Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 11

Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΜΕΛΕΤΗ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ LAPLACE

- Επίλυση ΓΔΕΣΣ με τον Μετασχηματισμό Laplace
- Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος
- Βηματική Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος
- Μελέτη Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

1. Επίλυση ΓΔΕΣΣ με τον Μετασχηματισμό Laplace

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστούν με χρήση του μετασχηματισμού Laplace η κρουστική και η βηματική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΔΕΣΣ:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3y(t) + 2y(t) = x(t), \quad \text{αρχικές συνθήκες } y(0^-) = 1, y'(0^-) = 0$$

Απάντηση: Θα υπολογίσουμε μία γενική λύση ανεξάρτητα της εφαρμοζόμενης εισόδου και κατόπιν θα βρούμε χωριστά την κρουστική και τη βηματική απόκριση. Ξεκινάμε υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της ΓΔΕΣΣ και λύνοντας ως προς $Y(s)$:

$$[s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + 3[Y(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = X(s)$$
$$\Rightarrow s^2Y(s) - s + 3sY(s) - 3 + 2Y(s) = X(s)$$
$$\Rightarrow Y(s)[s^2 + 3s + 2] - (s + 3) = X(s)$$
$$\Rightarrow Y(s)(s + 1)(s + 2) = X(s) + (s + 3)$$
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{X(s)}{(s + 1)(s + 2)} + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

(α) Για είσοδο $x(t) = u(t)$ έχουμε:

$$X(s) = \frac{1}{s}, \qquad Re\{s\} > 0$$

Επομένως:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{1+3s+s^2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1} + \frac{R_3}{s+2}$$

Υπολογίζουμε τα υπόλοιπα R_1, R_2, R_3 από τις σχέσεις:

$$R_1 = \left.\frac{1+3s+s^2}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \cdots = \frac{1}{2}$$

$$R_2 = \left.\frac{1+3s+s^2}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \cdots = 1$$

$$R_3 = \left.\frac{1+3s+s^2}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \cdots = -\frac{1}{2}$$

Οπότε:

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

και εφόσον η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς, η βηματική απόκριση $s(t)$ είναι:

$$s(t) \equiv y(t) = \left[\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]u(t)$$

Στη βηματική απόκριση διακρίνουμε δύο καταστάσεις, τη μεταβατική (transient state) κατάσταση:

$$s_{ss}(t) = \left[e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]u(t)$$

και τη σταθερή (steady state) κατάσταση:

$$s_{ts}(t) = \frac{1}{2}u(t)$$

(β) Μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση είτε θέτοντας $x(t) = \delta(\tau)$ και επιλύοντας από την ΓΕΔΔΣ από την αρχή είτε από την πρώτη παράγωγο της βηματικής απόκρισης. Προτιμούμε ως πιο απλή τη δεύτερη λύση:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left[\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]u(t)\right] = \cdots = [-e^{-t} + e^{-2t}]u(t)$$

2. Μελέτη Αιτιότητας και Ευστάθειας στο πεδίο Συχνότητας

📖 Παράδειγμα 2

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}\,u(t)$. Πόσες και ποιές διαφορετικές είσοδοι $x(t)$ σε αυτό το σύστημα μπορούν να παράξουν την έξοδο $y(t) = e^{-2t}\,u(t)$;

Απάντηση: Θα εργαστούμε στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s και θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος, από τον μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$. Είναι:

$$H(s) = 1 - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s+1} \qquad \text{με περιοχή σύγκλισης} \qquad Re(s) > -1$$

Ο μετασχηματισμός Laplace $Y(s)$ της εξόδου $y(t) = e^{-2t}u(t)$ είναι:

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

Για να υπολογίσουμε το σήμα εισόδου $x(t)$, βρίσκουμε το $X(s)$ από τη σχέση:

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}}{\frac{s-1}{s+1}} = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-1}$$

Η συνάρτηση $X(s)$ έχει δύο πόλους ($s = -2$ και $s = 1$), από τη θέση των οποίων προκύπτουν οι πιθανές περιοχές σύγκλισης: $s < 1$, $-2 < s < 1$ και $s > 1$.

(α) Για $s < -2$, αμφότεροι οι όροι είναι αριστερής πλευράς:

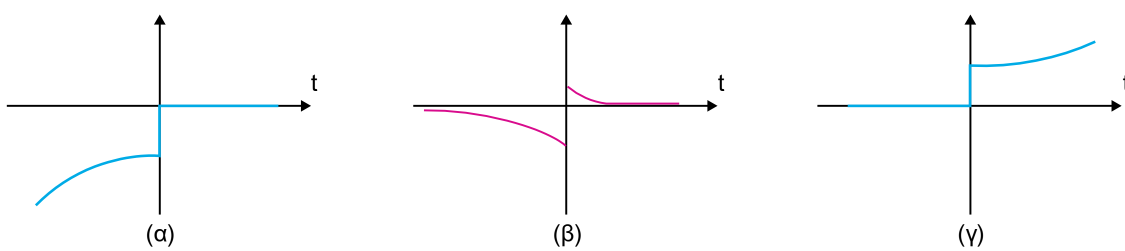
$$x_1(t) = -\frac{1}{3}\, e^{-2t}u(-t) - \frac{2}{3}\, e^{t}u(-t)$$

(β) Για $-2 < s < 1$, ο πρώτος όρος είναι δεξιάς πλευράς και ο δεύτερος είναι αριστερής πλευράς:

$$x_2(t) = \frac{1}{3}\, e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}\, e^{t}u(-t)$$

(γ) Για $s > 1$, αμφότεροι οι όροι είναι δεξιάς πλευράς:

$$x_3(t) = \frac{1}{3}\, e^{-2t}u(t) + \frac{2}{3}\, e^{t}u(t)$$



Οι μορφές της $x(t)$ για τις παραπάνω περιπτώσεις (α), (β) και (γ)

Για να καθορίσουμε ποια από τα παραπάνω σήματα θα μπορούσε να είχε παράγει την δοθείσα έξοδο, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τις περιοχές σύγκλισης.

- Το σύστημα $H(s)$ συγκλίνει για $Re(s) > -1$. Αφού η συνάρτηση $X_1(s)$ συγκλίνει μόνο για $Re(s) < -1$, δεν υπάρχει κοινή επικαλυπτόμενη περιοχή σύγκλισης, άρα αποκλείεται το σήμα $x_1(t)$ από τις πιθανές λύσεις.
- Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X_2(s)$ είναι $-2 < Re(s) < -1$, η οποία τέμνεται με την

περιοχή σύγκλισης της $H(s)$. Για το λόγο αυτό, το σήμα $x_2(t)$ μπορεί να είναι είσοδος.

- Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X_3(s)$ είναι $Re(s) > 1$, η οποία επίσης τέμνεται με την περιοχή σύγκλισης της $H(s)$. Για το λόγο αυτό και το σήμα $x_3(t)$ μπορεί να είναι είσοδος.

Επομένως, αποδεκτές είσοδοι είναι τα σήματα $x_2(t)$ και $x_3(t)$.

3. Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος

📖 Παράδειγμα 3 (*)

Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$, το οποίο δέχεται ως είσοδο το σήμα $x(\mathrm{t}) = e^{-t}u(t)$. Να προσδιοριστούν:

(α) Οι μετασχηματισμοί Laplace $H(s)$ και $X(s)$.

(β) Ο μετασχηματισμός Laplace $Y(s)$ της εξόδου $y(t)$.

(γ) Η έξοδος $y(t)$, με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της $Y(s)$.

(δ) Η έξοδος $y(t)$, με χρήση της συνέλιξης $y(t) = h(t) * x(t)$. Επαληθεύεται το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος;

Απάντηση: (α) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+2)t} u(t) dt = \left[\frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+2}$$

και

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+1)t}\, u(t) dt = \left[\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+1}$$

με περιοχές σύγκλισης $Re(s) > -2$ και $\mathrm{Re(s)} > -1$ αντίστοιχα.

(β) Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης με το σήμα εισόδου, δηλαδή $y(t) = h(t) * x(t)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$Y(s) = H(s)\, X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

με περιοχή σύγκλισης $\mathrm{R(s)} > -1$, που είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης των μετασχηματισμών $H(s)$ και $X(s)$.

(γ) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ανάλυσης της συνάρτησης $Y(s)$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων, έχουμε:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος, δηλαδή:

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]\, u(t)$$

Χρησιμοποιήσαμε την πληροφορία της περιοχής σύγκλισης $\mathrm{R(s)} > -1$, για να καθορίσουμε ότι οι επιμέρους συνιστώσες του σήματος $y(t)$ είναι δεξιάς πλευράς.

(δ) Χρησιμοποιώντας τη σχέση της συνέλιξης, λαμβάνουμε:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, u(t-\tau)\, e^{-t}\, u(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-2t}\, e^{2\tau} e^{-\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-2t} [e^{\tau}]_0^t = e^{-2t}(e^{t} - 1)$$

$$= (e^{-t} - e^{-2t})\, u(t)$$

Παρατηρούμε ότι επαληθεύεται το αποτέλεσμα με το ερώτημα (γ).

4. Βηματική Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος

Παράδειγμα 4

Να υπολογιστούν η κρουστική και η βηματική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(S) = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 3}$$

Απάντηση: Ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου για βηματική είσοδο είναι:

$$Y(s) = X(s)\, H(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+3} = \cdots$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

Επομένως η βηματική απόκριση είναι:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{6} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-3t}\right] u(t)$$

Άρα η απόκριση μεταβατικής κατάστασης είναι:

$$y_{ts}(t) = -\left[\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{-3t}\right] u(t)$$

και η απόκριση μόνιμης κατάστασης είναι:

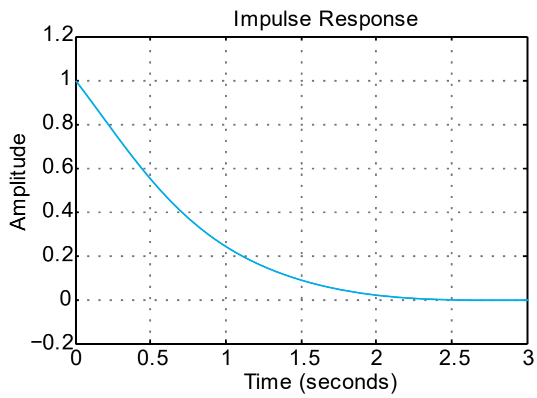
$$y_{ss}(t) = \frac{2}{3} u(t)$$

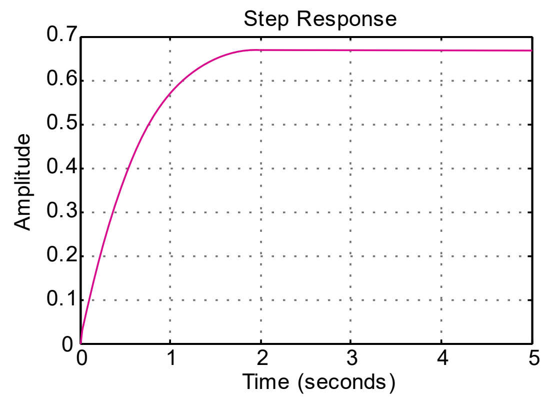
Η απόκριση μόνιμης κατάστασης μπορεί να υπολογιστεί απευθείας:

$$y_{ss}(t) = \lim_{s \to 0} [H(s)] = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s+2}{s^2 + 3s + 3}\right] = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} u(t)$$

Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης λαμβάνουμε υπόψη μας ότι αυτή ισούται με την πρώτη παράγωγο της βηματικής απόκρισης, δηλαδή:

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \left(\frac{1}{2}\, e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}\right) u(t) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\, e^{-t} - \frac{1}{6}\, e^{-3t}\right) \delta(t)$$





(α) Βηματική απόκριση, (β) Κρουστική απόκριση.

5. Μελέτη Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

Παράδειγμα 5 (*)

Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τις δυναμικές (κατάστασης και εξόδου) εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί η απόκριση μηδενικής εισόδου για αρχικές συνθήκες είναι $x_1(0) = 1$ και $x_2(0) = 0$.

(β) Να βρεθεί η απόκριση μηδενικής κατάστασης για βηματική είσοδο, $w(t) = u(t)$.

(γ) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

Απάντηση: Ο μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης κατάστασης, θεωρώντας μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες είναι:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) + 8W(s) \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου $Y(s)$ υποδεικνύει ότι πρέπει να υπολογιστεί το $X_1(s)$ από την εξίσωση κατάστασης. Είναι:

$$Y(s) = X_1(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} x_1(0) & -1 \\ x_2(0) + 8W(s) & s+6 \end{bmatrix}}{s(s+6)+8} = \frac{x_1(0)(s+6) + x_2(0) + 8W(s)}{s^2+6s+8}$$
$$= \frac{s+6}{s^2+6s+8} + \frac{8}{s(s^2+6s+8)}$$

Στην παραπάνω επίλυση θέσαμε τις αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$ και $x_2(0) = 0$ και $W(s) = 1/s$ επειδή η είσοδος είναι η βηματική συνάρτηση $u(t)$.

(α) Το πρώτο κλάσμα είναι ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης μηδενικής εισόδου:

$$Y_{zi}(s) = \frac{s+6}{s^2+6s+8} = \frac{s+6}{(s+2)(s+4)} = \cdots = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+4}$$

Επομένως, η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι:

$$y_{zi}(t) = [2e^{-2t} - e^{-4t}]\, u(t)$$

(β) Το δεύτερο κλάσμα είναι ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης μηδενικής κατάστασης:

$$Y_{zs}(s) = \frac{8}{s(s^2+6s+8)} = \frac{8}{s(s+2)(s+4)} = \cdots = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+4}$$

Επομένως, η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι:

$$y_{zs}(t) = [1 - 2e^{-2t} + e^{-4t}]\, u(t)$$

Η συνολική απόκριση είναι:

$$y(t) = y_{zi(t)} + y_{zs(t)} = [2e^{-2t} - e^{-4t}]\, u(t) + [1 - 2e^{-2t} + e^{-4t}]\, u(t) = u(t)$$

(γ) Για να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση, θέτουμε $W(s) = 1$, μηδενικές αρχικές συνθήκες και $Y(s) = H(s)$ και έχουμε:

$$H(s) = \frac{8}{s^2+6s+8} = \cdots = \frac{4}{s+2} - \frac{4}{s+4}$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = [4e^{-2t} - 4e^{-4t}]\, u(t)$$

<u>Σημείωση</u>: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.