Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 1

Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ
- Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων
- Μετασχηματισμοί της Ανεξάρτητης Μεταβλητής
- Κατηγορίες Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

1. Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων

Παράδειγμα 1
Να ελέγξετε ποια από τα παρακάτω σήματα είναι ενέργειας ή ισχύος ή τίποτε από τα δύο:
(α) $x(t) = e^{at},\ a > 0,\ t \geq 0$ (β) $x(t) = e^{at},\ a < 0,\ t \geq 0$

Απάντηση: (α) Επειδή η διάρκεια του σήματος είναι άπειρη και το πλάτος του είναι μη φραγμένο, προκύπτει ότι τόσο η ενέργεια όσο και η ισχύς τείνουν στο άπειρο. Επομένως, το σήμα δεν είναι ούτε σήμα ενέργειας ούτε σήμα ισχύος.

(β) Το σήμα έχει άπειρη διάρκεια και φραγμένο πλάτος. Η ενέργειά του είναι:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{2\alpha x}\, dt = \frac{1}{2a}\left[\lim_{t\to\infty} e^{2at} - 1\right] = -\frac{1}{2a} < \infty$$

Η ισχύς του σήματος είναι μηδενική. Επομένως είναι σήμα ενέργειας και σήμα ισχύος.

Παράδειγμα 2
Να προσδιοριστεί η ενέργεια του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t}\sin t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Απάντηση: Με βάση την τριγωνομετρική σχέση:

$$sin^2 t = \frac{1}{2}[1 - cos(2t)]$$

έχουμε:

$$x^2(t) = (e^{-2t}\sin t)^2 = e^{-4t}\sin^2 t = \frac{1}{2}\, e^{-4t}[1 - \cos(2t)]$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση ορισμού της ενέργειας:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt$$

και επειδή το δοθέν σήμα ορίζεται μόνο για $t \geq 0$, έχουμε:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-4t}[1-\cos(2t)]dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-4t}dt - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-4t}\cos(2t)dt$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως:

$$\int_0^{\infty} e^{-4t}dt = \left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εφαρμόζοντας διαδοχικά τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες[1] και προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$\int_0^{\infty} e^{-4t}\, cos(2t)dt = \frac{1}{5}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραπάνω ολοκληρωμάτων στην εξίσωση ορισμού της ενέργειας, βρίσκουμε:

$$E_x = \frac{1}{40}$$

Επομένως το δοθέν σήμα $x(t)$ είναι σήμα ενέργειας.

📖 Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί η ενέργεια και η ισχύς του σήματος $x(t) = \cos(\pi t/2 + \pi/4)$.

Απάντηση: Η ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dt \to \infty$$

Επομένως το δοθέν σήμα είναι άπειρης ενέργειας. Η ισχύς του υπολογίζεται αξιοποιώντας τη συμμετρία του σήματος και θέτοντας $T = NT_0$:

$$\begin{aligned}
P_\infty &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{2}{2T}\int_0^{T}\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dt = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT_0}\int_0^{NT_0}\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dt \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT_0}N\int_0^{T_0}\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dt = \frac{1}{2T_0}\int_0^{T_0}\left[\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)+1\right]dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{4}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)dt + \frac{1}{8}\int_0^{4}dt = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Στην επίλυση χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική σχέση:

$$\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+1\right]$$

[1] Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

2. Μετασχηματισμοί της Ανεξάρτητης Μεταβλητής

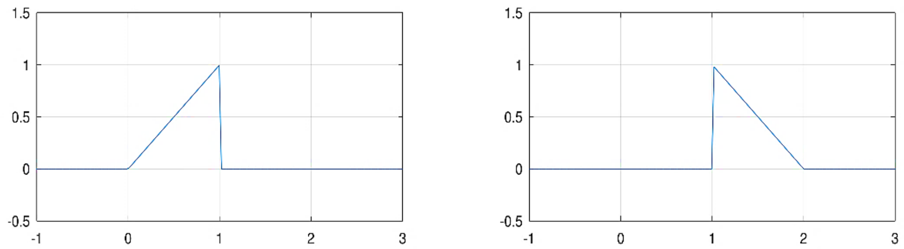
📖 Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το σήμα $y(t) = x(-t+2)$, όταν το σήμα $x(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Απάντηση: Είναι φανερό ότι το σήμα $y(t)$ έχει προκύψει από ανάκλαση και χρονική μετατόπιση, αλλά δεν γίνεται άμεσα φανερό ποιος από τους δύο μετασχηματισμούς έχει εφαρμοστεί πρώτος. Επίσης, δεν είναι σαφές αν η χρονική μετατόπιση αφορά σε καθυστέρηση ή σε προπορεία.

Επειδή το σήμα μπορεί να γραφεί $x(-t+2) = x\big(-(t-2)\big)$ προκύπτει ότι έχει προηγηθεί αρχικά η καθυστέρηση του σήματος $x(t)$ κατά δύο μονάδες χρόνου και κατόπιν η ανάκλαση.



(α) Σήμα $x(t)$, (β) Σήμα $y(t) = x(-t+2)$

Αν δεν είμαστε σίγουροι για την αλληλουχία των μετασχηματισμών που έχουν συμβεί, ο πλέον ασφαλής τρόπος είναι να υπολογίσουμε τις τιμές του σήματος $y(t)$ και να σχεδιάσουμε το σήμα. Έχουμε:

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{y(t) = x(-t+2)}$
-1	$x(3) = 0$
0	$x(2) = 0$
1	$x(1) = 1$
1,5	$x(0{,}5) = 0{,}5$
2	$x(0) = 0$

Σχόλιο: Διαπιστώνουμε ότι η έκφραση $-t+\tau$ αντιστοιχεί σε ανάκλαση και καθυ-στέρηση, ενώ η έκφραση $-t-\tau$ αντιστοιχεί σε ανάκλαση και προπορεία.

3. Κατηγορίες Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

📖 Παράδειγμα 5

Για το σήμα $x(t) = cos(2\pi t + \theta), -\infty < t < +\infty$ να καθοριστούν οι τιμές του θ για τις οποίες το σήμα $x(t)$ παρουσιάζει άρτια και περιττή συμμετρία, αντίστοιχα.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι το άρτιο σήμα ικανοποιεί τη σχέση $x(-t) = x(t)$. Επομένως για το δοθέν σήμα πρέπει να ισχύει:

$$cos(2\pi t + \theta) = cos(-2\pi t + \theta) = cos(2\pi t - \theta)$$

Άρα πρέπει να ισχύει $\theta = -\theta$, δηλαδή $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$, δηλαδή θα είναι:

$$x_1(t) = cos(2\pi t) \text{ ή } cos(2\pi t + \pi) = -\cos(2\pi).$$

Πράγματι, το συνημίτονο είναι ένα άρτιο σήμα.

Για να είναι το σήμα περιττό πρέπει να ισχύει $x(-t) = -x(t)$. Επομένως πρέπει να ισχύει:

$$cos(2\pi t + \theta) = -cos(-2\pi t + \theta) = cos(-2\pi t + \theta \pm \pi) = cos(2\pi t - \theta \mp \pi)$$

Επομένως πρέπει να ισχύει $\theta = -\theta \mp \pi$, δηλαδή $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$, δηλαδή θα είναι:

$$x_2(t) = cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = sin(2\pi t) \text{ και } cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -sin(2\pi t).$$

Πράγματι, το ημίτονο είναι ένα περιττό σήμα.

Όταν $\theta = \pi/4$ το σήμα $cos(2\pi t + \pi/4)$, το σήμα δεν είναι ούτε άρτιο, ούτε περιττό.

🕮 Παράδειγμα 6

Για τα παρακάτω σήματα να ελεγχθεί αν έχουν άρτια ή περιττή συμμετρία ή τίποτε από τα δύο:

(α) $x(t) = 4t$ (β) $x(t) = e^{-|t|}$
(γ) $x(t) = \sin(2t)$ (δ) $x(t) = sin(2t - \pi/2)$

Απάντηση: (α) Ισχύει: $x(-t) = 4(t) = -4t = -x(t)$, άρα είναι περιττή συνάρτηση.
(β) Ισχύει: $x(-t) = e^{-|-t|} = e^{-|t|} = x(t)$, άρα είναι άρτια συνάρτηση.
(γ) Ισχύει: $x(-t) = sin\big(2(-t)\big) = -sin(2t) = -x(t)$είναι περιττή συνάρτηση.
(δ) Ισχύει: $x(t) = sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(2t)$ και επίσης $x(-t) = sin\left(-2t - \frac{\pi}{2}\right) = -sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(2t) = x(t)$ είναι άρτια συνάρτηση.

🕮 Παράδειγμα 7 (*)

Να αποδειχθεί πως το σήμα $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \theta)\,, -\infty < t < +\infty$, είναι περιοδικό. Να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδός του. Να βρεθεί η τιμή της συχνότητας Ω_0 για την οποία η θεμελιώδης περίοδος δεν ορίζεται.

Απάντηση: Προκειμένου το σήμα $x(t)$ να είναι περιοδικό θα πρέπει να υπάρχει θετικός αριθμός T τέτοιος ώστε $x(t+T) = x(t)$. Η προϋπόθεση της άπειρης διάρκειας εξασφαλίζεται από την εκφώνηση. Με βάση την εξίσωση ορισμού του δοθέντος σήματος, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$x(t+T) = A\cos(\Omega_0(t+T) + \theta) = A\cos(\Omega_0 t + \Omega_0 T + \theta)$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση συνημιτόνου είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi m$. Για να ισχύει η ισότητα $x(t+T) = x(t)$ ή $A\cos(\Omega_0 t + \Omega_0 T + \theta) = A\cos(\Omega_0 t + \theta)$, θα πρέπει $\Omega_0 T = 2\pi m$, άρα $T = 2\pi m/\Omega_0$.

Η θεμελιώδης περίοδος T_0 του σήματος βρίσκεται για $m = 1$ και είναι $T_0 = 2\pi/\Omega_0$. Αν η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\Omega_0 = 0$, τότε η θεμελιώδης περίοδος δεν ορίζεται.

📖 Παράδειγμα 8 (*)

Να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδος T_0 για τα παρακάτω περιοδικά σήματα:

(α) $x_1(t) = e^{j\,0.25\,\pi\,t}$ (β) $x_2(t) = \cos(0.2\,\pi t)$

Απάντηση: (α) Το $x_1(t)$ γράφεται ως $e^{j\,2\pi\,t\frac{1}{8}}$ και επειδή ισχύει $2\pi/T_0 = 2\pi/8$, η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = 8$.

(β) Η θεμελιώδης περίοδος του $x_2(t) = \cos(0.2\,\pi t) = \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right)$ είναι $T_0 = 10$.

📖 Παράδειγμα 9

Να μελετηθούν ως προς την περιοδικότητα τα παρακάτω σήματα και να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδος T_0 καθενός από αυτά:

(α) $x(t) = 3\cos(5t + \pi/4)$ (β) $x(t) = 2e^{j(\pi t - 1)}$

Απάντηση: Σύμφωνα με τον ορισμό, ένα σήμα είναι περιοδικό όταν ισχύει η σχέση $x(t+T) = x(t)$ για κάθε τιμή του χρόνου t, όπου το T είναι ένας θετικός αριθμός.

Έτσι, πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχει θετικός αριθμός T για τον οποίο να ισχύει η παραπάνω σχέση. Για το (α) έχουμε:

$$x(t+T) = x(t) \Rightarrow 3\cos\left(5t + 5T + \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν $\cos\varphi = \cos\theta$ τότε ισχύει $\varphi \pm \theta = 2k\pi$. Επομένως προκύπτει ότι:

$$\left(5t + 5T + \frac{\pi}{4}\right) + \left(5t + \frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{5} - 2t - \frac{\pi}{10}$$

ή

$$\left(5t + 5T + \frac{\pi}{4}\right) - \left(5t + \frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{5}$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο (για $k = 1$) $T_0 = 2\pi/5$ και θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 5/2\pi$.

(β) Εργαζόμενοι ομοίως, έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t+T) = x(t) &\Longrightarrow 2e^{j(\pi t + \pi T - 1)} \\ &= 2e^{j(\pi t - 1)} \Longrightarrow 2e^{j\pi T}e^{j(\pi t - 1)} = 2e^{j(\pi t - 1)} \Longrightarrow e^{j\pi T} = 1 \\ &\Longrightarrow \cos(\pi T) + j\sin(\pi T) = 1 \Longrightarrow \pi T = 2k\pi \Longrightarrow T = 2k \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T_0 = 2$ και θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 1/2$.

📖 Παράδειγμα 10

Να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδος του σήματος $x(t) = cos(7\pi t) + 3\,sin(8\pi t)$.

Απάντηση: Εάν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, τότε θα ικανοποιεί τη σχέση $x(t) = x(t+T)$. Το σήμα $x(t+T)$ ορίζεται ως:

$$x(t+T) = \cos[7\pi(t+T)] + 3\sin[8\pi(t+T)] = \cos(7\pi t + 7\pi T) + 3\sin(8\pi t + 8\pi T)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη πως οι περίοδοι των δύο ημιτονοειδών σημάτων είναι της μορφής $T_1 = 2\pi m$ και $T_2 = 2\pi n$, η συνθήκη περιοδικότητας ισχύει όταν:

$$7\pi T = 2\pi m \text{ και } 8\pi T = 2\pi n$$

Λύνοντας ως προς T, προκύπτει ότι:

$$T = \frac{2m}{7} = \frac{2n}{8} \text{ ή ισοδύναμα } \frac{n}{m} = \frac{8}{7}$$

Αλλά οι δύο παραπάνω αριθμοί εκτός από το 1 δεν διαθέτουν κάποιο κοινό διαιρέτη. Θα είναι λοιπόν $n = 8$ και $m = 7$, από όπου προκύπτει ότι:

$$T = \frac{2n}{8} = 2$$

Σημείωση: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.