Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 13: Γραμμικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων (Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο, Ιδανικό υψιπερατό φίλτρο, Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο, Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο)
2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες ιδανικών φίλτρων
3. Συνθήκη αιτιότητας Paley - Wiener
4. Εύρος Ζώνης συχνοτήτων των φίλτρων
5. Πρακτικά φίλτρα
6. Πρότυπα βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα

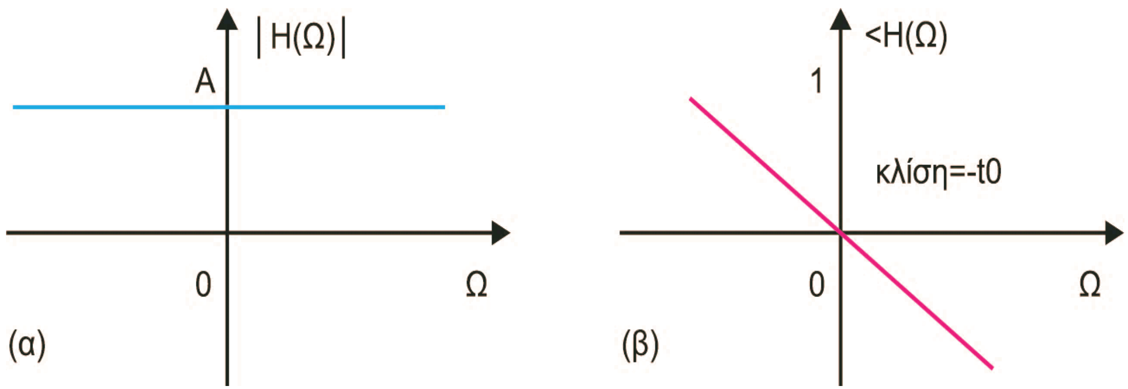
1. Γραμμικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

Ιδανικά Φίλτρα

- Σύμφωνα με την ιδιότητα ιδιορυθμών των ΓΧΑ συστημάτων, η απόκριση μόνιμης κατάστασης τους σε είσοδο ημιτονοειδή με συγκεκριμένο πλάτος και φάση, είναι επίσης ημιτονοειδής με την **ίδια συχνότητα** αλλά με **πλάτος** και **φάση** που έχουν επηρεαστεί από την απόκριση συχνότητας του συστήματος.
- Καθώς κάθε σήμα μπορεί μέσω του μετ. Fourier να αναπαρασταθεί σε άθροισμα απλών ημιτόνων, προκύπτει ότι οι συχνοτικές συνιστώσες κάθε σήματος μπορούν να τροποποιηθούν κατάλληλα ως το μέτρο και τη φάση τους επιλέγοντας την κατάλληλη μορφή στην απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **φιλτράρισμα** (filtering) και βρίσκει εφαρμογές σε συστήματα τηλεπικοινωνιών, σε επεξεργασία σημάτων, σε συστήματα ελέγχου και αλλού.
- Ο όρος **φίλτρο** περιγράφει γραμμικά συστήματα που έχουν χαρακτηριστική πλάτους $|H(\Omega)|$ **αμελητέα** σε ορισμένες περιοχές συχνοτήτων.
- Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να **απομακρύνουν** συγκεκριμένες συνιστώσες συχνοτήτων από ένα σήμα ή απλώς να «σταθμίζουν» τις διάφορες συνιστώσες της κυματομορφής.

Ολοπερατό Φίλτρο

- Ένα **ιδανικό ολοπερατό φίλτρο** έχει κρουστική απόκριση $h(t) = A\,\delta(t - t_0)$ και απόκριση συχνότητας $H(\Omega) = A\,e^{-j\Omega t_0}$.



Φάσματα (α) πλάτους και (β) φάσης, ιδανικού ολοπερατού φίλτρου

- Το ολοπερατό φίλτρο έχει **σταθερό φάσμα πλάτους** (κέρδος) σε όλες τις συχνότητες, ενώ το φάσμα φάσης του είναι γραμμικό ως προς τη συχνότητα

$$|H(\Omega)| = 1, \quad \theta_H(\Omega) = -a\Omega, \;\; \alpha \in R$$

- Επιβάλλει μία **σταθερή καθυστέρηση ομάδας**, ίδια σε όλες τις συχνότητες του σήματος.

Φίλτρα Γραμμικής Φάσης

- Η φάση οφείλεται στον αρνητικό μιγαδικό εκθέτη $e^{-j\Omega t_0}$ της απόκρισης συχνότητας $H(\Omega)$ και εκφράζει μια **υστέρηση** κατά t_0 στη διέλευση των συχνοτήτων του σήματος, που ονομάζεται **καθυστέρηση ομάδας** (group delay):

$$\tau(\Omega) = -\frac{d}{d\Omega}\{\theta_H(\Omega)\}$$

- Σε συστήματα με **γραμμική φάση** η καθυστέρηση ομάδας είναι **σταθερή** για όλες τις συχνότητες του σήματος εισόδου. Επομένως, το σήμα στην έξοδο του συστήματος θα διατηρεί τις συχνότητες με αλληλουχία συχνοτήτων ίδια με αυτή του σήματος εισόδου.
- Αν η φάση δεν είναι γραμμική, τότε κάποιες συχνότητες του σήματος υπόκεινται σε διαφορετική καθυστέρηση από κάποιες άλλες. Άρα, η αλληλουχία των συχνοτήτων στην έξοδο του συστήματος είναι διαφορετική από αυτήν της εισόδου.
- Αν και το ανθρώπινο σύστημα ακοής δεν είναι ευαίσθητο στις φασικές μετατοπίσεις των αρμονικών ενός σήματος, μία τέτοια αλλαγή έχει καταστρεπτικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις που ενδιαφέρει η μορφή του σήματος όπως στις τηλεπικοινωνίες, σε ιατρικά σήματα, σε εικόνες, κλπ.

Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

Γραμμικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων:

- επιτρέπουν τη διέλευση μίας συγκεκριμένης περιοχής συχνοτήτων του σήματος και αποκόπτουν τις υπόλοιπες συχνότητες,
- επιβάλλουν την ίδια καθυστέρηση ομάδας σε όλες τις συχνότητες στη ζώνη διέλευσης.

Τύποι ιδανικών γραμμικών φίλτρων επιλογής συχνοτήτων:

 – Ιδανικό Κατωδιαβατό Φίλτρο (Low Pass filter)
 – Ιδανικό Ανωδιαβατό Φίλτρο (High Pass filter)
 – Ιδανικό Ζωνοδιαβατό Φίλτρο (Band Pass Filter)
 – Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο (Band Stop Filter)

Τα ιδανικά φίλτρα **δεν είναι πρακτικά υλοποιήσιμα** επειδή η κρουστική τους απόκριση είναι **μη-αιτιατή** συνάρτηση και επιπλέον έχει **άπειρο μήκος**.

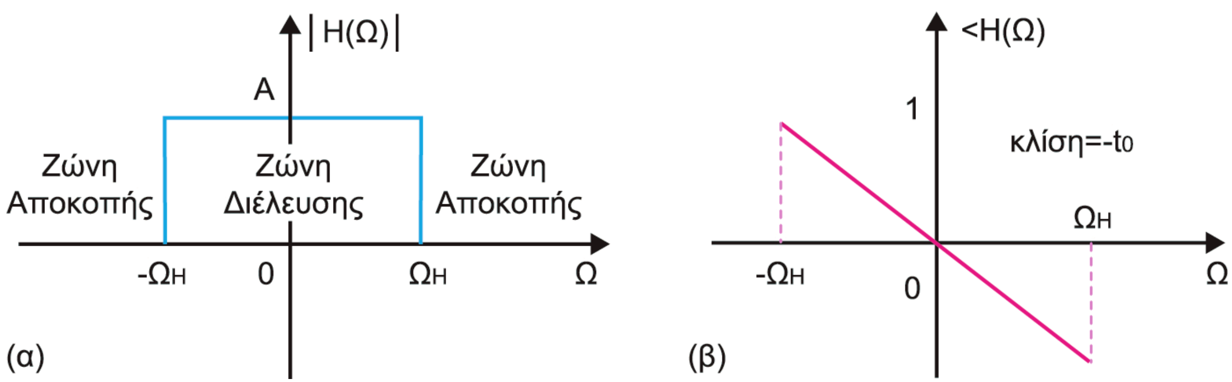
Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο

- Το **ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο** (Low Pass Filter – LPF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό (χωρίς παραμόρφωση) φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες άνω της **συχνότητας αποκοπής** (Ω_H) του φίλτρου.

- Απόκριση συχνότητας:

$$H(\Omega) = \mathrm{A}\, rect\left(\frac{\Omega}{2\Omega_H}\right) = \begin{cases} A\, e^{-j\Omega t_0}, & |\Omega| \le \Omega_H \\ 0, & |\Omega| > \Omega_H \end{cases}$$

- Ο συντελεστής A ονομάζεται **κέρδος** (gain) του φίλτρου.



- Το ιδανικό LPF επιτρέπει τη διέλευση μόνο των χαμηλών συχνοτήτων, δηλαδή όσων ικανοποιούν τη συνθήκη $\Omega \le \Omega_H$ και αποκόπτει τις υπόλοιπες (υψηλότερες) συχνότητες.

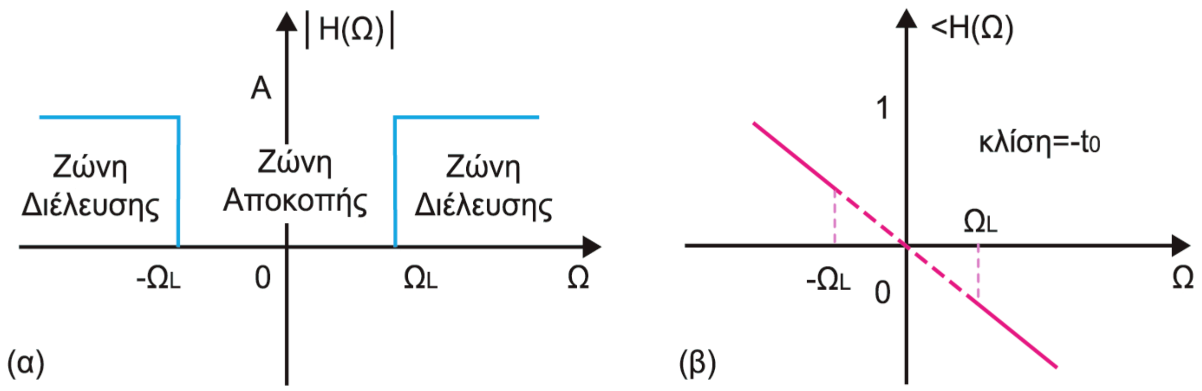
Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο

- Το **ιδανικό υψιπερατό φίλτρο** (High Pass Filter – HPF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες κάτω από την **συχνότητα αποκοπής** Ω_L.
- Απόκριση συχνότητας:

$$H(\Omega) = \begin{cases} A\, e^{-j\Omega t_0}, & |\Omega| \geq \Omega_L \\ 0, & |\Omega| < \Omega_L \end{cases}$$

μπορεί να γραφεί επίσης και στη μορφή:

$$H(\Omega) = A\left(1 - \ rect\left(\frac{\Omega}{2\Omega_L}\right)\right)$$



- Το ιδανικό HPF επιτρέπει τη διέλευση μόνο των υψηλών συχνοτήτων, δηλαδή όσων ικανοποιούν τη συνθήκη $\Omega \geq \Omega_L$ και αποκόπτει τις υπόλοιπες (χαμηλότερες) συχνότητες.

Σύγκριση Βαθυπερατού - Υψιπερατού Φίλτρου

- Οι αποκρίσεις συχνότητας ενός ιδανικού βαθυπερατού $H_{HPF}(\Omega)$ και ενός ιδανικού υψιπερατού φίλτρου $H_{LPF}(\Omega)$ με κοινή συχνότητα αποκοπής Ω_c, συνδέονται με τη σχέση:

$$H_{HPF}(\Omega) = 1 - H_{LPF}(\Omega)$$

Θεωρήσαμε Α=1

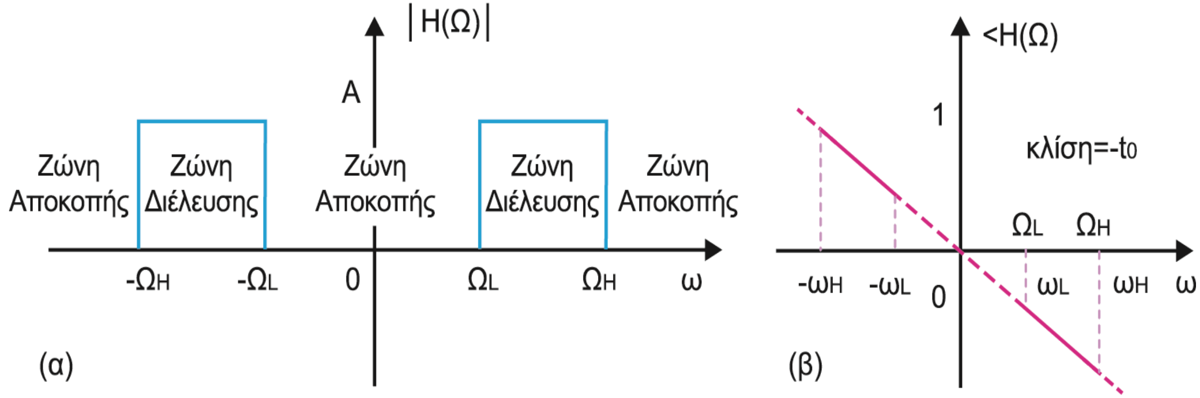
- Το ιδανικό ολοπερατό φίλτρο μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα ενός ιδανικού βαθυπερατού και ενός ιδανικού υψιπερατού φίλτρου.

Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

- Το **ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο** (Band Pass Filter – BPF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες έξω από τη «ζώνη διέλευσης» $\Omega_L < \Omega < \Omega_H$ του φίλτρου.
- Απόκριση συχνότητας :

$$H(\Omega) = \begin{cases} A\, e^{-j\Omega t_0}, & \Omega_L \leq |\Omega| \leq \Omega_H \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$H(\Omega) = rect\left(\frac{\Omega - \frac{-\Omega_L - \Omega_H}{2}}{\Omega_H - \Omega_L}\right) + rect\left(\frac{\Omega - \frac{\Omega_L + \Omega_H}{2}}{\Omega_H - \Omega_L}\right)$$



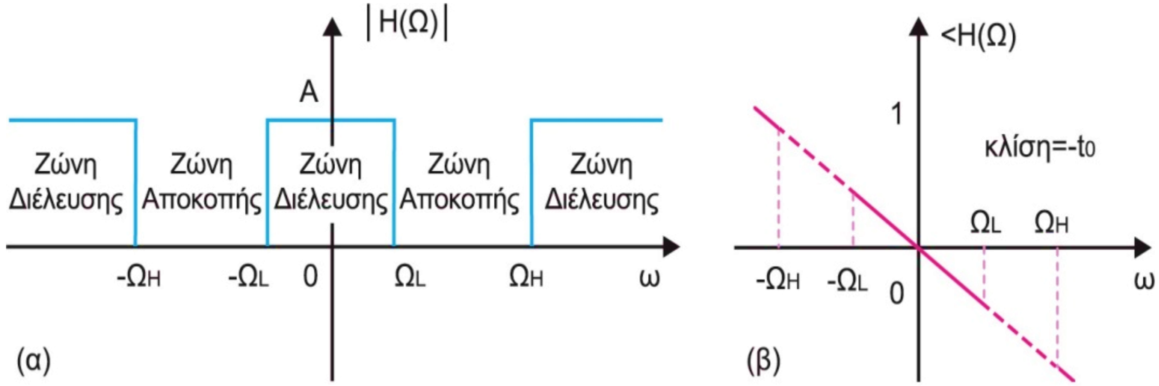
- Το ιδανικό BPF επιτρέπει τη διέλευση μόνο των συχνοτήτων που ευρίσκονται εντός της ζώνης διέλευσης, δηλαδή όσων ικανοποιούν τη συνθήκη $\Omega_L \leq \Omega \leq \Omega_H$ και αποκόπτει τις υπόλοιπες συχνότητες του σήματος.

Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

- Το **ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο** (Band Stop Filter – BSF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες μέσα στη «ζώνη αποκοπής» $\Omega_L < \Omega < \Omega_H$, του φίλτρου.
- Απόκριση συχνότητας:

$$H(\Omega) = \begin{cases} 0, & \Omega_L < |\Omega| < \Omega_H \\ A\, e^{-j\Omega t_0}, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$H(\Omega) = rect\left(\frac{\Omega - \frac{-\Omega_L - \Omega_H}{2}}{\Omega_H - \Omega_L}\right) + rect\left(\frac{\Omega - \frac{\Omega_L + \Omega_H}{2}}{\Omega_H - \Omega_L}\right) = u\big(-(\Omega + \Omega_H)\big) + rect\left(\frac{\Omega}{2\Omega_L}\right) + u(\Omega - \Omega_H)$$



- Το ιδανικό BPS αποτρέπει τη διέλευση μόνο των συχνοτήτων που ευρίσκονται εντός της ζώνης αποκοπής, δηλαδή όσων ικανοποιούν τη συνθήκη $\Omega_L \leq \Omega \leq \Omega_H$ και επιτρέπει τη διέλευση των υπόλοιπων συχνοτήτων του σήματος.

2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες ιδανικών φίλτρων

Χαρακτηριστικές ιδιότητες ιδανικών φίλτρων

Ένα ιδανικό φίλτρο έχει τις ακόλουθες χαρακτηριστικές ιδιότητες:

1) Έχει κέρδος **ίσο με τη μονάδα στη ζώνη διέλευσης** και **μηδέν στη ζώνη αποκοπής**.
2) Η **μετάβαση** από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής (και αντίστροφα) γίνεται **ακαριαία**.

- Η κρουστική απόκριση ενός LPF είναι:

$$h(t) = A\frac{\Omega_H}{2\pi}sinc\left(\frac{\Omega_H(t-a)}{2\pi}\right)$$

- (α) είναι μη αιτιατή συνάρτηση και (β) έχει άπειρο μήκος.
- Ανάλογα ισχύουν και για τις κρουστικές αποκρίσεις και των υπόλοιπων ιδανικών φίλτρων. Επιπλέον, η κρουστική απόκριση του HPF περιέχει και τη συνάρτηση Δέλτα. Άρα, κανένα από τα ιδανικά φίλτρα δεν είναι υλοποιήσιμο στην πράξη.
- Η μη αιτιατή κρουστική απόκριση των ιδανικών φίλτρων τα καθιστά ακατάλληλα για εφαρμογές πραγματικού χρόνου, αφού απαιτείται να γνωρίζουμε μελλοντικές τιμές του σήματος.

3. Συνθήκη αιτιότητας Paley - Wiener

Συνθήκη Αιτιότητας (Paley – Wiener)

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $|H(\Omega)|$, που ικανοποιεί τη σχέση $\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\Omega)|^2 d\Omega < \infty$, να αποτελεί φάσμα Fourier μιας αιτιατής συνάρτησης $h(t)$, είναι η σύγκλιση του ολοκληρώματος:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\big|log|H(\Omega)|\big|}{1+\Omega^2} d\Omega < \infty$$

Η παραπάνω συνθήκη **Paley-Wiener** είναι η λιγότερο περιοριστική παραδοχή για να ισχύει η παραπάνω σχέση και σημαίνει ότι το φίλτρο επιτρέπει τη διέλευση πεπερασμένης ποσότητας ενέργειας.

Αν το πλάτος μιας συνάρτησης $H(\Omega)$ ικανοποιεί την παραπάνω σχέση δεν συμπεραίνεται ότι η $H(\Omega)$ έχει μία αιτιατή αντίστροφη συνάρτηση, αλλά ότι για το πλάτος $|H(\Omega)|$ πρέπει να δοθεί μια κατάλληλη τιμή στη φάση, ώστε η συνάρτηση $H(\Omega)$ να έχει αιτιατή αντίστροφη συνάρτηση $h(t)$.

Συνθήκη Αιτιότητας (Paley – Wiener)

Αν δεν ικανοποιείται η σχέση $\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\Omega)|^2 d\Omega < \infty$, τότε η σχέση Paley-Wiener δεν είναι ούτε αναγκαία, ούτε ικανή.

Επομένως, ενώ η σχέση $\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\Omega)|^2 d\Omega < \infty$ είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την $|H(\Omega)|$, για την $H(\Omega)$ είναι μόνο αναγκαία.

Η συνθήκη Paley – Wiener απαιτεί το φάσμα πλάτους $|H(\Omega)|$ να μην είναι μηδέν σε οποιαδήποτε πεπερασμένη ζώνη συχνοτήτων (παρ’ όλο που μπορεί να πάρει μηδενική τιμή για διακεκριμένες τιμές της συχνότητας), επειδή σε μια τέτοια περίπτωση ο αριθμητής της συνθήκης τείνει στο άπειρο.

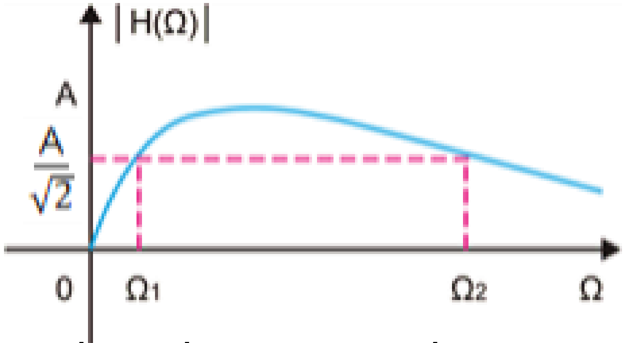
Τα ιδανικά φίλτρα δεν ικανοποιούν τη συνθήκη Paley – Wiener, άρα δεν είναι πρακτικά υλοποιήσιμα.

Αν και μη-υλοποιήσιμα, τα ιδανικά φίλτρα είναι πολύ χρήσιμα ως μοντέλα για τον σχεδιασμό πρακτικών φίλτρων.

4. Εύρος Ζώνης συχνοτήτων των φίλτρων

Εύρος Ζώνης Συχνοτήτων Φίλτρων

Το **εύρος ζώνης** συχνοτήτων (bandwidth) περιγράφει τη σημαντική ζώνη συχνοτήτων σε μία απόκριση συχνότητας ενός φίλτρου ή ενός συστήματος.



<u>Ορισμός εύρους ζώνης</u>: Έστω ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(\Omega)$, όπου $|H(\Omega)|_{\max} = A$. Ως εύρος ζώνης (BW) του φίλτρου ορίζεται το διάστημα μεταξύ των συχνοτήτων Ω_1 και $\Omega_2 (\Omega_1, \Omega_2 > 0)$, δηλαδή $BW = \Omega_2 - \Omega_1$, έτσι ώστε:

$$|H(\Omega_1)| = |H(\Omega_2)| = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Το εύρος ζώνης ορίζεται για εκείνη τη διαφορά συχνοτήτων στο φάσμα του φίλτρου κατά την οποία το μέτρο της απόκρισης συχνότητας έχει μειωθεί από την τιμή A στην τιμή $\mathbf{A\sqrt{2} = 0,707}\boldsymbol{A}$.

Αυτός ο τρόπος ορισμού ονομάζεται «εύρος ζώνης 3dB», επειδή ισχύει:

$$20log\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3\ dB$$

Άσκηση 1

Ένα φίλτρο έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-at}u(t), a \in R$. Να ευρεθεί τι είδους φίλτρο είναι.

<u>Απάντηση</u>: Υπολογίζουμε την απόκριση συχνότητας του φίλτρου. Είναι:

$$H(\Omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at}\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\Omega)t}\, dt = -\frac{1}{a+j\Omega} e^{-(a+j\Omega)t}\Big|_0^{+\infty}$$

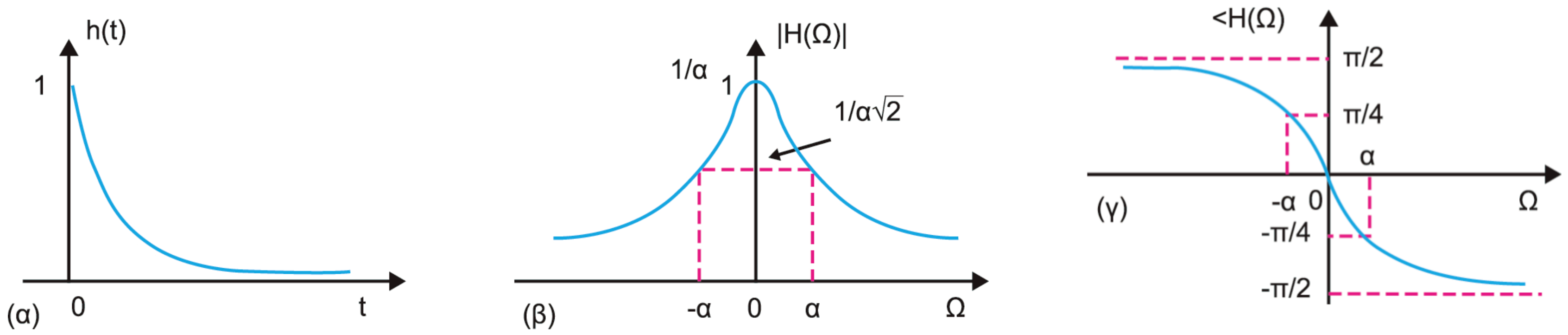
$$= -\frac{1}{a+j\Omega}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-(a+j\Omega)t} - e^0\right] = -\frac{1}{a+j\Omega}\left[\lim_{t\to\infty}\left(e^{-\alpha t}e^{-j\Omega t}\right) - 1\right]$$

$$= -\frac{1}{a+j\Omega}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-at}(\cos\Omega t - jsin\,\Omega t) - 1\right] = -\frac{1}{a+j\Omega}[0-1]$$

$$\text{Αρα } H(\Omega) = \frac{1}{a+j\Omega}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Στο ακόλουθο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ και του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας.



(α) Κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-at}\,u(t)$, (β) Φάσμα πλάτους, (γ) Φάσμα φάσης

Παρατηρούμε ότι το μέτρο αποσβένεται στις υψηλές συχνότητες, δηλαδή ισχύει $\lim_{|\Omega|\to\infty} |\mathrm{H}(\Omega)| = 0$, επομένως είναι ένα **πρακτικό βαθυπερατό** φίλτρο.

Άσκηση 2

Ένα σήμα $x(t) = e^{-2t}u(t)$ περνάει από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο, που έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_H = 1\ rad$ / sec. Να βρεθεί ο λόγος της ενέργειας εξόδου προς την ενέργεια εισόδου (Για το φίλτρο να ληφθεί Α=1).

<u>Απάντηση</u>: Ο FT του $x(t)$ είναι $X(\Omega) = 1/(2 + j\Omega)$. Επομένως, το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος $x(t)$ είναι:

$$S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2 = \left|\frac{1}{2 + j\Omega}\right|^2 = \frac{1}{\Omega^2 + 4}$$

Επειδή το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς του δοθέντος βαθυπερατού φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$|H(\Omega)| = \begin{cases} 1\,, & |\Omega| < \Omega_H = 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

βρίσκουμε το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος εξόδου, ως:

$$S_y(\Omega) = |X(\Omega)|^2\ |H(\Omega)|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega^2 + 4}\,, & |\Omega| < 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Για να βρούμε την ολική ενέργεια του σήματος εξόδου $y(t)$ ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση (θεώρημα Parseval):

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\Omega)d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\Omega^2+4}\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ομοίως, η ενέργεια του σήματος εισόδου $x(t)$ είναι:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-4t}dt = \frac{1}{4}$$

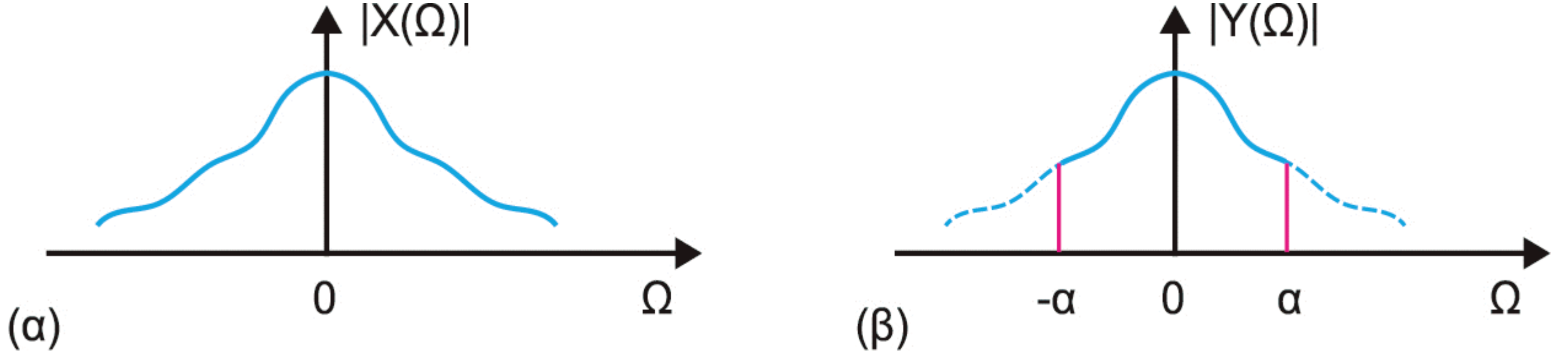
Διαιρώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, βρίσκουμε τον ζητούμενο λόγο, ως:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}29$$

Παρατηρούμε ότι ποσοστό 71% της ενέργειας εισόδου απορροφάται από το ιδανικό φίλτρο και μόνο το 29% φθάνει στην έξοδο.

Άσκηση 3

Σε ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο (LPF) εισέρχεται ένα γνωστό σήμα $x(t)$ με φάσμα Fourier $|X(\Omega)|$. Στην έξοδο κόβονται οι υψηλές συχνότητες, δηλαδή αυτές για τις οποίες ισχύει $|\Omega| > a$. Τα φάσματα εισόδου $X(\Omega)$ και εξόδου $Y(\Omega)$ του LPF φίλτρου δείχνονται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογιστεί το σήμα εξόδου $y(t)$.



<u>Απάντηση</u>: Το σήμα εξόδου $y(t)$ θα υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier επί του φάσματος εξόδου $Y(\Omega)$. Το φάσμα της εξόδου $Y(\Omega)$ του φίλτρου LPF υπολογίζεται από τη σχέση $Y(\Omega) = X(\Omega)\ H(\Omega)$, ενώ το σήμα εξόδου $y(t)$ είναι $y(t) = x(t) * h(t)$.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Το $X(\Omega)$ θεωρείται γνωστό, άρα και το $x(t)$. Η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ του φίλτρου είναι τετραγωνικής μορφής και η κρουστική απόκρισή της $h(t)$ του φίλτρου είναι:

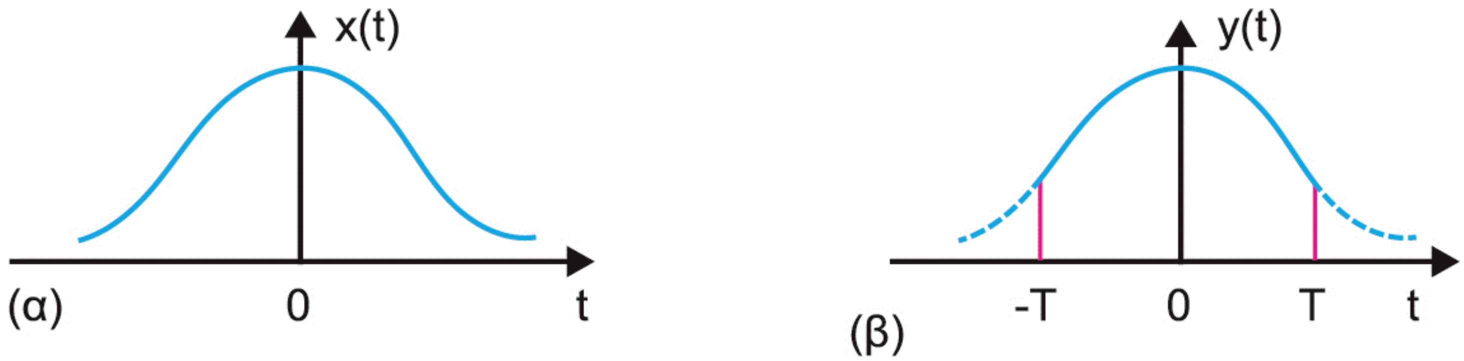
$$h(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$$

Επομένως η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται από τη συνέλιξη της εισόδου $x(t)$ με την κρουστική απόκριση $h(t)$, δηλ.:

$$y(t) = x(t) * \frac{\sin at}{\pi t}$$

Άσκηση 4

Σε ένα φίλτρο Σ εισέρχεται ένα γνωστό σήμα $x(t)$. Στην έξοδο κόβεται το $x(t)$ για $|t| > T$, όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier $Y(\Omega)$ της εξόδου.



Απάντηση: Η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται από τη σχέση $y(t) = x(t)\,\Pi_T(t)$ όπου $\Pi_T(t)$ ο τετραγωνικός παλμός που δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{για } t < |T| \\ 0, & \text{για } t > |T| \end{cases}$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $\Pi_T(t)$ είναι:

$$\Pi_T(t) \xleftrightarrow{F} \frac{2\sin\Omega T}{\Omega}$$

Επομένως ισχύει:

$$Y(\Omega) = F\{y(t)\} = F\{\, x(t)\, \Pi_T(t) \,\}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier στο πεδίο της συχνότητας, έχουμε:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega) * \frac{2\sin\Omega T}{\Omega}\right]$$

Άσκηση 5

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) = 2cos(20t) + 10sinc\left(\frac{10}{\pi}t\right) + 5sinc^2\left(\frac{5}{\pi}t\right)$$

περνάει μέσα από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με απόκριση συχνότητας:

$$H(\Omega) = rect\left(\frac{\Omega}{32}\right)$$

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα $X(\Omega)$.

(β) Να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας $X(\Omega)$ και το φάσμα $X(\Omega)$.

(γ) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $Y(\Omega)$ της εξόδου του φίλτρου.

(δ) Να υπολογιστεί το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου.

(ε) Να υπολογιστεί το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου αν το φίλτρο έχει απόκριση συχνότητας:

$$H(\Omega) = 1 - rect\left(\frac{\Omega}{32}\right)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

(α) Επειδή $A\,cos(\Omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \pi A[\delta(\Omega+\Omega_0)+\delta(\Omega-\Omega_0)]$, ο μετ. Fourier του πρώτου όρου είναι:

$$2\,cos(20t) \xleftrightarrow{F} 2\pi\,[\delta(\Omega+20)+\delta(\Omega-20)]$$

Επειδή:

$$\left(\frac{B}{2\pi}\right) sinc\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{\Omega}{B}\right)$$

ο μετ. Fourier του δεύτερου όρου είναι:

$$10\,sinc\left(\frac{10}{\pi}t\right) = \pi\,\frac{20}{2\pi} sinc\left(\frac{20}{2\pi}t\right) \xleftrightarrow{F} \pi\,rect\left(\frac{\Omega}{20}\right)$$

Τέλος, επειδή:

$$\left(\frac{B}{2\pi}\right) sinc^2\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{\Omega}{B}\right)$$

ο μετ. Fourier του τρίτου όρου είναι:

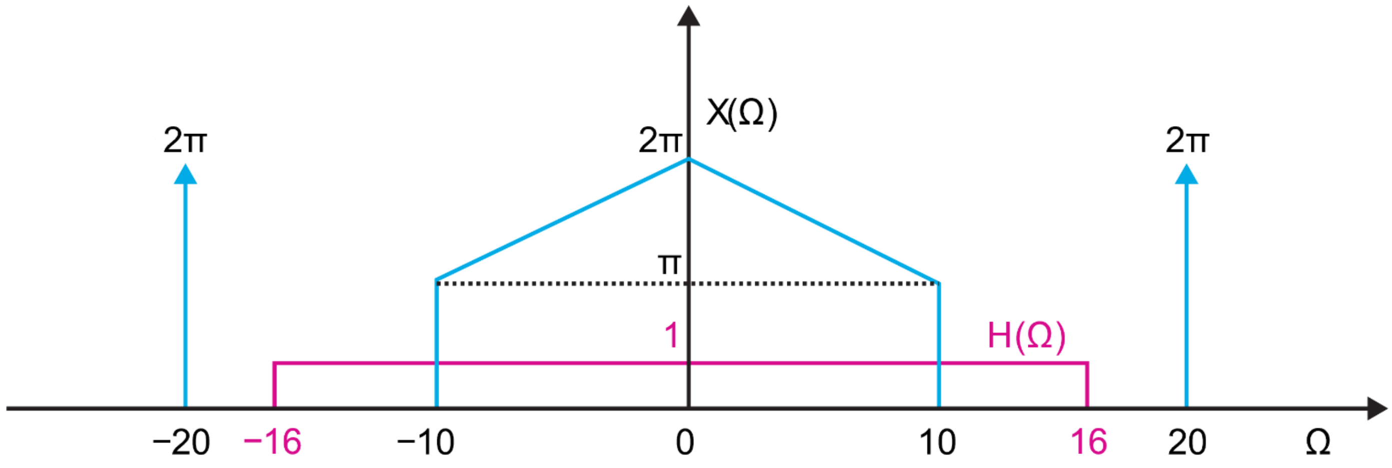
$$5sinc^2\left(\frac{5}{\pi}t\right) = \pi\left(\frac{10}{2\pi}\right) sinc^2\left(\frac{10t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{F} \pi tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Λόγω της γραμμικότητας του μετ. Fourier το συνολικό φάσμα $X(\Omega)$ είναι:

$$X(\Omega) = 2\pi\,[\delta(\Omega+20)+\delta(\Omega-20)] + \pi\,rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) + \pi\,tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

(α) Το βαθυπερατό φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_H = 16\ (rad/sec)$ και μοναδιαίο κέρδος.



Φάσματα $X(\Omega)$ και $H(\Omega)$

(γ) Το φάσμα της εξόδου δίνεται από τη σχέση:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

Με βάση το προηγούμενο σχήμα προκύπτει:

$$Y(\Omega) = \pi\, rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) + \pi\, tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

(δ) Από το ερώτημα (γ) και επειδή το (βαθυπερατό) φίλτρο επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που βρίσκονται στη ζώνη διέλευσης και αποκόπτει τις συχνότητες που βρίσκονται στη ζώνη αποκοπής, προκύπτει ότι η συχνότητα που οφείλεται στον όρο $2cos(20t)$ αποκόπτεται και το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$y(t) = 10sinc\left(\frac{10}{\pi}t\right) + 5sinc^2\left(\frac{5}{\pi}t\right)$$

(ε) Στην περίπτωση αυτή το φίλτρο είναι υψιπερατό και έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_L = 16\ (rad/sec)$ και επιτρέπει μόνο τη διέλευση της συχνότητας 20 rad/sec. Επομένως, το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου, είναι:

$$y(t) = 2cos(20t)$$

5. Πρακτικά Φίλτρα

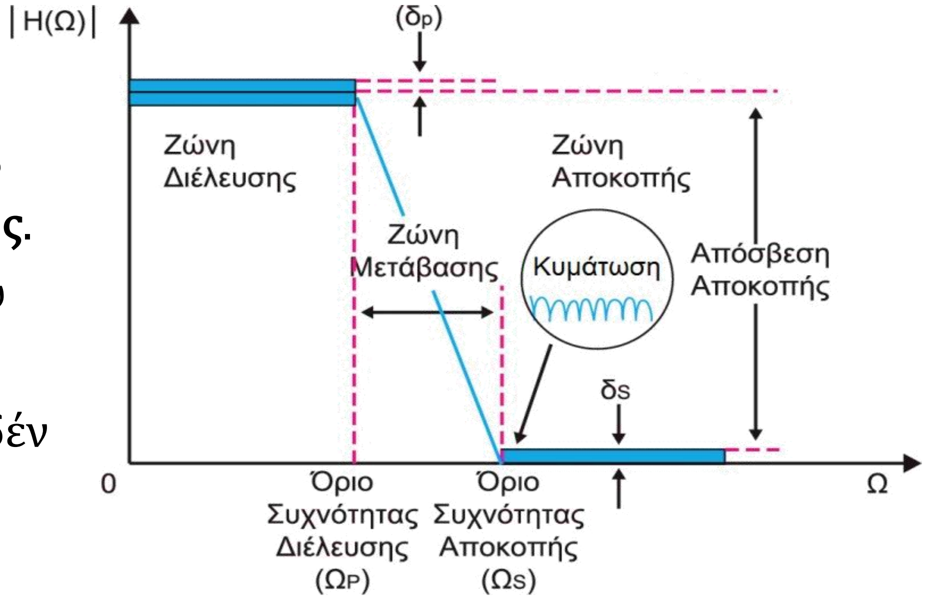
Πρακτικά Φίλτρα

- Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των ιδανικών φίλτρων δεν αντιστοιχούν σε φυσικά πραγματοποιήσιμες δομές επειδή έχουν:
  - Μοναδιαίο κέρδος στη ζώνη διέλευσης και μηδέν στη ζώνη αποκοπής
  - Ακαριαία μετάβαση από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής.
- Προσεγγίζουμε την ιδανική απόκριση με ένα μη-ιδανικό αλλά **πρακτικό** (δηλαδή, φυσικά πραγματοποιήσιμο) φίλτρο.
- Στα πρακτικά φίλτρα τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά δεν ισχύουν.
- Για το σχεδιασμό πρακτικών αναλογικών φίλτρων έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι, όπως Butterworth, Chebyshef, Bessel, κλπ.

Απόκριση συχνότητας πρακτικού κατωδιαβατού φίλτρου

Σε ένα πρακτικό φίλτρο συμβαίνουν τα εξής:

- Μεταξύ της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής μεσολαβεί μια πεπερασμένη περιοχή συχνοτήτων, η οποία ονομάζεται **ζώνη μετάβασης**. Στη ζώνη μετάβασης, το κέρδος του φίλτρου αλλάζει σταδιακά από ένα (εντός της ζώνης διέλευσης) σε μηδέν (στη ζώνη αποκοπής). Η ζώνη μετάβασης έχει εύρος $\Omega_p - \Omega_s$.



- Η απόκριση συχνότητας στην περιοχή διέλευσης δεν είναι επίπεδη και ίση με ένα (1), αλλά εμφανίζει έναν **κυματισμό** εύρους δ_p εκατέρωθεν της τιμής 1. Αντίστοιχα, και στην περιοχή αποκοπής η απόκριση δεν είναι επίπεδη και ίση με μηδέν, αλλά εμφανίζει έναν κυματισμό εύρους δ_s άνω της τιμής 0.

Σχεδιασμός Αναλογικών Φίλτρων

Το φιλτράρισμα περιγράφεται από την ιδιότητα συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier, δηλαδή:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\, X(\Omega)$$

όπου η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ υπολογίζεται από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, ως:

$$H(\Omega) = H(s)\Big|_{s=j\Omega}$$

Η συνάρτηση τετραγωνισμένου πλάτους ενός αναλογικού βαθυπερατού φίλτρου, γράφεται:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + f(\Omega^2)}$$

Για τις χαμηλές συχνότητες πρέπει να ισχύει $f\left(\Omega^2\right) \ll 1$ έτσι ώστε $|H(\Omega)|^2 \approx 1$ (ζώνη διέλευσης), ενώ για τις υψηλές συχνότητες πρέπει να ισχύει $f\left(\Omega^2\right) \gg 1$ έτσι ώστε $|H(\Omega)|^2 \to 0$ (ζώνη αποκοπής).

Για τον σχεδιασμό ενός πρακτικά υλοποιήσιμου αναλογικού φίλτρου, τα ουσιώδη ζητούμενα είναι:

- Να επιλέξουμε την κατάλληλη συνάρτηση $f(.)$
- Να υπολογίσουμε την $H(s)$ από την $|H(\Omega)|^2$, προσέχοντας να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια του φίλτρου.

Προδιαγραφές Πρακτικών Φίλτρων

Το πλάτος της απόκρισης συχνότητας στη ζώνη διέλευσης να κυμαίνεται κατά $\pm\delta_p$ από το μοναδιαίο κέρδος:

$$1 - \delta_p < |H(\Omega)| \leq 1 + \delta_p, \qquad 0 \leq |\Omega| < \Omega_p$$

Το πλάτος της απόκρισης συχνότητας στη ζώνη αποκοπής να είναι μικρότερο από μία ποσότητα δ_s και όχι μηδενικό:

$$0 \leq |H(\Omega)| \leq \delta_s, \qquad |\Omega| \geq \Omega_s$$

Μεταξύ της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής να παρεμβάλλεται μία ζώνη μετάβασης με εύρος ζώνης μη-μηδενικό:

$$\left|\Omega_s - \Omega_p\right| \neq 0$$

Για τον καθορισμό των προδιαγραφών των πραγματικών φίλτρων χρειάζεται να ορίσουμε τις ακόλουθες παραμέτρους:

- Ω_p: συχνότητα αποκοπής της ζώνης διέλευσης
- Ω_s: συχνότητα αποκοπής της ζώνης αποκοπής
- δ_p: απόκλιση πλάτους στη ζώνη διέλευσης
- δ_s: απόκλιση πλάτους στη ζώνη αποκοπής
- $\left|\Omega_s - \Omega_p\right|$: εύρος ζώνης μετάβασης

Προδιαγραφές Πρακτικών Φίλτρων

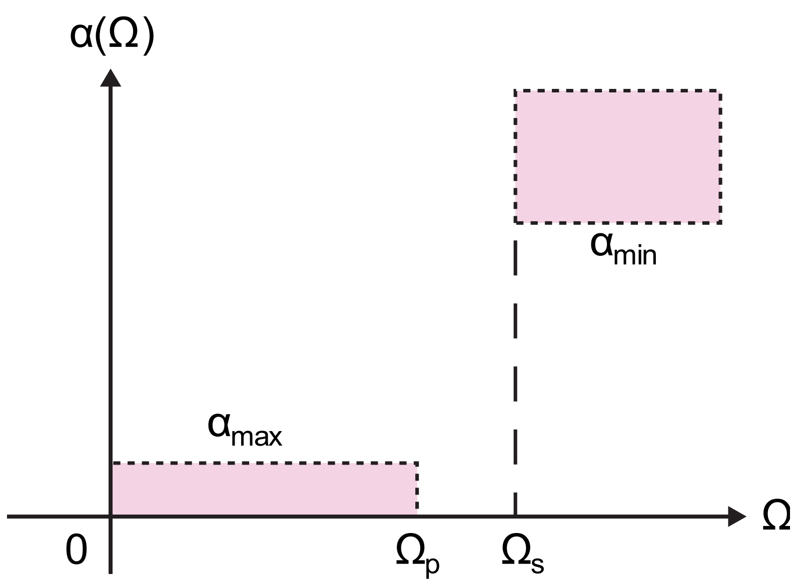
Συνάρτηση εξασθένισης:

$$\alpha(\Omega) = -10\log_{10}|H(\Omega)|^2 = -20\log_{10}|H(\Omega)| \qquad (dB)$$

Για λογαριθμικό φάσμα, οι προδιαγραφές γράφονται:

- Ζώνη διέλευσης: $0 \leq \alpha(\Omega) \leq a_{max}, \quad 0 \leq |\Omega| < \Omega_p$
- Ζώνη αποκοπής: $\alpha(\Omega) \geq a_{min}, \quad |\Omega| \geq \Omega_s$

όπου: $a_{max} = -20\log_{10}\left|1-\delta_p\right|$ και $a_{min} = -20\log_{10}(\delta_s)$. Θεωρούμε $\alpha(\Omega) = 0$.



Απόκριση συχνότητας βαθυπερατού φίλτρου σε λογαριθμική κλίμακα

Σχεδιασμός Υλοποιήσιμου Φίλτρου

Το πρόβλημα σχεδιασμού ενός πρακτικά υλοποιήσιμου φίλτρου περιγράφεται ως εξής: Δοθέντων των φασματικών προδιαγραφών: (α) Ζώνη διέλευσης με a_{max} και Ω_p και (β) Ζώνη αποκοπής με a_{min} και Ω_s, για το σχεδιασμό του φίλτρου ακολουθούμε τα βήματα:

- Επιλέγουμε την κατάλληλη συνάρτηση $f(.)$, μεταξύ των Butterworth, Chebyshev, κλπ.
- Βρίσκουμε τις παραμέτρους της $f(.)$ που ικανοποιούν τις δοθείσες προδιαγραφές.
- Παραγοντοποιούμε τη συνάρτηση τετραγωνισμένου πλάτους $|H(\Omega)|^2$ και επιλέγουμε τους πόλους που βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο (για την ευστάθεια του φίλτρου) ώστε να λάβουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H_N(s)$.
- Επιλέγουμε το κέρδος K ώστε το γινόμενο $KH_N(s)$ να ταυτίζεται με το κέρδος στη συχνότητα μηδέν (dc gain).
- Κάνουμε τη μετατροπή συχνότητας $S = s/\Omega_n$, όπου $\Omega_n = \Omega_{hp}$για συνάρτηση Butterworth, και $\Omega_n = \Omega_p$ για συνάρτηση Chebyshev.
- Επιβεβαιώνουμε ότι το γινόμενο $KH_N(\Omega)$ ικανοποιεί το ζητούμενο κέρδος και ότι η φάση είναι προσεγγιστικά γραμμική στη ζώνη διέλευσης.

6. Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

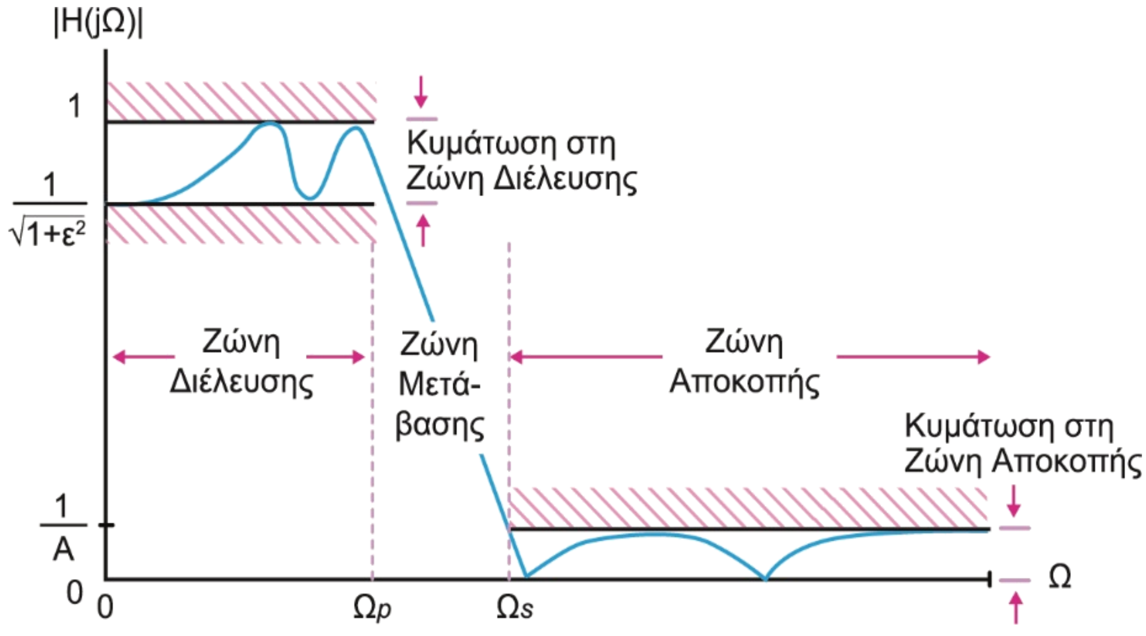
Πρότυπο αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο

Το τετραγωνισμένο πλάτος της απόκρισης συχνότητας ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} \le |H(j\Omega)|^2 \le 1, \qquad |\Omega| \le \Omega_p$$

$$0 \le |H(j\Omega)|^2 \le \frac{1}{A^2}, \qquad |\Omega| \ge \Omega_s$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}$: κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης
- $\boldsymbol{\Omega_p}$: συχνότητα αποκοπής της ζώνης διέλευσης
- $\boldsymbol{A}$: εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής
- $\boldsymbol{\Omega_s}$: συχνότητα αποκοπής της ζώνης αποκοπής



Πρότυπο αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο

Οι παράμετροι ε και A συνδέονται με τις αντίστοιχες παραμέτρους κυμάτωσης R_p και εξασθένισης A_s που έχουμε δει στα FIR φίλτρα, μέσω των σχέσεων:

$$R_p = -10log_{10}\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{Rp/10} - 1}$$

$$A_s = -10log_{10}\left(\frac{1}{A^2}\right) \Rightarrow A = 10^{As/10}$$

και με τις παραμέτρους απόκλισης πλάτους δ_p και δ_s μέσω των σχέσεων:

$$\frac{1-\delta_p}{1+\delta_\pi} = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\sqrt{\delta_p}}{1-\delta_p} \text{ και } \frac{\delta_s}{1+\delta_p} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = \frac{1+\delta_p}{\delta_s}$$

Για συχνότητα ίση με Ω_p και Ω_s, το τετραγωνισμένο πλάτος της απόκρισης συχνότητας είναι:

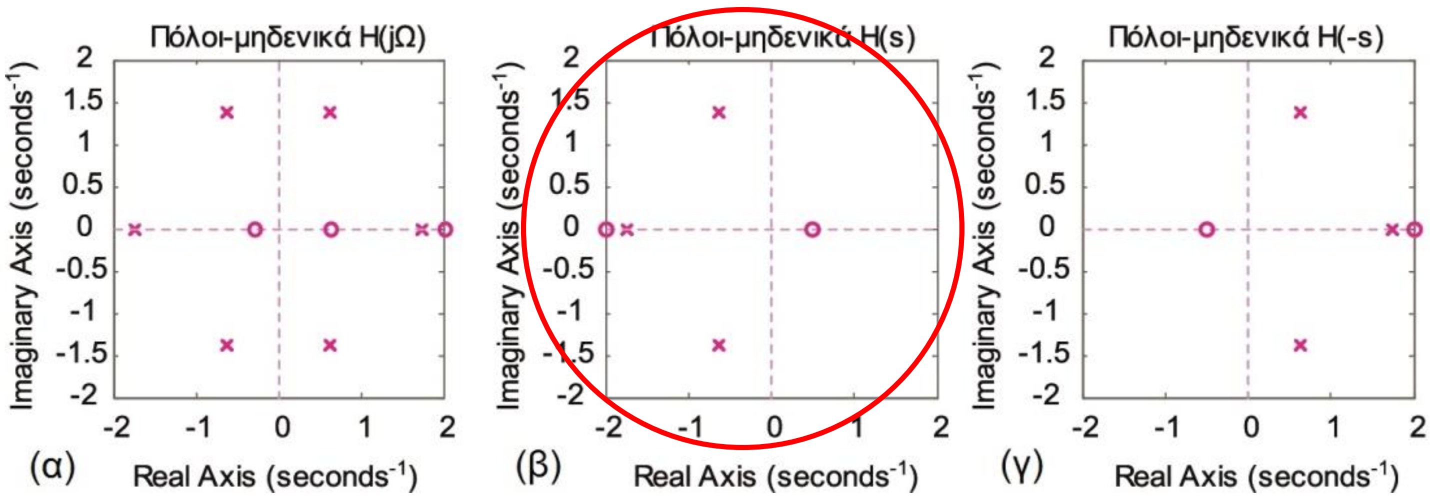
$$\left|H(j\Omega_p)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \text{ και } |H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{A^2}$$

Διάγραμμα πόλων – μηδενικών IIR φίλτρου

Για το τετραγωνισμένο πλάτος της απόκρισης συχνότητας ισχύει:

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = H(s)\,H(-s)\Big|_{s=j\Omega} \Rightarrow H(s)\mathrm{H}(-\mathrm{s}) = |\mathrm{H}(j\Omega)|^2\Big|_{\Omega=\mathrm{s}/\mathrm{j}}$$

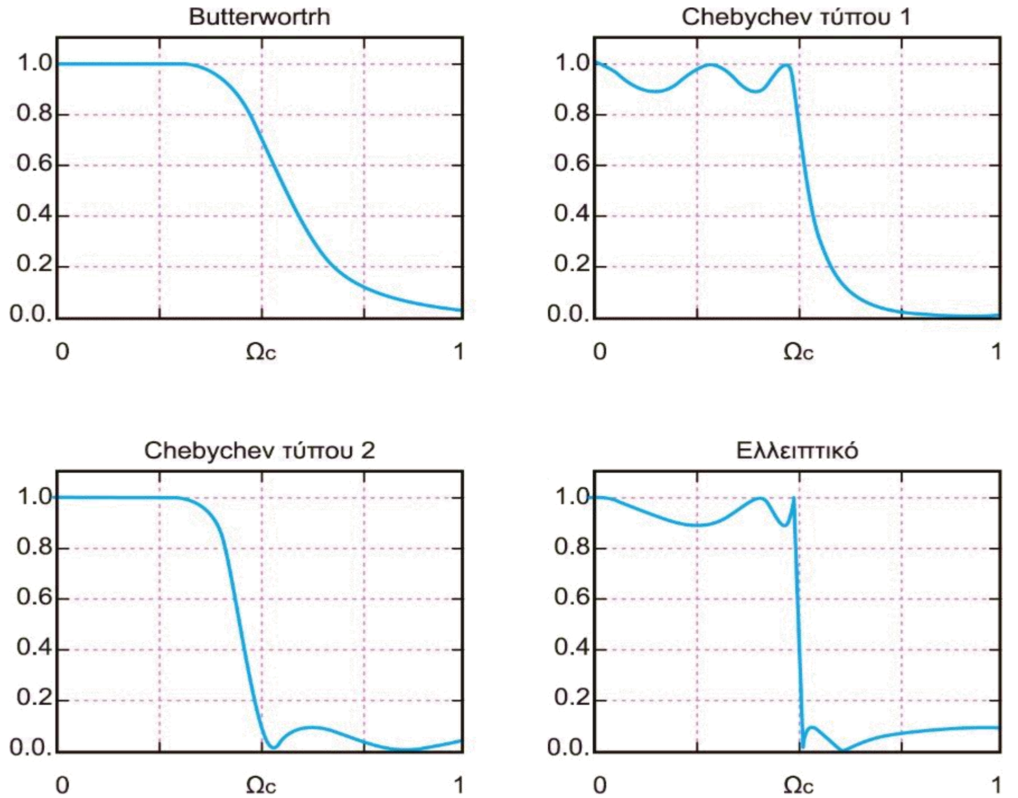
Άρα, οι πόλοι και τα μηδενικά της $|H(j\Omega)|^2$ είναι τοποθετημένοι συμμετρικά ως προς τον άξονα $j\Omega$.



Διαγράμματα πόλων – μηδενικών των συναρτήσεων:
(α) $|H(j\Omega)|^2 = \mathrm{H}(s)H(-s)$, (β) $H(s)$ και (γ) $H(-s)$

Πρότυπα βαθυπερατά αναλογικά φίλτρα

- Βαθυπερατό φίλτρο Butterworth
- Βαθυπερατό φίλτρο Chebyshev τύπου I και II
- Βαθυπερατό ελλειπτικό φίλτρο



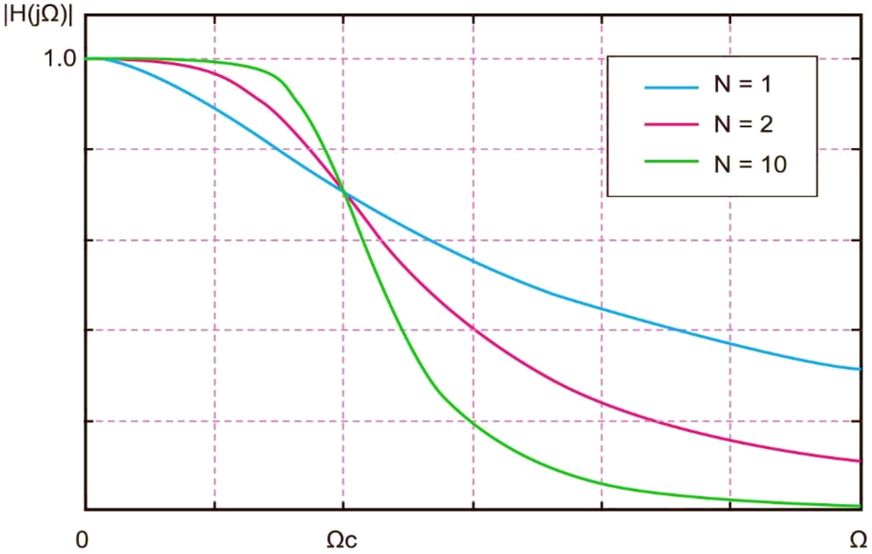
Αποκρίσεις συχνότητας πρότυπων αναλογικών βαθυπερατών φίλτρων Butterworth, Chebyshev I, Chebyshev II και Ελλειπτικό

Βαθυπερατό φίλτρο Butterworth

Τετραγωνισμένο μέτρο της απόκρισης συχνότητας:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

- Ω_c: συχνότητα αποκοπής
- N: τάξη συνάρτησης Butterworth



Μέτρο απόκρισης συχνότητας Butterworth για διάφορες τιμές τάξης

Ισχύουν:

- $|H(j0)|^2 = 1 = 0\text{dB}$ για όλες τις τιμές της τάξης N.
- $|H(j\Omega_c)|^2 = 1/2 = 3dB$, ανεξάρτητα από την τιμή του N.
- Για $\Omega_c = 1\ rad/sec$ λαμβάνουμε το πρότυπο βαθυπερατό φίλτρο.
- Για $N \to \infty$ το φίλτρο προσεγγίζει το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο.

Σχεδιασμός φίλτρου Butterworth

Με βάση τις προδιαγραφές:

- Ω_p : συχνότητα αποκοπής στο όριο της ζώνης διέλευσης
- Ελάχιστη τιμή του μέτρου της απόκρ. συχν. $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ στη ζώνη διέλευσης
- Ω_s: συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής
- Μέγιστη τιμή του μέτρου της απόκρισης συχνότητας $1/A$ στη ζώνη αποκοπής

Υπολογίζουμε:

- Την **τάξη** του φίλτρου:

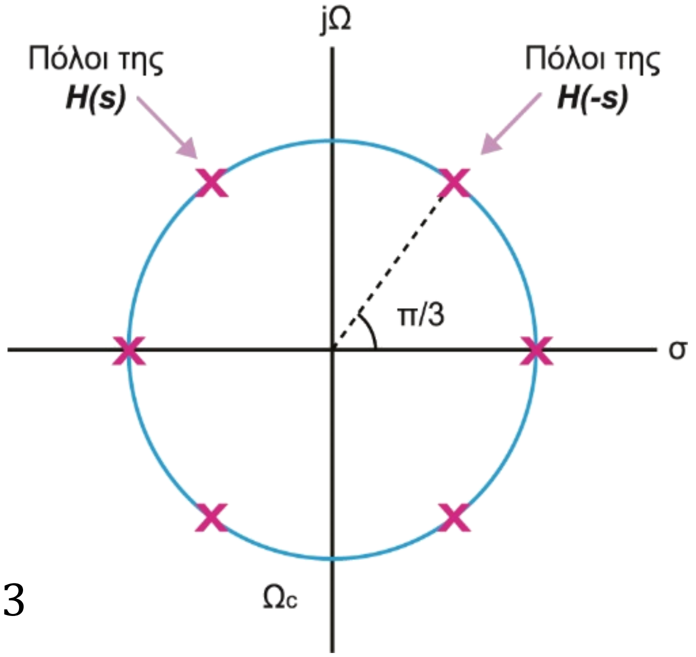
$$N = \left\lceil \frac{\log_{10}\left[(A^2-1)/\varepsilon^2\right]}{2\log_{10}\left[\Omega_s/\Omega_p\right]} \right\rceil \text{ ή } N = \left\lceil \frac{\log_{10}\left[(10^{\mathrm{R}p/10}-1)/(10^{\mathrm{A}s/10}-1)\right]}{2\log_{10}\left[\Omega_p/\Omega_s\right]} \right\rceil$$

- Τη **συχνότητα αποκοπής**:

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{Rp/10}-1}} \text{ ή } \Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{As/10}-1}}$$

Πόλοι και μηδενικά βαθυπερατού φίλτρου Butterworth

- Για τάξη φίλτρου N, οι πόλοι είναι $2N$ στο πλήθος.
- Οι πόλοι είναι τοποθετημένοι επάνω σε κύκλο ακτίνας Ω_c και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά γωνία $2\pi/2N = \pi/N$.
- Το φίλτρο είναι αιτιατό και ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι του βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο της συχνότητας s.
- Οι πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο αντιστοιχούν στην $H(s)$ ενώ στο δεξί αντιστοιχούν στην $H(-s)$.



Πόλοι του γινομένου $H(s)H(-s)$ για N=3

Συνάρτηση Μεταφοράς
πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου Butterworth

Τάξη (N)	Συνάρτηση Μεταφοράς $\boldsymbol{H(s)}$ (για $\boldsymbol{\Omega_c = 1 rad/sec}$)
1	$\dfrac{1}{s+1}$
2	$\dfrac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$
3	$\dfrac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$
4	$\dfrac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2++2.6131s+1}$

Άσκηση 6

Ένα δεύτερης τάξης βαθυπερατό φίλτρο Butterworth, κανονικοποιημένο στο πλάτος και τη συχνότητα, έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(S) = \frac{1}{S^2 + \sqrt{2}S + 1}$$

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, με κέδρος στη μηδενική συχνότητα ίσο με 10 και συχνότητα μισής ισχύος $\Omega_{hp} = 100$ rad/sec.

<u>Απάντηση</u>: Από τη δοθείσα συνάρτηση μεταφοράς $H(S)$ προκύπτει ότι το κέρδος στη μηδενική συχνότητα είναι $H(0) = 1$. Η συχνότητα μισής ισχύος της συνάρτησης $H(S)$ είναι:

$$H(j\Omega') = H(j1) = \frac{1}{j^2 + \sqrt{2}j + 1} = \frac{1}{j\sqrt{2}}$$

Πράγματι ισχύει $|H(j1)|^2 = |H(j0)|^2/2 = 1/2$.

Επομένως, η $\Omega' = 1$ είναι η συχνότητα μισής ισχύος. Έτσι το ζητούμενο φίλτρο με κέρδος στη μηδενική συχνότητα ίσο με 10 (όπως ζητά η εκφώνηση) μπορεί να αποκτηθεί πολλαπλασιάζοντας την $H(S)$ με το 10.

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Επιπλέον, αν θέσουμε $S = s/100$ να είναι η κανονικοποιημένη μεταβλητή συχνότητας Laplace όταν $S = j\Omega'_{hp} = j1$, προκύπτει $s = j\Omega_{hp} = j100$ ή $\Omega_{hp} = 100$ η επιθυμητή συχνότητα μισής ισχύος.

Έτσι, η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ δίνεται θέτοντας $S = s/100$ και είναι:

$$H(s) = \frac{10}{\left(\frac{s}{100}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{100}\right) + 1} = \frac{10^5}{s^2 + 100\sqrt{2}s + 10^4}$$

Σχεδιασμός φίλτρου Butterworth στο Matlab

Σχεδίαση βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου Butterworth:

- **[N, Wn] = buttord(Wp, Ws, Rp, As)**: Επιστρέφει τη μικρότερη τάξη N ενός αναλογικού φίλτρου Butterworth που ικανοποιεί τις προδιαγραφές. Wn είναι η συχνότητα αποκοπής Ω_c σε κανονικοποιημένη κλίμακα, δηλαδή $0 < W_n < 1$, όπου το 1 αντιστοιχεί στο ήμισυ της συχνότητας δειγματοληψίας.
- **[b, a] = butter(N, Wn)**: Επιστρέφει τους συντελεστές $a[n], b[m]$ της συνάρτησης μεταφοράς, τάξης N και συχνότητας αποκοπής Wn. Εναλλακτικά συντάσσεται **[z, p, k] = butter(N, Wn)** οπότε επιστρέφει τους πόλους, τα μηδενικά και τον συντελεστή κέρδους της συνάρτησης μεταφοράς.

Σχεδίαση πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου Butterworth:

- **[z, p, k] = buttap(N)**: Επιστρέφει τους πόλους, τα μηδενικά και το κέρδος ενός κανονικοποιημένου πρότυπου αναλογικού φίλτρου Butterworth τάξης N. Το προκύπτον φίλτρο έχει N πόλους περί του μοναδιαίου κύκλου στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο και δεν έχει μηδενικά.

Βαθυπερατό φίλτρο Chebyshev τύπου I

Τα φίλτρο **Chebyshev I** έχει μόνο πόλους, παρουσιάζει ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης ($0 \leq \Omega < 1$) και φθίνει μονότονα στη ζώνη αποκοπής ($\Omega > 1$).

Το τετραγωνισμένο μέτρο της απόκρισης συχνότητάς του είναι:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2\, T_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

ε: κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης,
Ω_c: συχνότητα αποκοπής

$T_N(\Omega)$: πολυώνυμο Chebyshev τάξης Ν:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & 1 < x < \infty \end{cases}, \qquad \text{όπου } x = \Omega/\Omega_c$$

- $\Omega = 0$ και N άρτιο: $|H(j0)|^2 = 1$
- $\Omega = 0$ και N περιττό: $|H(j0)|^2 = 1/(1+\varepsilon^2)$
- $\Omega = \Omega_c$: $|H(j\Omega_c)|^2 = 1/(1+\varepsilon^2)$ ανεξάρτητα από το N
- $0 \leq \Omega \leq \Omega_c$: $|H(j\Omega)|^2$ ταλαντώνεται μεταξύ 0 και $1/(1+\varepsilon^2)$
- $\Omega > \Omega_c$: $|H(j\Omega)|^2$ φθίνει μονότονα.

Βαθυπερατό φίλτρο Chebyshev τύπου I

Συχνότητα αποκοπής Ω_c:

$$\Omega_c = \Omega_p \quad \text{και} \quad \Omega_r = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$$

Τάξη N:

$$N = \left\lceil \frac{\log_{10}\left[g + \sqrt{g^2 - 1}\,\right]}{\log_{10}\left[\Omega_r + \sqrt{\Omega_r^2 - 1}\,\right]} \right\rceil$$

<u>Σχεδίαση βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου Chebyshev τύπου I:</u>

- **[N, Wn] = cheb1ord (Wp, Ws, Rp, Rs)**: Επιστρέφει τη μικρότερη τάξη N ενός αναλογικού φίλτρου Chebyshev-I που ικανοποιεί τις προδιαγραφές. Wn είναι η συχνότητα αποκοπής Ω_c σε κανονικοποιημένη κλίμακα.
- **[b, a] = cheby1 (N, R, Wn)**: Επιστρέφει τους συντελεστές $a[n]$, $b[m]$ της συνάρτησης μεταφοράς, τάξης N, συχνότητας αποκοπής Wn και κυμάτωσης R. Εναλλακτικά συντάσσεται **[z, p, k] = butter(N, Wn)** οπότε επιστρέφει τους πόλους, τα μηδενικά και τον συντελεστή κέρδους της συνάρτησης μεταφοράς.

<u>Σχεδίαση πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου Chebyshev τύπου I:</u>

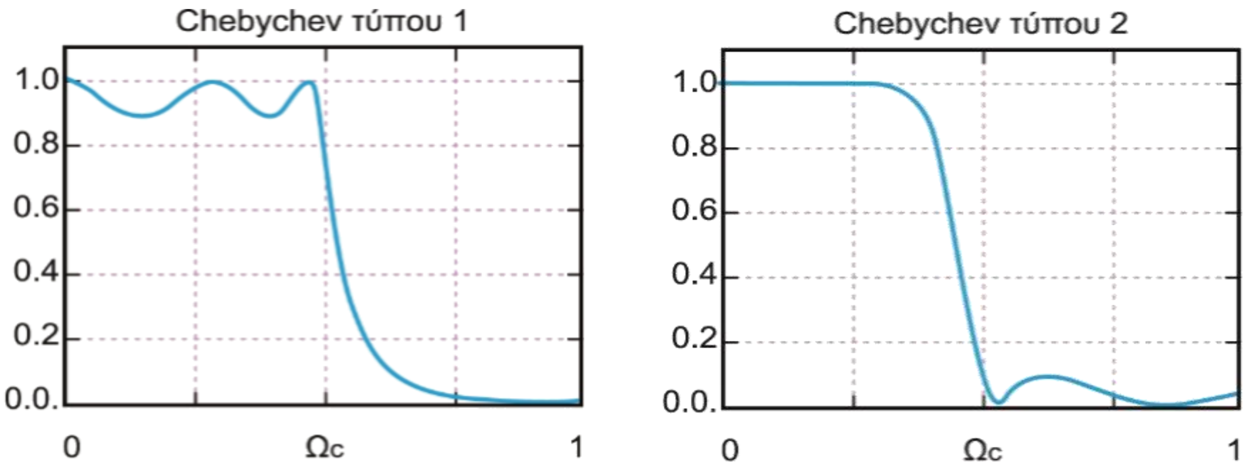
- **[z, p, k] = cheb1app(N, Rp)**: Επιστρέφει τους πόλους, τα μηδενικά και το κέρδος ενός κανονικοποιημένου πρότυπου αναλογικού φίλτρου Chebyshev τύπου I τάξης N, με κυμάτωση Rp στη ζώνη διέλευσης.

Βαθυπερατό φίλτρο Chebyshev τύπου ΙΙ

- Το φίλτρο Chebyshev τύπου ΙΙ έχει πόλους και μηδενικά, παρουσιάζει ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής ($\Omega > 1$) και φθίνει μονότονα στη ζώνη διέλευσης ($0 \leq \Omega < 1$).
- Τα μηδενικά του βρίσκονται επάνω στο φανταστικό άξονα του επιπέδου s.
- Το τετραγωνισμένο μέτρο της απόκρισης συχνότητάς του είναι:

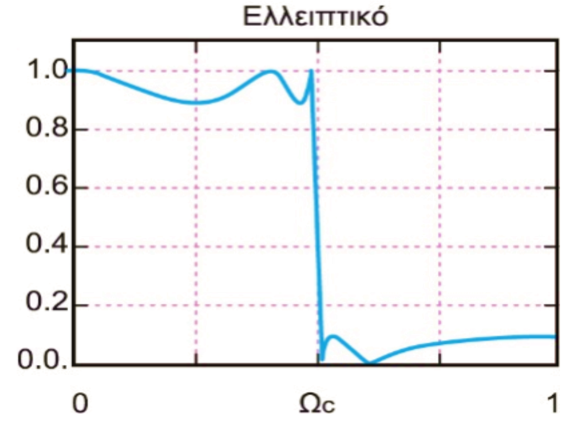
$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\varepsilon^2 \, T_N^2(\Omega_c/\Omega)]^{-1}}$$

- Το φίλτρο αυτό παρουσιάζει περισσότερο γραμμική φάση και βελτιωμένη καθυστέρηση ομάδας σε σχέση με το φίλτρο Chebyshev τύπου Ι.
- Υλοποίηση με τις συναρτήσεις **cheb2ord()**, **cheby2()** και **cheb2ap().**



Βαθυπερατό ελλειπτικό φίλτρο

- Το βαθυπερατό ελλειπτικό φίλτρο παρουσιάζει ομοιόμορφη κυμάτωση τόσο στη ζώνη διέλευσης όσο και στη ζώνη αποκοπής, όπως το ισοκυματικό FIR φίλτρο.
- Το ελλειπτικό φίλτρο είναι καλύτερο των φίλτρων Butterworth και Chebychev επειδή απαιτεί μικρότερη τάξη για να ικανοποιήσει τις ίδιες προδιαγραφές.
- Ωστόσο, η απόκριση του ελλειπτικού φίλτρου παρουσιάζει περισσότερες μη-γραμμικότητες στη ζώνη διέλευσης, σε σχέση με τα φίλτρα Butterworth ή Chebychev.



- Το τετραγωνισμένο μέτρο της απόκρισης συχνότητας του βαθυπερατού ελλειπτικού φίλτρου είναι:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2\, U_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}$: κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης, $\boldsymbol{\Omega_c}$: συχνότητα αποκοπής, $\boldsymbol{U_N(\Omega)}$: ελλειπτική συνάρτηση Jacobi τάξης N.
- Για τη σχεδίαση βαθυπερατού αναλογικού ελλειπτικού φίλτρου το Matlab προσφέρει τη συνάρτηση **ellip()** και τη συνάρτηση **ellipord()** για τον υπολογισμό της βέλτιστης τάξης, ενώ για τη σχεδίαση πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού ελλειπτικού φίλτρου προσφέρει τη συνάρτηση **ellipap()**.