Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 8: Σειρές Fourier

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Ανάλυση Σημάτων σε Ανάπτυγμα Σειράς Fourier

1. Επανάληψη στους ιδιορυθμούς
2. Συνθήκες ύπαρξης σειράς Fourier
3. Ανάπτυγμα σήματος σε Σειρά Fourier:
   - Εκθετική μορφή
   - Τριγωνομετρική Α’ μορφή
   - Τριγωνομετρική Β’ μορφή
4. Κανονικοποιημένη ισχύς αναπτύγματος Fourier
5. Θεώρημα Parseval για περιοδικές συναρτήσεις
6. Φαινόμενο Gibbs
7. Σχέση σειράς Fourier και μετασχηματισμού Fourier

Εισαγωγή (1/2)

- Η ανάλυση των σημάτων και των γραμμικών συστημάτων σε **αναπτύγματα σειρών Fourier** ή/και **μετασχηματισμών Fourier** οδηγεί στην αναπαράσταση των σημάτων με τη **συχνότητα** ως μεταβλητή (αντί του χρόνου).
- Με την ανάλυση κατά Fourier αναπαριστούμε ένα σήμα σε άθροισμα απλών τριγωνομετρικών συναρτήσεων συγκεκριμένης συχνότητας.
- Όταν ένα τέτοιο σήμα διεγείρει ένα γραμμικό σύστημα θα μπορούμε να προσδιορίζουμε την έξοδο του συστήματος ως άθροισμα σημάτων που έχουν τις ίδιες συχνότητες με του σήματος εισόδου, των οποίων όμως το πλάτος και η φάση έχει υποστεί κάποια αλλαγή, που προκαλεί το σύστημα.

Εισαγωγή (2/2)

- **Σειρές Fourier**: είναι χρήσιμες στην περιγραφή των περιοδικών σημάτων και οδηγούν στην έννοια των **φασμάτων**, τα οποία απεικονίζουν πληροφορίες όπως το πλάτος και η φάση, που αφορούν το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος.

- **Μετασχηματισμός Fourier**: εφαρμόζεται τόσο σε περιοδικά όσο και σε μη περιοδικά (απεριοδικά) σήματα.

- Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο ενός αναπτύγματος σε σειρά Fourier, όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο.

1. Επανάληψη στους Ιδιορυθμούς

Επανάληψη στους Ιδιορυθμούς

Όταν σε ένα αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα εφαρμόζεται μία μιγαδική εκθετική είσοδος συγκεκριμένης συχνότητας

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t} \text{ και } -\infty < t < \infty$$

τότε η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = x(t)\, H(\Omega_0)$$

όπου:

$$H(\Omega_0) = \int_0^{+\infty} e^{-j\Omega_0 \tau}\, h(\tau)\, d\tau$$

- Η έξοδος ενός ευσταθούς ΓΧΑ συστήματος για είσοδο μία μιγαδική εκθετική συνάρτηση συχνότητας Ω_0 είναι το γινόμενο της εισόδου $x(t)$ με μια μιγαδική σταθερή ποσότητα $H(\Omega_0)$, η οποία εκφράζει την **απόκριση συχνότητας** του συστήματος στη συχνότητα Ω_0.
- Το σήμα εισόδου εμφανίζεται στην έξοδο τροποποιημένο κατά την τιμή της απόκρισης συχνότητας $H(\Omega_0)$, η οποία οφείλεται αποκλειστικά στην επίδραση του συστήματος.

Επανάληψη στους Ιδιορυθμούς

Επειδή το σύστημα είναι ΓΧΑ η ιδιότητα επεκτείνεται σε οποιοδήποτε πλήθος μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων εφαρμόζονται ταυτόχρονα στην είσοδο.

Για σήμα εισόδου έναν γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων διαφορετικών πλατών, συχνοτήτων και φάσεων:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{j\Omega_k t}$$

όπου X_k είναι μιγαδικές τιμές, η έξοδος είναι:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{j\Omega_n t} \, H(\Omega_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, |H(\Omega_k)| \, e^{j\Omega_k t + \varphi_k}$$

Η διαπίστωση αυτή ισχύει και για τα ημιτονοειδή σήματα, επειδή αυτά μπορούν να εκφραστούν σε άθροισμα μιγαδικών συζυγών συναρτήσεων.

Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα αν και εκφρασμένα στο πεδίο του χρόνου, λόγω της γραφής τους ως $e^{j\Omega_0 t}$ προσφέρουν μια εύκολη έκφραση της συχνότητας Ω_0 που περιέχουν.

Η παραπάνω ανάλυση ισχύει μόνο για περιοδικά σήματα (θυμίζουμε ότι ορίζονται για άπειρη διάρκεια χρόνου).

2. Συνθήκες Ύπαρξης Σειράς Fourier

Συνθήκες ύπαρξης σειράς Fourier

Αν για ένα **περιοδικό σήμα** $x(t)$ με περίοδο T_0 ικανοποιούνται οι τρεις ακόλουθες **συνθήκες Dirichlet**:

1. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη σε μία περίοδο, δηλαδή:

$$\int_0^{T_0} |x(t)|\, dt < +\infty$$

   (δηλ. πρέπει να είναι σήμα ενέργειας).

2. Η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής ή ο αριθμός των ασυνεχειών της σε κάθε περίοδο είναι πεπερασμένος.

3. Το πλήθος των μεγίστων και των ελαχίστων της συνάρτησης $x(t)$ σε κάθε περίοδο είναι πεπερασμένο.

τότε το σήμα $x(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί σε **ανάπτυγμα σειράς Fourier**, με τις τρεις ισοδύναμες μορφές που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Οι συνθήκες Dirichlet ικανοποιούνται από όλα τα φυσικά σήματα.

3. Ανάπτυγμα Σήματος σε Σειρά Fourier

Εκθετική μορφή σειράς Fourier

Για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με συχνότητα Ω_0, το ανάπτυγμα του ως προς την εκθετική μορφή της σειράς Fourier είναι:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k \, e^{jk\Omega_0 t} + X_{-k} \, e^{-jk\Omega_0 t})$$

ή ισοδύναμα:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{jk\Omega_0 t}$$

Οι συντελεστές X_k της εκθετικής σειράς Fourier υπολογίζονται από:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \, e^{-jk\Omega_0 t} \, dt$$

Ειδικά για $k = 0$ ισχύει:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

όπου T_0 είναι η **θεμελιώδης περίοδος** του περιοδικού σήματος ($T_0 = \Omega_0 / 2\pi$)

Εκθετική μορφή σειράς Fourier

- Από την ανάπτυξη της εκθετικής μορφής ορίζουμε το **φάσμα πλάτους διπλής πλευράς** (double sided amplitude spectrum) $|X_k| = |X_k(\Omega_k)|$ με άρτια συμμετρία και το **φάσμα φάσης** (phase spectrum) $\varphi_k = \varphi_k(\Omega_k)$, διπλής πλευράς και αυτό αλλά με περιττή συμμετρία.

- Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή Ω λαμβάνει διακριτές τιμές Ω_k, η γραφική αναπαράσταση των μιγαδικών συντελεστών σε μέτρο και φάση ονομάζεται **διακριτό φάσμα** (discrete spectrum) του περιοδικού σήματος $x(t)$.

- Η ποσότητα $f_0 = 1/T_0$ ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα** του σήματος $x(t)$.

- Οι συχνότητες των μιγαδικών όρων είναι πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας. Το k −στο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας καλείται $\boldsymbol{k}$ **−στη αρμονική**.

Παρατηρήσεις

- Η ανάπτυξη της εκθετικής σειράς Fourier γίνεται στις συνιστώσες $e^{jk\Omega_0 t}$ για $k \in Z$. Οι συνιστώσες αυτές ονομάζονται **διανύσματα βάσης** ή ιδιοτιμές Fourier.
- Επειδή $\cos(k\Omega_0 t) = \frac{1}{2}\left[e^{jk\Omega_0 t} + e^{-jk\Omega_0 t}\right]$, κάθε όρος $\cos(k\Omega_0 t)$ αποτελείται από τους όρους $e^{jk\Omega_0 t}$ και το $e^{-jk\omega\Omega_0 t}$, το ημιάθροισμα των οποίων δίνει την τιμή του αρμονικού.
- Τα διανύσματα βάσης Fourier είναι **περιοδικά** με περίοδο T_0.
- Επίσης, είναι ορθοκανονικά σε μια περίοδο, δηλαδή ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jn\Omega_0 t}\left[e^{jm\Omega_0 t}\right]^* dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

- Κάθε σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ορθοκανονικών συναρτήσεων, δηλαδή να «αποσυντεθεί» σε επιμέρους στοιχειώδη σήματα.
- Οι τιμές των συντελεστών X_k είναι τέτοιες που οδηγούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα στο μηδέν, δηλαδή είναι οι βέλτιστες και οδηγούν τη σειρά σε σύγκλιση.

Τριγωνομετρική Α’ μορφή σειράς Fourier

Κάθε περιοδικό σήμα $x(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, μπορεί να αναπαρασταθεί από μία συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά άπειρων όρων ημιτόνων και συνημιτόνων:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \, cos(k\Omega_0 t) + b_k \, sin(k\Omega_0 t)]$$

όπου Ω_0 είναι η θεμελιώδης κυκλική συχνότητα ($\Omega_0 = 2\pi/T_0$) του σήματος $x(t)$, και οι συντελεστές α_0, α_n και b_k δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \, cos(k\Omega_0 t) \, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \, sin(k\Omega_0 t) \, dt$$

Τριγωνομετρική Α' μορφή - Παρατηρήσεις

- Αν το περιοδικό σήμα είναι πραγματικό, τότε το ανάπτυγμα στην Α' τριγωνομετρική μορφή είναι:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$

όπου $A_0 = X_0$, $A_k = 2|X_k|$ και $\theta_k = \measuredangle X_k = \varphi_k$.

- Τα διανύσματα βάσης της Α' τριγωνομετρικής μορφής είναι οι συναρτήσεις $\cos(k\Omega_0 t)$ και $\sin(k\Omega_0 t)$.

- Οι συναρτήσεις αυτές είναι **ορθοκανονικές** σε μια περίοδο, δηλαδή ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(k\Omega_0 t)\,[\cos(m\Omega_0 t)]^* dt = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(k\Omega_0 t)\,[\sin(m\Omega_0 t)]^* dt = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

Τριγωνομετρική Α’ μορφή - Παρατηρήσεις

- Αν το περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει **άρτια συμμετρία** τότε το γινόμενο $x(t)\cos(k\Omega_0 t)$ έχει επίσης άρτια συμμετρία, ενώ το γινόμενο $x(t)\,sin(k\Omega_0 t)$ έχει περιττή συμμετρία. Συνεπώς οι συντελεστές α_0 και α_k μπορούν να υπολογιστούν στη μισή περίοδο διπλασιάζοντας το εμβαδόν, ενώ όλοι οι συντελεστές b_k έχουν τιμή μηδέν. Άρα το ανάπτυγμα του **άρτιου σήματος** αποτελείται μόνο από **συνημιτονοειδείς** όρους.
- Αν το περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει **περιττή συμμετρία** τότε το γινόμενο $x(t)\cos(k\Omega_0 t)$ έχει περιττή συμμετρία, ενώ το γινόμενο $x(t)\,sin(k\Omega_0 t)$ έχει άρτια συμμετρία. Συνεπώς οι συντελεστές α_0 και α_k έχουν τιμή μηδέν, ενώ οι συντελεστές b_k μπορούν να υπολογιστούν στη μισή περίοδο διπλασιάζοντας το εμβαδόν. Άρα το ανάπτυγμα του **περιττού σήματος** αποτελείται μόνο από **ημιτονοειδείς** όρους.

Τριγωνομετρική Β’ μορφή

Κάθε περιοδικό σήμα $x(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, μπορεί να αναπαρασταθεί από μία συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά άπειρων όρων συνημιτόνων:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$

όπου:

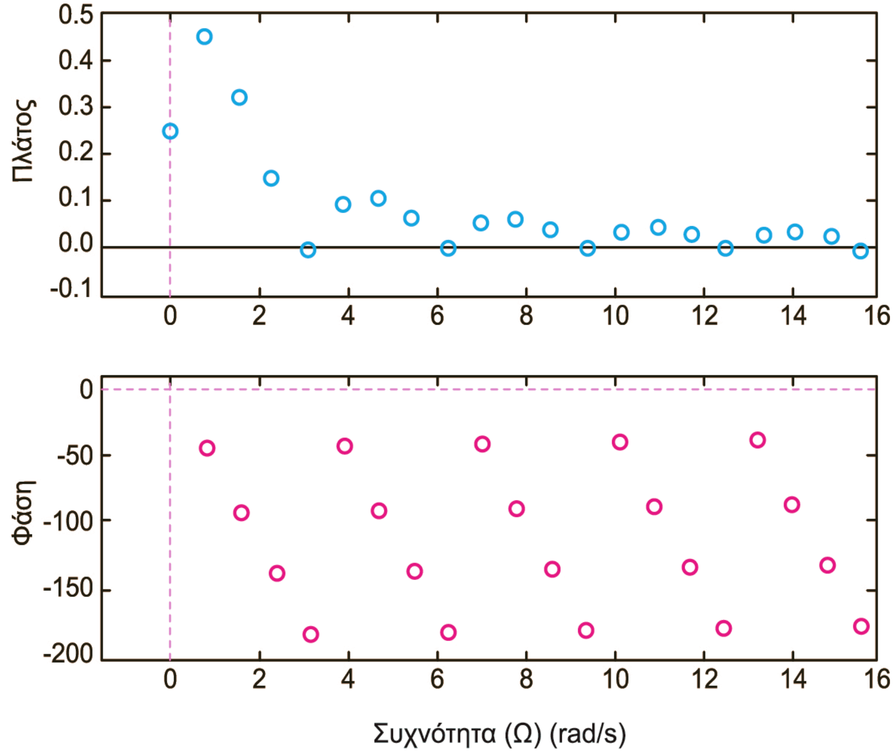
$$c_0 = a_0, \qquad c_k = \frac{|X_k|}{2} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\theta_k = \measuredangle X_k = -\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right), \qquad \theta_k \in (-\pi, \pi]$$

- Ο συντελεστής α_0 καλείται **συνεχής συνιστώσα** (DC component), ενώ οι συντελεστές α_k και b_k ονομάζονται **αρμονικές k-στής τάξης**.
- Όπως ισχύει και στις άλλες δύο μορφές σειρών Fourier, εφόσον λάβουμε **άπειρους όρους**, τότε η συνάρτηση $x(t)$ περιγράφεται με **μηδενικό σφάλμα**.
- Η δυνατότητα του ισοδύναμου προσδιορισμού ενός σήματος $x(t)$ από τους συντελεστές c_k και φ_k και από τη συχνότητα Ω_0 είναι εξόχως σημαντική επειδή μας επιτρέπει να ορίσουμε τα ακόλουθα φάσματα.

Η έννοια του Φάσματος

Σχεδιάζοντας σε διάγραμμα τους συντελεστές c_k και φ_k ως προς τη συχνότητα Ω, ορίζουμε το **φάσμα πλάτους μονής πλευράς** (single sided amplitude spectrum) $c_k = c_k(\Omega_k)$ και το **φάσμα φάσης** (phase spectrum) $\varphi_k = \varphi_k(\Omega_k)$, αντίστοιχα.



Γενικό παράδειγμα φάσματος πλάτους μονής πλευράς και φάσματος φάσης

Σύνοψη

- Τα διανύσματα βάσης Fourier όλων των μορφών σειράς Fourier (εκθετική και τριγωνο-μετρικές) είναι **περιοδικά** με περίοδο T_0.
- Το ανάπτυγμα ενός περιοδικού σήματος σε σειρά Fourier εκφράζει ότι το περιοδικό σήμα μπορεί να περιγραφεί από την περίοδό του T_0 και από την ακολουθία των συντελεστών:
  - $\{a_k, b_k\}$ για την Α’ τριγωνομετρική μορφή
  - $\{c_k, \theta_k\}$ για την Β’ τριγωνομετρική μορφή
  - $\{X_k\}$ για την εκθετική μορφή
- Το πλάτος των συντελεστών $\{a_k, b_k\}$, $\{c_k\}$ και $\{|X_k|\}$ τείνει στο μηδέν καθώς το k τείνει στο άπειρο. Άρα, αν λάβουμε πεπερασμένο - και όχι άπειρο - πλήθος συντελεστών τότε το ανάπτυγμα αποτελεί μία **προσέγγιση** του σήματος $x(t)$, η οποία βελτιώνεται με την αύξηση του πλήθους των όρων που περιλαμβάνονται στο ανάπτυγμα. Η βέλτιστη τιμή του πλήθους των συντελεστών εξαρτάται από το εκάστοτε σήμα $x(t)$.

Σύνοψη

- Οι σειρές Fourier επιτρέπουν να προσεγγίσουμε (με κάποια ελεγχόμενη μικρή ποσότητα σφάλματος) ένα **μη αριθμήσιμο σύνολο** (σημεία του $x(t)$) με ένα **αριθμήσιμο σύνολο** αριθμών, γεγονός που μειώνει την πολυπλοκότητα περιγραφής του σήματος $x(t)$.

- Σε όλες τις μορφές σειρών Fourier, εφόσον λάβουμε άπειρους όρους στο ανάπτυγμα της σειράς, τότε το σήμα $x(t)$ περιγράφεται επακριβώς από το ανάπτυγμα Fourier με μηδενικό σφάλμα.

4. Ιδιότητες Σειρών Fourier

Ιδιότητες Σειρών Fourier

1. Γραμμικότητα:

$$\text{Αν } x(t) \xrightarrow{FS} X_k \text{ και } y(t) \xrightarrow{FS} Y_k \text{ τότε } Ax(t) + By(t) \xrightarrow{FS} AX_k + BY_k$$

2. Μετατόπιση στο χρόνο: Η μετατόπιση στο χρόνο ενός περιοδικού σήματος δεν αλλάζει τους συντελεστές πλάτους της σειράς Fourier, αλλά μόνο τους συντελεστές φάσης:

$$x(t \pm t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \, e^{jk\Omega_0 (t \pm t_0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[X_k \, e^{\pm jk\Omega_0 t_0}\right] e^{jk\Omega_0 t}$$

$$x(t \pm t_0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k \pm k\Omega_0 t_0)$$

3. Μετατόπιση στη συχνότητα: Η μετατόπιση στη συχνότητα ενός περιοδικού σήματος μετατοπίζει τους συντελεστές κατά την ποσότητα της μετατόπισης συχνότητας:

$$\text{Αν } x(t) \xrightarrow{FS} X_k \text{ τότε } e^{jM\Omega_0 t} x(t) \xrightarrow{FS} X_{k-M}$$

4. Παραγώγιση:

$$\text{Αν } x(t) \xrightarrow{FS} X_k \text{ τότε } \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FS} jk\Omega_0 X_k$$

5. Ολοκλήρωση:

$$\text{Αν } x(t) \xrightarrow{FS} X_k \text{ τότε } \int_{-\infty}^{t} x(t)\, dt \xrightarrow{FS} \frac{1}{jk\Omega_0} X_k$$

Ιδιότητες Σειρών Fourier

6. Συμμετρία και συζυγία: Κάθε (περιοδικό) σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός άρτιου $x_e(t)$ και ενός περιττού $x_o(t)$ σήματος. Για τους συντελεστές X_n ισχύει:

$$X_k = X_{ek} + X_{ok}, \text{ όπου } X_{ek} = \frac{1}{2}(X_k + X_{-k}) \text{ και } X_{ek} = \frac{1}{2}(X_k - X_{-k})$$

Αν το περιοδικό σήμα έχει **άρτια συμμετρία**, τότε οι συντελεστές X_k είναι πραγματικοί αριθμοί, οπότε ισχύει $X_k = X_{-k}$ και το ανάπτυγμα γίνεται:

$$x(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(k\Omega_0 t)$$

Αν το περιοδικό σήμα έχει **περιττή συμμετρία**, τότε οι συντελεστές X_k είναι φανταστικοί αριθμοί και $X_0 = 0$. Το ανάπτυγμα γίνεται:

$$x(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(k\Omega_0 t)$$

Για περιοδικό σήμα $x(t)$ που λαμβάνει μόνο πραγματικές τιμές, π.χ. οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις, ισχύει:

$$X_k = X_{-k}^*$$

Η σχέση αυτή μειώνει το πλήθος υπολογισμών και υποδηλώνει ότι το **πλάτος είναι μια άρτια συνάρτηση** ενώ η **φάση είναι μια περιττή συνάρτηση**, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$|X_k| = |X_{-k}| \quad \text{και} \ \measuredangle X_k = -\measuredangle X_{-k}$$

Ιδιότητες Σειρών Fourier

Εξαιτίας της συμμετρίας των συντελεστών X_k για τα πραγματικά σήματα, απαιτείται να απεικονίζουμε τα **φάσματα πλάτους** και **φάσης** μόνο για τιμές $k \geq 0$.

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν μόνο για πραγματικά σήματα και όχι για μιγαδικά σήματα.

Οι **αρνητικές συχνότητες** που εμφανίζονται στα φάσματα (πλάτους και φάσης) διπλής πλευράς οφείλονται στην ύπαρξη του μιγαδικού εκθέτη στον ορισμό του συντελεστή X_k.

Καθώς η συχνότητα είναι ένα μέγεθος που εκφράζει το πλήθος των επαναλήψεων κάποιου φαινομένου στη μονάδα του χρόνου, η αρνητική συχνότητα δεν έχει κάποια άμεση φυσική σημασία, τουλάχιστον διαισθητικά. Ωστόσο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια αρνητική τιμή συχνότητας υποδηλώνει τη δεξιόστροφη φορά περιστροφής του διανύσματος βάσης $e^{-jk\Omega_0 t}$ με ταχύτητα $k\Omega_0$.

Αντίθετα, ο όρος $e^{jk\Omega_0 t}$ περιγράφει ένα διάνυσμα που περιστρέφεται αριστερόστροφα με ταχύτητα $k\Omega_0$ και εκφράζει τις θετικές συχνότητες.

Το **πραγματικό μέρος** των συντελεστών X_k **είναι άρτια συνάρτηση** ενώ το φανταστικό μέρος **είναι περιττή συνάρτηση**, δηλαδή ισχύει:

$$Re\{X_k\} = Re\{X_{-k}\} \quad \text{και} \; Im\{X_k\} = -Im\{X_{-k}\}$$

5. Κανονικοποιημένη Ισχύς Αναπτύγματος Fourier

Κανονικοποιημένη Ισχύς Αναπτύγματος Fourier (1/2)

Η κανονικοποιημένη ισχύς ενός σήματος $x(t)$στο πεδίο του χρόνου, δίνεται από:

$$S_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt$$

Η κανονικοποιημένη ισχύς για κάθε μορφή ανάπτυξης σειρών Fourier, είναι:

Τριγωνομετρική Α':

$$S_x = a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{a_k^2}{2} + \frac{b_k^2}{2}\right)$$

Τριγωνομετρική Β':

$$S_x = c_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{c_k^2}{2}\right)$$

Εκθετική:

$$S_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Κανονικοποιημένη Ισχύς Αναπτύγματος Fourier (2/2)

- Η ακολουθία $\{|X_k|^2\}$ ονομάζεται **πυκνότητα φασματικής ισχύος** ή απλά **φάσμα ισχύος** του περιοδικού σήματος και περιγράφει την κατανομή της ισχύος του σήματος στις αρμονικές συχνότητες $k\Omega_0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Λόγω της διακριτής μορφή των αρμονικών συχνοτήτων, το γράφημα αυτό αποτελείται από μια γραμμή σε κάθε συχνότητα, και γι' αυτό αποκαλείται **γραμμικό διάγραμμα ισχύος** (power line spectrum).
- Αν για κάποια τιμή του n το $|X_k|^2$ είναι «μεγάλο», τότε η συγκεκριμένη συχνότητα κατέχει «σημαντικό» ποσοστό από τη συνολική ισχύ του σήματος.
- Ένα περιοδικό σήμα έχει συγκεντρωμένη όλη την ισχύ του μόνο στις αρμονικές συχνότητες. Σε μη-αρμονικές συχνότητες η ισχύς είναι μηδενική.
- Εφόσον οι συντελεστές X_k είναι μιγαδικοί, μπορούμε να ορίσουμε δύο επιμέρους φάσματα. Το πρώτο απεικονίζει το πλάτος $|X_k|$ και ονομάζεται **γραμμικό φάσμα πλάτους** και το δεύτερο απεικονίζει τη γωνία (φάση) $\measuredangle X_k$ και ονομάζεται **γραμμικό διάγραμμα φάσης**.
- Το φάσμα ισχύος $|X_k|^2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ προκύπτει με τον τετραγωνισμό του φάσματος πλάτους $|X_k|$.

6. Θεώρημα Parseval
για Περιοδικές Συναρτήσεις

Θεώρημα Parseval για Περιοδικές Συναρτήσεις

Οι σειρές Fourier δίνουν έναν εύκολο τρόπο περιγραφής της κατανομής της ισχύος του σήματος ανά συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων, μέσω του θεωρήματος Parseval:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

- Το αριστερό μέλος υπολογίζει την ισχύ στο πεδίο του χρόνου στη διάρκεια μίας περιόδου. Το δεξί μέλος υπολογίζει την ισχύ στο πεδίο της συχνότητας.
- Το ανάπτυγμα μίας περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ σε σειρά Fourier δεν μεταβάλει την ισχύ (και την ενέργεια) του σήματος.
- Για περιοδικό σήμα $x(t)$ που λαμβάνει μόνο πραγματικές τιμές, ισχύει η σχέση:

$$X_k = X_{-k}^*$$

- Επομένως το πλάτος είναι άρτια συνάρτηση και η φάση είναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή ισχύει:

$$|X_k| = |X_{-k}| \quad \text{και} \quad \measuredangle X_k = -\measuredangle X_k$$

- Εξαιτίας της συμμετρίας, για πραγματικά σήματα απαιτείται να απεικονίζουμε τα παραπάνω φάσματα πλάτους και φάσης, μόνο για $k \geq 0$.

7. Σχέση Σειράς Fourier και Μετασχηματισμού Fourier

Σχέση Σειράς Fourier και Μετασχηματισμού Fourier

Έστω $x(t)$ ένα σήμα πεπερασμένου χρόνου διάρκειας από $-T_0/2$ έως $T_0/2$. Λαμβάνουμε ένα τμήμα του $x(t)$ μεταξύ $-T_0/2$ και $T_0/2$, το επεκτείνουμε σε εκθετική σειρά Fourier περιόδου $T_0 = \Omega_0/2\pi$ και έχουμε:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{jn\Omega_0 t} \quad -T_0/2 \leq t \leq T_0/2$$

όπου:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \, e^{-jn\Omega_0 t} \, dt$$

Η θεμελιώδης συχνότητα $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ είναι η απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικές αρμονικές του φάσματος πλάτους, το οποίο ως γνωστό αποτελείται από διακριτές φασματικές συνιστώσες. Αντικαθιστώντας τη δεύτερη σχέση στην πρώτη έχουμε:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\Omega_0 t} \left[\frac{\Omega_0}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \, e^{-jn\Omega_0 t} \, dt \right]$$

Σχέση Σειράς Fourier και Μετασχηματισμού Fourier

Αν $T_0 \to \infty$ τότε η $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ τείνει στο $d\Omega$. Επομένως, η απόσταση μεταξύ των αρμονικών συνιστωσών του φάσματος πλάτους γίνεται απειροστή $d\Omega$, και το πλήθος των αρμονικών συνιστωσών απειρίζεται ($n \to \infty$). Η συχνότητα Ω κάθε αρμονικής συνιστώσας δίνεται από τη σχέση $\Omega = n\Omega_0$. Άρα, όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο, το άθροισμα της προηγούμενης σχέσης μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \left[\frac{d\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt \right] d\Omega$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται **ολοκλήρωμα Fourier**. Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι μιγαδική συνάρτηση του Ω και είναι ο μετασχηματισμός Fourier. Άρα έχουμε το γνωστό ζεύγος συναρτήσεων ορισμού του ευθύ και του αντίστροφου FT:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

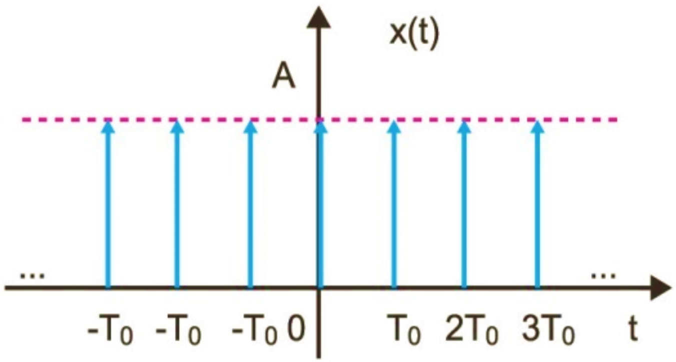
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

Επομένως, αποδείχθηκε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι το όριο της σειράς Fourier όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο ($T_0 \to \infty$).

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να βρεθεί η ανάπτυξη Fourier του συρμού κρουστικών συναρτήσεων.



<u>Απάντηση</u>: Ο συρμός κρουστικών συναρτήσεων εκφράζεται μαθηματικά από τη σχέση:

$$x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

Συντελεστές τριγωνομετρικής Α' μορφής:

$$\alpha_0 = \frac{A}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)\, dt = \frac{A}{T_0}$$

$$\alpha_k = \frac{A}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)\, cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt = \frac{A}{T_0}$$

$$b_k = \frac{A}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)\, sin\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right)\, dt = 0$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

- Συντελεστές τριγωνομετρικής Β' μορφής:

$$c_0 = a_0 = \frac{A}{T_0}, \qquad c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{A}{T_0}, \qquad \theta_k = -\,tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = 0$$

- Συντελεστές εκθετικής μορφής:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_0)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{T_0} \delta(t-kT_0)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\Omega_0 t}\right]_{t=kT_0}$$

$$= \frac{A}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk^2\pi} = \frac{A}{T_0}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

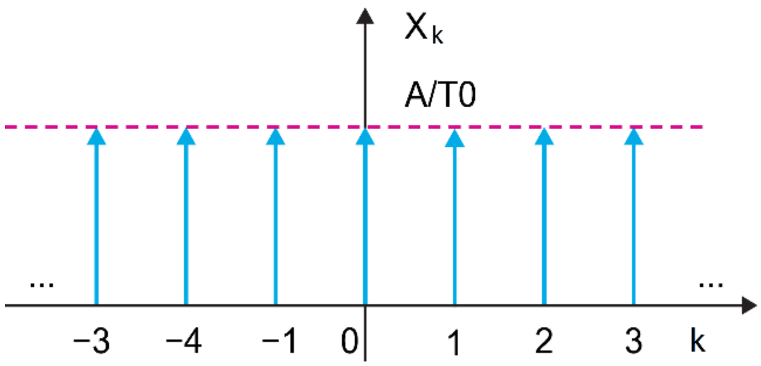
Επομένως τα αναπτύγματα σε σειρές Fourier του τραίνου κρουστικών, είναι:

Τριγωνομετρική Β':

$$x(t) = \frac{A}{T_0} + \frac{2A}{T_0}\sum_{k=1}^{+\infty} cos\left(\frac{2k\pi}{T_0}t\right)$$

Εκθετική:

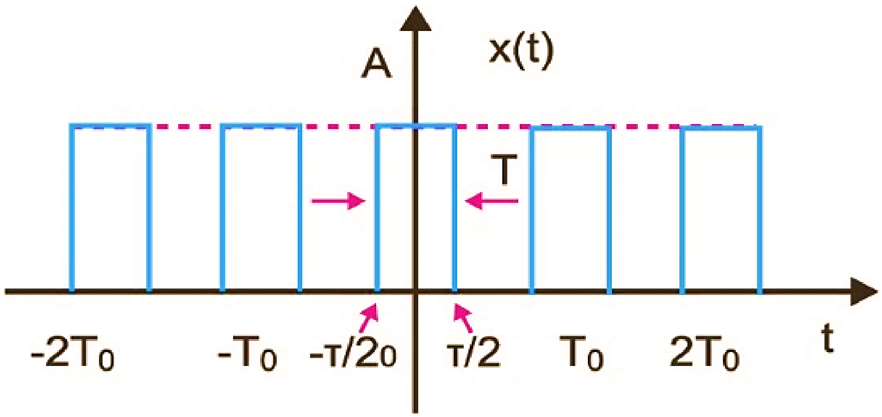
$$x(t) = \frac{A}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2k\pi}{T_0}t}$$



Φάσμα πλάτους

Άσκηση 2

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier σε όλες τις μορφές, του συρμού παλμών που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, όπου T_0 είναι η περίοδος και τ είναι η διάρκεια του παλμού. Εφαρμογή για $\tau = T_0/2$ και $T_0 = 2\pi$ και $A = 1$.



<u>Απάντηση</u>: Επιλέγουμε ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$ και υπολογίζουμε τους συντελεστές των σειρών Fourier από τις αντίστοιχες σχέσεις ορισμού τους.

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(Α) Εκθετική μορφή:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\,dt = \frac{A}{T_0}\,t\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A\tau}{T_0}$$

$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}dt = \frac{A}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jk\Omega_0 t}dt = -\frac{A}{jk\Omega_0 T_0}\, e^{-jk\Omega_0 t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{2A}{k\Omega_0 T_0}\frac{1}{2j}\left[e^{\frac{jk\Omega_0\tau}{2}} - e^{-\frac{jk\Omega_0\tau}{2}}\right] = \frac{2\sin\left(\frac{k\Omega_0\tau}{2}\right)}{k\Omega_0 T_0} = \frac{\sin\left(\frac{k\Omega_0\tau}{2}\right)}{k\pi}$$

Οι συντελεστές Fourier είναι πραγματικοί αριθμοί όπως αναμενόταν, επειδή το σήμα έχει άρτια συμμετρία. Ο λόγος της διάρκειας του παλμού (τ) ως προς την περίοδο (T_0) ονομάζεται **κύκλος εργασίας** (duty cycle).

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε πως επηρεάζει το φάσμα συχνοτήτων η μεταβολή της διάρκειας του παλμού σε σχέση με την περίοδό του, για διάφορες τιμές του τ διατηρώντας την περίοδο T_0 σταθερή:

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(α) Για $\tau = T_0/2$ έχουμε:

$$X_0 = \frac{A}{2} \qquad \text{και} \qquad X_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \text{ για } k \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι για άρτιες τιμές του k το ημίτονο μηδενίζεται άρα και οι συντελεστές της σειράς μηδενίζονται, δηλ. $X_k = 0$ για k άρτιο, ενώ για περιττές τιμές του k το ημίτονο λαμβάνει εναλλάξ τιμές $+1$ και -1. Δηλαδή έχουμε:

$$X_1 = X_{-1} = \frac{1}{\pi}, \qquad X_2 = X_{-2} = 0, \qquad X_3 = X_{-3} = -\frac{1}{3\pi},$$

$$X_4 = X_{-4} = 0, \qquad X_5 = X_{-5} = \frac{1}{5\pi}, \qquad X_6 = X_{-6} = 0, \ldots$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(β) Για $\tau = T_0/4$ έχουμε:

$$X_0 = \frac{A}{4} \qquad \text{και} \qquad X_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi} \text{ για } k \neq 0$$

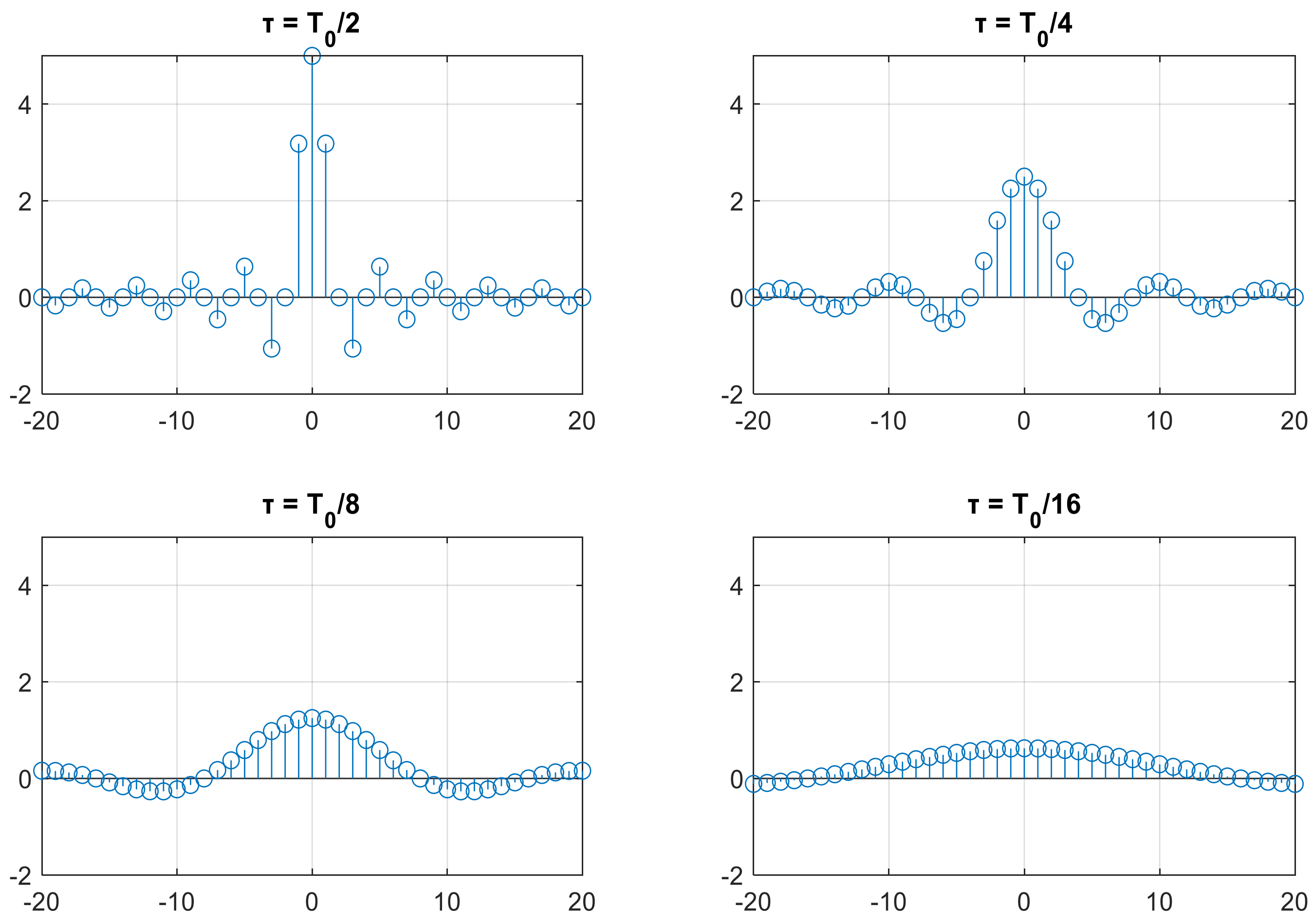
Παρατηρούμε ότι για τιμές του k που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4 το ημίτονο μηδενίζεται, δηλαδή $X_k = 0$ για $k = 4r, r = 1,2,3, \ldots$ Γενικά οι συντελεστές X_k είναι:

$$X_1 = X_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \quad X_2 = X_{-2} = \frac{1}{2\pi}, \quad X_3 = X_{-3} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi}, \quad X_4 = X_{-4} = 0,$$

$$X_5 = X_{-5} = -\frac{\sqrt{2}}{5\pi}, \;\; X_6 = X_{-6} = -\frac{1}{6\pi}, \;\; X_7 = X_{-7} = -\frac{\sqrt{2}}{7\pi}, \;\; X_8 = X_{-8} = 0, \ldots$$

Αντίστοιχα μπορούμε να συνεχίσουμε τον υπολογισμό των συντελεστών εκθετικής σειράς Fourier και για άλλες τιμές του (τ).

Άσκηση 2 (συνέχεια)



Φάσμα πλάτους παλμοσειράς για τιμές του τ:
(α) $\tau = T_0/2$, (β) $\tau = T_0/4$, (γ) $\tau = T_0/8$, (δ) $\tau = T_0/16$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Θεωρώντας ότι $\tau = T_0/\alpha,\ \ \alpha \in Z$, προκύπτει ότι τα σημεία μηδενισμού των φασματικών συντελεστών προκύπτουν για τιμές του k που ικανοποιούν τη σχέση:

$$sin\left(\frac{k\Omega_0\tau}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow sin\left(k\frac{\pi}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow k\frac{\pi}{\alpha} = \lambda\pi \Rightarrow k = \lambda\alpha, \lambda = \pm 1, \pm 2, \dots$$

είναι δηλαδή ακέραια πολλαπλάσια του συντελεστή α. Το γεγονός αυτό επαληθεύεται από τα διαγράμματα. Οι αντίστοιχες συχνότητες μηδενισμού των φασματικών συντελεστών δίνονται από τη σχέση:

$$\Omega = k\Omega_0, \qquad \text{όπου } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

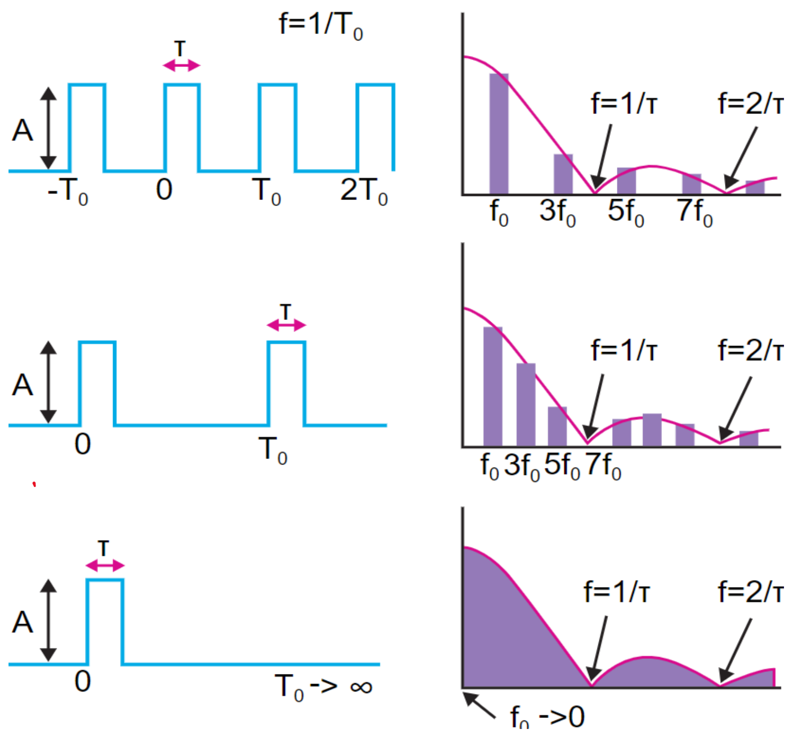
Παρατηρούμε ότι παλμοί βραχύτερης διάρκειας προκαλούν επέκταση του φάσματος σε πιο υψηλές συχνότητες.

Σε όλες τις περιπτώσεις οι συντελεστές Fourier αποτελούν ισαπέχοντα δείγματα (κατά $2\pi/T_0$) της περιβάλλουσας $2sin(\Omega\tau/2)/\Omega$ όπου $\Omega = k\Omega_0,\ \ \Omega_0 = 2\pi/T_0$.

Επομένως, αύξηση της περιόδου T_0 του περιοδικού σήματος και διατήρηση σταθερής της διάρκειας του παλμού τ ως προς την περίοδό του T_0, δεν θα αλλοιώσει την περιβάλλουσα αλλά θα φέρει πιο κοντά τους φασματικούς συντελεστές, καθώς μειώνεται η θεμελιώδης συχνότητα των συνιστωσών της σειράς Fourier. Έτσι, οι αρμονικές πλησιάζουν συχνοτικά η μία την άλλη και το φάσμα γίνεται πιο πυκνό.

Άσκηση 2 (συνέχεια)

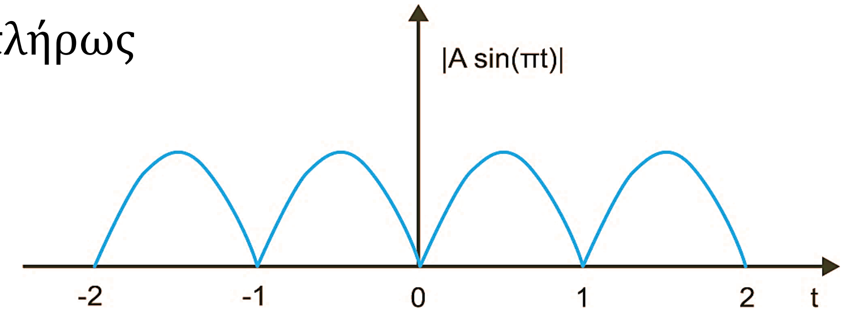
Όταν ο χρόνος μεταξύ των παλμών ή αλλιώς η περίοδος του περιοδικού σήματος τείνει στο άπειρο, τότε η απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικούς φασματικούς συντελεστές τείνει στο μηδέν, άρα το διακριτό φάσμα γίνεται πλέον συνεχές, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Φάσμα πλάτους παλμοσειράς για διαφορετικές τιμές της περιόδου T_0

Άσκηση 3

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier του πλήρως ανορθωμένου ημιτονικού σήματος και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους μονής και διπλής πλευράς καθώς και το φάσμα φάσης.



Απάντηση: Το πλήρως ανορθωμένο ημίτονο είναι $x(t) = |Asin(\pi t)|$. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = 1\ sec$, άρα η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 = 1\ (Hz)$ και η θεμελιώδης κυκλική συχνότητα είναι $\Omega_0 = 2\pi\ (rad/sec)$. Υπολογίζουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των μορφών σειράς Fourier:

- Τριγωνομετρική Α' μορφή:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \int_0^1 A\sin(\pi t)\,dt = \left[-\frac{A}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^1 =$$
$$= -\frac{A}{\pi}[\cos(\pi) - \cos(0)] = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,cos(k\Omega_0 t)\,dt = 2A\int_0^1 \sin(\pi t)\,cos(2k\pi t)\,dt = \ldots$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

$$= 2A\left[-\frac{\cos(\pi-2k\pi)}{2(\pi-2k\pi)}t-\frac{\cos(\pi+2k\pi)}{2(\pi+2k\pi)}t\right]_0^1 = 2A\left[\frac{\cos(2k\pi-\pi)}{2(2k\pi-\pi)}-\frac{\cos(2k\pi+\pi)}{2(2k\pi+\pi)}\right]$$
$$= \cdots = 2A\left[-\frac{1}{4k\pi-2\pi}+\frac{1}{4k\pi+2\pi}\right] = 2A\left[\frac{-4\pi}{(4k\pi)^2-(2\pi)^2}\right] = -\frac{4A}{\pi(4k^2-1)}$$
$$= \frac{4A}{\pi(1-4k^2)}$$

Χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις: $\cos(2k\pi-\pi)=-1$ και $\cos(2k\pi+\pi)=-1,\ \forall t$ και τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ημίτονο επί συνημίτονο:
$\int sinPx\ \ cosQx\, dx = -\frac{\cos(P-Q)x}{2(P-Q)}-\frac{\cos(P+Q)x}{2(P+Q)}$, όπου $P=\pi$ και $Q=2k\pi$

Οι συντελεστές b_k υπολογίζονται από την παρακάτω σχέση και είναι μηδενικοί επειδή η συνάρτηση είναι άρτια:

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)sin(k\Omega_0 t)\,dt = \cdots = 0$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

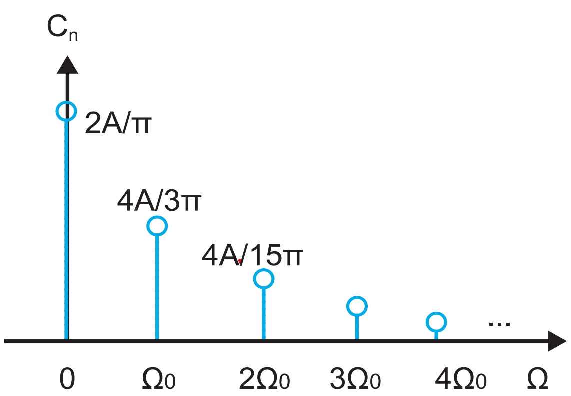
- <u>Τριγωνομετρική Β’ μορφή</u>:

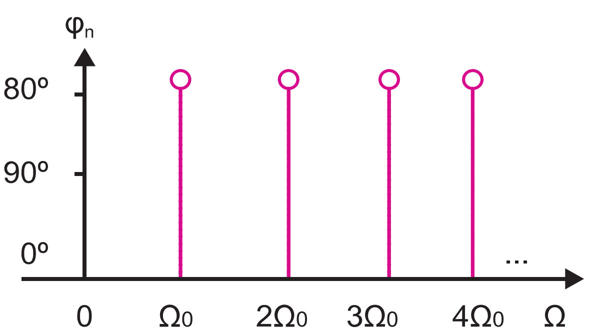
$$c_0 = a_0 = \frac{2A}{\pi}$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |\alpha_k| = \frac{4A}{\pi(4k^2 - 1)}$$

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = 0^0 = 180^0$$

Από την τριγωνομετρική Β’ μορφή μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους μονής πλευράς $c_k = c_k(\Omega_k)$ και το φάσμα φάσης $\theta_k = \theta_k(\Omega_k)$:





Επομένως το ανάπτυγμα της $x(t)$ σε Β’ τριγωνομετρική μορφή, είναι:

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\Omega_0 t)}{(1 - 4k^2)}$$

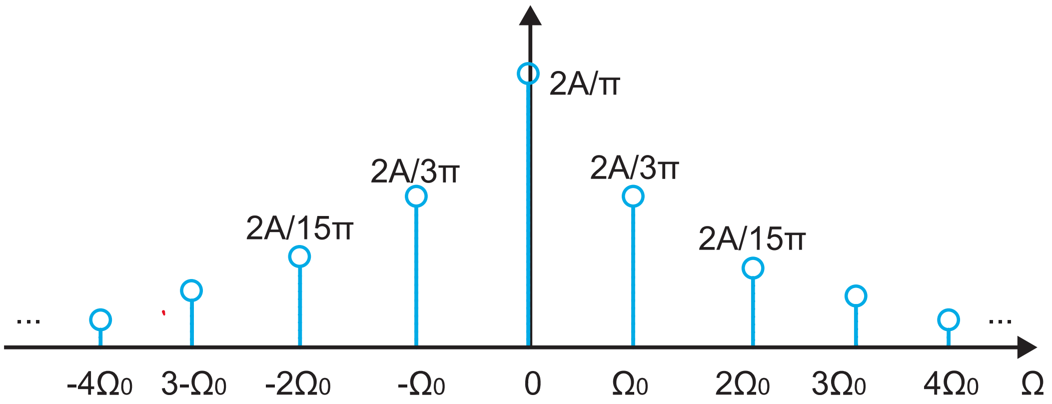
Άσκηση 3 (συνέχεια)

- <u>Εκθετική μορφή</u>:

$$|X_0| = \alpha_0 = \frac{2A}{\pi} \quad \text{και} \quad |X_k| = \frac{1}{2}(\alpha_k - jb_k) = \frac{\alpha_k}{2} = \frac{2A}{\pi(4k^2-1)}$$

$$\theta_k = \measuredangle X_k = -\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = 0^0 = 180^0$$

Το φάσμα φάσης $\theta_k = \theta_k(\Omega_k)$ είναι ίδιο με το προηγούμενο. Το φάσμα πλάτους διπλής πλευράς $|X_k| = |X_k(\Omega_k)|$ είναι:



Το ανάπτυγμα της συνάρτησης $x(t)$ σε εκθετική μορφή, είναι:

$$x(t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(1-4k^2)}e^{j2\pi kt}$$

Φαινόμενο Gibbs

- Αν η συνάρτηση $x(t)$ που θέλουμε να αναπτύξουμε είτε σε σειρά είτε σε μετασχηματισμό Fourier παρουσιάζει ασυνέχειες, τότε στο ανάπτυγμα θα εμφανιστούν **κυματισμοί**, το πλάτος των οποίων κορυφώνεται στα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης.
- Πρόκειται για ένα ανεπιθύμητο φαινόμενο, που ονομάζεται **φαινόμενο Gibbs**.
- Το μέγιστο πλάτος των κυματισμών μένει **σταθερό** και δεν μειώνεται ακόμα και όταν αυξάνεται το πλήθος των όρων του αναπτύγματος, όπως θα περίμενε κανείς.
- Οφείλεται στο γεγονός ότι το ανάπτυγμα Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή της περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή t, εκτός από τα **σημεία ασυνέχειας**, στα οποία το ανάπτυγμα Fourier συγκλίνει στον μέσο όρο των τιμών του $x(t)$ στις δύο πλευρές της χρονικής ασυνέχειας :

$$\frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

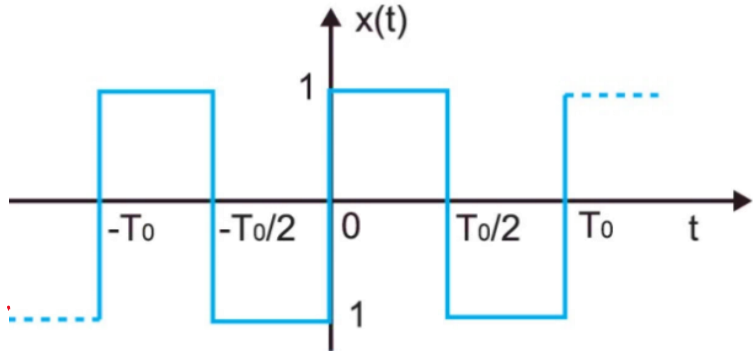
- Καθώς η μεταβλητή t τείνει προς τα σημεία της ασυνέχειας, το πλήθος N των όρων του αναπτύγματος πρέπει να αυξάνεται συνεχώς, έτσι ώστε το σφάλμα προσέγγισης του $x(t)$ από το ανάπτυγμά του κατά Fourier να είναι μικρότερο από κάποιο όριο.
- Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι το πλήθος των ταλαντώσεων θα αυξάνει και αυτό, όμως το μέγιστο πλάτος των ταλαντώσεων θα παραμένει σταθερό και περίπου ίσο με 18%.

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί η τριγωνομετρική Α' μορφή σειράς Fourier της περιοδικής παλμοσειράς:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -T_0/2 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < T_0/2 \end{cases} \quad \text{και} \;\; x(t) = x(t + T_0)$$

Απάντηση: Η γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ δίνεται στο σχήμα:



Οι συντελεστές a_0, a_k, b_k υπολογίζονται από τις σχέσεις:

Άσκηση 4 (συνέχεια)

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0}(-1)dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\,dt\right] = \frac{1}{T_0}\left[-\frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{2}\right] = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0}(-1)\cos(k\Omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\cos(k\Omega_0 t)\,dt\right]$$
$$= \frac{2}{T_0}\left[-\frac{1}{k\Omega_0}\sin(k\Omega_0 t)\,\Bigg|_{-T_0/2}^{0} + \frac{1}{k\Omega_0}\sin(k\Omega_0 t)\,\Bigg|_{0}^{T_0/2}\right] = 0$$

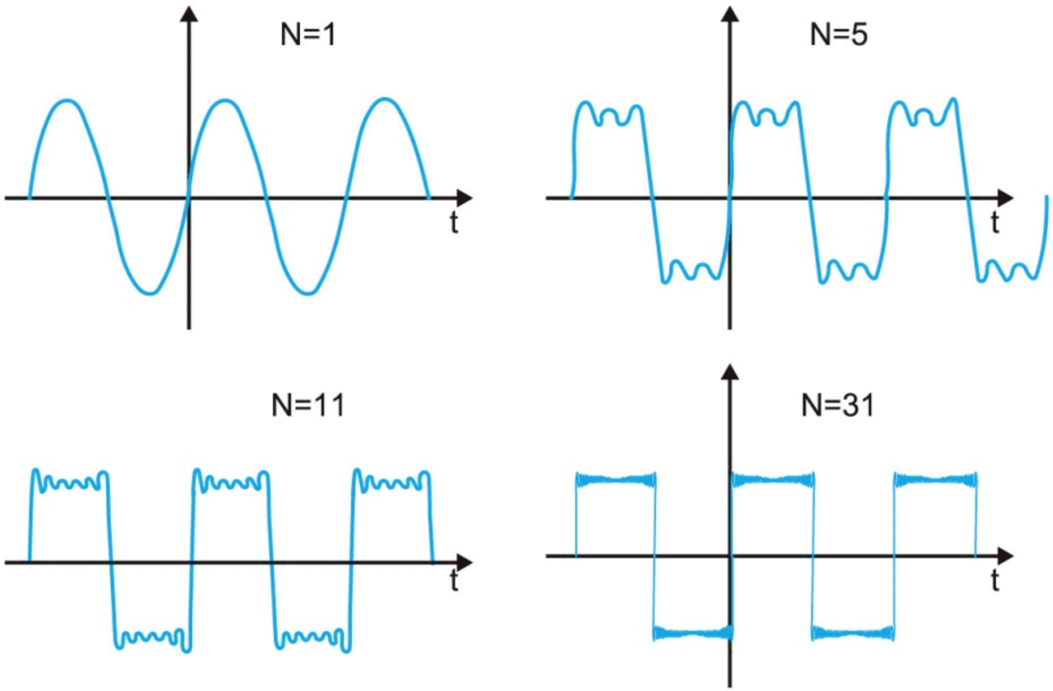
$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0}(-1)\sin(k\Omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\sin(k\Omega_0 t)\,dt\right]$$
$$= \frac{2}{k\Omega_0 T_0}\left[\cos(k\Omega_0 t)\,\Bigg|_{-T_0/2}^{0} - \cos(k\Omega_0 t)\,\Bigg|_{0}^{T_0/2}\right] = \frac{2}{k\pi}(1-\cos(k\pi))$$
$$= \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ 4/k\pi, & k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Το ανάπτυγμα της $x(t)$ σε σειρά Fourier είναι:

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin k\Omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3k\Omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5k\Omega_0 t + \cdots\right)$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται διαδοχικοί υπολογισμοί του αναπτύγματος της $x(t)$ για $N = 1, 5, 11, 31$ πρώτων αρμονικών.



- Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση βελτιώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του N.
- Ωστόσο οι ταλαντώσεις παραμένουν στα σημεία ασυνέχειας $k(T_0/2),\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ως αποτέλεσμα του φαινομένου Gibbs.
- Αυτές θα πάψουν να εμφανίζονται όταν το N πάρει την τιμή άπειρο.