Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 9
Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

- Υπολογισμός ευθύ και αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier
- Σχέση μετασχηματισμών Fourier και Laplace
- Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier
- Θεώρημα Parseval

1. Υπολογισμός ευθύ και αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier από τον ορισμό

📖 Παράδειγμα 1
Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων:

(α) $X(\Omega) = \delta(\Omega)$ (β) $X(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega_0)$

Απάντηση: (α) Από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega)\, e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\Omega t}\Big|_{\Omega = 0} = \frac{1}{2\pi}$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με το γεγονός ότι $\delta(t) \xrightarrow{F} 1$ προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο σήμα μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας υπάρχει μία συμμετρική σχέση. Αυτό ισχύει για όλα τα σήματα και είναι μία βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier, η ιδιότητα της **συμμετρίας** ή **δυϊσμού**.

(β) Από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_0)\, e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\Omega_0 t}$$

Πρόκειται για ένα μιγαδικό διάνυσμα σταθερού μέτρου, το οποίο περιστρέφεται στη φάση με συχνότητα $\Omega_0 t$. Έχουμε λοιπόν το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier:

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\Omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} \delta(\Omega - \Omega_0) \qquad \text{ή καλύτερα:} \qquad e^{j\Omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega_0)$$

📖 Παράδειγμα 2 (*)
Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = cos(\Omega_0 t)$.

Απάντηση: Με τη σχέση Euler εκφράζουμε το συνημίτονο ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών όρων, δηλαδή:

$$x(t) = \frac{1}{2}\, e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}\, e^{-j\Omega_0 t}$$

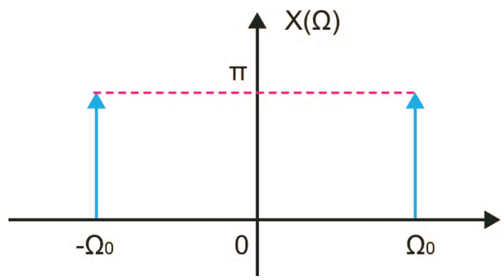
Από το παράδειγμα 1 γνωρίζουμε ότι:

$$e^{j\Omega_0 t} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0)$$

Επομένως:

$$F\{x(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\, e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}\, e^{-j\Omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2} F\{e^{j\Omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\, F\{e^{-j\Omega_0 t}\}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0) + \frac{1}{2} 2\pi\, \delta(\Omega + \Omega_0) = \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$



Φάσμα πλάτους του $x(t) = cos(\Omega_0 t)$. Το φάσμα φάσης είναι μηδενικό.

📖 Παράδειγμα 3
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier τριγωνικού παλμού $\Lambda_T(t)$ διάρκειας $2T$ & πλάτους Α:

$$x(t) \equiv \Lambda_T(t) \equiv A\, tri\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & |t| \le T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Απάντηση: Επειδή το σήμα είναι μηδέν για $t < -T/2$ και $t > T/2$, ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-T}^{T} A\left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-T}^{0} \left(A + \frac{t}{T}\right) e^{-j\Omega t} dt + \int_{0}^{T} \left(A - \frac{t}{T}\right) e^{-j\Omega t} dt$$

$$= A \int_{-T}^{0} e^{-j\Omega t} dt + \frac{A}{T} \int_{-T}^{0} t e^{-j\Omega t} dt + A \int_{0}^{T} e^{-j\Omega t} dt - \frac{A}{T} \int_{0}^{T} t e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \frac{A}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{-T}^{0} + \frac{A}{-j\Omega T} \int_{-T}^{0} t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right) + \frac{A}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{0}^{T} + \frac{A}{-j\Omega T} \int_{0}^{T} t\, d\left(e^{-j\Omega t}\right)$$

$$= -\frac{A}{j\Omega}\left(1 - e^{-j\Omega T}\right) + \frac{-A}{j\Omega T}\left[t\, e^{-j\Omega t} \Big|_{-T}^{0} - \int_{-T}^{0} e^{-j\Omega t} dt\right] + \frac{-A}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega T} - 1\right)$$

$$+ \frac{A}{j\Omega T}\left[t\, e^{-j\Omega t} \Big|_{0}^{T} - \int_{0}^{T} e^{-j\Omega t} dt\right]$$

$$= \frac{A}{j\Omega}e^{j\Omega T} - \frac{A}{j\Omega} - \frac{A}{j\Omega T}\left[0 - (-T)e^{j\Omega T} - \frac{A}{-j\Omega}e^{-j\Omega t}\Big|_{-T}^{0}\right] - \frac{A}{j\Omega}e^{-j\Omega T} + \frac{A}{j\Omega}$$

$$+ \frac{A}{j\Omega T}\left[Te^{-j\Omega T} - 0 - \frac{A}{-j\Omega}e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{T}\right]$$

$$= \frac{A}{j\Omega}\left(e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}\right) - \frac{A}{j\Omega T}\left[Te^{j\Omega T} + \frac{A}{j\Omega}\left(1 - e^{j\Omega T}\right)\right]$$

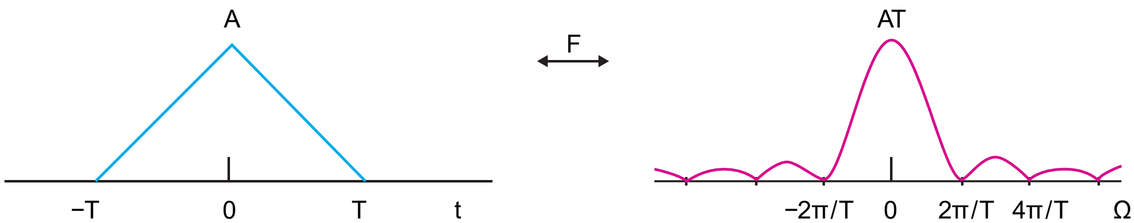
$$+ \frac{A}{j\Omega T}\left[Te^{-j\Omega T} + \frac{A}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega T} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{A}{j\Omega}\left(e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}\right) - \frac{A}{j\Omega}\left(e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}\right) + \frac{A}{\Omega^2 T}\left(1 - e^{j\Omega T}\right) - \frac{A}{\Omega^2 T}\left(e^{-j\Omega T} - 1\right)$$

$$= \frac{A}{\Omega^2 T}\left(1 - e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T} + 1\right) = \frac{A}{\Omega^2 T}\left[2 - \left(e^{j\Omega T} + e^{-j\Omega T}\right)\right] = \frac{A}{\Omega^2 T}\left[2 - 2\cos(\Omega T)\right]$$

$$= \frac{A}{\Omega^2 T}\left[2 - 2\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\Omega T}{2}\right)\right)\right] = \frac{A}{\Omega^2 T}\left[2 - 2 + 4\sin^2\left(\frac{\Omega T}{2}\right)\right] = \frac{A}{\Omega^2 T}\left[4\sin^2\left(\frac{\Omega T}{2}\right)\right]$$

$$= AT\frac{\sin^2\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega T}{2}\right)^2} = AT\,sinc^2\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$$



(α) Ο τριγωνικός παλμός διάρκειας $2T$ και (β) ο μετασχηματισμός Fourier του

Παρατηρούμε ότι το φάσμα πλάτους του τριγωνικού παλμού έχει μεγάλη ομοιότητα με το αντίστοιχο του τετραγωνικού παλμού. Οι διαφορές είναι ότι το φάσμα πλάτους του τριγωνικού παλμού είναι πάντα θετικό και ότι ο κύριος λοβός έχει πιο οξεία μορφή.

2. Σχέση μετασχηματισμών Fourier και Laplace

📖 Παράδειγμα 4

Το περιοδικό σήμα $x(t) = \sin(\Omega_0 t)$, $-\infty < t < \infty$ δημιουργείται με την άθροιση ενός αιτιατού σήματος $y(t) = \sin(\Omega_0 t)\,u(t)$ και ενός αντι-αιτιατού $v(t) = \sin(\Omega_0 t)\,u(-t)$, τα οποία έχουν μετασχηματισμούς Laplace $Y(s)$ και $V(s)$, αντίστοιχα. Να εξεταστεί αν ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ μπορεί να υπολογιστεί από τους μετασχηματισμούς Laplace $Y(s)$ και $V(s)$, για $s = j\Omega$.

Απάντηση: Μεταξύ των σημάτων $y(t)$ και $v(t)$ ισχύει η σχέση $y(t) = -v(-t)$ και οι μετασχηματισμοί Laplace $Y(s)$ και $V(s)$ είναι:

$$V(s) = \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}, \qquad R_v = Re\{s\} > 0$$

$$Y(s) = \frac{-\Omega_0}{(-s)^2 + \Omega_0^2}, \quad R_y = Re\{s\} < 0$$

Για το σήμα $x(t)$ ισχύει $x(t) = y(t) + v(t)$. Επομένως, από τη γραμμική ιδιότητα του Laplace προκύπτει:

$$X(s) = Y(s) + V(s) = \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2} + \frac{-\Omega_0}{(-s)^2 + \Omega_0^2} = 0$$

Επειδή η περιοχή σύγκλισης είναι:

$$R_x = R_v \cap R_y = \emptyset$$

δηλαδή το κενό σύνολο, προκύπτει ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier του $x(t)$ από τον μετασχηματισμό Laplace $X(s) = Y(s) + V(s)$.

3. Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

📖 Παράδειγμα 5 (*)

Να λυθεί το παράδειγμα 3 χρησιμοποιώντας τις **ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier**.

Απάντηση: Η συνάρτηση μοναδιαίου τριγωνικού παλμού μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συναρτήσεων μοναδιαίας κλίσης (ράμπας), σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Lambda_T(t) = \frac{A}{T}[r(t+T) - 2r(t) + r(t-T)]$$

Υπολογίζουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $\Lambda_T(t)$:

$$\Lambda'_T(t) = \frac{A}{T}[u(t+T) - 2u(t) + u(t-T)]$$

$$\Lambda''_T(t) = \frac{A}{T}[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)]$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της $\Lambda_T(t)$ μπορεί να υπολογιστεί με την ιδιότητα της παραγώγισης, ως:

$$F\{\Lambda_T(t)\} = F\left\{\frac{A}{(j\Omega)^2}\,\Lambda_T(t)\right\} = F\left\{\frac{A}{(j\Omega)^2}\left[\frac{1}{T}[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)]\right]\right\}$$
$$= \frac{A}{\Omega^2 T}\left(2 - e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}\right) = \cdots = 4\mathrm{A}\frac{sin^2(\Omega T/2)}{\Omega^2 T}$$

Εν' συντομία γράφεται:

$$\Lambda_T(\Omega) = AT\; sinc^2\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$$

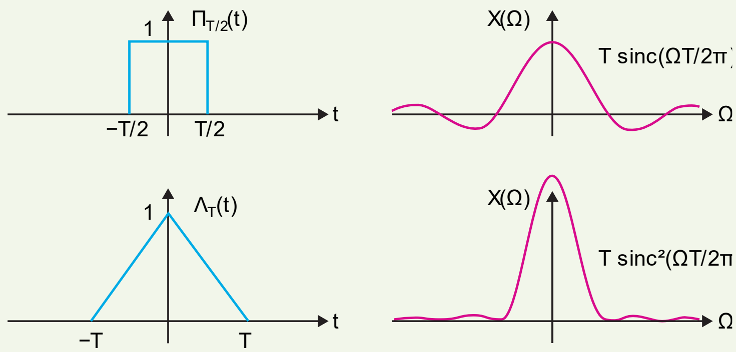
Σχόλια:

- Ισχύουν οι σχέσεις (η συχνότητα εκφράζεται ως f):

$$rect(t) \xleftrightarrow{F} sinc(f)$$

$$sinc(t) \xleftrightarrow{F} rect(f)$$
$$tri(t) \xleftrightarrow{F} sinc^2(f)$$
$$sinc^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f)$$

- Στο σχήμα δίνονται οι κυματομορφές και οι μετασχηματισμοί Fourier του τετραγωνικού και του τριγωνικού παλμού, οι οποίοι αποτελούν συνήθεις επιλογές συναρτήσεων παραθύρωσης σημάτων.



(α) Σήμα και φάσμα τετραγωνικού παλμού (β) Σήμα και φάσμα τριγωνικού παλμού

- Στην περίπτωση του τριγωνικού παλμού, όλοι οι λοβοί είναι πάντα θετικοί, ο κεντρικός λοβός είναι μεγαλύτερου πλάτους ενώ οι δευτερεύοντες λοβοί είναι μικρότερου πλάτους σε σχέση με τους λοβούς του τετραγωνικού παλμού.

Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t) = \sin(\Omega_0 t)$ χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο και τον (γνωστό) μετασχηματισμό Fourier του συνημιτόνου $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$ είναι:

$$X(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

Γνωρίζουμε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσης $\pi/2$, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$y(t) = \sin(\Omega_0 t) = \cos\left(\Omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\Omega_0\left[t - \frac{\pi}{2\Omega_0}\right]\right) = x\left(t - \frac{\pi}{2\Omega_0}\right)$$

Με βάση την ιδιότητα **μετατόπισης στο χρόνο** του μετασχηματισμού Fourier ισχύει:

$$y(t) = x\left(t - \frac{\pi}{2\Omega_0}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega\pi/2\Omega_0}\, X(\Omega)$$

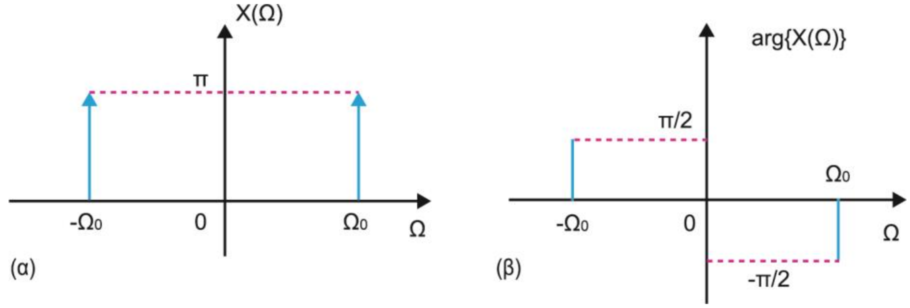
Επομένως:

$$\begin{aligned} Y(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]\, e^{-j\Omega\pi/2\Omega_0} \\ &= \pi\delta(\Omega - \Omega_0)e^{-j\pi/2} + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)e^{j\pi/2} \\ &= -j\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0) + j\pi\, \delta(\Omega + \Omega_0) = -j\pi\, [\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)] \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει:

$$Y(\Omega) = \frac{\pi}{j}\, [\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)] = -\pi j\, [\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

Συγκρίνοντας τις συναρτήσεις $Y(\Omega)$ και $X(\Omega)$παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του ημιτόνου $X(\Omega)$ είναι διαφορετικός από τον μετασχηματισμό Fourier του συνημιτόνου $Y(\Omega)$ μόνο ως προς τη φάση και ειδικότερα ως προς τη φάση του όρου $\delta(\Omega-\Omega_0)$.



Φασματική αναπαράσταση του σήματος $x(t)=\sin(\Omega_0 t)$

Παράδειγμα 7

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)=e^{j\alpha t}$

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier βρίσκουμε:

$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha t}\, e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\alpha-\Omega)t}\, dt$$
$$=2\pi\delta(\Omega-\alpha)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν κάνουμε χρήση της ιδιότητας μετατόπισης στη συχνότητα, δηλαδή $\mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 t}x(t)\}=X(\Omega-\Omega_0)$ και της σχέσης $\mathcal{F}\{1\}=2\pi\delta(\Omega)$ που αποδείξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Ορίζοντας λοιπόν τη συνάρτηση $y(t)=1\,x(t)=1\,e^{j\alpha t}$ θα λάβουμε:

$$Y(\Omega)=\mathcal{F}\{e^{j\alpha t}\,1\}=\mathcal{F}\{1\}_{\Omega\to\Omega-\alpha}=2\pi\delta(\Omega-\alpha)$$

και καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που προέκυψε από την τετριμμένη μέθοδο υπολογισμού. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\mathcal{F}\{e^{-j\alpha t}\}=2\pi\delta(\Omega+\alpha)$$

Παράδειγμα 8

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης προσήμου:

$$x(t)=sgn(t)\equiv\begin{cases}-1, & t<0\\ 0, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

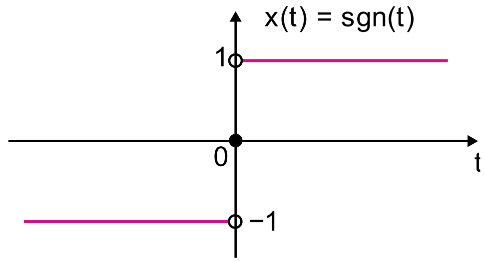
Απάντηση: Η συνάρτηση προσήμου γράφεται και ως $sgn(t)=2u(t)-1$. Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της γραμμικότητας και το γεγονός ότι:

$$U(\Omega)=\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$$

και βρίσκουμε:

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\Omega} + 2\pi\delta(\Omega) - 2\pi\delta(\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης προσήμου εμφανίζεται στο σχήμα.



Συνάρτηση προσήμου

4. Θεώρημα Parseval

Παράδειγμα 9

Να υπολογιστεί η ενέργεια του εκθετικού αιτιατού σήματος $x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0$.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του εκθετικού αιτιατού σήματος $x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0$, είναι:

$$X(\Omega) = \frac{1}{\alpha + j\Omega}$$

Θα υπολογίσουμε την ενέργεια του σήματος στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Η ενέργεια στο πεδίο του χρόνου δίνεται από τη σχέση:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2a}(e^{-2\alpha t})\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2a}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-2\alpha t} - e^0\right] = \frac{1}{2a}$$

Η ενέργεια στο πεδίο της συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{\alpha + j\Omega}\right|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2} d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2} d\Omega$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

Επομένως, η ενέργεια στη συχνότητα είναι:

$$E_x = \frac{1}{\alpha\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{a}\right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha\pi}\left[\lim_{\Omega\to\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{a}\right) - \tan^{-1}(0)\right] = \frac{1}{\alpha\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2\alpha}\text{ s}$$

Σημείωση: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.