Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 4: Μελέτη των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Περιγραφή των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων (ΓΧΑ) Συστημάτων:
  - Με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις
  - Με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης
- Η Κρουστική Απόκριση των ΓΧΑ Συστημάτων
- Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε ΓΧΑ Συστήματα
- Ιδιότητες της Συνέλιξης και των ΓΧΑ Συστημάτων:
  - Αντιμεταθετική ιδιότητα
  - Προσεταιριστική ιδιότητα
  - Επιμεριστική ιδιότητα
  - Ταυτοτική ιδιότητα
  - Ιδιότητα Ομογένειας
  - Ιδιότητα Εύρους

Τρόποι περιγραφής ΓΧΑ Συστημάτων

1. **Περιγραφή ΓΧΑ συστήματος με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις**
2. **Περιγραφή ΓΧΑ συστήματος με την κρουστική απόκριση**
3. Χρήση μετασχηματισμού Laplace
4. Ανάλυση συστημάτων στο χώρο κατάστασης

1. Περιγραφή ΓΧΑ Συστήματος με Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μελέτη ΓΧΑ συστήματος με Διαφορικές Εξισώσεις

Στη γενική μορφή του ένα δυναμικό σύστημα που δέχεται στην είσοδό του ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ και παράγει στην έξοδό του το σήμα $y(t)$ μπορεί για $t \geq 0$ να περιγραφεί από τη **γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές** (ΓΔΕΣΣ) τάξης N:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \cdots + a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \cdots + b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M}$$

με N γνωστές αρχικές συνθήκες, δηλαδή:

$$y(0), \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \text{ για } k = 1 \ldots N-1$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση τον συντελεστή:

$$D^n[y(t)] = \frac{d^N y(t)}{dt^N} \text{ και } D^0[y(t)] = y(t)$$

η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε απλή αλγεβρική εξίσωση της μορφής:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 D + \cdots + a_N D^N)[y(t)] = (b_0 + b_1 D + \cdots + b_M D^M)[x(t)]$$

$$D^k[y(t)]_{t=0}, \qquad k = 0,1, \ldots N-1$$

Λύση Διαφορικής Εξίσωσης (ΓΔΕΣΣ)

Η **πλήρης λύση** της ΓΔΕΣΣ, δηλαδή η απόκριση $y(t)$ για $t \geq 0$ αποτελείται από δύο συνιστώσες και είναι:

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

- $y_{zs}(t)$ **απόκριση μηδενικής αρχικής κατάστασης,** είναι η έξοδος που οφείλεται αποκλειστικά στην <u>είσοδο $x(t)$,</u> εφόσον θεωρήσουμε μηδενικές όλες τις αρχικές συνθήκες
- $y_{zi}(t)$ **απόκριση μηδενικής εισόδου,** είναι η έξοδος που οφείλεται αποκλειστικά στις <u>αρχικές συνθήκες</u>, εφόσον θεωρήσουμε μηδενική την είσοδο $x(t)$

Προσοχή ! Ένα σύστημα που περιγράφεται από μία συνήθη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (ΓΔΕΣΣ), είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο** (ΓΧΑ) μόνο όταν οι **αρχικές συνθήκες του είναι μηδενικές** (ισοδύναμα, η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδενική).

Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

(Α) Η **απόκριση μηδενικής κατάστασης** $y_{zs}(t)$ είναι η έξοδος που οφείλεται αποκλειστικά στην είσοδο $x(t)$, εφόσον θεωρήσουμε μηδενικές όλες τις αρχικές συνθήκες, δηλ. η $y_{zs}(t)$ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 D + \cdots + a_N D^N)[y(t)] = (b_0 + b_1 D + \cdots + b_M D^M)[x(t)]$$

Είσοδος	**Μερική Λύση**
K	A
kt	$At + B$
kt^2	$At^2 + Bt + C$
$\mathrm{ke}^{-\mathrm{at}}$	Ae^{-at}
$\mathrm{k}\sin(\Omega\mathrm{t})$	$A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)$
$\mathrm{k}\cos(\Omega\mathrm{t})$	$A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)$

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου (1/5)

(Β) Η **απόκριση μηδενικής εισόδου** $y_{zi}(t)$ είναι η έξοδος που οφείλεται αποκλειστικά στις αρχικές συνθήκες, εφόσον θεωρήσουμε μηδενική την είσοδο $x(t)$. Η $y_{zi}(t)$ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$\alpha_0 + \alpha_1 D + \cdots a_N \; D^N = 0 \qquad \text{(I)}$$

με αρχικές συνθήκες:

$$y(0), \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \text{ για } k = 1 \ldots N - 1$$

- Οι ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου** ονομάζονται **φυσικές συχνότητες** ή **ιδιοτιμές** (eigenvalues) και χαρακτηρίζουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.
- Η λύση $y_{zs}(t)$ υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο από το τροποποιημένο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- Σε επόμενη διάλεξη θα δούμε έναν πολύ πιο απλό και αποδοτικό τρόπο επίλυσης των ΓΔΕΣΣ, με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου (2/5)

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι μια συνάρτηση που διατηρεί τη μορφή της κατά την παραγώγιση. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $e^{\lambda t}$. Υποθέτουμε λοιπόν λύση της μορφής:

$$y_{zi}(t) = ce^{\lambda t}$$

όπου λ και c είναι σταθερές, εν γένει μιγαδικές που πρέπει να υπολογιστούν. Για να υπολογίσουμε τη λύση $y_{zi}(t)$ αντικαθιστούμε στη σχέση (Ι) τον τελεστή D με τη μιγαδική μεταβλητή λ και λαμβάνουμε:

$$\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots a_N\lambda^N = 0$$

Η παραπάνω ομογενής εξίσωση ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος και το αντίστοιχο πολυώνυμο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**. Παραγοντοποιώντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο λαμβάνουμε:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_N) = 0$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζονται **φυσικές συχνότητες** ή **ιδιοτιμές** (eigenvalues), δεν εξαρτώνται από την είσοδο αλλά μόνο από την εσωτερική δομή του συστήματος και χαρακτηρίζουν τη δυναμική συμπεριφορά του.

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου (3/5)

Επομένως, υπάρχουν N διαφορετικές τιμές του λ που ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση, οι εξής:

$$c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots\ldots, c_N e^{\lambda_N t}$$

όπου $c_i, i = 1,2, \ldots, N$ είναι σταθερές, εν γένει μιγαδικές.

Κάθε όρος $\boldsymbol{c_i e^{\lambda_i t}}, i = 1,2, \ldots, N$, ονομάζεται **ιδιορυθμός**.

Για τον προσδιορισμό των σταθερών c_i χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t} = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} \quad \text{για } t > 0$$

Με χρήση της βηματικής συνάρτησης $u(t)$ στη θέση του $t > 0$, η τελευταία σχέση γράφεται:

$$y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t} u(t)$$

Η σχέση αυτή ισχύει όταν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι πραγματικές και διακριτές.

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου (4/5)

Όταν υπάρχει πραγματική ρίζα πολλαπλότητας $r \geq 2$ τότε το χαρακτη-ριστικό πολυώνυμο γράφεται:

$$(\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

και η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται από τη σχέση:

$$y_{zi}(t) = \left((c_1 + c_2 t + \cdots + c_r t^{r-1})\, e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \cdots c_N e^{\lambda_N t} \right) u(t)$$

Παρατηρούμε ότι στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, η έξοδος είναι εκθετικής μορφής.

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου (5/5)

- Αν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_k < 0,\ \forall k \in Z$, τότε για $t \to \infty$ η απόκριση μηδενικής εισόδου φθίνει προς το μηδέν, δηλαδή το σύστημα οδηγείται σε ηρεμία.
- Αντίθετα, αν έστω μια ιδιοτιμή $\lambda_k > 0$ τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου οδηγείται στο άπειρο.
- Όταν μία ή περισσότερες ιδιοτιμές είναι μιγαδικοί αριθμοί (πάντα συζυγείς, αφού οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί), τότε για το ζεύγος συζυγών $-\sigma \pm j\Omega$
η λύση αποδεικνύεται ότι είναι:

$$y_{zi_o}(t) = e^{-\sigma t}(c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t)$$

- Παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες δίνουν ως έξοδο μία φθίνουσα ταλάντωση όταν $\sigma > 0$ και αυξανόμενη ταλάντωση όταν $\sigma < 0$.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος με ΓΕΔΣΣ:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = x(t)$$

και αρχικές συνθήκες: $y(0) = 0$ και $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = -4$

<u>Απάντηση</u>: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\lambda^2 + 6\lambda + 8$ και η ομογενής εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0$$

Οι φυσικές συχνότητες (ιδιοτιμές) είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -4$. Επομένως, η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι:

$$y_{zi}(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} = c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t}, \qquad \text{για } t > 0$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές c_1, c_2 θα χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες. Έχουμε:

$$y_{zi}(0) = c_1e^{-2.0} + c_2e^{-4.0} = c_1 + c_2 = 0$$

$$\left.\frac{dy_{zi}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.(-2c_1e^{-2t} - 4c_2e^{-4t})\right|_{t=0} = -2c_1 - 4c_2 = -4$$

Βρίσκουμε: $c_1 = 2$, $c_2 = -2$. Επομένως, η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι:

$$y_{zi}(t) = (2e^{-2t} - 2e^{-4t})\,u(t)$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί: (α) η απόκριση μηδενικής εισόδου και (β) η απόκριση μηδενικής κατάστασης του συστήματος με ΓΕΔΣΣ:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = 6x(t)$$

με αρχικές συνθήκες: $y(0) = 2$ και $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$ και είσοδο $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: (α) Υπολογισμός απόκρισης μηδενικής εισόδου: Η ομογενής εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = (\lambda + 3)(\lambda + 5) = 0$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = -5$ και η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι:

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-5t}, \qquad \text{για } t > 0$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές c_1, c_2 από τις αρχικές συνθήκες και έχουμε:

$$y_{zi}(0) = c_1 e^{-3.0} + c_2 e^{-5.0} = c_1 + c_2 = 2$$

$$\left.\frac{dy_{zi}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.(-3c_1 e^{-3t} - 5c_2 e^{-5t})\right|_{t=0} = -3c_1 - 5c_2 = 0$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Επιλύουμε το σύστημα και βρίσκουμε: $c_1 = 5,\ c_2 = -3$. Επομένως, η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι:

$$y_{zi}(t) = (5e^{-3t} - 3e^{-5t})\, u(t)$$

(β) Υπολογισμός της απόκρισης μηδενικής κατάστασης: Επειδή η είσοδος είναι εκθετική συνάρτηση $x(t) = e^{-2t}u(t)$ από τον Πίνακα 2.1 θεωρούμε ως μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης το σήμα Ae^{-2t} που έχει μορφή ίδια με της εισόδου. Η αντικατάσταση της μερικής λύσης και των παραγώγων της στη ΓΕΔΣΣ δίνει:

$$(-2)(-2)Ae^{-2t}\ +\ 8A(-2)e^{-2t} + 15Ae^{-2t} = 6e^{-2t} \Rightarrow \dots \Rightarrow A = 2$$

Άρα η μερική λύση είναι $2e^{-2t}$.

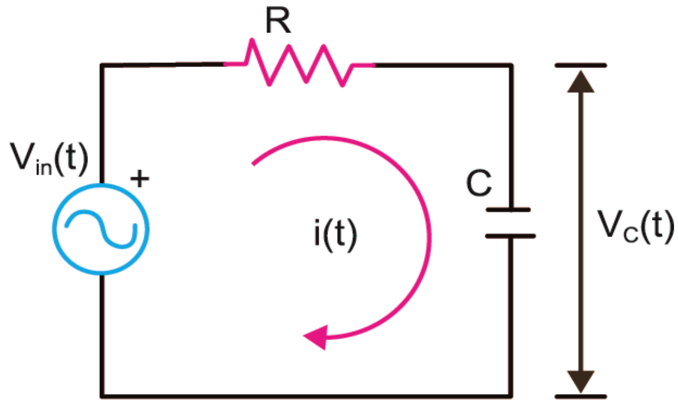
Η απόκριση μηδενικής κατάστασης θα περιέχει τους ιδιορυθμούς του συστήματος και τη μερική λύση:

$$y_{zs}(t) = \mathrm{C}_1 e^{-3t} + \mathrm{C}_2 e^{-5t} + 2e^{-2t}$$

2. Η έννοια της Κρουστικής Απόκρισης ενός ΓΧΑ Συστήματος

Η έννοια της Κρουστικής Απόκρισης (1/2)

- Για το παρακάτω ΓΧΑ σύστημα (RC κύκλωμα) επιθυμούμε να διατυπώσουμε μία σχέση που να συνδέει την τάση της πηγής $v_{in}(t)$ (είσοδο) και την τάση στα άκρα του πυκνωτή $v_c(t)$ (έξοδος).



- Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Kirchoff αποδεικνύεται ότι το RC κύκλωμα περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση 1ου βαθμού με σταθερούς συντελεστές:

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_{in}(t)$$

Η έννοια της Κρουστικής Απόκρισης (2/2)

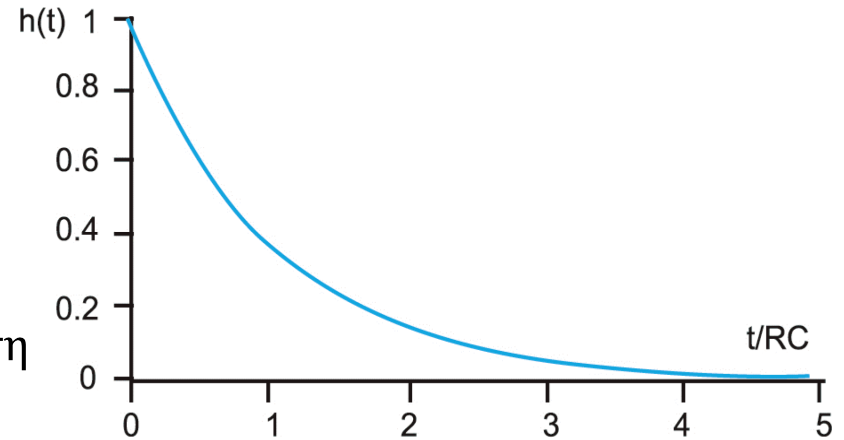
- Θεωρώντας ότι το κύκλωμα RC βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, δηλαδή ότι ισχύει $v_c(0) = 0$, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι:

$$v_c(t) = e^{-t/RC} \frac{1}{RC} \int_{0^-}^{t} e^{\tau/RC}\, v_{in}(t)\, dt$$

- Η **κρουστική απόκριση** $h(t)$ βρίσκεται αν θέσουμε ως είσοδο τη μοναδιαία κρουστική συνάρτηση, δηλαδή $v_{in}(t) = \delta(t)$ και είναι:

$$h(t) = e^{-t/RC} \frac{1}{RC} \int_{0^-}^{t} e^{\tau/RC}\, \delta(t)\, dt = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}\, u(t)$$

- Από τη μορφή της γραφικής παράστασης παρατηρούμε ότι το RC κύκλωμα είναι δυναμικό (με μνήμη).



Κρουστική απόκριση
RC κυκλώματος

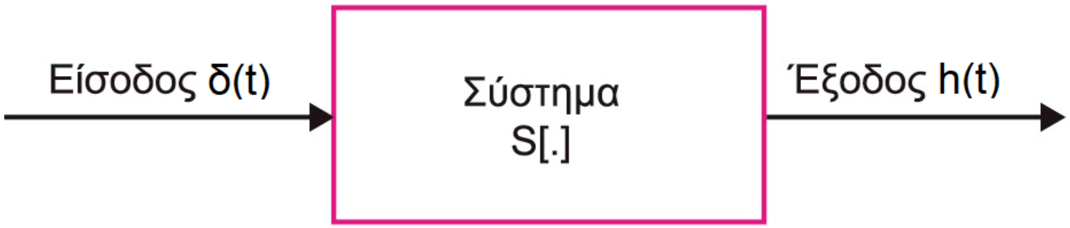
Τι περιγράφει η Κρουστική Απόκριση;

- Η **κρουστική απόκριση** περιγράφει την έξοδο ενός συστήματος που ενώ βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, εφαρμόζεται στην είσοδό του κατά τη χρονική στιγμή $t = 0^-$ ένα σήμα με απειροστή διάρκεια και άπειρο πλάτος.
- Αυτό το σήμα εισόδου (η συνάρτηση Δέλτα εν προκειμένω) σε απειροστό χρονικό διάστημα προσφέρει μια μεγάλη ποσότητα ενέργειας στο σύστημα και διεγείρει τους ιδιορυθμούς του, οπότε το σύστημα παράγει έξοδο.
- Τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ η είσοδος έχει παύσει να υπάρχει, ωστόσο το σύστημα συνεχίζει να παράγει έξοδο. Η έξοδος αυτή τείνει να μοιάζει με την απόκριση μηδενικής εισόδου, εφόσον το σήμα εφαρμόζεται για απειροστά μικρή χρονική διάρκεια και μετά παύει να υπάρχει.
- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το συγκεκριμένο σήμα εισόδου δημιουργεί **νέες αρχικές συνθήκες** στο $t = 0^+$, οπότε η ομογενής λύση του συστήματος για τις νέες αρχικές συνθήκες (τις οποίες πρέπει να υπολογίσουμε) παράγει την έξοδο του συστήματος.
- Οι νέες αρχικές συνθήκες στο $t = 0^+$ δεν έχουν σχέση με τις αρχικές συνθήκες που ίσχυαν στο $t = 0^-$ (και ήταν μηδενικές, όπως αναφέραμε παραπάνω) και με βάση τις οποίες μέχρι τώρα βρίσκαμε την ομογενή λύση της διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή την απόκριση μηδενικής εισόδου.

3. Περιγραφή ΓΧΑ Συστήματος με την Κρουστική Απόκριση και τη Συνέλιξη

Κρουστική Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Κρουστική απόκριση** ονομάζεται η έξοδος που παράγει ένα σύστημα όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$.



- Αν το σύστημα είναι **γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο** (ΓΧΑ), η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \boldsymbol{S}[\delta(t)]$$

- Αν το σύστημα είναι **γραμμικό αλλά όχι και χρονικά αμετάβλητο**, η κρουστική απόκριση $h(t,\tau)$ του συστήματος με είσοδο την μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t-\tau)$ που εφαρμόζεται κατά τη χρονική στιγμή τ, είναι:

$$h(t,\tau) = \boldsymbol{S}[\delta(t-\tau)]$$

Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε ΓΧΑ Συστήματα

- Η απόκριση $h(t,\tau)$ **χαρακτηρίζει πλήρως το ΓΧΑ σύστημα**, επειδή η γνώση της επιτρέπει τον υπολογισμό της εξόδου $y(t)$ για οποιαδήποτε είσοδο $x(t)$.
- Αποδεικνύεται ότι η έξοδος $y(t)$ ενός **ΓΧΑ συστήματος** που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία και έχει κρουστική απόκριση $h(t)$, όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί το σήμα $x(t)$, δίνεται από:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

- Το ολοκλήρωμα ονομάζεται **συνέλιξη** (convolution) ή δίπλωση ή συνελικτικό ολοκλήρωμα μεταξύ των συναρτήσεων $x(t)$ και $h(t)$ και συμβολικά γράφεται ως:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Αν το σύστημα εκτός από **ΓΧΑ είναι και αιτιατό** τότε η συνέλιξη απλοποιείται σε:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Κάποιες πρώτες παρατηρήσεις για τη Συνέλιξη

- Κάθε σύστημα που περιγράφεται με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ).
- Το συνελικτικό ολοκλήρωμα είναι μια γενική αναπαράσταση των ΓΧΑ συστημάτων δοθέντος ότι προκύπτει από μία γενική αναπαράσταση του σήματος εισόδου, θεωρώντας μηδενικές τις αρχικές συνθήκες.
- Αυτό ισοδυναμεί με την απόκριση μηδενικής κατάστασης, όταν το σύστημα περιγράφεται με μία συνήθη διαφορική εξίσωση.
- Η **συνολική απόκριση** $y(t)$ ενός συστήματος για είσοδο $x(t)$ είναι:

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t} + x(t) * h_g(t)$$

όπου: $h_g(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος, λ_i είναι οι ιδιοτιμές του συστήματος και c_i είναι σταθεροί συντελεστές.

- Αν το σύστημα είναι ΓΧΑ, τότε το άθροισμα στην παραπάνω σχέση μηδενίζεται και η έξοδος καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, δηλαδή από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος.
- Έχουμε κάνει την παραδοχή (που δεν βλάπτει τη γενικότητα) ότι οι ιδιοτιμές (ρίζες) είναι πραγματικές και διακριτές.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = 15x(t) - 2\frac{dx(t)}{dt}$$

Απάντηση: Επειδή η τάξη N του αριστερού μέλους (έξοδος και παράγωγοι της εξόδου) είναι μεγαλύτερη από την τάξη M του δεξιού μέλους (είσοδος και παράγωγοι της εισόδου), προκύπτει ότι η κρουστική απόκριση αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους, δηλαδή δεν περιέχει τη συνάρτηση Δέλτα ή/και παραγώγους αυτής.

Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας και θέτοντας στην είσοδο τη συνάρτηση Δέλτα, δηλ. $x(t) = \delta(t)$, η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 8\frac{dh(t)}{dt} + 15h(t) = 15\delta(t) - 2\frac{d\delta(t)}{dt}$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Η ομογενής εξίσωση είναι:

$$\frac{d^2 h_o(t)}{dt^2} + 8\frac{dh_o(t)}{dt} + 15h_o(t) = 0$$

οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$h_o(0^+) = 0 \;\text{ και }\; \frac{dh_o(0^+)}{dt} = \frac{1}{\alpha_2} = 1$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι: $\lambda^2 + 8\lambda + 15 = (\lambda + 3)(\lambda + 5) = 0$. Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = -5$ και η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$h_o(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-5t}, \qquad \text{για } t > 0$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές c_1, c_2 από τις αρχικές συνθήκες και έχουμε:

$$h_o(0^+) = c_1 e^{-3.0} + c_2 e^{-5.0} = c_1 + c_2 = 0$$

$$\frac{dh_o(0^+)}{dt} = \left(-3c_1 e^{-3t} - 5c_2 e^{-5t}\right)\Big|_{t=0} = -3c_1 - 5c_2 = \frac{1}{\alpha_N} = 1$$

όπου α_N είναι ο συντελεστής του όρου μέγιστης τάξης της διαφορικής εξίσωσης.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Επιλύουμε το σύστημα εξισώσεων και βρίσκουμε: $c_1 = 1/2,\ c_2 = -1/2$. Άρα, η ομογενής λύση της κρουστικής απόκρισης είναι:

$$h_o(t) = \frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{-5t})\,u(t)$$

Η συνολική κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = 15h_o(t) - 2\frac{dh_o(t)}{dt}$$

Για διευκόλυνση των πράξεων υπολογίζουμε χωριστά την παράγωγο $dh_o(t)/dt$. Είναι:

$$\frac{dh_o(t)}{dt} = \left[\frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{-5t})\,u(t)\right]' = \frac{1}{2}[(e^{-3t} - e^{-5t})'u(t) + (e^{-3t} - e^{-5t})u'(t)]$$
$$= \frac{1}{2}[(-3e^{-3t} + 5e^{-5t})\,u(t) + (e^{-3t} - e^{-5t})\delta(t)] = \frac{1}{2}(-3e^{-3t} + 5e^{-5t})\,u(t)$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = 15h_o(t) - 2\frac{dh_o(t)}{dt} = \frac{15}{2}(e^{-3t} - e^{-5t})\,u(t) - 2\frac{1}{2}(-3e^{-3t} + 5e^{-5t})\,u(t)$$
$$= \frac{1}{2}(21e^{-3t} - 25e^{-5t})\,u(t)$$

Στην επίλυση αξιοποιήσαμε την ιδιότητα $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ και ότι $\delta(t) = du(t)/dt$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Απάντηση: Επειδή $N = M$ η κρουστική απόκριση αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους και από μια συνάρτηση Δέλτα. Θέτουμε είσοδο $x(t) = \delta(t)$ και για συνθήκες αρχικής ηρεμίας η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 4\frac{dh(t)}{dt} + 4h(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + 3\frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)$$

Η ομογενής εξίσωση, οι αρχικές συνθήκες, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι ίδια με τα αντίστοιχα του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα η ομογενής λύση είναι:

$$h_o(t) = te^{-2t}u(t)$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση:

$$h(t) = \frac{d^2 h_o(t)}{dt^2} + 3\frac{dh_o(t)}{dt} + h_o(t)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\left[te^{-2t}u(t)\right] + 3\frac{d}{dt}\left[te^{-2t}u(t)\right] + te^{-2t}u(t) = \cdots$$

$$= \left(4(t-1)e^{-2t}u(t) - (4t-1)e^{-2t}\delta(t)\right)$$

$$+ 3\left(e^{-2t}u(t) - 2te^{-2t}u(t) + t3^{-2t}\delta(t)\right) + te^{-2t}u(t) = \cdots$$

$$= -(t+1)e^{-2t}u(t) - (t-1)e^{-2t}\delta(t) = -e^{-2t}\left[(t+1)u(t) + (t-1)\delta(t)\right]$$

Στην επίλυση κάναμε χρήση της σχέσης: $t\delta'(t) = \delta(t)$.

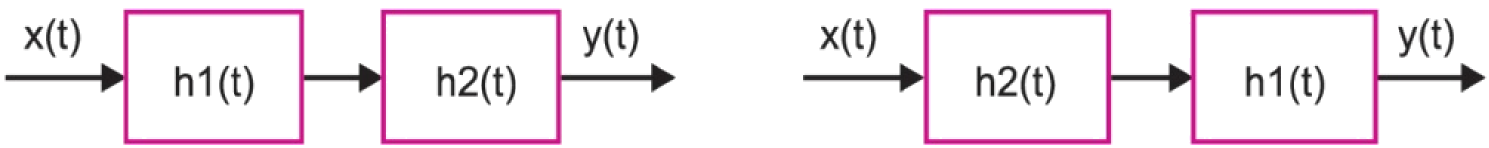
4. Ιδιότητες της Συνέλιξης και των ΓΧΑ Συστημάτων

Αντιμεταθετική ιδιότητα

Η αντιμεταθετική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

Η φυσική σημασία της ιδιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, από το οποίο προκύπτει πως αν δύο συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά τότε μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά σύνδεσής τους χωρίς να αλλάξει η τελική έξοδος $y(t)$.

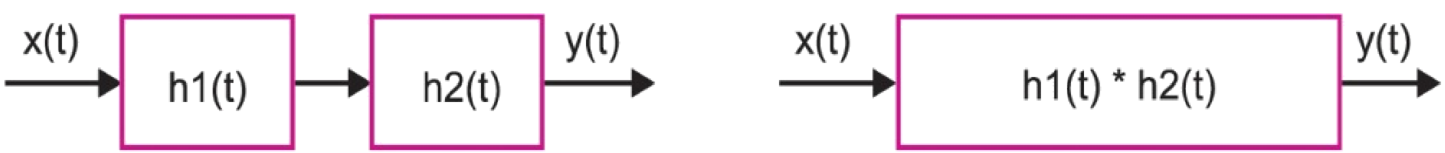


Προσεταιριστική ιδιότητα

Η προσεταιριστική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

Η φυσική σημασία της προσεταιριστικής ιδιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, από το οποίο προκύπτει πως όταν δύο συστήματα συνδέονται σε σειρά μπορούν να αντικατασταθούν με ένα τρίτο σύστημα, το οποίο έχει κρουστική απόκριση ίση με τη συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων των δύο σε σειρά συνδεμένων συστημάτων.

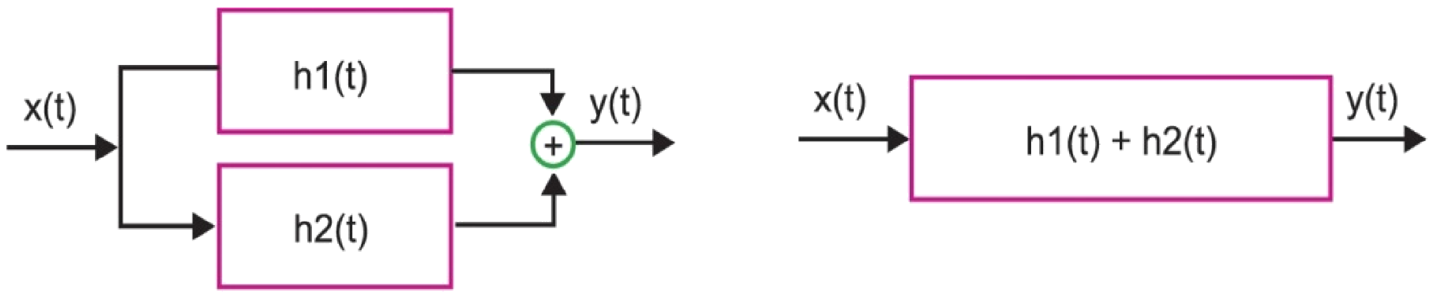


Επιμεριστική ιδιότητα

Η επιμεριστική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Η φυσική σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας, αν δύο συστήματα συνδεθούν παράλληλα τότε μπορούν να αντικατασταθούν από ένα τρίτο σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση είναι ίση με το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων.

Ταυτοτική ιδιότητα

Η ταυτοτική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Η ταυτοτική ιδιότητα υποδηλώνει ότι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ είναι το **ουδέτερο στοιχείο** της πράξης της συνέλιξης.

Κατ' αναλογία, ισχύει και η ακόλουθη ιδιότητα, η οποία χρησιμοποιείται στον ορισμό της δειγματοληψίας ενός σήματος συνεχούς χρόνου προκειμένου να παραχθεί ένα σήμα διακριτού χρόνου:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Λοιπές Ιδιότητες Συνέλιξης

- **Ιδιότητα της ομογένειας** :

$$[a\,x(t)] * h(t) = a[x(t) * h(t)] = x(t) * [a\,h(t)]$$

- Η **ιδιότητα του εύρους:** η χρονική διάρκεια της συνέλιξης $z(t) = x(t) * y(t)$ δύο σημάτων συνεχούς χρόνου $x(t)$ και $y(t)$ με διάρκεια T_1 και T_2, ισούται με το άθροισμα των χρόνων $T_1 + T_2$.

Για τρία σήματα συνεχούς χρόνου $x(t)$, $y(t)$ και $z(t) = x(t) * y(t)$ ισχύουν:

- **Ιδιότητα Διαφόρισης:** η παραγώγιση του ενός από τα δύο σήματα, προκαλεί ως αποτέλεσμα την παράγωγο της συνέλιξης των αρχικών σημάτων:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * y(t) = x(t) * \frac{dy(t)}{dt}$$

- **Ιδιότητα Αμεταβλητότητας:** η χρονική μετατόπιση του ενός από τα δύο σήματα, προκαλεί ως αποτέλεσμα την ίδια χρονική μετατόπιση στη συνέλιξη των σημάτων:

$$z(t - t_0) = x(t - t_0) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) * y(t - \tau)\, d\tau$$

- **Ιδιότητα Ευστάθειας -** Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι BIBO ευσταθές αν η κρουστική απόκρισή του να είναι ολοκληρώσιμη κατά απόλυτη τιμή, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$$

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ και $y(t) = e^{-\beta t}u(t)$. Θεωρήστε $\alpha \neq \beta, \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

<u>Απάντηση</u>: Η συνέλιξη των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}\, u(\tau)\, e^{-\beta(t-\tau)}\, u(t-\tau)\, d\tau$$

όπου οι βηματικές συναρτήσεις $u(\tau)$ και $u(t-\tau)$ ορίζονται ως:

$$u(\tau) = \begin{cases} 1\ \gamma\iota\alpha\ \tau > 0 \\ 0\ \gamma\iota\alpha\ \tau < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1\ \gamma\iota\alpha\ \tau < t \\ 0\ \gamma\iota\alpha\ \tau > t \end{cases}$$

Στη γενική περίπτωση το παραπάνω ολοκλήρωμα θα πρέπει να υπολογισθεί στο άπειρο διάστημα $(-\infty,\ +\infty)$. Ωστόσο, η ύπαρξη των δύο βηματικών συναρτήσεων περιορίζει τον υπολογισμό στην περιοχή $0 < \tau < t$, αφού οι βηματικές συναρτήσεις είναι και οι δύο διάφορες του μηδενός (και ίσες με τη μονάδα) μόνο στο διάστημα $0 < \tau < t$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού.

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Με βάση τη διαπίστωση αυτή, βρίσκουμε ότι:

$$z(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}\, e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau = e^{-\beta t}\int_0^t e^{(\beta-\alpha)\tau}\, d\tau =$$

$$= e^{-\beta t}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)\tau}}{\beta-\alpha}\right]_0^t = \frac{e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}\left[e^{(\beta-\alpha)t}-1\right] = \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για την περιοχή τιμών $t > 0$ και επειδή για $t < 0$ είναι $z(t) = 0$ μπορούμε να συνδυάσουμε τις παραπάνω περιπτώσεις σε μία απλή εξίσωση γράφοντας:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} & \gamma\iota\alpha\ t > 0 \\ 0 & \gamma\iota\alpha\ t < 0 \end{cases} = \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}u(t)$$

Άσκηση 6

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα $x(t) = u(t)$ και $y(t) = u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Διαπιστώνουμε ότι η άσκηση αυτή αποτελεί υποπερίπτωση της προηγούμενης άσκησης και συγκεκριμένα για $\alpha = \beta = 0$. Όμως αν κάνουμε χρήση της λύσης:

$$z(t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} u(t)$$

θα οδηγηθούμε στην απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Για το λόγο αυτό, εφαρμόζουμε τον κανόνα Del' Hospital και βρίσκουμε:

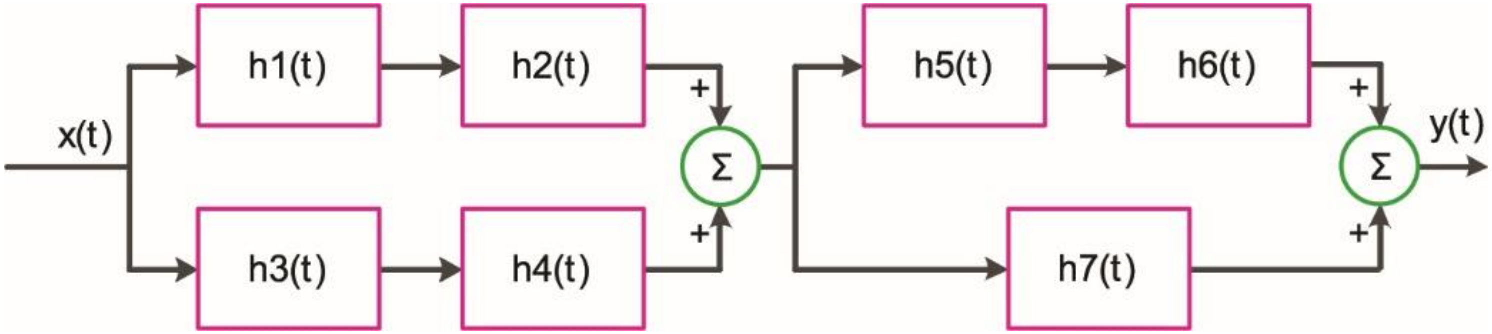
$$z(t) = \lim_{\alpha \to \beta} \left\{ \frac{\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)}{\frac{d}{d\alpha}(\beta - \alpha)} u(t) \right\} = -\lim_{\alpha \to \beta} \{-te^{-\alpha t} u(t)\} = te^{-\beta t} u(t) = t\, u(t)$$

όπου $t\, u(t) = r(t)$ είναι η γνωστή συνάρτηση ράμπας.

Επομένως, η συνέλιξη της βηματικής συνάρτησης $u(t)$ με τον εαυτό της οδηγεί στη συνάρτηση ράμπας $r(t)$.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη κρουστική απόκριση της συνδεσμολογίας:



<u>Απάντηση</u>: Το πρώτο τμήμα της συνδεσμολογίας έχει ισοδύναμη κρουστική απόκριση:

$$h_{eq1}(t) = [h_1(t) * h_2(t)] + [h_3(t) * h_4(t)]$$

Το δεύτερο τμήμα έχει ισοδύναμη κρουστική απόκριση:

$$h_{eq2}(t) = [h_5(t) * h_6(t)] + h_7(t)$$

Επειδή τα δύο τμήματα συνδέονται σε σειρά, η ισοδύναμη κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος δίνεται από τη μεταξύ τους συνέλιξη, δηλαδή:

$$\begin{aligned} h_{eq}(t) &= h_{eq1}(t) * h_{eq2}(t) \\ &= \{[h_1(t) * h_2(t)] + [h_3(t) * h_4(t)]\} * \{[h_5(t) * h_6(t)] + h_7(t)\} \end{aligned}$$