\} = F\left\{15x(t) - 2\frac{dx(t)}{dt}\right\} \Rightarrow$$

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 8F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 15F\{y(t)\} = 15F\{x(t)\} - 2F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \Rightarrow$$

$$(j\Omega)^2Y(\Omega) + 8j\Omega\, Y(\Omega) + 15\, Y(\Omega) = 15\, X(\Omega) - 2j\Omega\, X(\Omega) \Rightarrow$$

$$Y(\Omega)(-\Omega^2 + 8j\Omega + 15) = X(\Omega)(15 - 2j\Omega) \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{15 - 2j\Omega}{-\Omega^2 + 8j\Omega + 15} = \frac{15 - 2j\Omega}{(3 + j\Omega)(5 + j\Omega)}$$

Για να βρούμε την κρουστική απόκριση $h(t)$ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης συχνότητας $H(\Omega)$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο μερικών κλασμάτων, οπότε η απόκριση συχνότητας γράφεται:

$$H(\Omega) = \frac{C_1}{(3 + j\Omega)} + \frac{C_2}{(5 + j\Omega)}$$

Υπολογίζουμε τα C_1 και C_2:

$$C_1 = \frac{15 - 2j\Omega}{(3 + j\Omega)\,(5 + j\Omega)}(3 + j\Omega)\bigg|_{j\Omega=-3} = \cdots = \frac{21}{2}$$

$$C_2 = \frac{15 - 2j\Omega}{(3 + j\Omega)\,(5 + j\Omega)}(5 + j\Omega)\bigg|_{j\Omega=-5} = \cdots = -\frac{25}{2}$$

Οπότε η απόκριση συχνότητας σε άθροισμα απλών κλασμάτων είναι:

$$H(\Omega) = \frac{21}{2}\frac{1}{(3 + j\Omega)} - \frac{25}{2}\frac{1}{(5 + j\Omega)}$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier είναι:

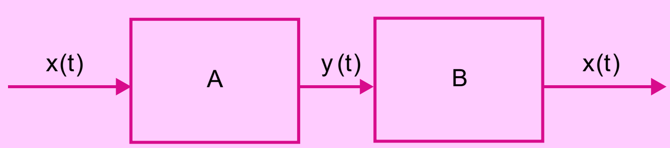
$$h(t) = \frac{1}{2}(21e^{-3t} - 25e^{-5t})u(t)$$

Διαπιστώνουμε ότι καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης όμως σε σαφώς πιο εύκολη διαδικασία.

4. Αντίστροφα συστήματα

Παράδειγμα 5 (*)

Δίνεται η παρακάτω σειριακή συνδεσμολογία των συστημάτων συνεχούς χρόνου Α και Β. Στην είσοδο του συστήματος Α εισέρχεται το σήμα $x(t)$ και στην έξοδο του συστήματος Β εξέρχεται το ίδιο σήμα $x(t)$.



Αν το σύστημα Α είναι ΓΧΑ να διαπιστωθεί αν το σύστημα Β είναι επίσης ΓΧΑ. Ποιες άλλες προϋποθέσεις πρέπει να πληροί το παραπάνω σύστημα Β;

Απάντηση: Για να εξέρχεται το σήμα $x(t)$ στην έξοδο του συστήματος Β θα πρέπει η συνολική ισοδύναμη απόκριση της συνδεσμολογίας να είναι $h_{eq}(t) = \delta(t)$ και επειδή τα συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά, οι κρουστικές αποκρίσεις των δύο συστημάτων πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση:

$$h_A(t) * h_B(t) = \delta(t) \qquad (1)$$

Το σύστημα Β πρέπει να είναι ΓΧΑ προκειμένου η έξοδός του να μπορεί να υπολογιστεί από τη συνέλιξη:

$$x(t) = y(t) * h_B(t) = \big(x(t) * h_A(t)\big) * h_B(t) = x(t) * \big(h_A(t) * h_B(t)\big) = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Στο πεδίο της συχνότητας η παραπάνω σχέση (1) μεταφράζεται ως:

$$H_A(s)\, H_B(s) = 1$$

Το σύστημα Β είναι αντίστροφο του Α και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος Β δίνεται από τη σχέση:

$$H_B(s) = \frac{1}{H_A(s)}$$

Επειδή και τα δύο συστήματα πρέπει να είναι πρακτικά υλοποιήσιμα, άρα αιτιατά και ευσταθή, πρέπει οι πόλοι τους να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο των μιγαδικών συχνοτήτων. Λόγω της παραπάνω αντιστροφής, προκύπτει ότι οι πόλοι του συστήματος Α γίνονται μηδενικά για το σύστημα Β, και τα μηδενικά του συστήματος Α γίνονται πόλοι του συστήματος Β. Με βάση τη διαπίστωση αυτή προκύπτει ότι όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά του συστήματος Α πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Ένα σύστημα που πληροί αυτή την προϋπόθεση ονομάζεται **σύστημα ελάχιστης φάσης** και μπορεί να αντιστραφεί. Το δε αντίστροφο σύστημα είναι και αυτό ελάχιστης φάσης.

<u>Σημείωση</u>: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.