Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 6

Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace και Περιοχής Σύγκλισης

1. Υπολογισμός Μετασχηματισμού Laplace και Περιοχής Σύγκλισης

Παράδειγμα 1 (*)

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

(α) $x_1(t) = u(t)\cos(\Omega t)$ (β) $x_2(t) = u(t)\sin(\Omega t)$

Απάντηση: (α) Με βάση τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace και από τη σχέση Euler για το συνημίτονο [1], έχουμε:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\Omega t)]\, u(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} \cos(\Omega t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{j\Omega t}\, e^{-st}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-j\Omega t}\, e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{(j\Omega - s)t} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(j\Omega + s)t} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(j\Omega - s)t}}{j\Omega - s}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-(j\Omega + s)t}}{j\Omega + s}\right]_0^{\infty}$$

Για να συγκλίνει ο μετασχηματισμός θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{(j\Omega - s)t}}{j\Omega - s}\right] = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{e^{-(j\Omega + s)t}}{j\Omega + s}\right] = 0$$

Για να μηδενιστεί το πρώτο όριο πρέπει ο εκθέτης να είναι αρνητικός, δηλαδή:

$$j\Omega - s < 0 \Rightarrow j\Omega - \sigma - j\Omega < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma > 0}$$

Ομοίως, για τον μηδενισμό του δεύτερου ορίου, πρέπει:

$$-(j\Omega + s) < 0 \Rightarrow j\Omega + s > 0 \Rightarrow j\Omega + \sigma + j\Omega > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma > 0}$$

Επομένως, η περιοχή σύγκλισης είναι $\boldsymbol{Re\{s\} = \sigma > 0}$, δηλαδή είναι το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που εκτείνεται **δεξιά** της ευθείας $\sigma > 0$ (χωρίς να την περιλαμβάνει), γεγονός αναμενόμενο καθώς το σήμα είναι δεξιάς πλευράς. Υπάρχει ένας πόλος στη θέση 0. Σε αυτή την περιοχή σύγκλισης, ο μετασχηματισμός είναι:

$$X_1(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\Omega - s} - \frac{1}{j\Omega + s}\right] = \frac{1}{2}\frac{j\Omega + s - j\Omega + s}{s^2 - (j\Omega)^2} = \frac{s}{s^2 + \Omega^2}$$

[1] $\cos\varphi = \frac{1}{2}[e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}]$

(β) Εργαζόμενοι ομοίως και χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler για τη συνάρτηση ημιτόνου[2], έχουμε:

$$
\begin{aligned}
X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} [\sin(\Omega t)]\, u(t) e^{-st}\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} \sin(\Omega t)\, e^{-st}\, dt \\
&= \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{j\Omega t}\, e^{-st}\, dt - \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{-j\Omega t}\, e^{-st} dt = \cdots \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\Omega} - \frac{1}{s+j\Omega}\right] = \frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}
\end{aligned}
$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{Re}\{\boldsymbol{s}\} > 0$ και το σήμα $x(t)$ είναι δεξιάς πλευράς.

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

(α) $x_1(t) = e^{-\alpha t}\cos(\Omega t)\, u(t)$ (β) $x_2(t) = e^{-\alpha t}\sin(\Omega t)\, u(t)$

Απάντηση: (α) Με βάση τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}\cos(\Omega t)\, u(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\cos(\Omega t)\, e^{-st}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{j\Omega t}\, e^{-st}\, dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t}\, e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{(j\Omega - s - \alpha)t} dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(j\Omega + s + \alpha)t} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(j\Omega - s - \alpha)t}}{j\Omega - s - \alpha}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-(j\Omega + s + \alpha)t}}{j\Omega + s + \alpha}\right]_0^{\infty}
\end{aligned}
$$

Για να συγκλίνει ο μετασχηματισμός πρέπει να ισχύει:

$$
\lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{(j\Omega - s - \alpha)t}}{j\Omega - s - \alpha}\right] = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{e^{-(j\Omega + s + \alpha)t}}{j\Omega + s + \alpha}\right] = 0
$$

Για να μηδενιστεί το πρώτο όριο πρέπει ο εκθέτης να είναι αρνητικός, δηλαδή:

$$
j\Omega - s - \alpha < 0 \Rightarrow j\Omega - \sigma - j\Omega - \alpha < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} > -\boldsymbol{\alpha}
$$

Ομοίως, για τον μηδενισμό του δεύτερου ορίου, πρέπει:

$$
-(j\Omega + s + \alpha) < 0 \Rightarrow j\Omega + s + \alpha > 0 \Rightarrow j\Omega + \sigma + j\Omega + \alpha > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} > -\boldsymbol{\alpha}
$$

Επομένως, η περιοχή σύγκλισης είναι $\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{Re}\{\boldsymbol{s}\} > -\boldsymbol{\alpha}$, δηλαδή το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που εκτείνεται **δεξιά** της ευθείας $\sigma > -\alpha$ (χωρίς να την περιλαμβάνει), γεγονός αναμενόμενο καθώς το σήμα είναι δεξιάς πλευράς. Υπάρχει ένας πόλος στη θέση $-\alpha$. Σε αυτή την περιοχή σύγκλισης, ο μετασχηματισμός είναι:

[2] $\sin\varphi = \frac{1}{2}[e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}]$

$$X_1(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\Omega - s - \alpha} - \frac{1}{j\Omega + s + \alpha}\right] = \cdots = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \Omega^2}$$

(β) Εργαζόμενοι ομοίως, έχουμε:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \sin(\Omega t)\, u(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} \sin(\Omega t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{j\Omega t}\, e^{-st}\, dt - \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t}\, e^{-st} dt = \cdots$$

$$= \frac{\Omega}{(s+\alpha)^2 + \Omega^2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $\boldsymbol{\sigma \equiv Re(s) > -\alpha}$ και το σήμα $x(t)$ είναι δεξιάς πλευράς.

Χρήσιμες ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace είναι οι ακόλουθες:

- Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ ή δεν θα διαθέτει καθόλου μετασχηματισμό Laplace ή αν διαθέτει θα εμπίπτει σε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις:
  - Αν το σήμα έχει **πεπερασμένη διάρκεια**, τότε η περιοχή σύγκλισης θα είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο[3], εκτός ίσως από τα σημεία $s = 0$ ή $s = \infty$.
  - Αν το σήμα είναι συνάρτηση **δεξιάς πλευράς**, τότε η περιοχή σύγκλισης θα έχει τη μορφή $\sigma > \sigma_R$, όπου σ_R είναι ο πόλος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.
  - Αν το σήμα είναι συνάρτηση **αριστερής πλευράς**, τότε η περιοχή σύγκλισης θα έχει τη μορφή $\sigma < \sigma_L$, όπου σ_L είναι ο πόλος με το μικρότερο πραγματικό μέρος.
  - Αν το σήμα έχει **άπειρη διάρκεια**, τότε η περιοχή σύγκλισης θα έχει τη μορφή $\sigma_R < \sigma < \sigma_L$, όπου σ_R είναι ο πόλος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος και σ_L είναι ο πόλος με το μικρότερο πραγματικό μέρος. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να φανταστούμε την περιοχή σύγκλισης σαν μία λωρίδα μεταξύ δύο κατακόρυφων ευθειών, οι θέσεις των οποίων καθορίζονται από τους πόλους.
- Αν υπάρχουν πόλοι, αυτοί (προφανώς) δεν μπορεί να βρίσκονται μέσα στην περιοχή σύγκλισης.

Σημείωση: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.

[3] Αυτό συμβαίνει επειδή τα όρια του ολοκληρώματος δεν περιλαμβάνουν το άπειρο, αλλά συγκεκριμένες τιμές χρόνου.