Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 8
Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

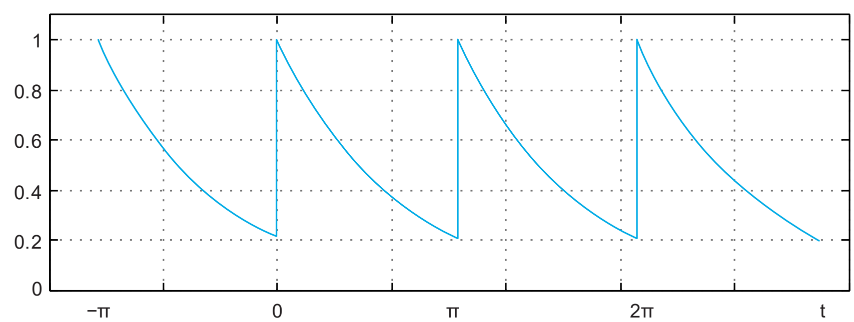
ΣΕΙΡΕΣ FOURIER
- Εκθετική σειρά
- Τριγωνομετρικές σειρές
- Θεώρημα Parseval

1. Εκθετική Σειρά

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα αναπτύγματα τριγωνομετρικής και εκθετικής μορφής σειράς Fourier του σήματος $x(t)$, του οποίου μία περίοδος δίνεται από $x_T(t) = e^{-t/2},\ 0 < t < \pi$.

Απάντηση: Το περιοδικό εκθετικό σήμα δίνεται στο σχήμα. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = \pi$, άρα $f_0 = 1/\pi\ (Hz)$ και $\Omega_0 = 2\ (rad/sec)$.



Περιοδικό εκθετικό σήμα

Υπολογίζουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των μορφών σειράς Fourier:

- Τριγωνομετρική Α' μορφή:

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{t}{2}}\,dt = -\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{t}{2}}\Big|_0^{\pi} = \cdots = \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = 0{,}504$$

$$\alpha_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,cos(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{t}{2}}cos(2kt)\,dt =^{1} = 0{,}504\,\frac{2}{(1+16k^2)}$$

[1] Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο υπολογισμού ολοκληρώματος εκθετική επί συνημίτονο:
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, sin(k\Omega_0 t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{t}{2}} sin(2kt)\, dt =^{2} = 0{,}504\,\frac{8k}{(1+16k^2)}$$

- Τριγωνομετρική Β' μορφή:

$$c_0 = a_0 = 0{,}504$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0{,}504\sqrt{\frac{4}{(1+16k^2)^2} + \frac{64k^2}{(1+16k^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+16k^2}}$$

$$\theta_k = -\,tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = -\,tan^{-1}(4k)$$

- Εκθετική μορφή:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{t}{2}}\, e^{-j2kt}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\left(\frac{1}{2}+j2k\right)t} dt$$

$$= \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{2}+j2k\right)}\; e^{-\left(\frac{1}{2}+j2k\right)}\Big|_0^{\pi} = \frac{0{,}504}{1+4jk}$$

Άρα:

$$|X_k| = \frac{0{,}504}{\sqrt{1+16k^2}},$$

$$\varphi_k = \measuredangle X_k = \tan^{-1}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right) = -\tan^{-1}(4k)$$

Επομένως τα αναπτύγματα σε σειρές Fourier της περιοδικής εκθετικής συνάρτησης, είναι:

$$x(t) = 0{,}504 + 0{,}504\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+16k^2}\cos 2kt + \frac{8k}{1+16k^2}\sin 2kt$$

$$x(t) = 0{,}504 + 0{,}504\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1+16k^2}}\cos[2kt - tan^{-1}(4k)]$$

$$x(t) = 0{,}504\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+4jk}\, e^{j2kt}$$

[2] Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο υπολογισμού ολοκληρώματος εκθετική επί ημίτονο:
$$\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\, sin\, bx - b\, cos\, bx)}{a^2+b^2}$$

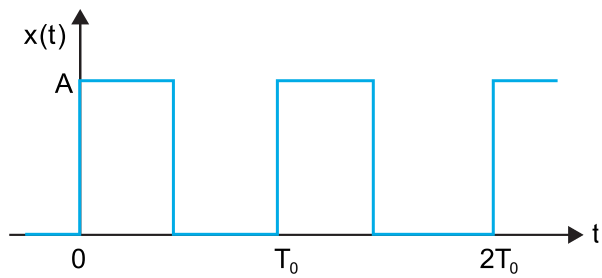
2. Τριγωνομετρική Σειρά

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε Α' τριγωνομετρική μορφή σειράς Fourier του σήματος $x(t)$, του οποίου μία περίοδος είναι:

$$x_T(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \dfrac{T_0}{2} \\ 0, & \dfrac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

Απάντηση: Από τη δοθείσα σχέση για μία περίοδο $x_T(t)$ του σήματος προκύπτει ότι η γραφική παράσταση του συνολικού σήματος $x(t)$ είναι αυτή που εμφανίζεται στο επόμενο σχήμα.



Συρμός τετραγωνικών παλμών

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για έναν συρμό παλμών (παλμοσειρά) με περίοδο T_0 και διάρκεια παλμού $T_0/2$. Υπολογίζουμε τους συντελεστές της Α' τριγωνομετρικής μορφής:

$$\alpha_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\,dt = \frac{A}{T_0}t\Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{T_0}\frac{T_0}{2} = \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,cos(k\Omega_0 t)\,dt \\ &= \frac{2A}{T_0}\int_0^{T_0/2} cos(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2A}{T_0}\frac{1}{k\Omega_0} sin(k\Omega_0 t)\,t\Big|_0^{T_0/2} \\ &= \frac{2A}{T_0}\frac{T_0}{2k\pi} sin\left(\frac{2k\pi}{T_0}t\right)t\Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{k\pi}[sin(k\pi) - sin(0)] = 0\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς η συνάρτηση είναι περιττή.

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,sin(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2A}{T_0}\int_0^{T_0/2} sin(k\Omega_0 t)\,dt \\ &= -\frac{2A}{T_0}\frac{1}{k\Omega_0} cos(k\Omega_0 t)\,t\Big|_0^{T_0/2} \\ &= -\frac{2A}{T_0}\frac{T_0}{2k\pi} cos\left(\frac{2k\pi}{T_0}t\right)t\Big|_0^{T_0/2} = -\frac{A}{k\pi}[cos(k\pi) - cos(0)] \\ &= -\frac{A}{k\pi}[cos(k\pi) - 1] = \frac{A}{k\pi}[1 - cos(k\pi)] \\ &= \frac{A}{k\pi}[1 - (-1)^k]\end{aligned}$$

Άρα:

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{2A}{k\pi}, & k = \text{περιττός} \\ 0, & k = \text{άρτιος} \end{cases}$$

Επομένως το ανάπτυγμα του συγκεκριμένου συρμού τετραγωνικών παλμών σε Α' τριγωνομετρική μορφή σειράς Fourier είναι:

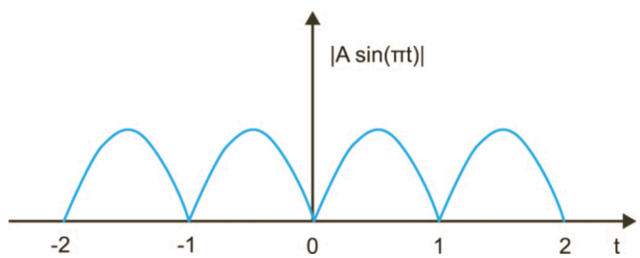
$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_k \frac{1}{k} sin(k\Omega_0 t), \quad k = 1,3,5, \dots$$

Ο συρμός αυτός σε σχέση με τον προηγούμενο έχει υποστεί μετατόπιση στο χρόνο.

📖 Παράδειγμα 3 (*)

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier του πλήρως ανορθωμένου ημιτονικού σήματος, που εικονίζεται στο επόμενο σχήμα και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους μονής και διπλής πλευράς καθώς και το φάσμα φάσης.

Απάντηση: Το πλήρως ανορθωμένο ημίτονο είναι $x(t) = |Asin(\pi t)|$. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = 1\ sec$, άρα η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 = 1\ (Hz)$ και η θεμελιώδης κυκλική συχνότητα είναι $\Omega_0 = 2\pi\ (rad/sec)$.



Πλήρως ανορθωμένο ημίτονο

Υπολογίζουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των μορφών σειράς Fourier:

- Τριγωνομετρική Α' μορφή:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \int_0^1 A\sin(\pi t)\,dt = -\frac{A}{\pi}\cos(\pi t)|_0^1 = -\frac{A}{\pi}[\cos(\pi) - \cos(0)] = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,cos(k\Omega_0 t)\,dt = 2A\int_0^1 \sin(\pi t)\,cos(2k\pi t)\,dt = \dots$$ [3]

[3] Χρησιμοποιήσαμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ημίτονο επί συνημίτονο:
$\int sinPx\ cosQx\,dx = -\frac{\cos(P-Q)x}{2(P-Q)} - \frac{\cos(P+Q)x}{2(P+Q)}$, όπου $P = \pi$ και $Q = 2k\pi$

$$= 2A\left[-\frac{\cos(\pi - 2k\pi)}{2(\pi - 2k\pi)}t - \frac{\cos(\pi + 2k\pi)}{2(\pi + 2k\pi)}t\right]_0^1 = 2A\left[\frac{\cos(2k\pi - \pi)}{2(2k\pi - \pi)} - \frac{\cos(2k\pi + \pi)}{2(2k\pi + \pi)}\right] = \cdots$$ [4]

$$= 2A\left[-\frac{1}{4k\pi - 2\pi} + \frac{1}{4k\pi + 2\pi}\right] = 2A\left[\frac{-4\pi}{(4k\pi)^2 - (2\pi)^2}\right] = -\frac{4A}{\pi(4k^2 - 1)}$$

$$= \frac{4A}{\pi(1 - 4k^2)}$$

Οι συντελεστές b_k υπολογίζονται από την παρακάτω σχέση και είναι μηδενικοί επειδή η συνάρτηση είναι άρτια:

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)sin(k\Omega_0 t)\, dt = \cdots = 0$$

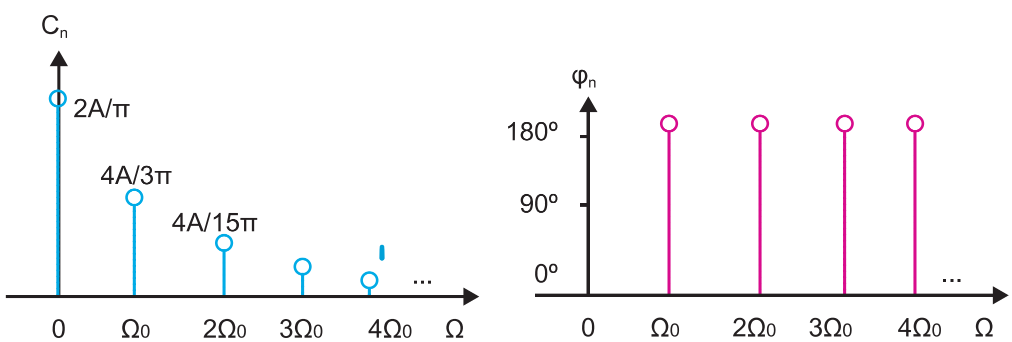
- Τριγωνομετρική Β' μορφή:

$$c_0 = a_0 = \frac{2A}{\pi}$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |\alpha_k| = \frac{4A}{\pi(1 - 4k^2)}$$

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = 0^0 = 180^0$$

Από την τριγωνομετρική Β' μορφή μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους μονής πλευράς $c_k = c_k(\Omega_k)$ και το φάσμα φάσης $\theta_k = \theta_k(\Omega_k)$:



(α) Φάσμα πλάτους μονής πλευράς και (β) Φάσμα φάσης

Επομένως το ανάπτυγμα της $x(t)$ σε Β' τριγωνομετρική μορφή, είναι:

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\Omega_0 t)}{(1 - 4k^2)}$$

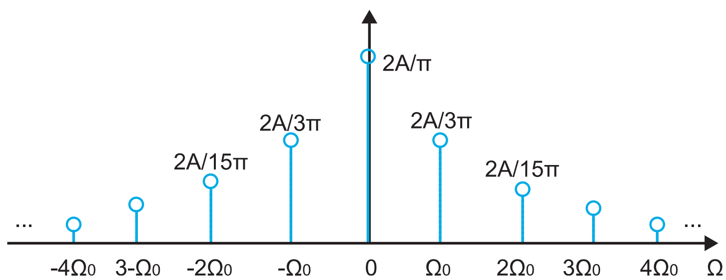
[4] Χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις: $\cos(2k\pi - \pi) = -1$ και $\cos(2k\pi + \pi) = -1,\ \forall t$

- Εκθετική μορφή:

$$|X_0| = \alpha_0 = \frac{2A}{\pi} \quad \text{και} \quad |X_k| = \frac{1}{2}(\alpha_k - jb_k) = \frac{\alpha_k}{2} = \frac{2A}{\pi(1-4k^2)}$$

$$\theta_k = \measuredangle X_k = -\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = 0^0 = 180^0$$

Από την εκθετική μορφή μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους διπλής πλευράς $|X_k| = |X_k(\Omega_k)|$ και το φάσμα φάσης $\theta_k = \theta_k(\Omega_k)$. Το φάσμα φάσης είναι ίδιο με το φάσμα φάσης μονής πλευράς. Το φάσμα πλάτους διπλής πλευράς δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Φάσμα πλάτους διπλής πλευράς

Επομένως το ανάπτυγμα της συνάρτησης $x(t)$ σε εκθετική μορφή, είναι:

$$x(t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(1-4k^2)}e^{j2\pi kt}$$

3. Θεώρημα Parseval

📖 Παράδειγμα 4

Χρησιμοποιώντας το φάσμα πλάτους διπλής πλευράς του προηγούμενου παραδείγματος να υπολογιστεί η ισχύς κάθε αρμονικού όρου ως απόλυτο μέγεθος και ως ποσοστό της συνολικής ισχύος.

Απάντηση: Για να υπολογίσουμε την ισχύ κάθε αρμονικού όρου σε απόλυτο μέγεθος υπολογίζουμε τους συντελεστές $|X_k|^2,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ του φάσματος ισχύος. Παρατηρούμε ότι το φάσμα ισχύος προκύπτει από την ύψωση στο τετράγωνο του φάσματος πλάτους:

- Για $k = 0$ έχουμε: $$P_0 = |X_0|^2 = \left(\frac{2A}{\pi}\right)^2 = \frac{4A^2}{\pi^2}$$
- Για $k = 1$ έχουμε: $$P_1 = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = 2\left(\frac{2A}{3\pi}\right)^2 = \frac{8A^2}{9\pi^2}$$
- Για $k = 2$ έχουμε: $$P_2 = |X_2|^2 + |X_{-2}|^2 = 2\left(\frac{2A}{15\pi}\right)^2 = \frac{8A^2}{225\pi^2}$$

Ομοίως υπολογίζουμε και τους υπόλοιπους αρμονικούς όρους. Για να υπολογίσουμε το ποσοστό ισχύος κάθε αρμονικού όρου ως προς τη συνολική ισχύ, χρειαζόμαστε τη συνολική ισχύ. Αυτή δίνεται από το θεώρημα Parseval και είναι:

$$P_{total} = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 A^2 \sin^2(2\pi t)\,dt = \frac{A^2}{2}$$

Επομένως, το ζητούμενο ποσοστό ισχύος του DC όρου δίνεται από τη σχέση:

$$P'_0 = \frac{P_0}{P_{total}}(\%) = \frac{4A^2/\pi^2}{A^2/2}(\%) \cong 80\%$$

Παρατηρούμε ότι το 80% της συνολικής ισχύος περιέχεται στη συνεχή (DC) συνιστώσα. Άρα το σήμα είναι χαμηλής συχνότητας. Ανάλογα, υπολογίζουμε το ποσοστό ισχύος και για τους υπόλοιπους όρους:

$$P'_k = \frac{P_k}{P_{total}} = \frac{2|X_k|^2}{P_{total}}, \quad n = 1,2 \ldots$$

<u>Σημείωση</u>: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.