Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 3

Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

- Είδη Συστημάτων:
  - Γραμμικά και Μη-Γραμμικά Συστήματα
  - Αιτιατά και Μη-Αιτιατά Συστήματα
  - Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
  - Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
  - Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

1. Γραμμικά και Μη-Γραμμικά Συστήματα

📖 Παράδειγμα 1 (*)

Να ελεγχθεί ως προς τη γραμμικότητα το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = x(t)$$

Απάντηση: Στο παράδειγμα αυτό δεν γνωρίζουμε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος για δεδομένη είσοδο $x(t)$, αλλά την διαφορική εξίσωση που συνδέει την είσοδο με την έξοδο. Ωστόσο, θα εργαστούμε με την ίδια μεθοδολογία με τα προηγούμενα παραδείγματα. Για εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$ παράγονται οι έξοδοι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ και ικανοποιούνται οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} - 3y_1(t) = x_1(t)$$

και

$$\frac{dy_2(t)}{dt} - 3y_2(t) = x_2(t)$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη διαφορική εξίσωση με μία σταθερή α_1 και τη δεύτερη με μια σταθερή α_2 και λαμβάνουμε:

$$\alpha_1 \frac{dy_1(t)}{dt} - 3\alpha_1 y_1(t) = \alpha_1 x_1(t) \Rightarrow \frac{d[\alpha_1 y_1(t)]}{dt} - 3\alpha_1 y_1(t) = \alpha_1 x_1(t)$$

και

$$\alpha_2 \frac{dy_2(t)}{dt} - 3\alpha_2 y_2(t) = \alpha_2 x_2(t) \Rightarrow \frac{d[\alpha_2 y_2(t)]}{dt} - 3\alpha_2 y_2(t) = \alpha_2 x_2(t)$$

Προσθέτοντας κατά μέλος τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{d[\alpha_1 y_1(t)]}{dt} + \frac{d[\alpha_2 y_2(t)]}{dt} - 3\alpha_1 y_1(t) - 3\alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

Επομένως:

$$\frac{d[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)]}{dt} - 3\big(\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)\big) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

Θέτοντας $x(t)$ τον γραμμικό συνδυασμό (συνδυασμένη είσοδος) των $x_1(t)$ και $x_2(t)$:

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

και $y(t)$ τον γραμμικό συνδυασμό (συνδυασμένη έξοδος) των $y_1(t)$ και $y_2(t)$:

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = x(t)$$

Επομένως, η διαφορική εξίσωση ικανοποιείται από τη συνδυασμένη είσοδο $x(t)$ και τη συνδυασμένη έξοδο $y(t)$. Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

Σχόλιο: Εύκολα μπορεί κανείς να επεκτείνει το παραπάνω αποτέλεσμα για διαφορική εξίσωση N-οστού βαθμού, δηλαδή να αποδείξει ότι ισχύει:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση αναπαριστά ένα γραμμικό σύστημα. Οι συντελεστές a_k και b_k μπορούν να είναι σταθεροί αριθμοί ή μεταβαλλόμενες ποσότητες. Στο πλαίσιο αυτού του βιβλίου θα μας απασχολήσουν συστήματα που περιγράφονται από Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με Σταθερούς Συντελεστές (ΓΔΕΣΣ).

2. Αιτιατά και Μη-Αιτιατά Συστήματα

🕮 Παράδειγμα 2

Για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα, να εξεταστεί αν είναι αιτιατά ή όχι.

(α) $y(t) = x(t-1)$ (β) $y(t) = x(t) + x(t+1)$

Απάντηση: (α) Είναι αιτιατό, επειδή η έξοδος εξαρτάται μόνο από προγενέστερες τιμές της εισόδου.

(β) Είναι μη αιτιατό, επειδή η έξοδος εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές της εισόδου. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα «γνωρίζει» τη μελλοντική είσοδο και παράγει την έξοδο βάσει αυτής της γνώσης.

3. Στατικά και Δυναμικά Συστήματα

🕮 Παράδειγμα 3

Να ελεγχθεί αν είναι γραμμικό το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y(t) = C + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{T} x(\tau)\, d\tau$$

Αν δεν είναι γραμμικό, να προταθεί τρόπος ώστε να καταστεί γραμμικό.

Απάντηση: Ένα σύστημα του οποίου η έξοδος υπολογίζεται από τη μέση τιμή της εισόδου υπολογισμένη στο χρονικό διάστημα $[t-T,T]$, στην οποία έχει προστεθεί μία σταθερή τιμή C, ονομάζεται σύστημα **πολωμένου μέσου όρου** (biased averager). Για να ελέγξουμε αν το σύστημα είναι γραμμικό, πολλαπλασιάζουμε την είσοδο $x(t)$ με έναν συντελεστή α, δηλαδή η είσοδος γίνεται $\alpha x(t)$. Τότε η έξοδος είναι:

$$y'(t) = C + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{T} \alpha x(\tau)\, d\tau = C + \frac{\alpha}{T}\int_{t-T}^{T} x(\tau)\, d\tau$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος για είσοδο $\alpha x(t)$ δεν είναι ίση με την έξοδο $\alpha y(t)$, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha y(t) = \alpha C + \frac{\alpha}{T}\int_{t-T}^{T} x(\tau)\, d\tau$$

Επομένως, το σύστημα είναι μη-γραμμικό.

Συγκρίνοντας τις παραπάνω εξισώσεις, παρατηρούμε ότι η διαφορά ανάμεσα στις δύο εξόδους εντοπίζεται στον όρο C, ο οποίος στη δεύτερη περίπτωση πολλαπλασιάζεται με τον συντελεστή α, ενώ αυτό δεν συμβαίνει στην πρώτη περίπτωση. Επομένως, αν απαλείψουμε τον όρο C (θέτοντας $C = 0$) στη σχέση εισόδου-εξόδου, τότε το σύστημα θα καταστεί γραμμικό.

Ένας άλλος τρόπος για να προσεγγίσουμε το σύστημα αυτό είναι να το θεωρήσουμε ως σύστημα με δύο εισόδους, το σήμα $x(t)$ και τον σταθερό συντελεστή C. Η σταθερά C είναι η απόκριση του συστήματος σε μηδενική είσοδο, $x(t) = 0$. Έτσι, η έξοδος $y(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα της απόκρισης ενός γραμμικού συστήματος:

$$y_0(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{T} x(\tau)\, d\tau$$

και μιας απόκρισης C για μηδενική είσοδο, δηλ:

$$y(t) = y_0(t) + C$$

Σχόλια:

- Ένα πρακτικό παράδειγμα συστήματος πολωμένου μέσου όρου είναι ένα ελατήριο. Όσο η δύναμη με την οποία το τεντώνουμε δεν υπερβαίνει κάποιο όριο, το ελατήριο βρίσκεται στη γραμμική περιοχή του, δηλαδή όταν σταματήσουμε να εφαρμόζουμε την είσοδο τότε το ελατήριο επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση. Όμως, όταν η δύναμη υπερβεί κάποιο όριο, τότε το ελατήριο χάνει την ελαστικότητά του, εξέρχεται από τη γραμμική περιοχή του και αδυνατεί να επιστρέψει στην αρχική κατάσταση όταν μηδενιστεί η είσοδος, δηλαδή αποκτά μία μόνιμη παραμόρφωση.
- Τα πρακτικά συστήματα για μικρές τιμές της εισόδου διατηρούν τη γραμμικότητά τους, αλλά για μεγάλες τιμές της εισόδου καθίστανται μη γραμμικά. Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική επειδή απλουστεύει τη μελέτη των συστημάτων, αντίθετα η μελέτη των μη γραμμικών συστημάτων (αν και αποτελούν την πλειοψηφία των συστημάτων στον πραγματικό κόσμο), είναι δύσκολη. Ως εκ τούτου τα γραμμικά μοντέλα χρησιμοποιούνται για να προσεγγίσουν (γύρω από ένα σημείο λειτουργίας) την μη γραμμική συμπεριφορά συστημάτων.

4. Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα

📖 Παράδειγμα 4 (*)

Να ελεγχθεί αν τα παρακάτω συστήματα είναι χρονικά αμετάβλητα ή μεταβαλλόμενα.

(α) $y(t) = t\,x(t)$ (β) $y(t) = x(t)\,cos(\omega_c t)$

Απάντηση: (α) Στο δοθέν σύστημα θέτουμε ως είσοδο το σήμα $x(t-t_0)$ όπου t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής μετατόπισης και λαμβάνουμε ως έξοδο $y(t) = t\,x(t-t_0)$. Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή δεν ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλαδή την $y(t-t_0) = (t-t_0)\,x(t-t_0)$. Επομένως, το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

(β) Στο δοθέν σύστημα για είσοδο το σήμα $x(t-t_0)$ (t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης), η έξοδος είναι $y(t) = x(t-t_0)\cos(\Omega_c t)$. Το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο επειδή η έξοδος αυτή δεν ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλαδή την $y(t-t_0) = x(t-t_0)\,cos(\Omega_c(t-t_0))$.

📖 Παράδειγμα 5

Η τάση στα άκρα και το ρεύμα που διαρρέει έναν πυκνωτή συνδέονται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t)$$

με αρχική συνθήκη $u_c(t) = 0$. Να βρεθεί κάτω από ποιες προϋποθέσεις το παραπάνω σύστημα πυκνωτή καθίσταται χρονικά αμετάβλητο.

Απάντηση: Επιλύουμε τη δοθείσα διαφορική εξίσωση ως προς την τάση $u_c(t)$ και με βάση την αρχική συνθήκη $u_c(t) = 0$, έχουμε:

$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

Μετατοπίζουμε χρονικά το ρεύμα εισόδου $i(t)$ κατά μια καθυστέρηση λ. Εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $\xi = \tau - \lambda$, η τάση εξόδου $u_c'(t)$ στα άκρα του πυκνωτή για την χρονικά μετατοπισμένη είσοδο $i(\tau-\lambda)$ δίνεται από:

$$u_c'(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau-\lambda)d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\lambda}^0 i(\xi)d\xi + \frac{1}{C}\int_0^{t-\lambda} i(\xi)d\xi \qquad (1)$$

Η χρονικά μετατοπισμένη κατά λ έξοδος $u_c(t-\lambda)$ δίνεται από τη σχέση:

$$u_c(t-\lambda) = \frac{1}{C}\int_0^{t-\lambda} i(\xi)d\xi \qquad (2)$$

Για να είναι το σύστημα χρονικά αμετάβλητο πρέπει:

$$u_c'(t) = u_c(t-\lambda) \qquad (3)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι για να ικανοποιείται η σχέση (3), πρέπει το πρώτο ολοκλήρωμα στη σχέση (1) να ισούται με μηδέν, δηλαδή:

$$\frac{1}{C}\int_{-\lambda}^0 i(\xi)d\xi = 0$$

Άρα το ρεύμα πρέπει να είναι μηδενικό για αρνητικό χρόνο, δηλαδή $i(t) = 0$ για $t < 0$. Η διαπίστωση αυτή μαζί με τη δοθείσα αρχική συνθήκη $u_c(0) = 0$ μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο πυκνωτής για να είναι χρονικά αμετάβλητο σύστημα πρέπει να μην έχει αποθηκευμένη ενέργεια κατά τη χρονική στιγμή 0.

5. Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

📖 Παράδειγμα 6

Να ελεγχθεί αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου είναι BIBO ευσταθές ή όχι.

$$y(t) = \alpha_1 x(t-\tau_1) + \alpha_2 x(t-\tau_2)$$

Απάντηση: Θεωρούμε φραγμένο σήμα εισόδου $x(t)$ δηλαδή $|x(t)| \leq M < \infty$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι τιμές του $x(t)$ αλλά και των χρονικά μετατοπισμένων σημάτων $x(t-\tau_1)$ και $x(t-\tau_2)$ βρίσκονται εντός της περιοχής $[-M, M]$. Με βάση τη διαπίστωση αυτή, για το σήμα $y(t)$ ισχύει:

$$|y(t)| = |\alpha_1|\,|x(t-\tau_1)| + |\alpha_2||x(t-\tau_2)| \leq [|\alpha_1| + |\alpha_2|]M$$

Επομένως και η έξοδος είναι φραγμένη, άρα το σύστημα είναι BIBO ευσταθές. Εναλλακτικά, μπορούμε να μελετήσουμε την ευστάθεια κατά BIBO του συστήματος υπολογίζοντας την κρουστική απόκριση και εξετάζοντας αν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τη σχέση $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$. Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται για $x(t) = \delta(t)$ και είναι:

$$h(t) = \alpha_1 \delta(t-\tau_1) + \alpha_2 \delta(t-\tau_2)$$

Η σχέση $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$ δίνει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha_1 \delta(t-\tau_1) + \alpha_2 \delta(t-\tau_2)|\,dt = |\alpha_1| \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau_1)\,dt + |\alpha_2| \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau_2)\,dt = |\alpha_1| + |\alpha_2| < \infty$$

Επομένως η κρουστική απόκριση είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, άρα το σύστημα είναι BIBO ευσταθές.

📖 Παράδειγμα 7

Να ελέγξετε ως προς την ασυμπτωτική ευστάθεια το σύστημα:

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 4\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) = x(t)$$

Απάντηση: Θέτουμε την είσοδο $x(t)$ και τις παραγώγους της ίσες με μηδέν και προκύπτει η ομογενής λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 4\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 6$$

Παραγοντοποιώντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, λαμβάνουμε:

$$(\lambda^2 + 2\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι:

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = -1 + j, \qquad \lambda_4 = -1 - j$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία ρίζα με θετικό πραγματικό μέρος. Επομένως, το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές.

Σημείωση: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.