Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 12: Μελέτη ΓΧΑ Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Fourier

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος
2. Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ συστήματος
3. Αναπαράσταση πλάτους & φάσης της απόκρισης συχνότητας
4. Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ συστήματος σε περιοδική είσοδο
5. Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ συστήματος σε μη-περιοδική είσοδο
6. Περιγραφή Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης με τον μετασχηματισμό Fourier
7. Αντίστροφα συστήματα

1. Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y(t)$ όταν η είσοδος είναι το σήμα $x(t) = A\, e^{j\Omega_0 t}, -\infty < t < \infty$. Από τη συνέλιξη έχουμε:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{j\Omega_0 (t-\tau)}\, d\tau = A\, e^{j\Omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\Omega_0 \tau}\, d\tau$$

Επομένως, η έξοδος του συστήματος γράφεται:

$$y(t) = A\, e^{j\Omega_0 t}\, H(\Omega_0)$$

όπου $H(\Omega_0)$ είναι η απόκριση συχνότητας υπολογισμένη στη συχνότητα Ω_0, δηλαδή:

$$H(\Omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\Omega_0 \tau}\, d\tau$$

Το σήμα εξόδου $y(t)$ είναι ίδιο με το περιοδικό σήμα εισόδου $Ae^{j\Omega_0 t}$ πολλαπλασιασμένο με τον μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης $H(\Omega_0)$ στη συχνότητα Ω_0.

Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Η μιγαδική συνάρτηση $H(\Omega_0)$ αποτελεί **ιδιοτιμή** του συστήματος.

Σήματα της μορφής $x(t) = A\, e^{j\Omega_0 t}$ τα ονομάζουμε **ιδιοσυναρτήσεις,** επειδή εμφανίζονται και στην είσοδο και στην έξοδο του συστήματος.

Τελικά είναι:

$$y(t) = A|H(\Omega_0)|\, e^{j[\Omega_0 t\, +\, \theta_H(\Omega_0)]}$$

Το πλάτος της εξόδου $y(t)$ είναι $A|H(\Omega_0)|$, δηλαδή το γινόμενο του πλάτους της εισόδου επί το μέτρο της απόκρισης συχνότητας $|H(\Omega_0)|$

Η φάση της εξόδου είναι μετατοπισμένη κατά $\theta_H(\Omega_0)$ ως προς τη φάση της εισόδου $x(t)$.

Αυτή είναι μια σημαντική ιδιότητα των ΓΧΑ συστημάτων όταν στην είσοδό τους εφαρμόζεται ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ή ο συνδυασμός ενός συνημιτόνου και ενός ημιτόνου) ορισμένης συχνότητας.

Τα παραπάνω ισχύουν γενικότερα, δηλαδή ακόμα και όταν η είσοδος του ΓΧΑ συστήματος δεν είναι ιδιοσυνάρτηση.

2. Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος

Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος

Ένα ΓΧΑ σύστημα σε αρχική ηρεμία, περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση του $h(t)$, και μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος για οποιαδήποτε είσοδο $x(t)$ μέσω της συνέλιξης:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)\, H(\Omega)$$

Λύνοντας ως προς $H(\Omega)$, έχουμε:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Η συνάρτηση $H(\Omega)$ ονομάζεται **απόκριση συχνότητας** του συστήματος και είναι ο FT της κρουστικής απόκρισης $h(t)$:

$$H(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

Εναλλακτικός Υπολογισμός Εξόδου ΓΧΑ Συστήματος

Όταν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση $h(t)$ και την είσοδο $x(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος και ζητείται η εύρεση της εξόδου $y(t)$, είναι υπολογιστικά απλούστερο (αντί της συνέλιξης) να υπολογιστούν:

- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(\Omega)$ με FT στην $h(t)$
- Η συνάρτηση $Y(\Omega)$ από τη σχέση $Y(\Omega) = X(\Omega)\, H(\Omega)$
- Η έξοδος $y(t)$ με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην $Y(\Omega)$

Ανάλογα πράττουμε αν γνωρίζουμε την είσοδο $x(t)$ και την έξοδο $y(t)$ και ζητείται η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή είναι υπολογιστικά απλούστερο να υπολογιστούν:

- Τα $X(\Omega)$ και $Y(\Omega)$
- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(\Omega)$ από τη σχέση $H(\Omega) = Y(\Omega)/X(\Omega)$
- Η κρουστική απόκριση $h(t)$ με αντίστροφο FT στην $H(\Omega)$

3. Αναπαράσταση πλάτους & φάσης της απόκρισης συχνότητας

Αναπαράσταση πλάτους & φάσης

Επειδή η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία μιγαδική συνάρτηση, μπορεί να γραφεί σε **πολική μορφή** ως:

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|\, e^{j\theta_{\mathrm{H}}(\Omega)}$$

όπου $|H(\Omega)|$ είναι το **πλάτος** του συστήματος και $\theta_{\mathrm{H}}(\Omega)$ είναι η **φάση** του. Οι γραφικές παραστάσεις των $|H(\Omega)|$ και $\theta_{\mathrm{H}}(\Omega)$ ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης** του συστήματος, αντίστοιχα.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$|Y(\Omega)| = |H(\Omega)|\, |X(\Omega)|$$

$$\theta_Y(\Omega) = \theta_H(\Omega) + \theta_X(\Omega)$$

Η επίδραση ενός ΓΧΑ συστήματος σε ένα σήμα εισόδου, είναι:

- ο πολλαπλασιασμός του μέτρου του FT του σήματος εισόδου επί το μέτρο της απόκρισης συχνότητας (συνάρτηση μεταφοράς)
- η μετατόπιση της φάσης του FT του σήματος εισόδου κατά τη φάση της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.

Αναπαράσταση πλάτους & φάσης

Αν η απόκριση συχνότητας $h(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος είναι πραγματική, περιοδική ή απεριοδική συνάρτηση, τότε διαθέτει τις (πολύ ενδιαφέρουσες) ιδιότητες **φασματικής συμμετρίας** του μετασχηματισμού Fourier.

Συγκεκριμένα, το πλάτος $|H(\Omega)|$ και το πραγματικό μέρος $Re\{H(\Omega)\}$ είναι άρτιες συναρτήσεις της συχνότητας Ω, ενώ η φάση $\measuredangle X(\Omega)$ και το φανταστικό μέρος $Im\{H(\Omega)\}$ είναι περιττές συναρτήσεις:

$$|H(\Omega)| = |H(-\Omega)|$$

$$Re\{H(\Omega)\} = Re\{H(-\Omega)\}$$

$$\measuredangle H(\Omega) = -\measuredangle H(-\Omega)$$

$$Im\{H(\Omega)\} = -Im\{H(-\Omega)\}$$

4. Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ συστήματος σε περιοδική είσοδο

Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος σε Περιοδική Είσοδο

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y(t)$ όταν η είσοδος είναι ένα περιοδικό σήμα με περίοδο T_0, το οποίο αναπτύσσεται σε εκθετική σειρά Fourier από τη σχέση:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{jk\Omega_0 t}$$

Η έξοδος του συστήματος είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο και γράφεται:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\Omega_0) X_k \, e^{jk\Omega_0 t}$$

Παρατηρούμε ότι τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ είναι ίδια εκτός από τους μιγαδικούς συντελεστές Fourier, οι οποίοι από X_k στο σήμα $x(t)$ έχουν γίνει $H(k\Omega_0)X_k$ στο σήμα $y(t)$, δηλαδή έχουν πολλαπλασιαστεί με την τιμή της απόκρισης συχνότητας $H(\Omega)$ στις αρμονικές συχνότητες $k\Omega_0$.

Το ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier της εξόδου είναι:

$$y(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |H(k\Omega_0)| \, |X_k| \cos\big(\Omega_0 t + \theta(k\Omega_0) + \theta_H(k\Omega_0)\big)$$

5. Απόκριση Συχνότητας
ΓΧΑ συστήματος σε μη-περιοδική είσοδο

Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος σε μη-Περιοδική Είσοδο

Αν η είσοδος του ΓΧΑ συστήματος είναι ένα οποιοδήποτε σήμα, η έξοδος μπορεί να υπολογιστεί με τη συνέλιξη:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

και ισχύει:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)\, H(\Omega)$$

ή ισοδύναμα :

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Η ρητή μορφή της $H(\Omega)$, υλοποιώντας όλες τις δυνατές απλοποιήσεις γράφεται:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{N(\Omega)}{D(\Omega)}$$

Αν οι ρίζες του παρονομαστή είναι απλές, η απόκριση συχνότητας μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$H(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{D(\Omega)} = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{a_k + j\Omega_0 t}$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{M} A_k\, e^{-a_k t}\, u(t)$$

6. Περιγραφή Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης με τον Μετασχηματισμό Fourier

Περιγραφή Γ.Δ.Ε . με FT (1/2)

Η περιγραφή της συμπεριφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος μέσω της συνέλιξης αποτελεί έναν **έμμεσο τρόπο** περιγραφής, ο οποίος **αδυνατεί** να περιγράψει την εσωτερική δομή του συστήματος.

Συχνά χρησιμοποιούμε μία **γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (ΓΔΕΣΣ)** που **συσχετίζει** τα σήματα εισόδου – εξόδου:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m}$$

όπου τα α_n, b_m είναι πραγματικές σταθερές και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές.

Εφαρμόζουμε ιδιότητα παραγώγισης του μετ. Fourier $F\{x^n(t)\} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j\Omega)^n X(\Omega)$ σε κάθε μέλος και έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} \overset{F}{\longleftrightarrow} \left[\sum_{n=0}^{N} a_n (j\Omega)^n\right] Y(\Omega)$$

$$\sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} \overset{F}{\longleftrightarrow} \left[\sum_{m=0}^{M} b_m (j\Omega)^m\right] X(\Omega)$$

Περιγραφή Γ.Δ.Ε . με FT (2/2)

$$\left[\sum_{n=0}^{N} a_n (j\Omega)^n\right] Y(\Omega) = \left[\sum_{m=0}^{M} b_m (j\Omega)^m\right] X(\Omega)$$

Διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(\Omega)$:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m (j\Omega)^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n (j\Omega)^n}$$

ή ισοδύναμα:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m (j\Omega)^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n (j\Omega)^n}$$

Η εξίσωση είναι μοναδικά ορισμένη ακόμα και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες της ΓΔΕΣΣ. Αυτό συμβαίνει επειδή ο μετ. Fourier υπολογίζεται από το $-\infty$, στο οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία, δηλαδή ότι οι αρχικές συνθήκες που συνοδεύουν τη ΓΔΕΣΣ είναι μηδενικές.

Μια αναλυτικότερη διερεύνηση της απόκρισης συχνότητας και της επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα, θα δοθεί μέσω του μετασχηματισμού Laplace.

7. Αντίστροφα Συστήματα

Αντίστροφα Συστήματα

Δοθέντος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$, το **αντίστροφο σύστημα** είναι αυτό που έχει κρουστική απόκριση $g(t)$, τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση:

$$h(t) * g(t) = \delta(t)$$

Η απόκριση συχνότητας του αντίστροφου συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$H(\Omega)G(\Omega) = 1 \Rightarrow G(\Omega) = \frac{1}{H(\Omega)}$$

Μετά την αντιστροφή ενός πρακτικού συστήματος θα πρέπει να ελέγχουμε αν το αντίστροφο σύστημα που προκύπτει είναι αιτιατό, δηλαδή πρακτικά υλοποιήσιμο.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$ όταν δέχεται στην είσοδο το σήμα $x(t) = \left(2e^{-t} + e^{-4t}\right) u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι:

$$H(\Omega) = \frac{2}{3 + j\Omega}$$

Ο μετ. Fourier της εισόδου είναι:

$$X(\Omega) = \frac{2}{1 + j\Omega} + \frac{1}{4 + j\Omega}$$

και ο μετ. Fourier της εξόδου δίνεται από:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{2}{3 + j\Omega}\left(\frac{2}{1 + j\Omega} + \frac{1}{4 + j\Omega}\right) = \cdots = \frac{6(3 + j\Omega)}{(1 + j\Omega)(3 + j\Omega)(4 + j\Omega)}$$

$$= \frac{6}{(1 + j\Omega)(4 + j\Omega)} = \frac{C_1}{1 + j\Omega} + \frac{C_2}{4 + j\Omega}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Υπολογίζουμε τους συντελεστές C_1 και C_2 από τις σχέσεις:

$$C_1 = \frac{6}{(1+j\Omega)(4+j\Omega)}(1+j\Omega)\bigg|_{j\Omega=-1} = 2$$

$$C_2 = \frac{6}{(1+j\Omega)(4+j\Omega)}(4+j\Omega)\bigg|_{j\Omega=-4} = -2$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου είναι:

$$Y(\Omega) = \frac{2}{1+j\Omega} - \frac{2}{4+j\Omega}$$

Άρα το σήμα εξόδου $y(t)$ είναι:

$$y(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-4t}\right) u(t)$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = 15\,x(t) - 2\frac{dx(t)}{dt}$$

<u>Απάντηση</u>: Λύνοντας στο πεδίο του χρόνου βρίσκουμε:

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(21e^{-3t} - 25e^{-5t}\right)u(t)$$

Εφαρμόζουμε τον μετ. Fourier και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και με βάση τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της παραγώγισης, λαμβάνουμε:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t)\right\} = F\left\{15x(t) - 2\frac{dx(t)}{dt}\right\} \Rightarrow$$

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 8F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 15F\{y(t)\} = 15F\{x(t)\} - 2F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \Rightarrow$$

$$(j\Omega)^2 Y(\Omega) + 8j\Omega\, Y(\Omega) + 15\, Y(\Omega) = 15\, X(\Omega) - 2j\Omega\, X(\Omega) \Rightarrow$$

$$Y(\Omega)\left(-\Omega^2 + 8j\Omega + 15\right) = X(\Omega)(15 - 2j\Omega) \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{15 - 2j\Omega}{-\Omega^2 + 8j\Omega + 15} = \frac{15 - 2j\Omega}{(3 + j\Omega)(5 + j\Omega)}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ υπολογίζεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης συχνότητας $H(\Omega)$. Η απόκριση συχνότητας γράφεται:

$$H(\Omega) = \frac{C_1}{(3 + j\Omega)} + \frac{C_2}{(5 + j\Omega)}$$

Υπολογίζουμε τα C_1 και C_2:

$$C_1 = \frac{15 - 2j\Omega}{(3 + j\Omega)\,(5 + j\Omega)}(3 + j\Omega)\bigg|_{j\Omega=-3} = \cdots = \frac{21}{2}$$

$$C_2 = \frac{15 - 2j\Omega}{(3 + j\Omega)\,(5 + j\Omega)}(5 + j\Omega)\bigg|_{j\Omega=-5} = \cdots = -\frac{25}{2}$$

Οπότε η απόκριση συχνότητας σε άθροισμα απλών κλασμάτων είναι:

$$H(\Omega) = \frac{21}{2}\frac{1}{(3 + j\Omega)} - \frac{25}{2}\frac{1}{(5 + j\Omega)}$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(21e^{-3t} - 25e^{-5t}\right)u(t)$$

Καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης, όμως με σαφώς πιο εύκολη διαδικασία.

Άσκηση 3

Ένα ΓΧΑ σύστημα διεγείρεται από είσοδο $x(t) = e^{-3t}u(t)$ και παράγει την έξοδο $y(t) = t\, e^{-3t}u(t)$. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση.

<u>Απάντηση</u>: (α) Ο μετασχηματισμός Fourier της εισόδου και της εξόδου, είναι:

$$X(\Omega) = \frac{1}{3 + j\Omega}$$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(3 + j\Omega)^2}$$

Η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\frac{1}{(3 + j\Omega)^2}}{\frac{1}{3 + j\Omega}} = \frac{1}{3 + j\Omega}$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το μέτρο και η φάση ενός ΓΧΑ συστήματος, του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(\omega) = \frac{1 - j\Omega}{1 + j\Omega}$$

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού της απόκρισης συχνότητας βρίσκουμε το μέτρο και τη φάση της. Είναι:

$$|H(\Omega)| = \frac{|1 - j\Omega|}{|1 + j\Omega|} = \frac{\sqrt{1 + \Omega^2}}{\sqrt{1 + \Omega^2}} = 1$$

$$\measuredangle H(\Omega) = \measuredangle H\{1 - j\Omega\} - \measuredangle H\{1 + j\Omega\} = \tan^{-1}(-\Omega) - \tan^{-1}(\Omega) = 2\tan^{-1}(\Omega)$$

Άσκηση 5

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει απόκριση συχνότητας που δίνεται από τη σχέση:

$$H(\Omega) = \frac{5 + j\Omega}{6 + 5j\Omega - \Omega^2}$$

(α) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα.

(β) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

(γ) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδο εφαρμοστεί το σήμα $x(t) = e^{-5t}u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: (α) Γνωρίζουμε ότι η απόκριση συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Από τον ορισμό της απόκρισης συχνότητας έχουμε:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{5 + j\Omega}{6 + 5j\Omega - \Omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(\Omega)\left(6 + 5j\Omega - \Omega^2\right) = X(\Omega)(5 + j\Omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (j\Omega)^2 Y(\Omega) + 5j\Omega\, Y(\Omega) + 6Y(\Omega) = j\Omega X(\Omega) + 5X(\Omega)$$

Μετατρέπουμε την παραπάνω σχέση σε διαφορική εξίσωση λαμβάνοντας υπόψη ότι από την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier, ισχύει:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = (j\Omega)^2 Y(\Omega), \qquad F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = (j\Omega)Y(\Omega), \qquad F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = (j\Omega)X(\Omega)$$

οπότε λαμβάνουμε τη σχέση:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 5F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 6y(t) = F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 5\,x(t)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Επομένως η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5\,x(t)$$

(β) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος θα υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμού Fourier στη δοθείσα απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$.

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο του αθροίσματος σε απλά κλάσματα, και έχουμε:

$$H(\Omega) = \frac{5 + j\Omega}{6 + 5j\Omega - \Omega^2} = \frac{5 + j\Omega}{(2 + j\Omega)(3 + j\Omega)} = \frac{3}{2 + j\Omega} - \frac{2}{3 + j\Omega}$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, βρίσκουμε:

$$h(t) = F^{-1}\{H(\Omega)\} = 3\,F^{-1}\left\{\frac{1}{2 + j\Omega}\right\} - 2\,F^{-1}\left\{\frac{1}{3 + j\Omega}\right\} = \left(3e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)u(t)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

(γ) Για τον υπολογισμό της εξόδου $y(t)$, εργαζόμαστε στο πεδίο της συχνότητας λόγω υπολογιστικής απλότητας. Αρχικά υπολογίζουμε τον FT της εισόδου $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = F\left\{e^{-5t}u(t)\right\} = \frac{1}{5 + j\Omega}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της εξόδου $Y(\omega)$:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\, X(\Omega) = \frac{5 + j\Omega}{(2 + j\Omega)(3 + j\Omega)} \frac{1}{(5 + j\Omega)} = \frac{1}{(2 + j\Omega)(3 + j\Omega)}$$

$$= \frac{1}{(2 + j\Omega)} - \frac{1}{(3 + j\Omega)}$$

Τέλος, με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ανακτούμε την έξοδο $y(t)$:

$$y(t) = F^{-1}\{Y(\Omega)\} = \cdots = (e^{-2t} - e^{-3t})\, u(t)$$

Άσκηση 6

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την απόκριση πλάτους και φάσης του ΓΧΑ συστήματος, με κρουστική απόκριση $h(t) = u(t-2) - u(t+1)$.

<u>Απάντηση</u>: Η απόκριση συχνότητας (συνάρτηση μεταφοράς) του συστήματος θα προκύψει από τον ΜF της κρουστικής απόκρισης. Είναι:

$$H(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-2) e^{-j\Omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t+1) e^{-j\Omega t} dt$$

Επειδή οι βηματικές συναρτήσεις $u(t-2)$ και $u(t+1)$ ορίζονται ως:

$$u(t-2) = \begin{cases} 1 \ \text{για}\ t > 2 \\ 0 \ \text{για}\ t < 2 \end{cases} \quad \kappa\alpha\iota \quad u(t+1) = \begin{cases} 1 \ \text{για}\ t > -1 \\ 0 \ \text{για}\ t < -1 \end{cases}$$

θα είναι:

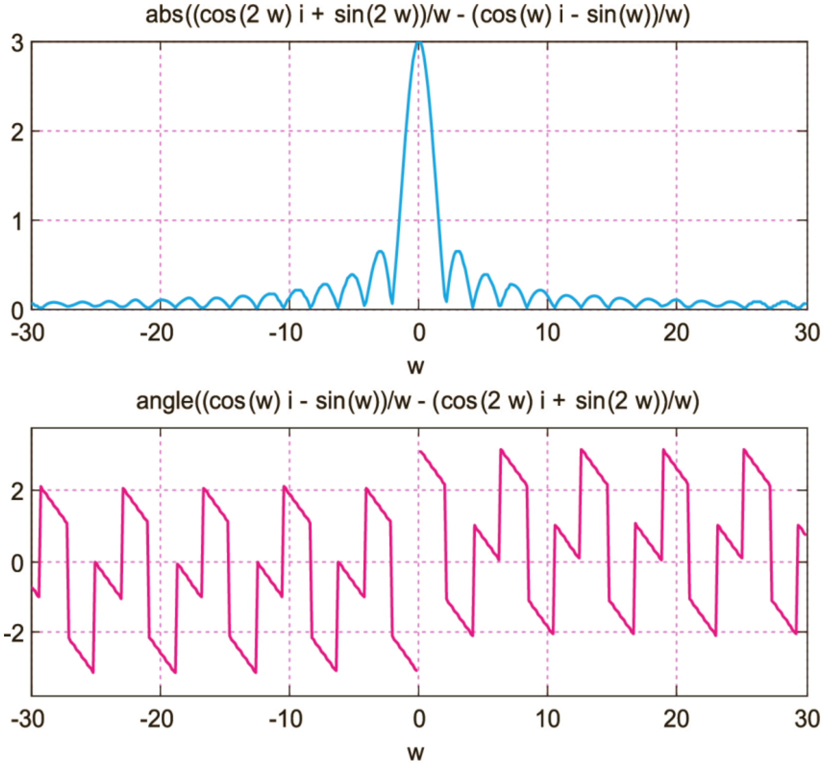
$$H(\Omega) = \int_{2}^{+\infty} e^{-j\Omega t} dt - \int_{-1}^{+\infty} e^{-j\Omega t} dt = -e^{\frac{-j\Omega}{2}} \frac{2 \sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\Omega} = -3e^{-j\Omega} \operatorname{sinc}\left(\frac{3\Omega}{2\pi}\right)$$

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Έτσι, το πλάτος και η φάση είναι:

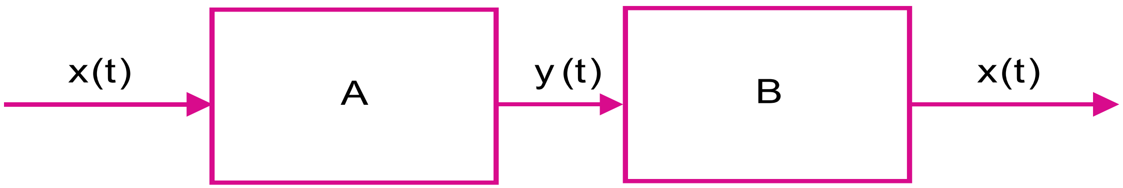
$$|H(\Omega)| = 3\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{3\Omega}{2\pi}\right)\right| \quad \text{και} \quad \measuredangle H(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} = -\pi f$$

Οι συναρτήσεις πλάτους $|H(\Omega)|$ και φάσης $\measuredangle H(\Omega)$



Άσκηση 7

Δίνεται η παρακάτω σειριακή συνδεσμολογία των συστημάτων συνεχούς χρόνου Α και Β. Στην είσοδο του συστήματος Α εισέρχεται το σήμα $x(t)$ και στην έξοδο του συστήματος Β εξέρχεται το ίδιο σήμα $x(t)$. Αν το σύστημα Α είναι ΓΧΑ να διαπιστωθεί αν το σύστημα Β είναι επίσης ΓΧΑ. Ποιες άλλες προϋποθέσεις πρέπει να πληροί το παραπάνω σύστημα Β;



<u>Απάντηση</u>: Για να εξέρχεται το σήμα $x(t)$ στην έξοδο του συστήματος Β θα πρέπει η συνολική ισοδύναμη απόκριση της συνδεσμολογίας να είναι $h_{eq}(t) = \delta(t)$ και επειδή τα συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά, οι κρουστικές αποκρίσεις των δύο συστημάτων πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση:

$$h_A(t) * h_B(t) = \delta(t) \qquad (1)$$

Το σύστημα Β πρέπει να είναι ΓΧΑ προκειμένου η έξοδός του να μπορεί να υπολογιστεί από τη συνέλιξη

$$x(t) = y(t) * h_B(t) = \big(x(t) * h_A(t)\big) * h_B(t) = x(t) * \big(h_A(t) * h_B(t)\big)$$
$$= x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Στο πεδίο της συχνότητας η παραπάνω σχέση (1) μεταφράζεται ως:

$$H_A(s)\ H_B(s) = 1$$

Το σύστημα Β είναι αντίστροφο του Α και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος Β δίνεται από τη σχέση:

$$H_B(s) = \frac{1}{H_A(s)}$$

Επειδή και τα δύο συστήματα πρέπει να είναι πρακτικά υλοποιήσιμα, άρα αιτιατά και ευσταθή, πρέπει οι πόλοι τους να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο των μιγαδικών συχνοτήτων.

Λόγω της παραπάνω αντιστροφής, προκύπτει ότι οι πόλοι του συστήματος Α γίνονται μηδενικά για το σύστημα Β, και τα μηδενικά του συστήματος Α γίνονται πόλοι του συστήματος Β.

Με βάση τη διαπίστωση αυτή προκύπτει ότι όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά του συστήματος Α πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Ένα σύστημα που πληροί αυτή την προϋπόθεση ονομάζεται **σύστημα ελάχιστης φάσης** και μπορεί να αντιστραφεί. Το δε αντίστροφο σύστημα είναι και αυτό ελάχιστης φάσης.