Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 10: Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier, Μετασχηματισμός Fourier σημάτων Ισχύος

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier
2. Μετασχηματισμός Fourier σημάτων Ισχύος
3. Συσχετίσεις και φασματικές πυκνότητες

1. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός Αντίστροφου μετ. Fourier

Ορισμός Αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega$$

Οι ιδιότητες του ευθύ μετασχηματισμό ισχύουν προφανώς και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

Άσκηση 1

Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\Omega) = 2\,cos(2\Omega + \pi/4)$$

<u>Απάντηση</u>: Χρησιμοποιώντας τον τύπο Euler η δοθείσα συνάρτηση $X(\Omega)$ γράφεται:

$$X(\Omega) = 2cos(2\Omega + \pi/4) = e^{j\,[2\Omega+(\pi/4)]} + e^{-j\,[2\Omega+(\pi/4)]} = e^{2j\Omega}e^{j\pi/4} + e^{-2j\Omega}e^{-j\pi/4}$$

Εισάγοντας τη μορφή αυτή στον ορισμό του αντίστροφου μετ. Fourier, έχουμε:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\,e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{e^{j\pi/4}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega(t+2)}\,dt + \frac{e^{-j\pi/4}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega(t-2)}dt$$

$$= e^{j\pi/4}\delta(t+2) + e^{-j\pi/4}\delta(t-2)$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $(t)\xleftrightarrow{F}1$ και ότι από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της μονάδας ως $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega t}d\Omega$ προκύπτει:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega(t-t_0)}d\Omega$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε κάνοντας χρήση της ιδιότητας ολίσθησης στο χρόνο:

$$x(t-t_0)\xleftrightarrow{F}e^{-j\Omega t_0}\,X(\Omega)$$

Θέτοντας $x(t) = \delta(t)$ και $X(\Omega) = 1$ έχουμε:

$$\delta(t)\xleftrightarrow{F}1$$

$$\delta(t-t_0)\xleftrightarrow{F}e^{-j\Omega t_0}\,1 = \; e^{-j\Omega t_0}$$

$$\delta(t-2)\xleftrightarrow{F}e^{-2j\Omega} \text{ και } \delta(t+2)\xleftrightarrow{F}e^{2j\Omega}$$

Επομένως:

$$X(\Omega) = e^{2j\Omega}e^{j\pi/4} + e^{-2j\Omega}e^{-j\pi/4} \Longrightarrow x(t) = \delta(t+2)\,e^{j\pi/4} + \delta(t+2)e^{-j\pi/4}$$

Άσκηση 2

Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1+3j\Omega)(1+j\Omega)}$$

Απάντηση: Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και χωρίζουμε το κλάσμα σε δύο επιμέρους κλάσματα:

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1+3j\Omega)(1+j\Omega)} = \frac{A}{(1+3j\Omega)} + \frac{B}{(1+j\Omega)} = \frac{A + jA\Omega + B + j3B\Omega}{(1+3j\Omega)(1+j\Omega)}$$

Το πρώτο και το τελευταίο κλάσματα είναι ίσα και επειδή οι παρονομαστές τους είναι ίσοι προκύπτει ότι είναι ίσοι και οι αριθμητές τους. Άρα ισχύει η μιγαδική ισότητα:

$$A + jA\Omega + B + j3B\Omega = 1$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Επομένως προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα A και B.

$$A + B = 1$$

$$A + 3B = 0$$

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $A = 3/2$ και $B = -1/2$. Επομένως ισχύει:

$$X(\Omega) = \frac{3}{2}\frac{1}{(1+3j\Omega)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+j\Omega)}$$

Με τους γνωστούς μετασχηματισμούς προκύπτει:

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) = \frac{1}{2}\left[3e^{-3t} - e^{-t}\right]u(t)$$

2. Παραθύρωση Σήματος

Παραθύρωση Σήματος

Παραθύρωση (windowing) είναι ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος με μία συνάρτηση παραθύρου, δηλαδή $y(t) = x(t)\, w(t)$.

Από την όλη (ίσως και άπειρη) διάρκεια του σήματος λαμβάνουμε μόνο ένα τμήμα του, διάρκειας ίσης με τη διάρκεια του παραθύρου.

Πως επιδρά η παραθύρωση στο φάσμα $Y(\Omega)$ του αποκομμένου σήματος $y(t)$;

Έστω ότι η συνάρτηση παραθύρου είναι ένας τετραγωνικός παλμός διάρκειας $2T$:

$$w(t) = u(t+T) - u(t-T), \qquad T > 0$$

Το αποκομμένο σήμα με βάση την ιδιότητα πολλαπλασιασμού του μετ. Fourier είναι:

$$y(t) = x(t)\, w(t) = w(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)\, e^{j\lambda t}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)\, w(t)\, e^{j\lambda t}\, d\lambda$$

Από την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα, ο μετ. Fourier $Y(\Omega)$ του $y(t)$ είναι:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)\, F\left\{w(t)\, e^{j\lambda t}\right\} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)\, W(\Omega - \lambda)\, d\lambda$$

Παραθύρωση Σήματος

Επομένως, ο μετ. Fourier $Y(\Omega)$ δίνεται από:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}[X(\Omega) * W(\Omega)]$$

όπου η συνάρτηση $W(\Omega)$ είναι:

$$W(\Omega) = F\{w(t)\} = \frac{1}{s}\left[e^{Ts} - e^{-Ts}\right]_{s=j\Omega} = \frac{2\sin(\Omega T)}{\Omega}$$

- Η διάρκεια του σήματος $y(t)$ είναι πεπερασμένη στο πεδίο του χρόνου, η συνέλιξη στο πεδίο συχνότητας δίνει άπειρο εύρος συχνοτήτων στα $Y(\Omega)$ και $W(\Omega)$.
- Το φάσμα $Y(\Omega)$ του αποκομμένου σήματος $y(t)$ δεν είναι ίδιο με το φάσμα $X(\Omega)$ του αρχικού σήματος $x(t)$, αλλά προκύπτει από τη συνέλιξη $X(\Omega) * W(\Omega)$ των φασμάτων, δια 2π.
- Επομένως, το φάσμα του αποκομμένου σήματος $y(t)$ καθορίζεται όχι μόνο από το φάσμα του αρχικού σήματος $x(t)$ αλλά και από το φάσμα της συνάρτησης παραθύρου $w(t)$.
- Η αλλαγή του φάσματος είναι ανεπιθύμητη. Επειδή η παραθύρωση είναι μία χρήσιμη διαδικασία στην επεξεργασία των σημάτων, χρειαζόμαστε συναρτήσεις παραθύρου που αλλοιώνουν όσο το δυνατό λιγότερο το φάσμα $Y(\Omega)$ του αποκομμένου σήματος (Hamming, Hanning, Kaiser, κλπ).

3. Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος (1/2)

- Υπάρχουν σήματα, όπως περιοδικές, κρουστικές, βηματικές συναρτήσεις, κλπ, που δεν υπακούουν στις συνθήκες Dirichlet, αλλά έχουν μετασχηματισμό Fourier.

- Τα περισσότερα από αυτά έχουν άπειρη ενέργεια αλλά συχνά η ισχύς τους $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt$ είναι πεπερασμένη (σήματα ισχύος).

- Τα σήματα αυτά μπορούν να έχουν μετασχηματισμό Fourier αν επιτραπεί η παρουσία κρουστικών συναρτήσεων σε αυτόν.

- Άλλωστε οι FT των περιοδικών σημάτων $e^{j\Omega t}, cos(\Omega_0 t),\ sin(\Omega_0 t)$ περιέχουν κρουστικές συναρτήσεις.

- Για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, ορίζουμε το **«αποκομμένο»** (truncated) σήμα $x_T(t)$ που προκύπτει από μία περίοδο του $x(t)$, από τη σχέση:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος (2/2)

- Αποδεικνύεται ότι ο μετ. Fourier ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ είναι ένα άπειρο άθροισμα **όρων**, που καθένας τους είναι το **γινόμενο** του FT του «αποκομμένου» σήματος $x_T(t)$ επί μία μετατοπισμένη στη συχνότητα κρουστική συνάρτηση $\delta(\Omega)$, σύμφωνα με τη σχέση:

$$X(\Omega) = \Omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\Omega_0)\, \delta(\Omega - n\Omega_0)$$

με $X_T(\Omega)$ συμβολίζεται ο FT του «αποκομμένου» (truncated) σήματος $x_T(t)$.

- Επομένως, ο μετ. Fourier ενός περιοδικού σήματος είναι ένα άπειρο άθροισμα κρουστικών συναρτήσεων μετατοπισμένες σε συχνότητες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας (Ω_0) του περιοδικού σήματος. Κάθε κρουστική συνάρτηση είναι σταθμισμένη (πολλαπλασιασμένη) με το γινόμενο $\Omega_0\, X_T(k\Omega_0)$.
- Τα γινόμενα αυτά είναι ίσα με τους συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier του περιοδικού σήματος, δηλαδή:

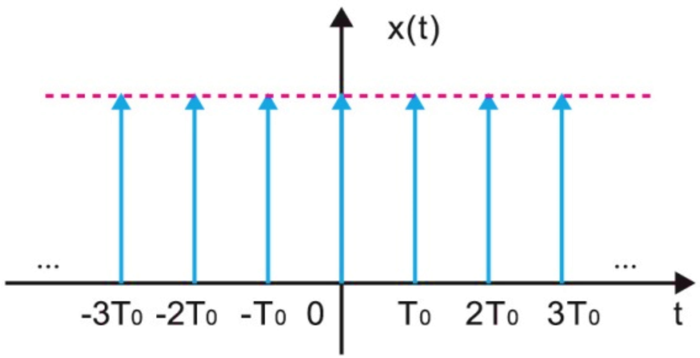
$$X_k = \Omega_0\, X_T(k\Omega_0)$$

Παρατηρήσεις

- Η $X_k = \Omega_0\ X_T(k\Omega_0)$ επιβεβαιώνει τη σχέση μεταξύ της Σειράς Fourier και του Μετασχηματισμού Fourier
- Υποδεικνύει έναν απλούστερο τρόπο υπολογισμού των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier μίας περιοδικής συνάρτησης $x(t)$, μέσω των βημάτων:
  - Από το περιοδικό σήμα $x(t)$ υπολογίζουμε το αποκομμένο σήμα $x_T(t)$, από μία περίοδο του περιοδικού σήματος.
  - Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier του αποκομμένου σήματος $x_T(t)$ χρησιμοποιώντας είτε τον ορισμό είτε τις ιδιότητες είτε τους γνωστούς μετ.Fourier.
  - Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στις συχνότητες $\Omega_0 = 2\pi k/T_0$ για να βρούμε τη k −στή αρμονική και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε επί Ω_0.
  - Οι συντελεστές X_k είναι τα «δείγματα» στις αρμονικές συχνότητες $\mathrm{k}\Omega_0$ του μετασχηματισμού Fourier του αποκομμένου σήματος, σταθμισμένα επί Ω_0.
- Παρατηρούμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές X_kτης σειράς Fourier **δειγματοληπτώντας** απλά τον μετασχηματισμό Fourier του αποκομμένου σήματος, αποφεύγοντας έτσι τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συρμού κρουστικών παλμών



<u>Απάντηση</u>: Το σήμα αυτό είναι μία περιοδική συνάρτηση και εκφράζεται μαθηματικά από τη σχέση:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

Εφόσον το $x(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση, το ανάπτυγμά του σε εκθετική μορφή σειράς Fourier, είναι:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{jk\Omega_0 t}, \qquad \text{όπου } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Οι συντελεστές X_k της εκθετικής μορφής σειράς Fourier δίνονται από:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \, e^{-jk\Omega_0 t} \, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \, e^{-jk\Omega_0 t} \, dt = \frac{1}{T_0}$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

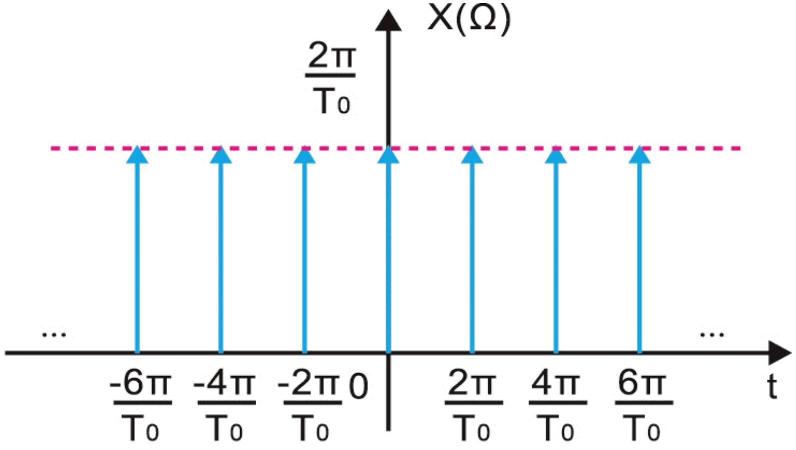
Από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε ότι το $x(t)$ γράφεται ως:

$$x(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\Omega_0 t}$$

και υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Fourier, έχουμε:

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left\{e^{jk\Omega_0 t}\right\} = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

Επομένως, ο ζητούμενος FT ενός τραίνου κρουστικών συναρτήσεων είναι πάλι ένα τραίνο κρουστικών συναρτήσεων.

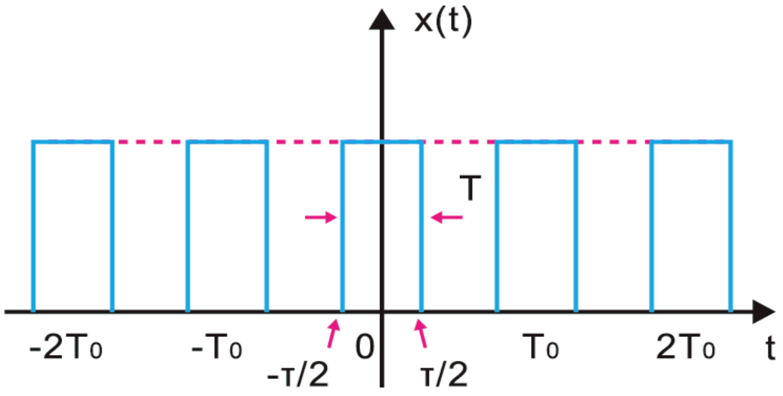


Άσκηση 3 (συνέχεια)

- Ο μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού συρμού κρουστικών συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου με περίοδο T_0, είναι πάλι ένας συρμός περιοδικών κρουστικών συναρτήσεων στο πεδίο της συχνότητας με περίοδο $\Omega_0 = 2\pi/T_0$. Δηλαδή το φάσμα είναι διακριτό.
- Οι περίοδοι T_0 και Ω_0 είναι αντιστρόφως ανάλογες. Άρα όσο πιο πυκνές είναι οι κρουστικές συναρτήσεις στο πεδίο του χρόνου, τόσο πιο απομακρυσμένες είναι οι κρουστικές συναρτήσεις στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα.
- Αν η περίοδος του συρμού στο πεδίο του χρόνου τείνει στο άπειρο $T_0 \rightarrow \infty$, δηλαδή υπάρχει μόνο ένας κρουστικός παλμός, ο $\delta(t)$, τότε η περίοδος των κρουστικών συναρτήσεων στο πεδίο της συχνότητας τείνει στο μηδέν ($\Omega_0 \rightarrow 0$), άρα το φάσμα τείνει να γίνει γίνεται συνεχές (από διακριτό).
- Οι παραπάνω παρατηρήσεις αποτελούν μία ακόμα απόδειξη της συμμετρίας μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας.

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο FT του περιοδικού τετραγωνικού σήματος $x(t)$ με διάρκεια παλμού τ και περίοδο T_0.



<u>Απάντηση</u>: Ακολουθούμε την ίδια μέθοδο επίλυσης με την προηγούμενη άσκηση. Το δοθέν περιοδικό τετραγωνικό σήμα αναπτύσσεται στη σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{jk\Omega_0 t}$$

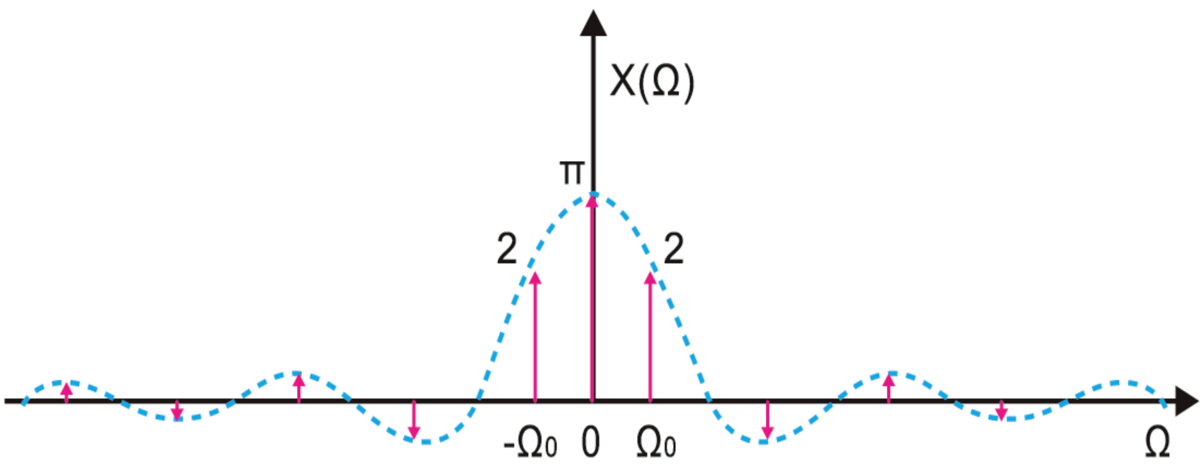
όπου:

$$X_k = \frac{\tau\Omega_0}{2\pi} \frac{sin\left(\frac{k\Omega_0 t}{2}\right)}{\left(\frac{k\Omega_0 t}{2}\right)} = \frac{\tau\Omega_0}{2\pi} sinc\left(\frac{k\Omega_0 t}{2}\right)$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Λόγω γραμμικότητας του FT και επειδή ισχύει $e^{j\Omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$, βρίσκουμε τον FT του περιοδικού σήματος από τη σχέση:

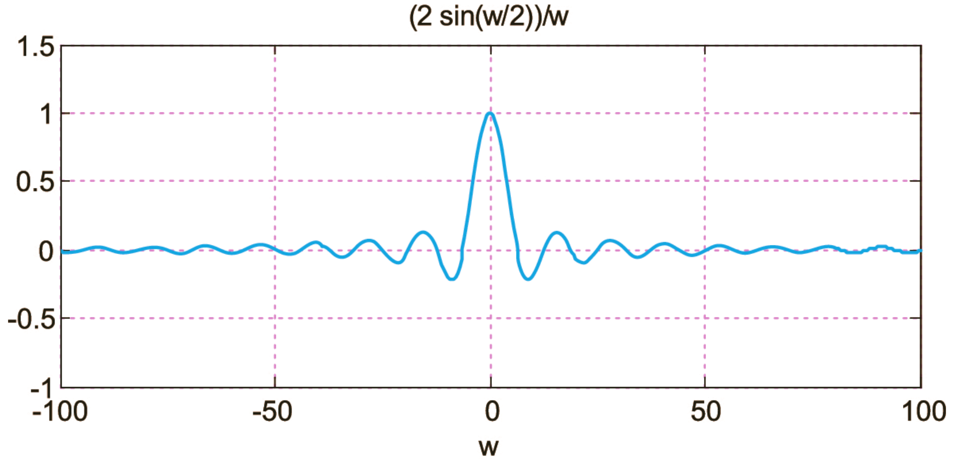
$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_k \, \delta(\Omega - k\Omega_0)$$



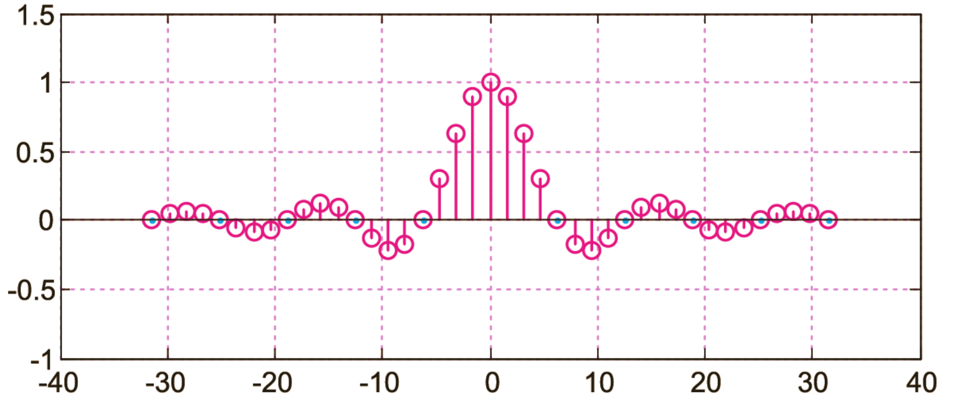
Το φάσμα του περιοδικού τετραγωνικού σήματος

Άσκηση 4 (συνέχεια)

(α)



(β)



(α) Μετασχηματισμός Fourier «αποκομμένης» συνάρτησης $x_T(t)$
(β) Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

- Ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού συρμού τετραγωνικών παλμών με περίοδο στο χρόνο T_0, είναι ένας συρμός περιοδικών κρουστικών συναρτήσεων με περίοδο στη συχνότητα $\Omega_0 = 2\pi/T_0$, οι οποίες είναι σταθμισμένες (πολλαπλασιασμένες) με τους συντελεστές X_n της εκθετικής σειράς Fourier.
- Εναλλακτικά, ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού συρμού τετραγωνικών παλμών προκύπτει από τη δειγματοληψία στη συχνότητα με περίοδο δειγματοληψίας $\Omega_0 = 2\pi/T_0$, του μετασχηματισμού Fourier του αποκομμένου σήματος.
- Η περίοδος $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ των κρουστικών συναρτήσεων στη συχνότητα καθορίζεται από την περίοδο T_0 του περιοδικού σήματος.
- Από την επίλυση με το Matlab διαπιστώνουμε ότι η περιβάλλουσα του φάσματος περιοδικού σήματος ταυτίζεται με το φάσμα του αποκομμένου σήματος (περιοδικό σήμα μίας περιόδου).

4. Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

Η **αυτοσυσχέτιση** (autocorellation) μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο της ομοιότητας μεταξύ των παρατηρήσεων ενός σήματος ως συνάρτηση του χρόνου που μεσολαβεί μεταξύ τους.

Πρόκειται για ένα μαθηματικό εργαλείο εξεύρεσης επαναλαμβανόμενων μοτίβων σε ένα σήμα, όπως η παρουσία ενός περιοδικού σήματος που είναι «χαμένο» μέσα σε ένα ισχυρό σήμα θορύβου.

Χρησιμοποιείται σε πληθώρα εφαρμογών, όπως στην επεξεργασία σημάτων για να εντοπίσει επαναλαμβανόμενα τμήματα ενός σήματος, στην ανάλυση αλυσίδων Markov με τη μέθοδο Monte Carlo, στον ηλεκτρομαγνητισμό, κλπ.

Αυτοσυσχέτιση σημάτων Ενέργειας

Για ένα σήμα ενέργειας $x(t)$ ορίζουμε τη συνάρτηση **αυτοσυσχέτισης** $R_{xx}(\tau)$ από τη σχέση:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, x(t)\, dt$$

Ο όρος τ ονομάζεται **υστέρηση χρόνου** (time lag). Θέτοντας $\tau = 0$ στον παραπάνω ορισμό βρίσκουμε την **ενέργεια** E_x του σήματος $x(t)$, δηλαδή:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = R_{xx}(0)$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι ο πρώτος (μηδενικός - $R_{xx}(0)$) συντελεστής της αυτοσυσχέτισης δίνει την ενέργεια του σήματος.

Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης

Αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης δίνεται από τη σχέση:

$$R_{xx}(\tau) \overset{F}{\longleftrightarrow} |X(\Omega)|^2$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$ ισούται με την φασματική πυκνότητα ενέργειας $|X(\Omega)|^2$ του σήματος $x(t)$.

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα ή ισοδύναμα εφαρμόζοντας το θεώρημα Parseval, έχουμε:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega$$

Η σχέση αυτή υποδεικνύει δύο ισοδύναμες μεθόδους υπολογισμού της ενέργειας του σήματος. Η μία μέθοδος βασίζεται στη χρονική αναπαράσταση $x(t)$ και η άλλη στη συχνοτική αναπαράσταση $X(\Omega)$.

Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης

Ο όρος $S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2$ ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ενέργειας** (energy density spectrum) και εκφράζει την ενέργεια ανά εύρος ζώνης ενός rad του σήματος για διάφορες συχνότητες.

Η φασματική πυκνότητα ενέργειας $S_x(\Omega)$ μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της ενέργειας του σήματος σε μία ορισμένη περιοχή συχνοτήτων (Ω_1, Ω_2) από τη σχέση:

$$E_x(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\Omega_2}^{-\Omega_1} S_x(\Omega)\, d\Omega + \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} S_x(\Omega)\, d\Omega\right]$$

Επειδή το $S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2$ είναι άρτια συνάρτηση περιοριζόμαστε στην περιοχή θετικών συχνοτήτων, δηλαδή:

$$E_x(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} S_x(\Omega)\, d\Omega\right]$$

Αυτοσυσχέτιση σημάτων Ισχύος

Η **μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** του σήματος ισχύος $x(t)$ (μιγαδικού εν γένει) για μία περίοδο T_0, είναι:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^*(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

Για πραγματικά σήματα ισχύει:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

Η ισχύς ενός σήματος ισχύος είναι:

$$P_x = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, x^*(t)\, dt = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\, dt = R_{xx}(0)$$

Η **φασματική πυκνότητα ισχύος** $S_x(\Omega)$ ή απλά **φάσμα ισχύος** του σήματος $x(t)$ είναι ο μετ. Fourier της μέσης χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

$$R_{xx}(\tau) \overset{F}{\longleftrightarrow} S_x(\Omega)$$

Η ισχύς του σήματος $x(t)$ είναι:

$$P_x = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\Omega) d\Omega$$

Αυτοσυσχέτιση Περιοδικών σημάτων

Για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 και θεμελιώδη συχνότητα $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ η αυτοσυσχέτιση είναι:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, x^*(t+\tau)\, dt$$

Κάθε περιοδικό σχήμα αναπτύσσεται σε εκθετική σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{jk\Omega_0\tau}$$

Η **μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** είναι:

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2\, e^{jk\Omega_0\tau}$$

όπου X_k είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$.

Η μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός περιοδικού σήματος:

- Είναι και αυτή περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο με το αρχικό σήμα,
- Μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier με συντελεστές τα τετράγωνα των μέτρων των συντελεστών της σειράς Fourier του αρχικού σήματος.

Φασματική Πυκνότητα Σημάτων Ισχύος και Περιοδικών Σημάτων

Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Η **μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** του σήματος εξόδου είναι:

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\, y(t-\tau)\, dt$$

Ισχύει η σχέση:

$$S_y(\Omega) = S_x(\Omega)\, |H(\Omega)|^2$$

Η **φασματική πυκνότητα ισχύος** των περιοδικών σημάτων προκύπτει από τον μετ. Fourier της μέσης χρονικής αυτοσυσχέτισης και είναι:

$$S_y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2\, \delta\left(\Omega - \frac{k}{T_0}\right)$$

Φασματική Πυκνότητα Σημάτων Ισχύος και Περιοδικών Σημάτων

Ισχύς P_x περιοδικού σήματος $x(t)$:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Αν ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ διεγείρει ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$, τότε η έξοδος $y(t)$ είναι περιοδική και η **φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου** είναι:

$$S_y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \left| H\left(\frac{k}{T_0}\right) \right|^2 \delta\left(\Omega - \frac{k}{T_0}\right)$$

Η **ισχύς του σήματος εξόδου** είναι:

$$P_y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \left| H\left(\frac{k}{T_0}\right) \right|^2$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \theta)$.

Απάντηση: Επειδή το σήμα είναι περιοδικό, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, x(t+\tau)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A\cos(\Omega_0 t + \theta)\, A\cos(\Omega_0(t+\tau) + \theta)\, dt$$

$$= \frac{A^2}{T_0}\int_{T_0} \frac{1}{2}[\cos(\Omega_0 t + \theta + \Omega_0(t+\tau) + \theta) + \cos(\Omega_0 t + \theta - \Omega_0(t+\tau) - \theta)]\, dt$$

$$= \frac{A^2}{2T_0}\int_{T_0} [\cos(2\Omega_0 t + 2\theta + \Omega_0\tau) + \cos(\Omega_0\tau)]\, dt$$

$$= \frac{A^2}{2T_0}\int_{T_0} \cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\theta)\, dt + \frac{A^2}{2T_0}\cos(\Omega_0\tau)\int_{T_0} dt =$$

$$= \frac{A^2}{2T_0}\int_{T_0} \cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\theta)\, dt + \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν, επειδή είναι ολοκλήρωμα συνημιτόνου σε μια περίοδο. Επομένως η αυτοσυσχέτιση είναι:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau)$$

- Το αποτέλεσμα λαμβάνει μέγιστη τιμή ένα (1) για υστέρηση και $\tau = kT_0$ και ελάχιστη τιμή μηδέν (0) για υστέρηση $\tau = \frac{kT_0}{2}, k \in Z$
- Στην αυτοσυσχέτιση δεν εμφανίζεται ο όρος της φάσης.

Άσκηση 6

Να υπολογιστούν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, η φασματική πυκνότητα ενέργειας και η ενέργεια του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0$.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του συγκεκριμένου σήματος είναι:

$$X(\Omega) = \frac{1}{\alpha + j\Omega}$$

Άρα, έχει φασματική πυκνότητα ενέργειας:

$$S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον αντίστροφο μετ. Fourier της φασματικής πυκνότητας ενέργειας $S_x(\Omega)$ του σήματος, δηλαδή:

$$R_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(\Omega)\} = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}$$

Η ενέργεια ισούται με την τιμή της αυτοσυσχέτισης για $\Omega = 0$, δηλαδή:

$$E_x = R_{xx}(0) = \frac{1}{2a}$$

Άσκηση 7

Να βρεθεί το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος $x(t) = 10e^{-3|t|}$ με χρήση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

Απάντηση: Υπολογίζουμε αρχικά τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$ του x(t). Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Wiener-Kinchine, βρίσκουμε το φάσμα πυκνότητας ενέργειας ως $S(\Omega) = \mathcal{F}\,\{R_{xx}(\tau)\}$:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 10e^{-3|t|}\, 10e^{-3|t-\tau|}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 10e^{3t}u(-t)\, 10e^{3(t-\tau)}u(\tau-t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 10e^{-3t}u(t)\, 10e^{3(t-\tau)}u(\tau-t)dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} 10e^{-3t}u(t)\, 10e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)dt = \frac{100}{3}e^{-3\tau} + 100\tau e^{-3\tau}, \qquad \tau > 0$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Να βρεθεί το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος $x(t) = 10e^{-3|t|}$ με χρήση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

<u>Απάντηση:</u> Υπολογίζουμε αρχικά τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$ του $x(\mathrm{t})$. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Wiener-Kinchine, βρίσκουμε το φάσμα πυκνότητας ενέργειας ως $S(\Omega) = \mathcal{F}\,\{R_{xx}(\tau)\}$ για $\tau > 0$:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau)dt$$

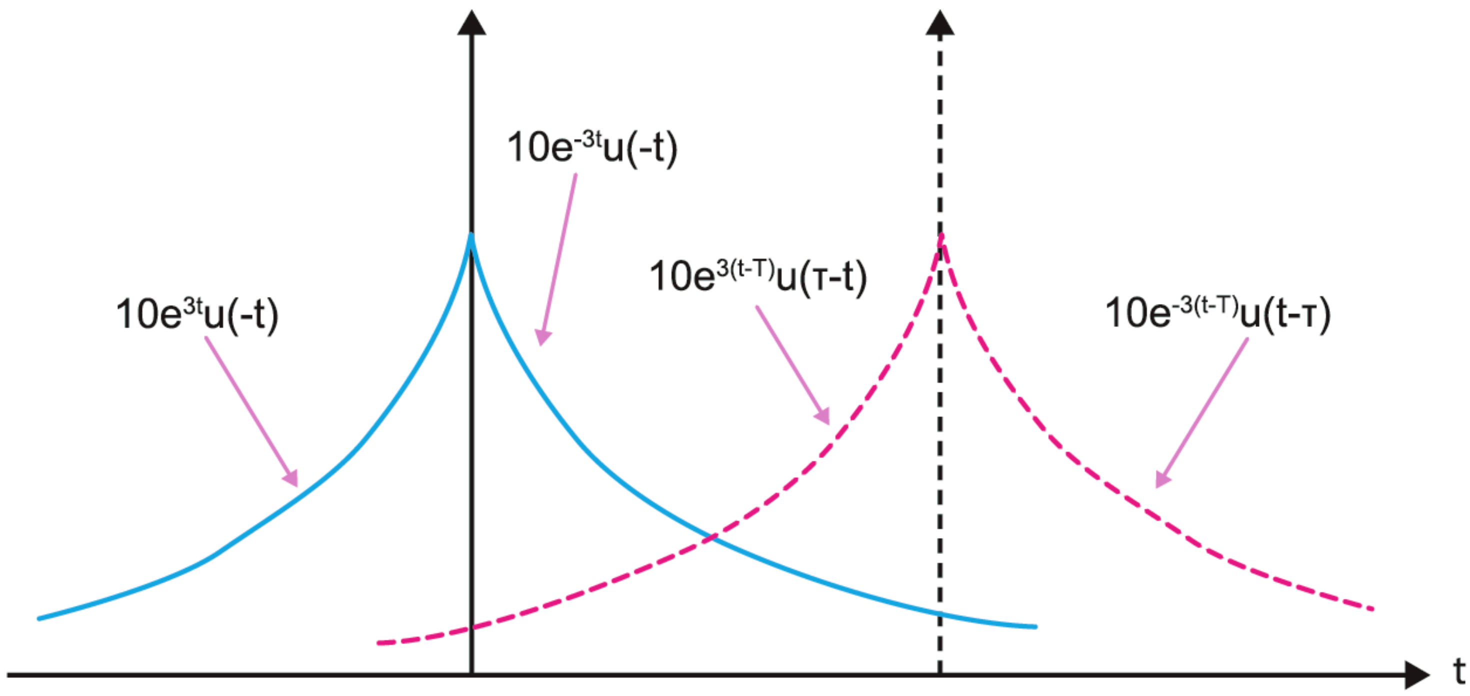
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 10e^{-3|t|}\, 10e^{-3|t-\tau|}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 10e^{3t}u(-t)\, 10e^{3(t-\tau)}u(\tau-t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 10e^{-3t}u(t)\, 10e^{3(t-\tau)}u(\tau-t)dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} 10e^{-3t}u(t)\, 10e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)dt$$

$$= \frac{100}{3}e^{-3\tau} + 100\tau e^{-3\tau}, \qquad \tau > 0$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)



Υπολογισμός αυτοσυσχέτισης σήματος $x(t) = 10e^{-3|t|}$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση για $\tau < 0$:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{100}{3}e^{3\tau} - 100\tau e^{3\tau}\,, \tau < 0$$

Επομένως:

$$R_{xx}(\tau) = 100e^{-3|\tau|}\left[|\tau| + \frac{1}{3}\right], \tau \in (-\infty, +\infty)$$

Από την τελευταία σχέση, επειδή:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-3|\tau|}\right\} = \frac{6}{9 + \Omega^2}$$

και

$$\mathcal{F}\ \left\{|\tau| + \frac{1}{3}\right\} = -\frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{3}\pi\delta(\Omega)$$

συμπεραίνεται ότι:

$$\mathcal{F}\ \{R_{xx}(\tau)\} = S(\Omega) = \frac{100}{2\pi}\left\{\frac{6}{9 + \Omega^2}\right\} * \left\{-\frac{2}{\Omega^2} + \frac{2}{3}\pi\delta(\Omega)\right\} = \frac{36 \times 10^2}{(9 + \Omega^2)^2}$$

Ετεροσυσχέτιση σημάτων Πεπερασμένης Ενέργειας

Για δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$πεπερασμένης ενέργειας, ορίζουμε τη συνάρτηση **ετεροσυσχέτισης** $R_{xy}(\tau)$ από τη σχέση:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, y(t)\, dt$$

Με όμοιο τρόπο ορίζεται και η $R_{yx}(\tau)$ από τη σχέση:

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, x(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)\, x(t)\, dt$$

Ετεροσυσχέτιση σημάτων Άπειρης Ενέργειας

Για τις περιπτώσεις σημάτων άπειρης ενέργειας, όπως τα περιοδικά σήματα, τα σήματα θορύβου στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, κλπ, χρησιμοποιούμε την έννοια της **μέσης ετεροσυσχέτισης**, που ορίζεται ως:

$$\bar{R}_{xy}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, y(t-\tau)\, dt$$

και

$$\bar{R}_{yx}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

Ειδικά για τα περιοδικά σήματα οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

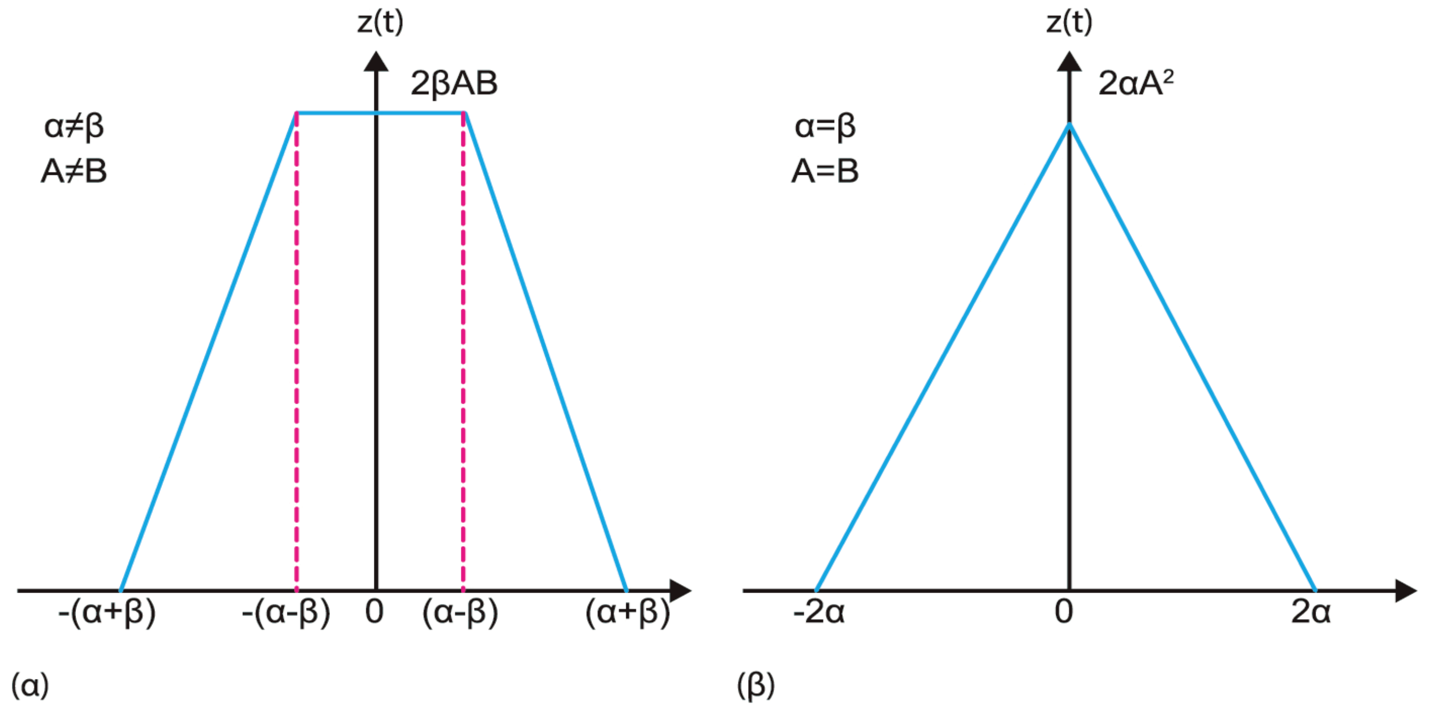
$$\bar{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, y(t-\tau)\, dt$$

και

$$\bar{R}_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

Άσκηση 8 - Γραφικός υπολογισμός Ετεροσυσχέτισης

Ο υπολογισμός της ετεροσυσχέτισης δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ μπορεί να γίνει με τη βοήθεια γραφικής μεθόδου, παρόμοια με τον γραφικό υπολογισμό της συνέλιξης. Η ετεροσυσχέτιση ορίζεται μόνο σε εκείνες τις περιοχές του άξονα χρόνου στις οποίες τα δύο σήματα επικαλύπτονται.

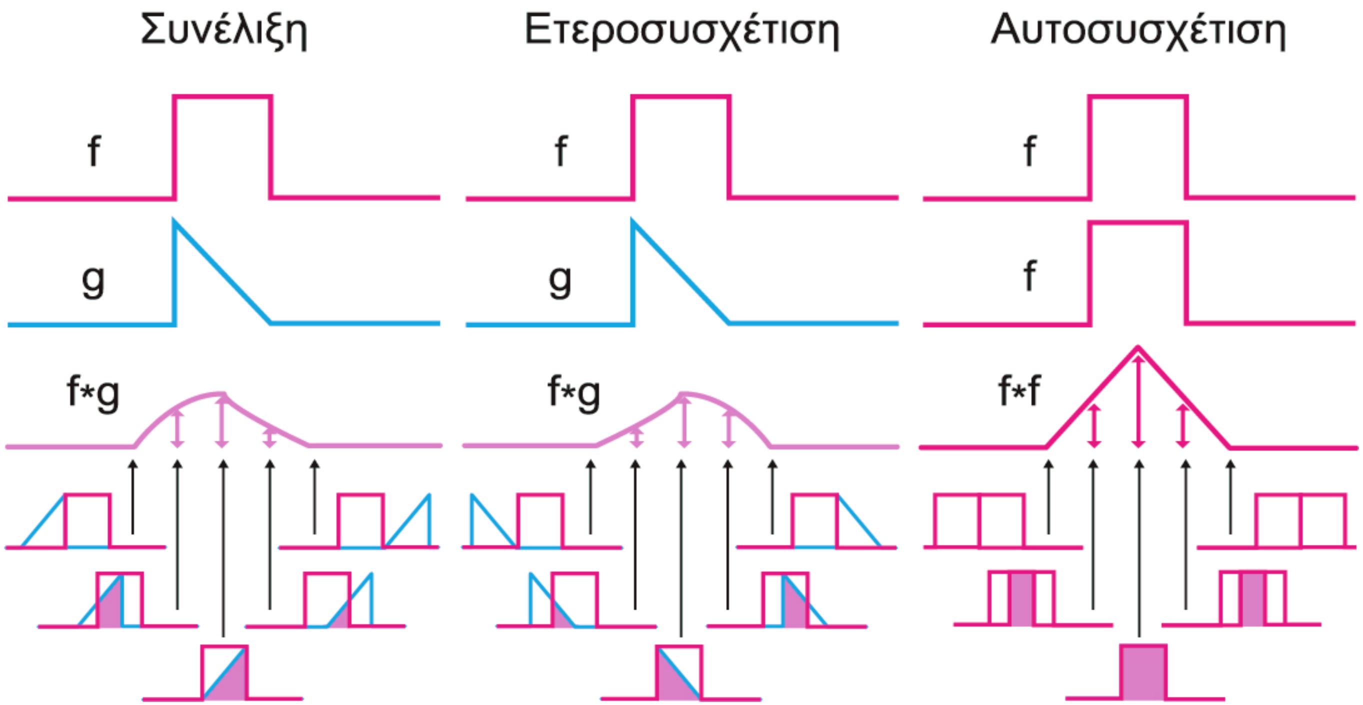


Γραφικός υπολογισμός ετεροσυσχέτισης μεταξύ των σημάτων $A\Pi_\alpha(t)$ και $B\Pi_\beta(t)$ για τις περιπτώσεις (α) $\alpha \neq \beta, A \neq B$ και (β) $\alpha = \beta, A = B$.

Άσκηση 8 (συνέχεια)

Διαπιστώνουμε πως όταν η μεταβλητή t είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν, τότε τα δύο σήματα επικαλύπτονται στο διάστημα $t \leq \tau \leq \xi$, ενώ αντίθετα για τις αρνητικές τιμές του χρόνου t το διάστημα επικάλυψης είναι το $0 \leq \tau \leq \xi - |t|$.

Επομένως, κατά τον υπολογισμό της ετεροσυσχέτισης γι' αυτές τις δύο περιπτώσεις, τα όρια του ολοκληρώματος θα προσδιορίζονται από τα παραπάνω διαστήματα τιμών.



Άσκηση 9

Να υπολογιστεί η ετεροσυσχέτιση μεταξύ των σημάτων $x(t) = A\cos(\Omega_0 t)$ και $y(t) = B\sin(\Omega_0 t)$.

Απάντηση: Τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ είναι περιοδικά και άρα είναι σήματα ισχύος. Επομένως, ζητείται η μέση ετεροσυσχέτιση ισχύος η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$R_{xy}(t) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau)\, y^*(\tau - t)d\tau = \frac{AB}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos(\Omega_0\tau)\sin[\Omega_0(\tau - t)]d\tau$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

η παράσταση μέσα στο ολοκλήρωμα διατυπώνεται ως:

$$\cos(\Omega_0\tau)\sin[\Omega_0(\tau - t)]d\tau = \frac{1}{2}\left[\sin\big(\Omega_0(2\tau - t)\big) - \sin(\Omega_0 t)\right]$$

Άσκηση 9 (συνέχεια)

Η ετεροσυσχέτιση των δύο σημάτων είναι:

$$R_{xy}(t) = \frac{AB}{2T_0}\left\{\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin[\Omega(2\tau - t)]d\tau - \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(\Omega t)\, d\tau\right\}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδενικό επειδή είναι ολοκλήρωμα ημιτόνου σε μια περίοδο.

Επομένως:

$$R_{xy}(t) = -\frac{AB}{2T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(\Omega t)\, d\tau = -\frac{AB}{2T_0}\sin(\Omega t)\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} d\tau = -\frac{AB}{T_0}\sin(\Omega_0 t)$$

- Το αποτέλεσμα λαμβάνει μέγιστη τιμή ένα (1) για υστέρηση $\tau = kT_0/2$ και ελάχιστη τιμή μηδέν (0) για υστέρηση $\tau = kT_0, k \in Z$.
- Όπως στην αυτοσυσχέτιση, έτσι και στην ετεροσυσχέτιση δεν εμφανίζεται ο όρος της φάσης.