Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 6: Μετασχηματισμός Laplace

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Ιδιοτιμές ΓΧΑ συστήματος
2. Μαθηματικός ορισμός μετασχηματισμού Laplace
3. Περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace
4. Πόλοι και μηδενικά του μετασχηματισμού Laplace
5. Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace

Εισαγωγή

- Ο μετασχηματισμός Laplace (Laplace Transform, LT) είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την επεξεργασία διαδικασιών που είναι σκόπιμο να μεταφέρονται από το **πεδίο του χρόνου t**, στο πεδίο της **μιγαδικής αναλογικής συχνότητας s** και αντιστρόφως.
- Δίνει **απλές αλγεβρικές λύσεις** σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές (ΓΔΕΣΣ), οι οποίες περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα.
- Ο μετασχηματισμός **Laplace** χρησιμοποιείται κυρίως στη μελέτη **συστημάτων συνεχούς χρόνου**, ενώ ο μετασχηματισμός **Fourier** στη μελέτη **σημάτων συνεχούς χρόνου**.

Πλεονεκτήματα Μετασχηματισμού Laplace

Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace είναι ευρεία επειδή:

- Μπορεί να υπολογιστεί για περισσότερες κατηγορίες συναρτήσεων σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier.
- Προσφέρει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων που δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας, ενσωματώνοντας κατάλληλα τις αρχικές συνθήκες.
- Η χρήση του μιγαδικού πεδίου συχνοτήτων και των πόλων/μηδενικών, εμπλουτίζει αλλά και απλοποιεί τη μελέτη των γραμμικών συστημάτων.
- Μπορεί να περιγράψει τόσο τη μόνιμη όσο και τη μεταβατική κατάσταση των συστημάτων, σε αντίθεση με τον μετασχηματισμό Fourier που περιορίζεται μόνο στην περιγραφή της μόνιμης κατάστασης των συστημάτων.

1. Ιδιοτιμές Γραμμικού και Χρονικά Αμετάβλητου Συστήματος

Ιδιοτιμές ΓΧΑ Συστήματος

Μιγαδικό σήμα $x(t) = e^{s_0 t}$, όπου $s_0 = \sigma_0 + j\Omega$ και $-\infty < t < \infty$ εφαρμόζεται σε ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Η έξοδος είναι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s_0(t-\tau)}\, d\tau = e^{s_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-\tau s_0}\, d\tau = \boldsymbol{x(t)\, H(s_0)} \qquad (1)$$

όπου:

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-\tau s_0}\, d\tau$$

Επειδή η συνάρτηση $x(t) = e^{s_0 t}$ εμφανίζεται τόσο στην είσοδο όσο και στην έξοδο ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του συστήματος. Από τη σχέση (1) παρατηρούμε ότι η έξοδος $y(t)$ εκφράζεται ως το γινόμενο της εισόδου επί τη μιγαδική συνάρτηση $H(s_0)$, η οποία σχετίζεται με το σύστημα μέσω της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ και υπολογίζεται στη συχνότητα s_0. Γενικά, για κάθε τιμή της μιγαδικής συχνότητας s, η ιδιοτιμή της εισόδου πολλαπλασιάζεται με τη συνάρτηση:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-\tau s}\, d\tau$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται **μετασχηματισμός Laplace** της κρουστικής απόκρισης του ΓΧΑ συστήματος και ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς** (transfer function).

Ιδιοτιμές ΓΧΑ Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $H(s)$ είναι ένας άπειρος συνδυασμός μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, σταθμισμένες με την κρουστική απόκριση $h(t)$.
- Αν το σήμα $x(t)$ είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα άπειρων μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

και επειδή το σύστημα είναι γραμμικό, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\,[H(s_0)\, e^{st}]\, ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)\, e^{st} ds$$

όπου $Y(s) = X(s)\, H(s)$.

- Επειδή στα ΓΧΑ συστήματα η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$, προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace δίνει έναν ισοδύναμο τρόπο υπολογισμού της εξόδου του ΓΧΑ συστήματος ή αλλιώς μετατρέπει την υπολογιστικά δύσκολη πράξη της συνέλιξης των σημάτων $x(t)$ και $h(t)$ σε έναν απλό πολλαπλασιασμό των μιγαδικών συναρτήσεων $X(s)$ και $H(s)$.
- Η ανάλυση που δόθηκε στην ενότητα αυτή, δεν ισχύει για συστήματα που είναι μη-γραμμικά ή χρονικά μεταβαλλόμενα.

2. Μαθηματικός ορισμός Μετασχηματισμού Laplace

Αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace

Ο **αμφίπλευρος** (bilateral) μετασχηματισμός Laplace ορίζεται από:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Το s είναι μία μιγαδική ποσότητα της μορφής $s = \sigma + j\Omega$, οπότε το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t} e^{-j\Omega t}\, dt$$

- Για $\sigma = 0$ ο μετασχηματισμός Laplace **συμπίπτει** με τον μετασχηματισμό Fourier.
- Ο όρος $e^{-\sigma t}$ (που δεν υπάρχει στον μετασχηματισμό Fourier) εξασφαλίζει τη **σύγκλιση** του ολοκληρώματος άρα και την ύπαρξη του μετ. Laplace ακόμα και όταν ο μετ. Fourier δεν υπάρχει (απειρίζεται).
- Το σ ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης** (damping factor) και το Ω (rad/sec) είναι η αναλογική (πραγματική) συχνότητα.

Οι τιμές του s που ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ονομάζεται **περιοχή σύγκλισης** (region of converge).

Μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace

Ο **μονόπλευρος** (unilateral) μετασχηματισμός Laplace ορίζεται από:

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Ένας πιο πλήρης μαθηματικά ορισμός του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace δίνεται από:

$$X(s) = \lim_{\alpha \to 0^-} \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Όταν αναφερόμαστε απλά στον μετασχηματισμό Laplace συνήθως υπονοείται ο μονόπλευρος LT.
- Η χρήση του μονόπλευρου LT είναι πιο συχνή, επειδή:
  - συνήθως ενδιαφερόμαστε να αναλύσουμε αιτιατά συστήματα.
  - δίνει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων τα οποία δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{\mathrm{j}\infty} X(s)\, e^{st}\, ds, \qquad s \in ROC$$

Σύγκριση Μονόπλευρου – Αμφίπλευρου Laplace

- Η χρήση του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace είναι πιο συχνή, επειδή συνήθως ενδιαφερόμαστε για την επίδραση αιτιατών σημάτων σε αιτιατά συστήματα είτε αυτά βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας είτε όχι. Αυτό γίνεται μέσω της περιγραφής του αιτιατού συστήματος από ένα σύνολο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

- Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός δεν παρέχει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων τα οποία δεν ευρίσκονται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας.

- Δύο σήματα συνεχούς χρόνου που διαφέρουν μόνο στο διάστημα $t < 0$ ενώ είναι ίδια για $t > 0$, έχουν διαφορετικό αμφίπλευρο αλλά ίδιο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace.

- Ένα αιτιατό σήμα (δηλ. $x(t) = 0$ για $t < 0$) έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό ο οποίος ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο τόσο ως προς τη συναρτησιακή αναπαράσταση όσο και ως προς τις περισσότερες ιδιότητες. Όπου υπάρχει διαφορά, θα την αναφέρουμε ρητά.

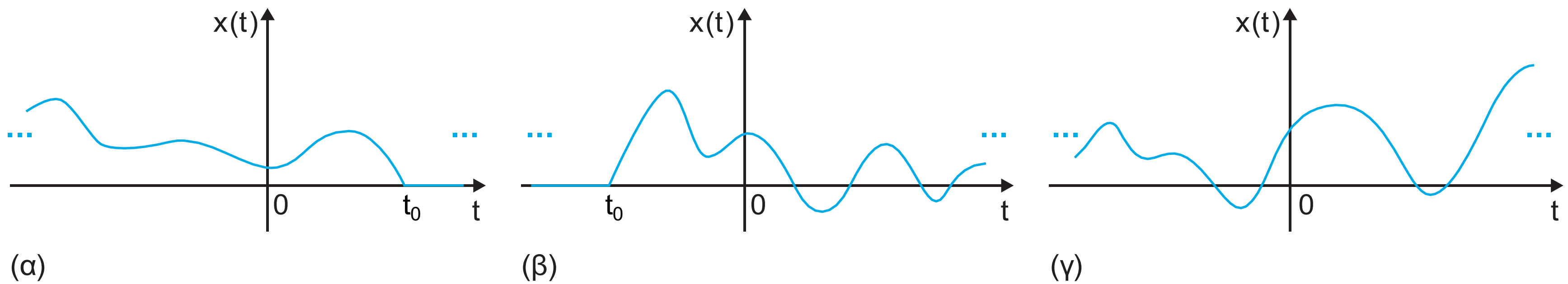
3. Η Περιοχή Σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace

- Για τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace, το σύνολο των τιμών της $X(s)$ που **συγκλίνουν απόλυτα**, δηλαδή το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί στο διάστημα $[0, +\infty)$, είναι είτε της μορφής $Re\{s\} > a$ είτε της μορφής $Re\{s\} \geq a$, όπου a είναι μία πραγματική σταθερά, $-\infty \leq a \leq \infty$.
- Η σταθερά a είναι γνωστή ως **τετμημένη της απόλυτης σύγκλισης** και εξαρτάται από τη συνάρτηση $x(t)$.
- Το υποσύνολο των τιμών του μιγαδικού επιπέδου s, για τις οποίες ο μετασχηματισμός Laplace συγκλίνει (απόλυτα ή υπό συνθήκες) ονομάζεται **περιοχή σύγκλισης** (Region of Convergence - ROC) του μετασχηματισμού.
- Η περιοχή σύγκλισης καθορίζεται από τη **διάρκεια** και τη **μορφή** του σήματος, δηλαδή από το γεγονός αν το σήμα έχει άπειρη ή πεπερασμένη διάρκεια και αν είναι αριστερής, δεξιάς ή διπλής πλευράς.

Πλευρικότητα Σημάτων

- Θυμίζουμε ότι ένα σήμα $x(t)$ λέγεται:
  - **Αριστερής πλευράς** εάν $x(t) = 0$ για $t > t_0$
  - **Δεξιάς πλευράς** εάν $x(t) = 0$ για $t < t_0$
  - **Διπλής πλευράς** εάν $x(t) \neq 0$ για $-\infty < t < \infty$
  - **Πεπερασμένης διάρκειας** εάν $x(t) = 0$ για $t > t_1$ και $t < t_2$



Σήμα: (α) αριστερής πλευράς, (β) δεξιάς πλευράς, (γ) διπλής πλευράς

4. Πόλοι και Μηδενικά του μετασχηματισμού Laplace

Πόλοι και Μηδενικά του μετασχηματισμού Laplace

Έστω ο μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος εκφρασμένος σε ρητή μορφή:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^{-2} + \cdots + b_{\mathrm{M}} s^{-\mathrm{M}}}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^{-2} + \cdots + \alpha_{\mathrm{N}} s^{-\mathrm{N}}}$$

Παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρανομαστή, το κλάσμα γράφεται:

$$X(s) = \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \ldots . (s - z_M)}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \ldots . (s - p_N)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - p_k)} s^{M-N}$$

- $\alpha_i, i = 1,2, \ldots, N$ και $b_j, j = 1,2, \ldots, M$: σταθερές (πραγματικοί αριθμοί)
- M και N: οι βαθμοί των πολυωνύμων (θετικοί ακέραιοι).
- **Μηδενικά** (zeros): οι τιμές του s που μηδενίζουν τον **αριθμητή** $(z_1, z_2, \ldots, z_M)$
- **Πόλοι** (poles): οι τιμές του s που μηδενίζουν τον **παρανομαστή** $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$
- Το πλήθος των μηδενικών είναι M και το πλήθος των πόλων είναι N, ενώ ο μετασχηματισμός έχει επιπλέον $|N - M|$ μηδενικά όταν $N < M$.

Πόλοι και Μηδενικά του μετασχηματισμού Laplace

- Όταν $M < N$ η ρητή συνάρτηση ονομάζεται **κανονική**. Αν $M > N$ η συνάρτηση δεν είναι κανονική, αλλά μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός πολυωνύμου και μίας ρητής συνάρτησης. Η αποτύπωση των πόλων και των μηδενικών σε διάγραμμα, ονομάζεται **διάγραμμα πόλων – μηδενικών** (pole-zero map).
- Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace αποτελείται από τις τιμές του σ για τις οποίες το γινόμενο $x(t)e^{-\sigma t}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο.
- Στην περιοχή σύγκλισης δεν περιλαμβάνονται οι πόλοι, επειδή γι' αυτούς η συνάρτηση Laplace τείνει στο άπειρο, καθώς αποτελούν τις ρίζες του παρονομαστή.
- Τα μηδενικά οδηγούν τον μετασχηματισμό σε μηδενική τιμή, γεγονός που δεν δημιουργεί κάποιο πρόβλημα στους υπολογισμούς.
- Η περιοχή σύγκλισης είναι ένα επίπεδο παράλληλο στον φανταστικό άξονα $j\Omega$. Η περιοχή σύγκλισης καθορίζεται μόνο από την τιμή του συντελεστή απόσβεσης σ και όχι από τη συχνότητα Ω. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι επειδή το μέτρο του όρου $e^{j\Omega}$ είναι ίσο με τη μονάδα ($\left|e^{j\Omega}\right| = 1$), άρα δεν επηρεάζει τη σύγκλιση του ολοκληρώματος. Έτσι, όλες οι περιοχές σύγκλισης περιέχουν άπειρες τιμές της συχνότητας Ω, δηλαδή ισχύει $-\infty < \Omega < \infty$.

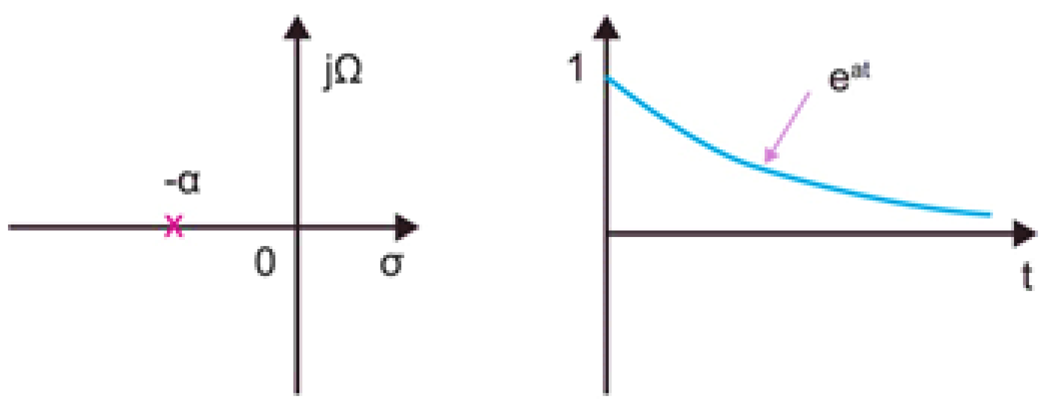
Πόλοι και Μηδενικά του μετασχηματισμού Laplace

- Αν $\{\sigma_i\}$ είναι τα πραγματικά μέρη των πόλων του μετασχηματισμού Laplace $F(s)$ μιας συνάρτησης χρόνου $f(t)$, που αντιστοιχεί σε διαφορετικούς τύπους σημάτων ή σε κρουστικές αποκρίσεις συστημάτων, τότε η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace ορίζεται από τη θέση των πόλων ως εξής:
  - Για μια **αιτιατή** (causal) συνάρτηση $f(t)$, η περιοχή σύγκλισης είναι το επίπεδο που εκτείνεται **δεξιά** των πόλων:
  $$R_c = \{(\sigma, \Omega):\ \sigma > max\{\sigma_i\}, -\infty < \Omega < \infty\}$$
  - Για μια **αντι-αιτιατή** (anti-causal) συνάρτηση $f(t)$, η περιοχή σύγκλισης είναι το επίπεδο που εκτείνεται **αριστερά** των πόλων:
  $$R_{ac} = \{(\sigma, \Omega):\ \sigma < min\{\sigma_i\}, -\infty < \Omega < \infty\}$$
  - Για μια **μη-αιτιατή** (non-causal) συνάρτηση $f(t)$, η περιοχή σύγκλισης είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης για το αιτιατό και για το αντι-αιτιατό μέρος της συνάρτησης:
  $$R_{nc} = R_c \cap R_{ac}$$

Πόλοι και Ευστάθεια Συστήματος (1/4)

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι **ευσταθές** όταν **όλοι οι πόλοι** του μετασχηματισμού Laplace της κρουστικής απόκρισής του έχουν **αρνητικό** πραγματικό μέρος.

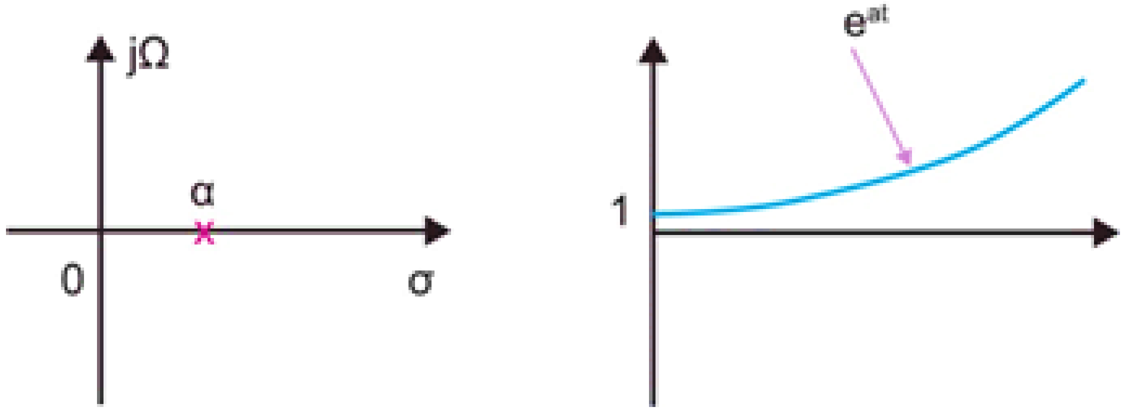
- Σήματα χρόνου που είναι πολλαπλασιασμένα με e^{-at}, $(a > 0)$ εμφανίζουν πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο της αναλογικής μιγαδικής συχνότητας s και είναι **ευσταθή**.



Πόλοι ευσταθούς συστήματος

Πόλοι και Ευστάθεια Συστήματος (2/4)

Σήματα χρόνου που είναι πολλαπλασιασμένα με δυνάμεις του t εμφανίζουν πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο της αναλογικής μιγαδικής συχνότητας s και είναι **ασταθή**.

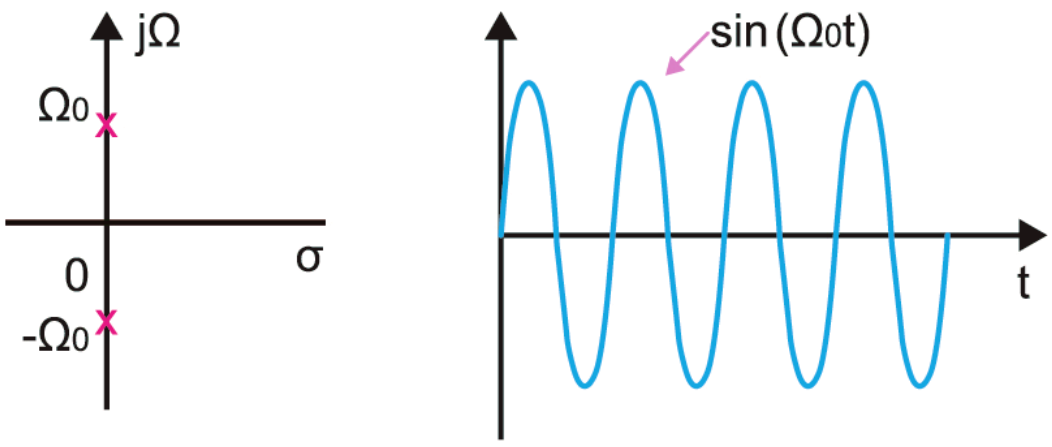


Πόλοι ασταθούς συστήματος

Πόλοι και Ευστάθεια Συστήματος (3/4)

Σήματα που περιέχουν **ημιτονοειδείς** όρους (ταλάντωση) εμφανίζουν **μιγαδικούς συζυγείς πόλους**.

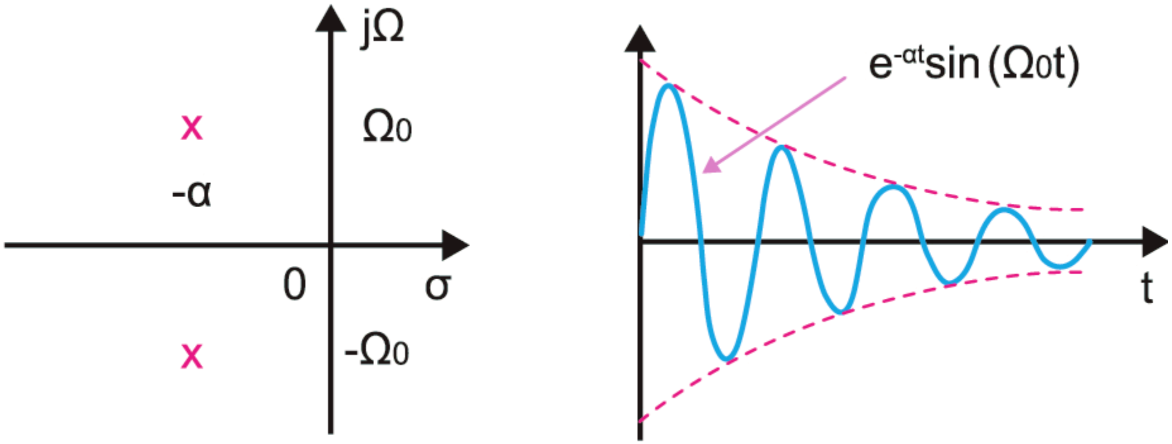
- Αν το πραγματικό μέρος των συζυγών πόλων είναι μηδέν τότε έχουμε συντηρούμενη ταλάντωση.



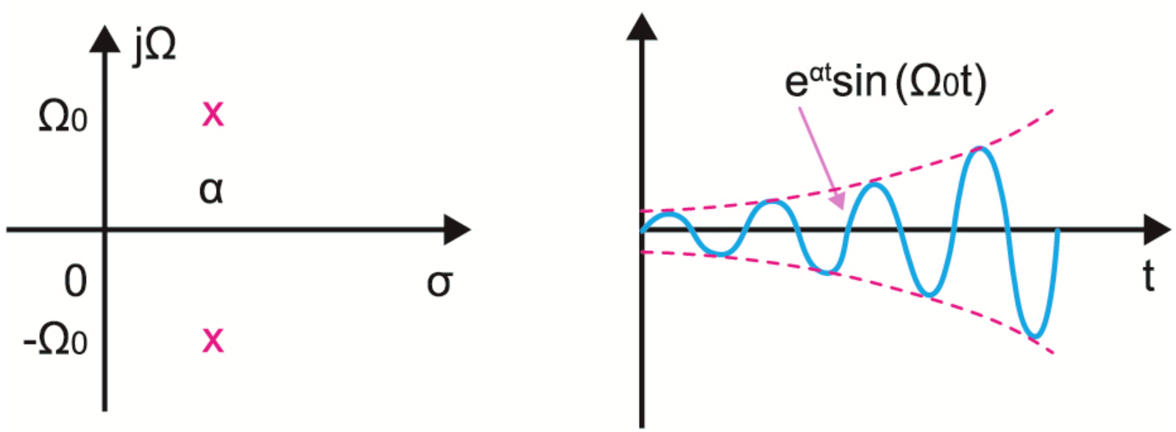
Πόλοι οριακά ευσταθούς συστήματος

- Αλλιώς η ταλάντωση είναι εκθετικά φθίνουσα ή εκθετικά αύξουσα.

Πόλοι και Ευστάθεια Συστήματος (4/4)



Πόλοι ευσταθούς συστήματος



Πόλοι ασταθούς συστήματος

Θέση πόλων και Ευστάθεια συστήματος

- Σήματα που περιέχουν ημιτονοειδείς όρους εμφανίζουν πόλους μιγαδικούς συζυγείς. Αν το πραγματικό μέρος των συζυγών πόλων είναι μηδέν τότε έχουμε συντηρούμενη ταλάντωση (οριακή ευστάθεια). Αλλιώς, η ταλάντωση είναι εκθετικά φθίνουσα ή εκθετικά αύξουσα, ανάλογα αν οι (μιγαδικοί) πόλοι βρίσκονται στο αριστερό ή στο δεξί ημιεπίπεδο της μιγαδικής συχνότητας.
- Σήματα που είναι πολλαπλασιασμένα με δυνάμεις του t εμφανίζουν πόλους στο δεξί ημιεπίπεδο του s και είναι ασταθή, καθώς η τιμή τους τείνει στο άπειρο στο πέρασμα του χρόνου.
- Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι **ευσταθές** όταν **όλοι οι πόλοι** του μετασχηματισμού Laplace της κρουστικής απόκρισής του έχουν **αρνητικό** πραγματικό μέρος. Η διατύπωση είναι η ισοδύναμη της απόλυτης σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace της κρουστικής απόκρισης στην περιοχή $Re\{s\} \geq 0$.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $x(t) = u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-st} - e^{0}\right] = -\frac{1}{s}[0-1] = \frac{1}{s}$$

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού, ορίζεται από τις τιμές του s για τις οποίες μπορεί να υπολογιστεί το παραπάνω ολοκλήρωμα. Αυτό γίνεται όταν συγκλίνει το όριο, γεγονός που απαιτεί ο εκθέτης – st να λαμβάνει αρνητική τιμή ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν, άρα πρέπει να ισχύει $s > 0$.

Επομένως η περιοχή σύγκλισης ορίζεται για $\boldsymbol{Re\{s\} > 0}$.

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

(α) $x_1(t) = \delta(t)$ (β) $x_2(t) = \delta(t - t_0)$

<u>Απάντηση</u>: (α) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt = e^{-st}|_{t=0} = e^0 = 1$$

Η περιοχή σύγκλισης ορίζεται για $Re(s) > -\infty$, δηλ. είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο.

<u>Σχόλιο</u>: Στη λύση του ολοκληρώματος χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της επιλογής της συνάρτησης δ(t), δηλ.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt = x(0)$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

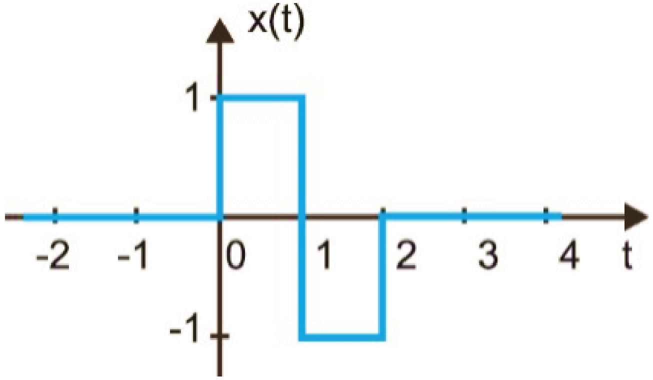
β) Εργαζόμενοι ομοίως, έχουμε:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st}\, dt = e^{-st}\big|_{t=t_0} = e^{-st_0}$$

Η περιοχή σύγκλισης ορίζεται για $Re(s) > -\infty$, δηλ. είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:



<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{1} e^{-st}dt - \int_{1}^{2} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \frac{1}{s}e^{-st}\Big|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{s}[e^{-s} - 1 + e^{-2s} + e^{-s}] = \frac{e^{-2s} - 2e^{s} + 1}{s}$$

Επειδή τα ολοκληρώματα συγκλίνουν για όλες τις τιμές του s, προκύπτει ως περιοχή σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο s.

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή υπάρχει μόνο για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 2$.

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

(α) $x_1(t) = e^{-\alpha t}\, u(t)$ (σήμα δεξιάς πλευράς)

(β) $x_2(t) = -e^{-\alpha t}\, u(-t)$ (σήμα αριστερής πλευράς)

<u>Απάντηση</u>: (α) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha+s} e^{-(\alpha+s)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+s}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-(\alpha+s)t} - e^0\right]$$

Το όριο μπορεί να υπολογιστεί όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός. Αυτό συμβαίνει επειδή μία τιμή εκθέτη $-\infty$, κάνει τον όριο να τείνει στο μηδέν. Αντίθετα, αν ο εκθέτης είναι θετικός, τότε το όριο τείνει στο $+\infty$, άρα το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

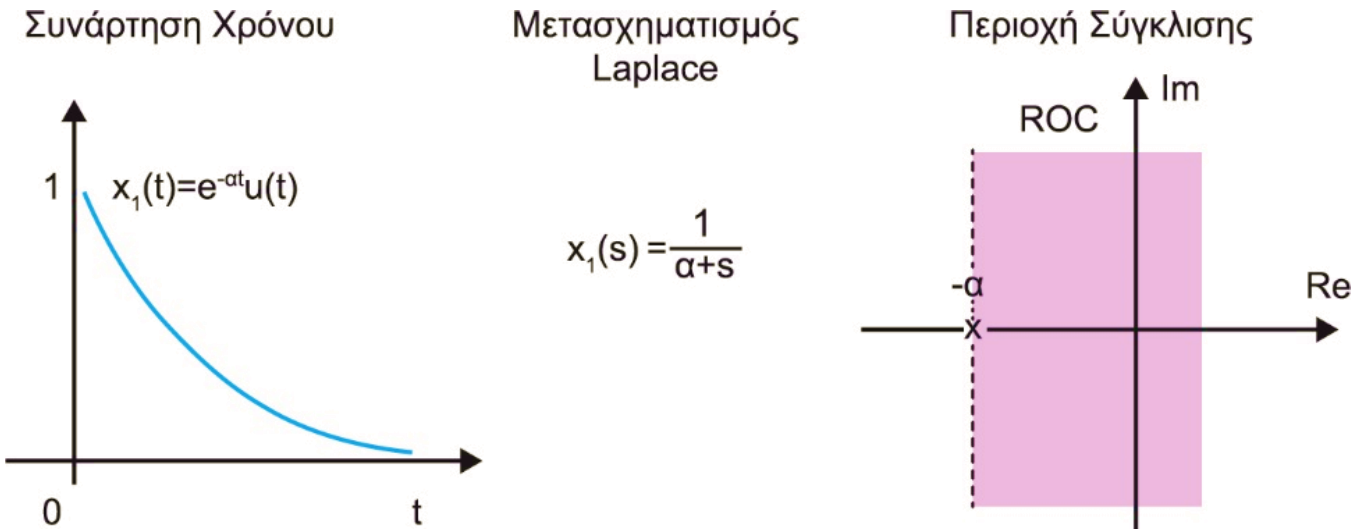
Άρα ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει μόνο στην περίπτωση που ισχύει :

$$\alpha + s > 0 \Rightarrow (a+\sigma) + j\Omega > 0 \Rightarrow (a+\sigma) > 0 \Rightarrow \sigma > -\alpha$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Επειδή είναι γνωστό ότι $Re\{s\} = \sigma$, καταλήγουμε στη διαπίστωση ότι η περιοχή σύγκλισης του ζητούμενου μετασχηματισμού Laplace ορίζεται από τη σχέση $\boldsymbol{Re\{s\} > -\alpha}$ και η τιμή του είναι:

$$\boldsymbol{X_1(s) = \frac{1}{\alpha + s}}$$



Η περιοχή σύγκλισης είναι το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που εκτείνεται **δεξιά** της ευθείας $\sigma > -\alpha$ (χωρίς να την περιλαμβάνει), γεγονός αναμενόμενο καθώς το σήμα είναι δεξιάς πλευράς. Υπάρχει ένας πόλος στη θέση $-\alpha$. Η ευθεία $\sigma = -\alpha$ είναι το σύνορο της περιοχής σύγκλισης.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Ας μελετήσουμε κάποιες περιπτώσεις για διάφορες τιμές του εκθέτη α:

- Αν $\alpha > 0$, π.χ. $\alpha = 3$, τότε το σήμα $x_1(t) = e^{-3t}\, u(t)$ είναι ένα μειούμενο εκθετικό αιτιατό σήμα (δεξιάς πλευράς) και ο πόλος του μετασχηματισμού Laplace βρίσκεται στο $s = -\alpha = -3$, δηλαδή επάνω στον πραγματικό άξονα σ, στην αριστερή πλευρά του επιπέδου s.

- Αν $\alpha < 0$, π.χ. $\alpha = -3$, τότε το σήμα $x_1(t) = e^{3t} u(t)$ είναι ένα αυξανόμενο εκθετικό αιτιατό σήμα (δεξιάς πλευράς). Ο πόλος βρίσκεται στο $s = -\alpha = 3$, δηλαδή επάνω στον πραγματικό άξονα σ, αλλά πλέον στη δεξιά πλευρά του επιπέδου s.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

2) Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο και έχουμε:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-at}\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(\alpha+s)t}\, dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{\alpha+s} e^{-(\alpha+s)t}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\alpha+s}\left[e^{0} - \lim_{t\to-\infty} e^{-(\alpha+s)t}\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha} + s\left[\lim_{t\to-\infty} e^{-(\alpha+s)t} - e^{0}\right]$$

Το όριο μπορεί να υπολογιστεί όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός. Επειδή το t είναι αρνητικός (αφού $t \to -\infty$), το ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο αν:

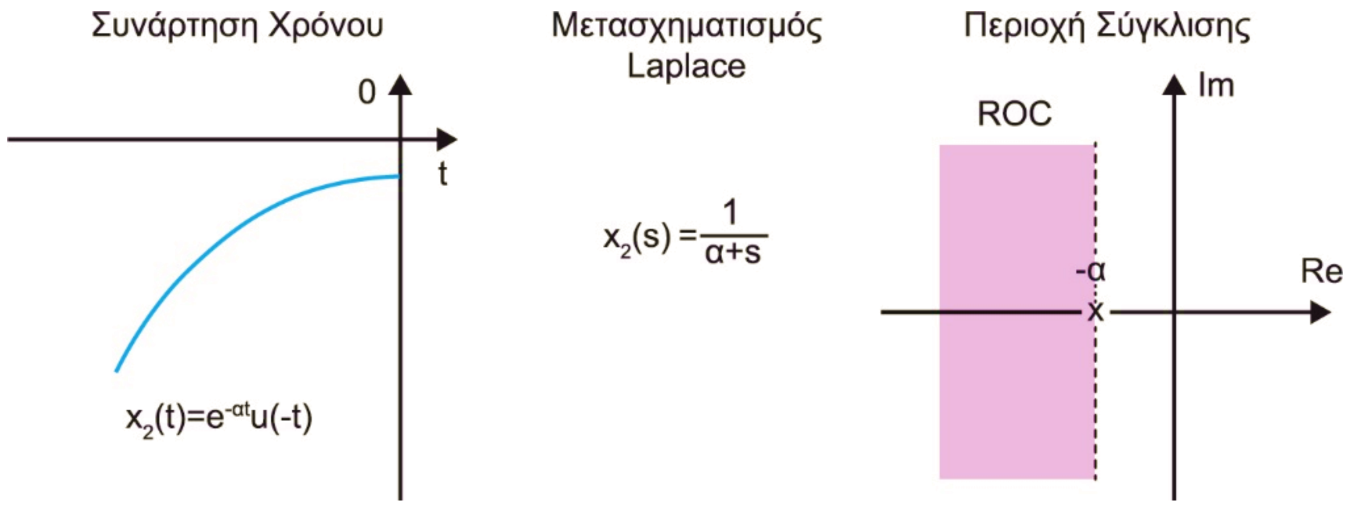
$$\alpha + s < 0 \Rightarrow (a+\sigma) + j\Omega < 0 \Rightarrow (a+\sigma) < 0 \Rightarrow \sigma < -\alpha$$

Και στην περίπτωση αυτή η τιμή του LT είναι η ίδια με την προηγούμενη, δηλ.

$$\boldsymbol{X_2(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha + s}}$$

όμως η περιοχή σύγκλισης είναι $\boldsymbol{Re\{s\} < -\alpha}$

Άσκηση 4 (συνέχεια)



- Δύο διαφορετικά σήματα έχουν τον ίδιο LT αλλά διαφορετικές περιοχές σύγκλισης.
- Και τα δύο σήματα είναι ευσταθή, ενώ η οριακή τιμή (πόλος) της περιοχής σύγκλισης και στις δύο περιπτώσεις βρίσκεται στο αρνητικό (αριστερό) ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου συχνοτήτων s.
- Η παρατήρηση αυτή γεννά το ερώτημα μήπως υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ της θέσης των πόλων στο επίπεδο s και της **ευστάθειας** ενός ΓΧΑ συστήματος;

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

(α) $x_1(t) = [\cos(\Omega_0 t)]\, u(t)$ (β) $x_2(t) = [\sin(\Omega_0 t)]\, u(t)$

Απάντηση: (α) Από τον ορισμό του LT και τη σχέση Euler $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left[e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right]$:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\Omega_0 t)]\, u(t) e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} \cos(\Omega_0 t)\ e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{j\Omega_0 t}\, e^{-st}\, dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-j\Omega_0 t}\, e^{-st} dt = \frac{1}{2} L\left\{e^{j\Omega_0 t}\right\} + \frac{1}{2} L\left\{e^{-j\Omega_0 t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\Omega_0} + \frac{1}{s + j\Omega_0}\right] = \frac{s}{s^2 + {\Omega_0}^2}$$

Για να μηδενιστεί το πρώτο όριο πρέπει ο εκθέτης να είναι αρνητικός, δηλαδή:

$$j\Omega - s < 0 \Rightarrow j\Omega - \sigma - j\Omega < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma > 0}$$

Ομοίως, για τον μηδενισμό του δεύτερου ορίου, πρέπει:

$$-(j\Omega + s) < 0 \Rightarrow j\Omega + s > 0 \Rightarrow j\Omega + \sigma + j\Omega > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma > 0}$$

Επομένως, η περιοχή σύγκλισης είναι $Re(s) > 0$.

Άσκηση 5 (συνέχεια)

(β) Εργαζόμενοι ομοίως και χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler για τη συνάρτηση ημιτόνου, δηλ. $\sin\varphi = \frac{1}{2j}\left[e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right]$, έχουμε:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\sin(\Omega_0 t)]\, u(t) e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} \sin(\Omega_0 t)\; e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{j\Omega_0 t}\, e^{-st}\, dt - \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{-j\Omega_0 t}\, e^{-st} dt = \frac{1}{2j} L\left\{e^{j\Omega_0 t}\right\} - \frac{1}{2j} L\left\{e^{-j\Omega_0 t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - j\Omega_0} - \frac{1}{s + j\Omega_0}\right] \quad = \frac{\Omega_0}{s^2 + {\Omega_0}^2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $Re(s) > 0$.

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

(α) $x_1(t) = [e^{-\alpha t} cos(\Omega_0 t)]\, u(t)$ (β) $x_2(t) = [e^{-\alpha t} sin(\Omega_0 t)]\, u(t)$

<u>Απάντηση</u>: 1) Με βάση τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-\alpha t} cos(\Omega_0 t)]\, u(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\, cos(\Omega_0 t)\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{j\Omega_0 t}\, e^{-st}\, dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega_0 t}\, e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2} L\left\{e^{-(a-j\Omega_0)t}\right\} + \frac{1}{2} L\left\{e^{-(a+j\Omega_0)t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+a-j\Omega_0} + \frac{1}{s+a+j\Omega_0}\right]$$

$$= \frac{s+a}{(s+a)^2 + {\Omega_0}^2}$$

Περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -a$.

Άσκηση 6 (συνέχεια)

2) Εργαζόμενοι ομοίως, έχουμε:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-\alpha t} sin(\Omega_0 t)]\, u(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\, sin(\Omega_0 t)\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{j\Omega_0 t}\, e^{-st}\, dt - \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega_0 t}\, e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j} L\left\{e^{-(a-j\Omega_0)t}\right\} - \frac{1}{2j} L\left\{e^{-(a+j\Omega_0)t}\right\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s+a-j\Omega_0} - \frac{1}{s+a+j\Omega_0}\right]$$

$$= \frac{\Omega_0}{(s+a)^2 + {\Omega_0}^2}$$

Περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -a$.

Ιδιότητες περιοχής σύγκλισης

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ ή δεν θα διαθέτει καθόλου μετασχηματισμό Laplace ή αν διαθέτει θα εμπίπτει σε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις:

- Αν το σήμα έχει **πεπερασμένη διάρκεια**, τότε η περιοχή σύγκλισης θα είναι **όλο το μιγαδικό επίπεδο**, εκτός ίσως από τα σημεία $s = 0$ ή $s = \infty$.
- Αν το σήμα είναι συνάρτηση **δεξιάς πλευράς**, τότε η περιοχή σύγκλισης θα έχει τη μορφή $\boldsymbol{\sigma > \sigma_R}$, όπου σ_R είναι ο πόλος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.
- Αν το σήμα είναι συνάρτηση **αριστερής πλευράς**, τότε η περιοχή σύγκλισης θα έχει τη μορφή $\boldsymbol{\sigma < \sigma_L}$, όπου σ_L ο πόλος με το μικρότερο πραγματικό μέρος.
- Αν το σήμα έχει **άπειρη διάρκεια**, τότε η περιοχή σύγκλισης θα έχει τη μορφή $\boldsymbol{\sigma_R < \sigma < \sigma_L}$, όπου σ_R είναι ο πόλος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος και σ_L είναι ο πόλος με το μικρότερο πραγματικό μέρος. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να φανταστούμε την περιοχή σύγκλισης σαν μία **λωρίδα** μεταξύ δύο κατακόρυφων ευθειών, οι θέσεις των οποίων καθορίζονται από τους πόλους.
- Αν υπάρχουν **πόλοι**, αυτοί (προφανώς) δεν μπορεί να βρίσκονται μέσα στην περιοχή σύγκλισης. Αυτό συμβαίνει επειδή τα όρια του ολοκληρώματος δεν περιλαμβάνουν το άπειρο, αλλά συγκεκριμένες τιμές χρόνου.

5. Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace (1/4)

Σήμα $x(t)$	ML $X(s)$	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta(t)$	1	$Re(s) > -\infty$ (όλο το s)
$\mathrm{A}\,\delta(t \pm t_0)$	$\mathrm{A}\,e^{\pm t_0\,s}$	$Re(s) > -\infty$
$u(t)$	$1/s$	$Re(s) > 0$
$-u(-t)$	$1/s$	$Re(s) < 0$
$u(t - t_0)$	$\dfrac{e^{-t_0\,s}}{s}$	$Re(s) > 0$
$r(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$	$Re(s) > 0$
$\dfrac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	$Re(s) > -\infty$

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace (2/4)

Σήμα $x(t)$	LT $X(s)$	Περιοχή Σύγκλισης
$e^{-at}\, u(t), a > 0$	$\dfrac{1}{s+a}$	$Re(s) > -a$
$-e^{-at}\, u(-t), a > 0$	$\dfrac{1}{s+a}$	$Re(s) < -a$
$e^{\mathrm{j}\Omega_0 t}\, \mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{s - j\Omega_0}$	$Re(s) > 0$
$\cos(\Omega_0 t)\, \mathrm{u}(t)$	$\dfrac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$	$Re(s) > 0$
$\sin(\Omega_0 t)\, \mathrm{u}(t)$	$\dfrac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$	$Re(s) > 0$

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace (3/4)

Σήμα $x(t)$	LT $X(s)$	Περιοχή Σύγκλισης
$e^{-at}cos(\Omega_0 t)\,u(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$Re(s) > -a$
$e^{-at}sin(\Omega_0 t)\,u(t)$	$\dfrac{\Omega_0}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$Re(s) > -a$
$t^n\,u(t)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$Re(s) > 0$
$-t^n\,u(-t)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$Re(s) < 0$

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace (4/4)

Σήμα $x(t)$	LT $X(s)$	Περιοχή Σύγκλισης
$e^{-at}\, t^n\, u(t)$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$Re(s) > -a$
$-e^{-at}\, t^n\, u(-t)$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$Re(s) < -a$
$t\, cos(\Omega_0 t)\, u(t)$	$\dfrac{s^2 - \Omega_0^2}{(s^2 + \Omega_0^2)^2}$	$Re(s) > 0$
$t\, sin(\Omega_0 t)\, u(t)$	$\dfrac{2s\Omega_0^2}{(s^2 + \Omega_0^2)^2}$	$Re(s) > 0$