Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 1: Εισαγωγή στα Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Σκοποί της Επεξεργασίας Σημάτων
2. Κατηγοριοποίηση Σημάτων ως προς Χρόνο και Πλάτος
3. Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων
4. Κατάταξη σημάτων ως προς την Ενέργεια και την Ισχύ
5. Μετασχηματισμοί της Ανεξάρτητης Μεταβλητής
6. Κατηγορίες Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

1. Σκοποί της Επεξεργασίας Σημάτων

Σκοποί της Επεξεργασίας Σημάτων

Σκοποί της Επεξεργασίας Σημάτων είναι:

a) Να αναπτύξει μαθηματικά μοντέλα τα οποία θα περιγράφουν επαρκώς ικανοποιητικά τις διάφορες κατηγορίες σημάτων που μεταφέρουν την χρήσιμη πληροφορία,

b) Να αναλύσει τα συστήματα που επεξεργάζονται και μεταδίδουν τα σήματα

c) Να συνθέσει «άριστα» συστήματα, τα οποία θα ελαχιστοποιούν την επίπτωση του θορύβου «επάνω» στα σήματα.

2. Κατηγοριοποίηση Σημάτων ως προς Χρόνο και Πλάτος

Κατηγορίες Σημάτων (1/2)

Ως προς την μεταβλητή του **χρόνου**:

- Σήμα **Συνεχούς Χρόνου** (continuous time): ένα σήμα $x(t)$ το οποίο ορίζεται για **κάθε τιμή του** $\boldsymbol{t}$ στο διάστημα χρόνου (a, b).

- Σήμα **Διακριτού Χρόνου** (discrete time): ένα σήμα το οποίο ορίζεται μόνο για κάποιες (συγκεκριμένες) στιγμές του χρόνου.

  Τα διακριτά σήματα συμβολίζονται από **ακολουθίες** $\{x(n)\}$. Η τιμή της ακολουθίας $\{x(n)\}$ τη χρονική στιγμή n_0 είναι το βαθμωτό μέγεθος $x(n_0)$.

Κατηγορίες Σημάτων (1/2)

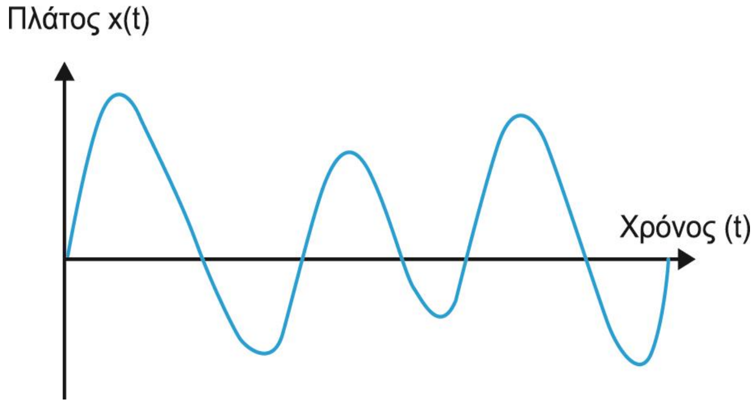
Ως προς την μεταβλητή του **πλάτους**:

- **Συνεχούς τιμής :** ένα σήμα που παίρνει όλες τις δυνατές τιμές σε ένα διάστημα τιμών
- **Διακριτής τιμής:** ένα σήμα που παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών

Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Τα σήματα συνεχούς χρόνου υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες:

- Στα **αναλογικά σήματα** ή σήματα συνεχούς χρόνου και συνεχούς πλάτους, στα οποία τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή (t) όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή (πλάτος του σήματος) λαμβάνουν συνεχείς (πραγματικές) τιμές, π.χ. $x(t) = 6t$.



Σήματα Συνεχούς Χρόνου

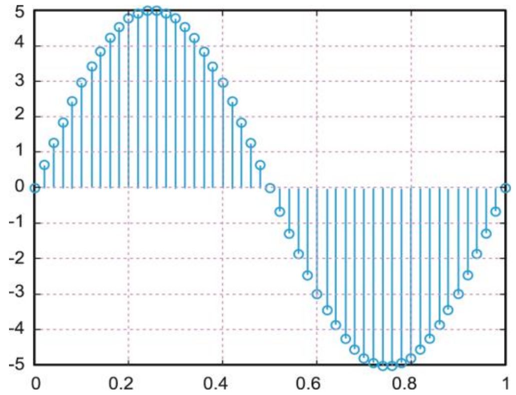
- Στα **διακριτά σήματα συνεχούς χρόνου**, στα οποία η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνει διακριτές τιμές, π.χ.

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 2, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σήματα Διακριτού Χρόνου

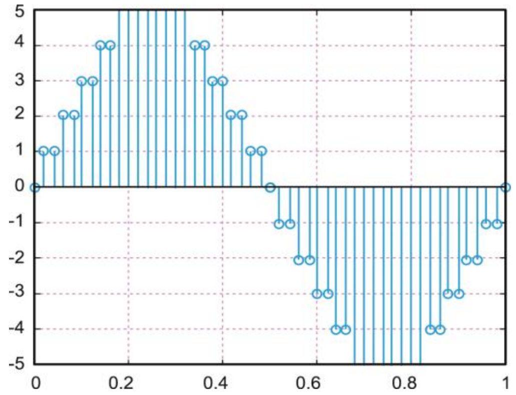
Τα σήματα διακριτού χρόνου διαιρούνται σε δύο κατηγορίες:

- Στα **διακριτά σήματα συνεχούς τιμής** (πλάτους), στα οποία η εξαρτημένη μεταβλητή (πλάτος) λαμβάνει συνεχείς τιμές, π.χ. $x(t) = \cos(n\ t)$, όπου n είναι φυσικός αριθμός.



- Στα **διακριτά σήματα διακριτής τιμής** ή **ψηφιακά**, στα οποία η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνουν διακριτές τιμές.

  Παρατηρούμε ότι το διακριτό σήμα $\{x(n)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}.



Κατηγορίες Σημάτων (3/3)

- **Αναλογικό Σήμα** ή σήμα συνεχούς χρόνου και συνεχούς πλάτους, στο οποίο τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή (t) όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή (πλάτος του σήματος) λαμβάνουν συνεχείς (πραγματικές) τιμές, π.χ. $x(t) = 6t$
- **Ψηφιακό Σήμα :** Ένα σήμα διακριτού χρόνου και διακριτής τιμής.

- Τα σήματα απαντώνται στη φύση συνήθως σε αναλογική μορφή, π.χ. σήματα ομιλίας, μουσικής, κλπ, όμως η εξέλιξη της **ψηφιακής τεχνολογίας** επιτρέπει την αποδοτικότερη επεξεργασία, μετάδοση και αποθήκευση των ψηφιακών σημάτων.
- Ένα αναλογικό σήμα μετατρέπεται σε ψηφιακό μέσω των διαδικασιών της **δειγματοληψίας** του **κβαντισμού** και της **κωδικοποίησης.**

3. Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων

Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (ΣΣΧ) (1/2)

Για ένα σήμα συνεχούς χρόνου (ΣΣΧ) $x(t)$ ορισμένο στο διάστημα $[t_1, t_2]$, ορίζουμε:

Μέση Τιμή:

$$\bar{x}(t) = x_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt$$

Ενεργός Τιμή:

$$\bar{\bar{x}}(t) = x_{rms} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt \right]^{1/2}$$

Στιγμιαία Ισχύς:

$$P(t) = x^2(t)$$

Μέση Ισχύς:

$$\bar{P}_x = P_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt$$

Ενέργεια:

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt$$

Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (ΣΣΧ) (2/2)

Για τον υπολογισμό της ενέργειας και της ισχύος στο χρονικό διάστημα $[-\infty, \infty]$, ισχύει αντίστοιχα:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T}$$

4. Κατάταξη σημάτων ως προς την Ενέργεια και την Ισχύ

Κατάταξη σημάτων ως προς την ενέργεια και την ισχύ

Ένα σήμα $x(t)$ χαρακτηρίζεται ως:

- **Σήμα ισχύος:** όταν $0 < P_{av} < \infty$ όταν το διάστημα $[t_1, t_2]$ τείνει στο άπειρο
- **Σήμα ενέργειας**: όταν η ενέργειά του στο διάστημα $[-\infty, \infty]$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή $E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt < \infty$. Για να συμβαίνει αυτό, το πλάτος του σήματος θα πρέπει να φθίνει αρκετά γρήγορα προς το μηδέν στο πέρασμα του χρόνου. Σε μερικές περιπτώσεις αυτό δεν συμβαίνει, π.χ. $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ για $-\infty < t < \infty$.
- Ένα σήμα δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα σήμα ενέργειας και σήμα ισχύος, επειδή τα σήματα ενέργειας έχουν $P_x = 0$ και τα σήματα ισχύος έχουν $E_x = \infty$.
- Ένα σήμα μπορεί να μην είναι ούτε σήμα ενέργειας, ούτε σήμα ισχύος.
- Τα περισσότερα σήματα που συναντάμε στην πράξη είναι είτε σήματα ενέργειας είτε σήματα ισχύος.
- Όλα τα περιοδικά σήματα (με εξαίρεση το $x(t) = 0$) είναι σήματα ισχύος.

Άσκηση 1

Ένα σήμα $x(t)$ εισέρχεται σε ένα σύστημα και στην έξοδο εμφανίζεται το σήμα $y(t) = a\,x(bt)$. Αν το σήμα $x(t)$ είναι σήμα με ενέργεια E_x στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, να υπολογιστεί η ενέργεια E_y του σήματος $y(t)$ στο ίδιο διάστημα.

<u>Απάντηση</u>: Η ενέργεια E_x του σήματος $x(t)$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt$$

Όμοια, η ενέργεια E_y του σήματος $y(t)$ είναι:

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)dt = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(bt)\,dt$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα θέτοντας $t' = bt$, οπότε έχουμε:

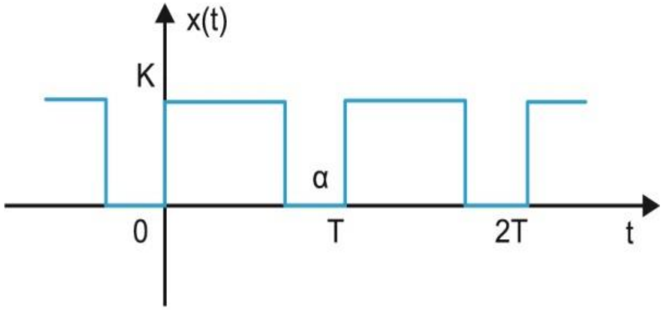
$$E_y = \frac{a^2}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t')\;dt'$$

Επομένως ισχύει: $E_y = \frac{a^2}{b} E_x$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η μέση τιμή του σήματος $x(t)$ ως συνάρτηση των α και Κ.

Απάντηση: Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε πως το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο Τ και πλάτος Κ.



Επομένως η μέση τιμή του στο διάστημα $[t_1, t_2] = [0, \mathrm{T}]$ δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x}(t) = x_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T-a} K\,dt = \left[\frac{K}{T}\,t\right]_0^{T-a} = K\left(1 - \frac{a}{T}\right)$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η ενέργεια του σήματος $x(t) = e^{-|t|}$

<u>Απάντηση</u>: Από την εξίσωση ορισμού του σήματος διαπιστώνουμε ότι:

$$|x(t)|^2 = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{+2t} & \text{για } t < 0 \\ e^{-2t} & \text{για } t > 0 \end{cases}$$

Επομένως, η ενέργεια του σήματος δίνεται από τη σχέση:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2t}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{2} e^{2t}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Επειδή η ενέργεια του σήματος είναι πεπερασμένη, το $x(t)$ είναι σήμα **ενέργειας**.

5. Μετασχηματισμοί της Ανεξάρτητης Μεταβλητής

Μετασχηματισμοί της Ανεξάρτητης Μεταβλητής

1. Χρονική Μετατόπιση

2. Ανάκλαση (χρονική αντιστροφή)

3. Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου

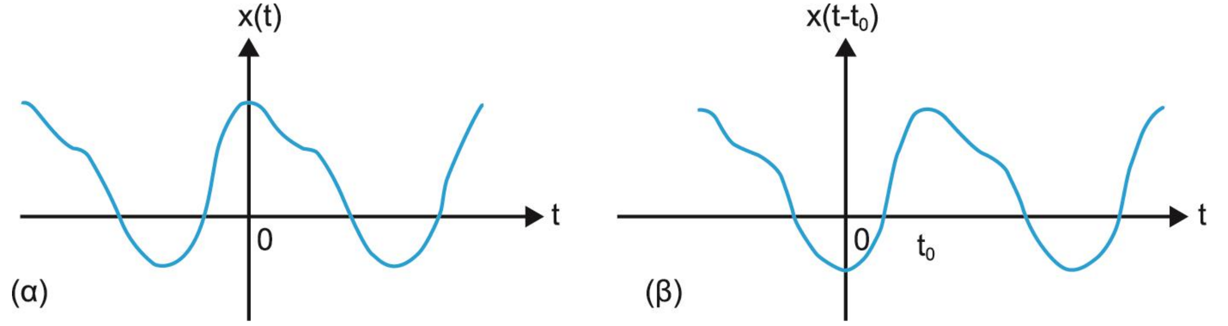
4. Πρόσθεση και Πολλαπλασιασμός Σημάτων

Χρονική Μετατόπιση Σήματος (1/2)

Ένα σήμα $y(t)$ αποτελεί μία μορφή **χρονικά μετατοπισμένη** κατά ποσότητα χρόνου t_0 του σήματος $x(t)$, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή t αντικατασταθεί από την ποσότητα $t - t_0$, δηλ. όταν ισχύει:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

όπου το t_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός που εκφράζει την ολίσθηση στο χρόνο.



Το σήμα $x(t)$ και η χρονικά μετατοπισμένη κατά t_0 μορφή του, $y(t)$.

Χρονική Μετατόπιση Σήματος (2/2)

- Η χρονική μεταβολή κατά θετικό t_0 αντιστοιχεί σε **χρονική καθυστέρηση** (ολίσθηση προς τα **δεξιά**) και είναι μια διαδικασία που συμβαίνει συνήθως κατά τη μετάδοση ενός σήματος μέσα από ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα.

- Αν η χρονική μεταβολή γίνει κατά αρνητικό t_0 τότε η χρονική μετατόπιση αντιστοιχεί σε χρονική **προήγηση** ή **προπορεία**, δηλ. η ολίσθηση του σήματος γίνεται προς τα **αριστερά** στον άξονα του χρόνου.

- Κατά την εφαρμογή της χρονικής μετατόπισης σε ένα σήμα, δεν προκύπτει μεταβολή της ενέργειάς του, ισχύει δηλαδή η σχέση:

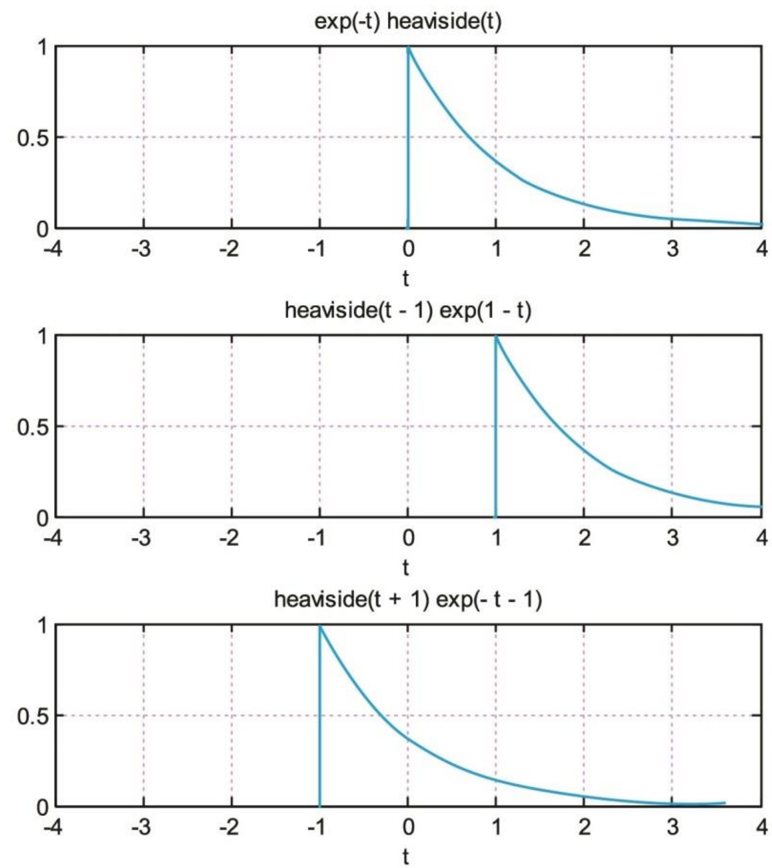
$$E[x(t)] = E[x(t - t_0)]$$

Παράδειγμα Χρονικής Μετατόπισης

(α) Αρχικό σήμα $x(t) = e^{-t}\,u(t)$

(β) Καθυστέρηση $y_1(t) = x(t-1)$

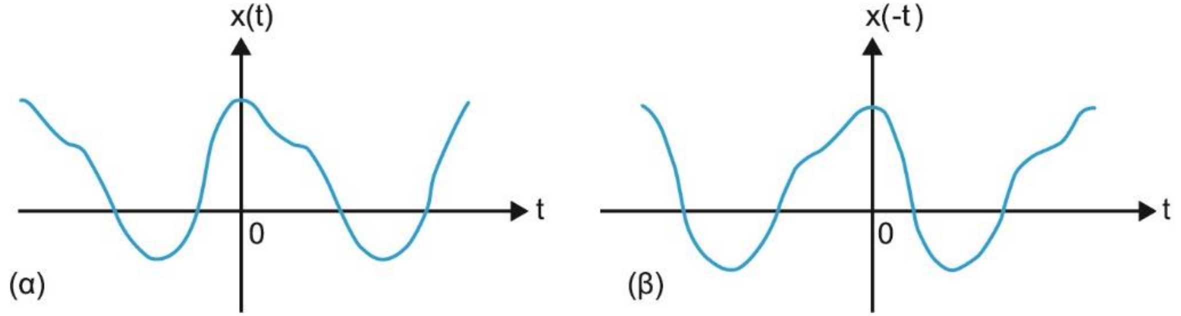
(γ) Προπορεία $y_2(t) = x(t+1)$



Ανάκλαση Σήματος

Ένα σήμα $y(t)$ αποτελεί την **ανάκλαση** του σήματος $x(t)$ ως προς $t = 0$, δηλ. ως προς τον κατακόρυφο άξονα, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή t αντικατασταθεί από $-t$, δηλ. όταν ισχύει:

$$y(t) = x(-t)$$



Σήμα συνεχούς χρόνου και η ανάκλασή του ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

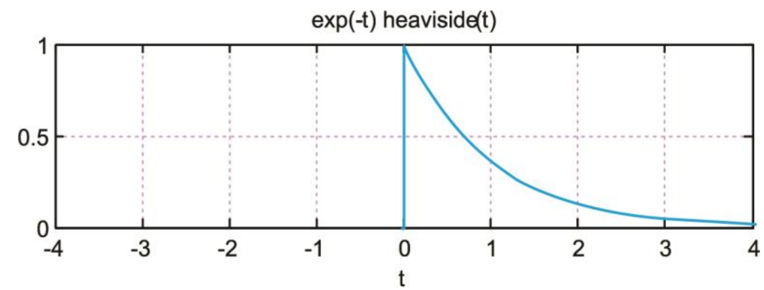
- Η πράξη της ανάκλασης έχει ως αποτέλεσμα την εναλλαγή μεταξύ «παρελθόντος» και «μέλλοντος» ενός σήματος.

- Κατά την εφαρμογή της χρονικής μετατόπισης σε ένα σήμα, δεν προκύπτει μεταβολή της ενέργειάς του, ισχύει δηλαδή η σχέση:

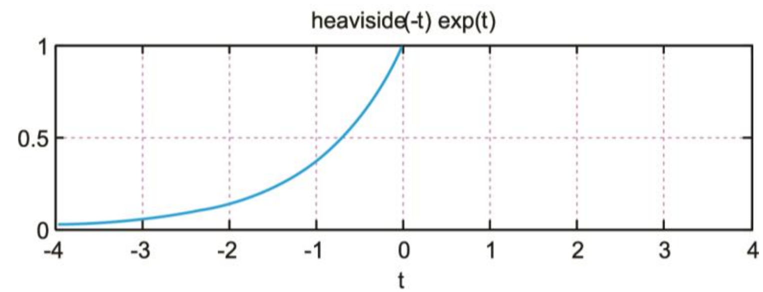
$$E[x(t)] = E[x(-t)]$$

Παράδειγμα Ανάκλασης Σήματος

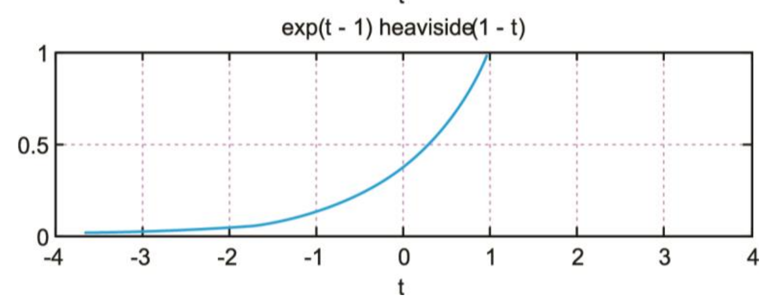
(α) Αρχικό σήμα $x(t) = e^{-t}u(t)$



(β) Ανάκλαση $y_1(t) = x(-t)$



(γ) Ανάκλαση και μετατόπιση προς τα δεξιά $y_2(t) = x(1-t)$



Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου Σήματος

Το σήμα $x_1(t)$ αποτελεί μια **χρονική συστολή** του σήματος $x(t)$, αν ισχύει:

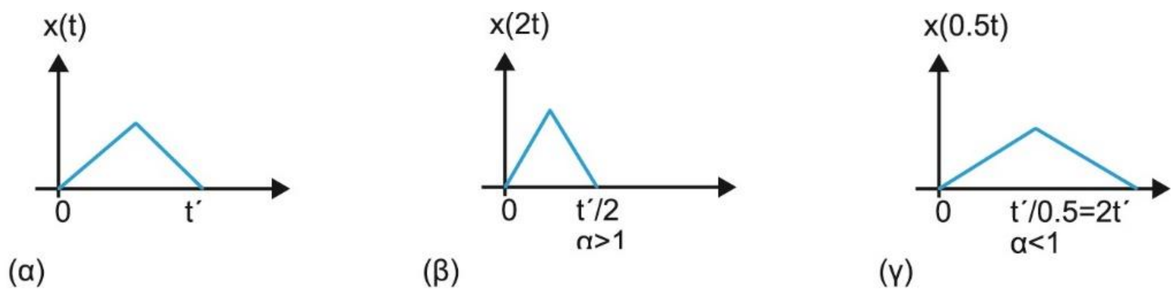
$$x_1(t) = x(at) \qquad a > 1$$

δηλ. αν η ανεξάρτητη μεταβλητή t αντικατασταθεί από την ποσότητα at.

Το σήμα $x_2(t)$ αποτελεί μια **χρονική διαστολή** του σήματος $x(t)$, αν ισχύει:

$$x_2(t) = x(at) \qquad 0 < a < 1$$

Η αρχή των αξόνων $t = 0$ παραμένει αμετάβλητη.



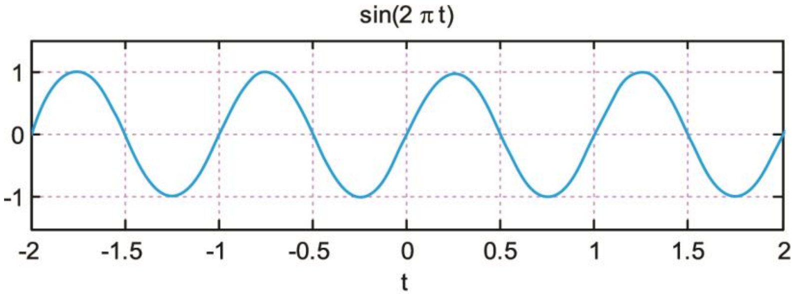
(α) Αρχικό σήμα, (β) η χρονική συστολή του και (γ) η χρονική διαστολή του

Η αλλαγή της κλίμακας χρόνου κατά μία σταθερή α, οδηγεί στον πολλαπλασιασμό της ενέργειας του σήματος επί $\frac{1}{|\alpha|}$, δηλ., ισχύει:

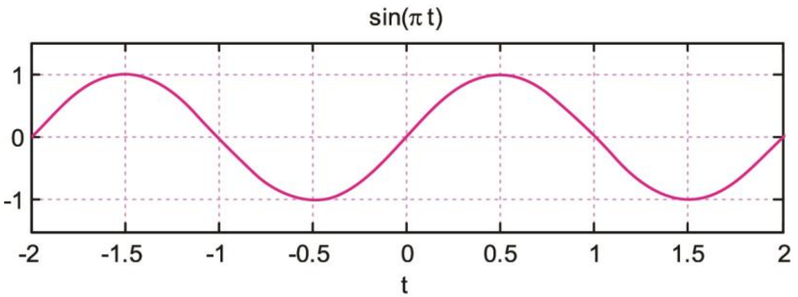
$$E[x(t)] = \frac{1}{|a|} E[x(t)]$$

Παράδειγμα Αλλαγής Κλίμακας Χρόνου

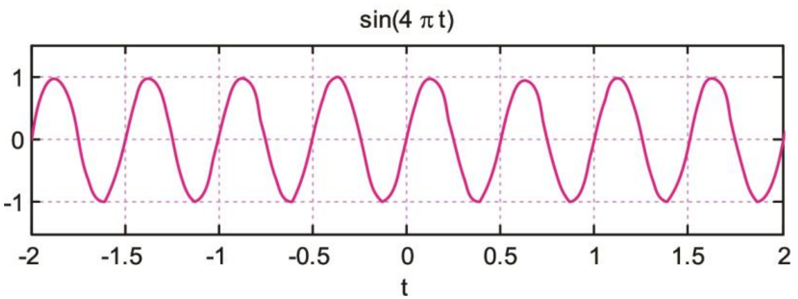
(α) Αρχικό σήμα $x(t) = \sin(2\pi t)$



(β) Διαστολή $y_1(t) = x(t/2)$



(γ) Συστολή $y_2(t) = x(2t)$



Πρόσθεση και Πολλαπλασιασμός Σημάτων

Δοθέντων δύο σημάτων συνεχούς χρόνου $x_1(t)$ και $x_2(t)$, ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού σημάτων, ως την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων στιγμιαίων τιμών τους, δηλαδή:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$z(t) = x_1(t)\ x_2(t)$$

- Αν τα σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ δεν χαρακτηρίζονται από χρονική επικάλυψη, τότε η ενέργεια του σήματος $y(t)$ είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών των δύο σημάτων, δηλαδή ισχύει:

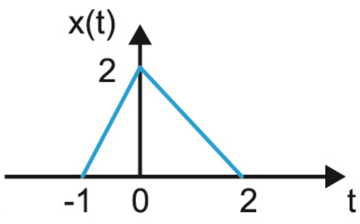
$$E[y(t)] = E[x_1(t)] + E[x_2(t)]$$

Άσκηση 4

Ένα σήμα $x(t)$ περιγράφεται από τη σχέση: $x(t) = \begin{cases} 2t+2, -1 \le t < 0 \\ 2-t, \;\; 0 \le t < 2 \\ 0, \qquad \text{αλλού} \end{cases}$

Να σχεδιάσετε τα σήματα $x(t)$, $y_1(t) = x(-t)$, $y_2(t) = x(t+1)$
$y_3(t) = x(2t)$, $y_4(t) = x(t/2)$, $y_5(t) = x(1-t)$ και $y_6(t) = x(2t-2)$

<u>Απάντηση</u>: Το αρχικό σήμα $x(t)$ είναι:



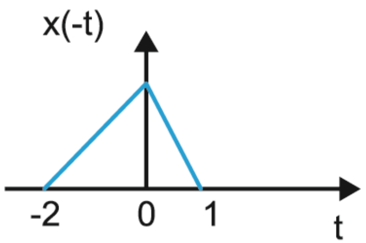
(α)

Το σήμα $y_1(t)$ είναι η ανάκλαση του $x(t)$ και υπολογίζεται αντικαθιστώντας το t με $-t$:

$$y_1(t) = \begin{cases} 2(-t)+2, & -1 \le -t < 0 \\ 2-(-t), & 0 \le -t < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -2t+2, & 1 \ge t > 0 \\ 2+t, & 0 \ge t > -2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t+2, & -2 \le t < 0 \\ 2-2t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση του σήματος $y_1(t) = x(-t)$:

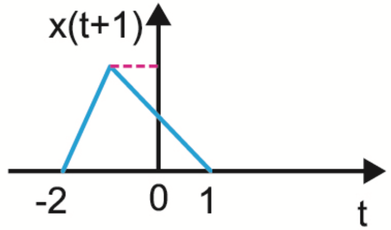


(β)

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Το $y_2(t)$ είναι μια χρονικά μετατοπισμένη μορφή του $x(t)$

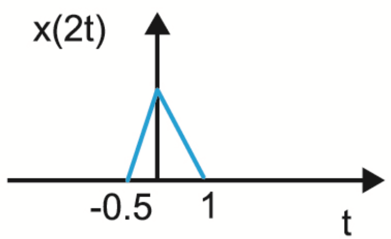
$$y_2(t) = \begin{cases} 4+2t, & -2 \le t < -1 \\ 1-t, & -1 \le t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



(γ)

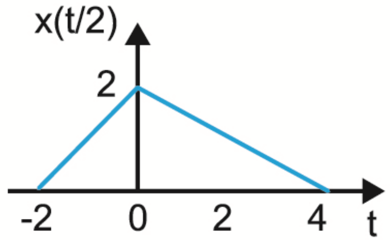
Τα $y_3(t)$ και $y_4(t)$ είναι χρονική συστολή και διαστολή του $x(t)$, αντίστοιχα:

$$y_3(t) = \begin{cases} 2+4t, & -\frac{1}{2} \le t < 0 \\ 2-2t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



(δ)

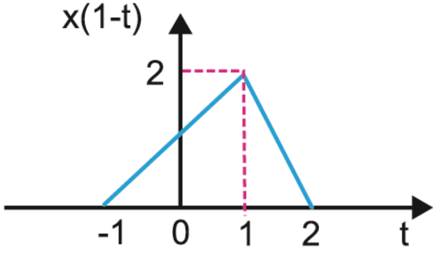
$$y_4(t) = \begin{cases} 2+t, & -2 \le t < 0 \\ 2-\frac{t}{2}, & 0 \le t < 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



(ε)

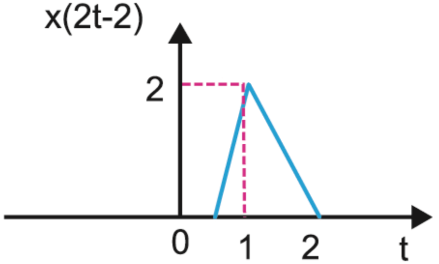
Άσκηση 4 (συνέχεια)

Το $y_5(t)$ είναι μια χρονικά μετατοπισμένη μορφή προς τα δεξιά του σήματος $y_1(t)$, δηλαδή της ανάκλασης του σήματος $x(t)$.



(στ)

Το $y_6(t) = x[2(t-1)]$ αποτελεί μια διαστολή του σήματος $x(t-1)$ δηλαδή της χρονικά μετατοπισμένης μορφής του σήματος $x(t)$.



(ζ)

6. Κατηγορίες Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Κατηγορίες Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

1. Απλά και Στοχαστικά Σήματα
2. Αιτιατά και μη Αιτιατά Σήματα
3. Σήματα Πεπερασμένου Πλάτους
4. Σήματα Πεπερασμένης και Σήματα Άπειρης Διάρκειας
5. Άρτια και Περιττά σήματα
6. Περιοδικά Σήματα

Απλά και Στοχαστικά Σήματα

- **Απλό ή αιτιοκρατικό** ονομάζεται ένα σήμα για το οποίο είμαστε πάντα σε θέση να γράψουμε μία μαθηματική σχέση που να το περιγράφει πλήρως σε κάθε χρονική στιγμή, άρα και να το προσδιορίσουμε πριν συμβεί.

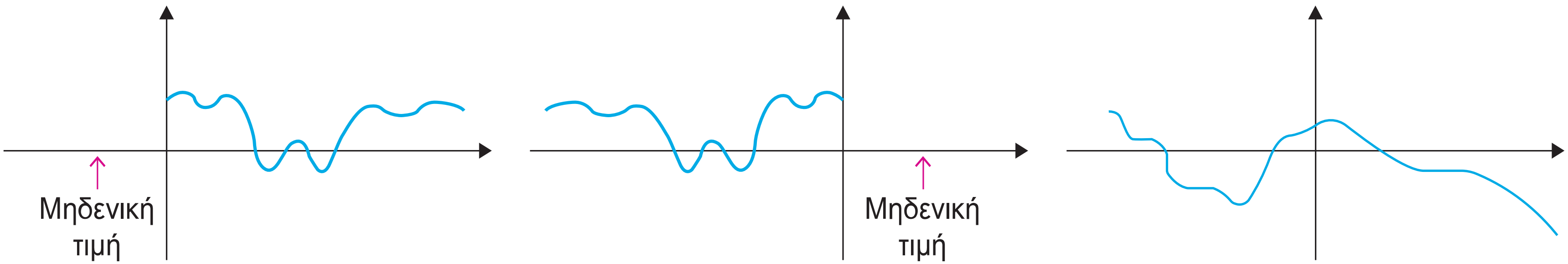
- Αντίθετα, **στοχαστικό ή τυχαίο** ονομάζεται ένα σήμα το οποίο δεν είναι δυνατό να το προσδιορίσουμε επακριβώς πριν συμβεί, δηλαδή δεν μπορούμε να γράψουμε μία αναλυτική μαθηματική έκφραση που να το περιγράφει.
  Στην περίπτωση αυτή εντάσσεται ο **θόρυβος** καθώς και πληθώρα άλλων πραγματικών σημάτων. Για τη μελέτη των σημάτων αυτών χρησιμοποιείται η Θεωρία Πιθανοτήτων.
  Τέτοια σήματα δεν θα μας απασχολήσουν στο πλαίσιο του παρόντος μαθήματος.

Αιτιατά και μη Αιτιατά Σήματα

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται **αιτιατό** εάν είναι μηδενικό για αρνητικές τιμές του χρόνου t, δηλαδή αν ισχύει:

$$x(t) = 0 \;\text{ για } t < 0$$

Αυτή η διαπίστωση ισχύει γενικά, καθώς τα σήματα που μελετώνται στην πράξη προέρχονται από φυσικά συστήματα και προφανώς σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές από τη στιγμή έναρξης λειτουργίας του συστήματος, η οποία θεωρείται ως η χρονική στιγμή $t = 0$. Στην αντίθετη περίπτωση, το σήμα λέγεται **μη αιτιατό**.

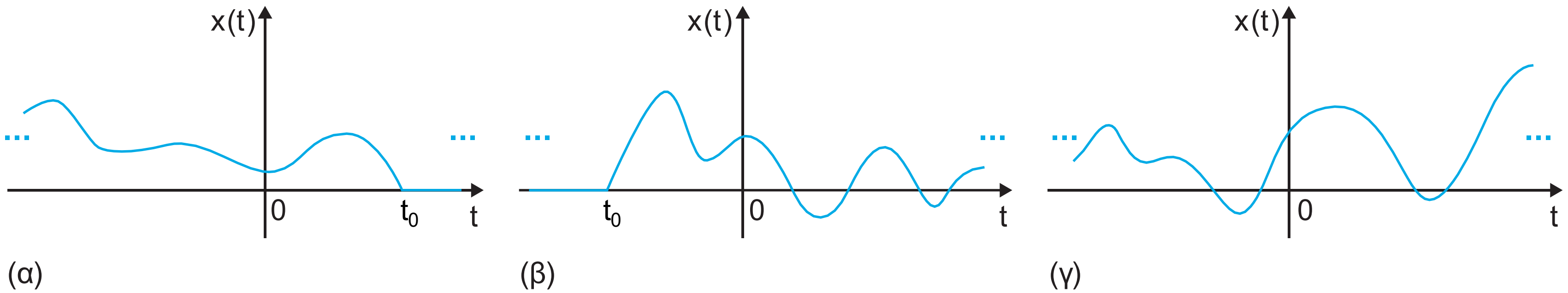


Παράδειγμα σήματος: (α) αιτιατού, (β) αντι-αιτιατού και (γ) μη-αιτιατού

Πλευρικότητα Σημάτων

Ένα σήμα $x(t)$ άπειρης διάρκειας λέγεται:

- **Αριστερής πλευράς** εάν $x(t) = 0$ για $t > t_0$
- **Δεξιάς πλευράς** εάν $x(t) = 0$ για $t < t_0$
- **Διπλής πλευράς** εάν $x(t) \neq 0$ για $-\infty < t < \infty$



Σήμα: (α) αριστερής πλευράς, (β) δεξιάς πλευράς, (γ) διπλής πλευράς

Η πλευρικότητα των σημάτων είναι μία έννοια που αξιοποιούμε κυρίως στον υπολογισμό της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace.

Σήματα Πεπερασμένης Διάρκειας και Σήματα Άπειρης Διάρκειας

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται σήμα **πεπερασμένης διάρκειας** όταν:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq T_1 \\ 0, & t \geq T_2 \end{cases}$$

όπου τα T_1 και T_2, $(T_1 < T_2)$ είναι πεπερασμένοι αριθμοί.

Αν τουλάχιστον ένα από τα T_1 και T_2 γίνει ίσο με το άπειρο, τότε το σήμα έχει άπειρη διάρκεια.

Σήματα Πεπερασμένου Πλάτους

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται **πεπερασμένου πλάτους** όταν ισχύει:

$$|x(t)| < \infty \quad \text{για καθε } t$$

Ισοδύναμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο σήμα «φραγμένου πλάτους»

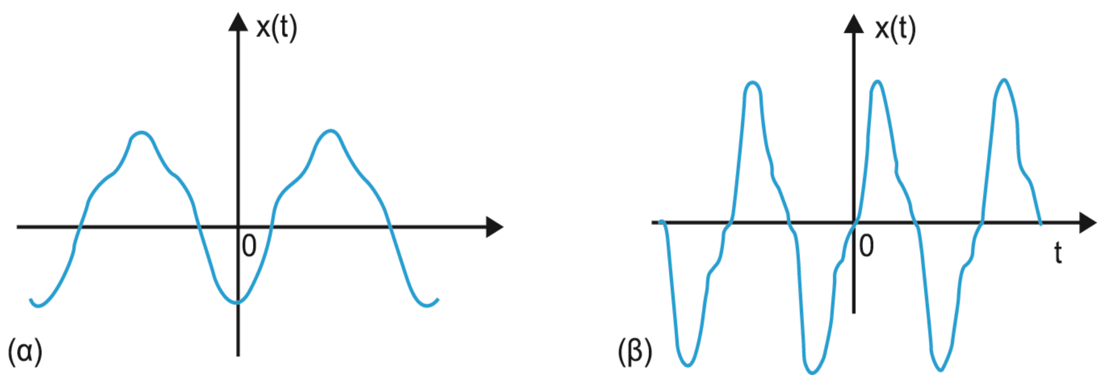
Άρτια και Περιττά Σήματα (1/2)

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται **άρτιο** και παρουσιάζει **άρτια συμμετρία**, όταν ισχύει:

$$x(-t) = x(t) \quad -\infty < t < +\infty$$

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται **περιττό** και παρουσιάζει **περιττή συμμετρία**, όταν ισχύει:

$$x(-t) = -x(t) \quad -\infty < t < +\infty$$



(α) Άρτιο Σήμα

(β) Περιττό σήμα

Άρτια και Περιττά Σήματα (2/2)

Κάθε σήμα μπορεί να εκφρασθεί ως **άθροισμα ενός άρτιου $\boldsymbol{x_e(t)}$ και ενός περιττού σήματος $\boldsymbol{x_o(t)}$**, δηλ. ως:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

όπου τα $x_e(t)$ και $x_o(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

- το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών σημάτων είναι ένα **άρτιο** σήμα.
- το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος είναι ένα **περιττό** σήμα.

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την άρτια και την περιττή συνιστώσα του σήματος:

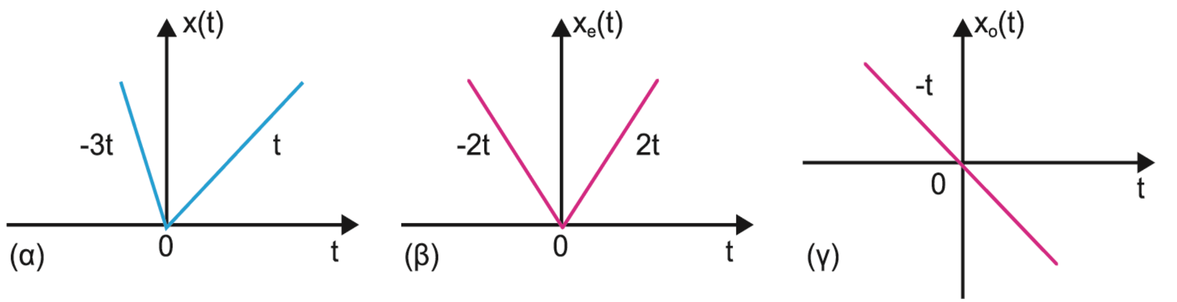
$$x(t) = \begin{cases} -3t, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

<u>Απάντηση:</u> Το άρτιο σήμα $x_e(t)$ (άρτια συνιστώσα του $x(t)$), είναι:

$$x_e(t) = 0.5\,[x(t) + x(-t)] = \begin{cases} 0.5\,[-3t - t], & t < 0 \\ 0.5\,[t + 3t], & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2t, & t < 0 \\ 2t, & t \geq 0 \end{cases}$$

ενώ το περιττό σήμα $x_o(t)$ (περιττή συνιστώσα του $x(t)$), είναι:

$$x_o(t) = 0.5\,[x(t) - x(-t)] = \begin{cases} 0.5\,[-3t + t], & t < 0 \\ 0.5\,[t - 3t], & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -t, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$



Αναπαραστάσεις των σημάτων: (α) $x(t)$ (β) άρτιο $x_e(t)$ και (γ) περιττό $x_o(t)$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$.

Άσκηση 6

Να προσδιοριστεί η άρτια και η περιττή συνιστώσα του σήματος $x(t) = e^{j\Omega t}$.

<u>*Απάντηση:*</u> Από τις εξισώσεις ορισμού των συνιστωσών $x_e(t)$ και $x_o(t)$ για το σήμα $x(t) = e^{j\Omega t}$ και χρησιμοποιώντας τους τύπους του Euler:

$$e^{+j\Omega t} = \cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t) \quad \text{και} \quad e^{-j\Omega t} = \cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t)$$

προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= 0.5\,[x(t) + x(-t)] = 0.5\left[e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}\right] \\ &= 0.5\,[\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t) + \cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t)\,] \\ &= \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

και:

$$\begin{aligned} x_o(t) &= 0.5\,[x(t) - x(-t)] = 0.5\left[e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}\right] \\ &= 0.5\,[\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t) - \cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)\,] \\ &= j\sin(\Omega t) \end{aligned}$$

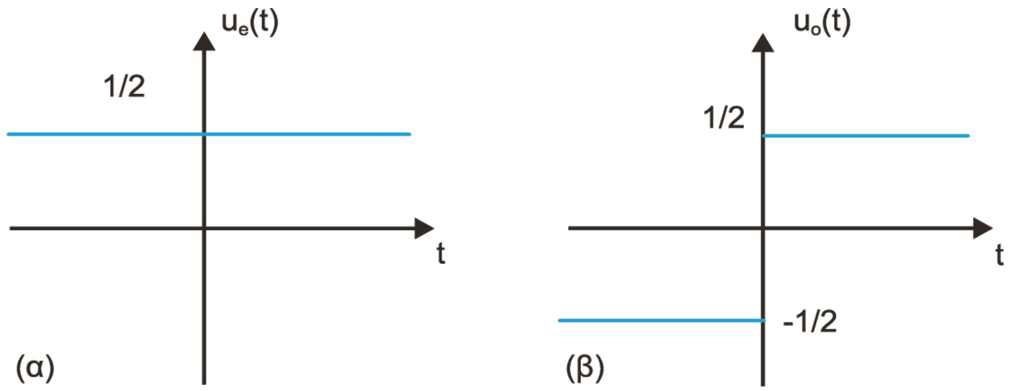
Άσκηση 7

Να προσδιορίσετε την άρτια και την περιττή συνιστώσα της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Από τις εξισώσεις ορισμού των άρτιων και περιττών συνιστωσών έχουμε:

$$u_e(t) = 0.5\,[u(t) + u(-t)] = \begin{cases} 0.5\,[0+1], & t<0 \\ 0.5\,[1+0], & t>0 \end{cases} = 0.5$$

$$u_o(t) = 0.5\,[u(t) - u(-t)] = \begin{cases} 0.5\,[0-1], & t<0 \\ 0.5\,[1-0], & t>0 \end{cases} = \begin{cases} -0.5, & t<0 \\ 0.5, & t>0 \end{cases}$$



(α) Άρτια και (β) Περιττή συνιστώσα της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

Περιοδικά και Απεριοδικά Σήματα (1/5)

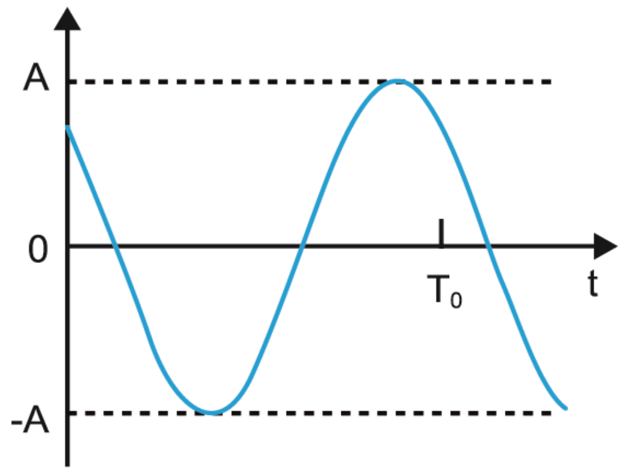
Ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ λέγεται **περιοδικό** αν υπάρχει ένας θετικός αριθμός T έτσι ώστε να ισχύει $x(t) = x(t + mT)$ για κάθε t και ακέραιο αριθμό m.

Η ποσότητα T λέγεται **περίοδος** και μετριέται σε sec. Η ελάχιστη περίοδος ονομάζεται και **θεμελιώδης περίοδος** (T_0) και ορίζει τη μικρότερη χρονική διάρκεια μετά την οποία το περιοδικό σήμα θα αρχίσει να επαναλαμβάνεται.

Η ποσότητα $f = 1/T$ ονομάζεται **συχνότητα**, δίνει τον αριθμό των επαναλήψεων του σήματος στη μονάδα του χρόνου (sec) και μετριέται σε Hertz (Hz), ενώ η ποσότητα $\Omega = 2\pi/\mathrm{T} = 2\pi f$ ονομάζεται **κυκλική (αναλογική) συχνότητα** και μετριέται σε rad/sec.

Περιοδικά και Απεριοδικά Σήματα (2/5)

Κλασσικό παράδειγμα περιοδικών σημάτων είναι τα **ημιτονοειδή** και **συνημιτονοειδή** σήματα, δηλαδή αυτά που περιγράφονται από μία σχέση της μορφής $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \theta)$, όπου A είναι το **πλάτος** και θ είναι η **γωνία φάσης** ή απλά **φάση**.



Το ημιτονοειδές σήμα $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \pi/4)$

Περιοδικά και Απεριοδικά Σήματα (3/5)

<u>**Σχόλια:**</u>

- Η απαίτηση της άπειρης διάρκειας καθιστά τα περιοδικά σήματα μη-πραγματοποιήσιμα σε πρακτικές εφαρμογές. Ωστόσο, τα περιοδικά σήματα είναι εξέχουσας σημασίας στην επεξεργασία σημάτων επειδή αποτελούν τη βάση για την ανάλυση των σημάτων και συστημάτων κατά Fourier.
- Τα απεριοδικά σήματα προκύπτουν από περιοδικά σήματα, ενώ η έξοδος των συστημάτων για είσοδο περιοδικών ημιτόνων είναι θεμελιώδης για τη μελέτη των συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Περιοδικά και Απεριοδικά Σήματα (4/5)

<u>Σχόλια:</u>

- Επειδή το σήμα συνημιτόνου προκύπτει από το σήμα ημιτόνου για διαφορά φάσης $\theta = \pi/2$, συνήθως δεν τα ξεχωρίζουμε μεταξύ τους, αλλά μιλάμε γενικά για ημιτονοειδή σήματα.
- Τα ημιτονοειδή σήματα είναι μία συχνά εμφανιζόμενη κατηγορία σημάτων. Τα ραδιοκύματα, τα ηχητικά σήματα, τα εναλλασσόμενα ηλεκτρικά ρεύματα, κλπ, είναι αυτής της μορφής. Έχουν μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη σημάτων, αφού ακόμα και μη-ημιτονοειδή σήματα μπορούν με τη βοήθεια της ανάλυσης Fourier, να αναπαρασταθούν ως άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων.
- Μια ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα των ημιτονοειδών σημάτων είναι ότι οι παράγωγοι και τα ολοκληρώματά τους είναι επίσης ημιτονοειδούς μορφής.
- Ένα σήμα της μορφής $x(t) = A$ μπορεί να θεωρηθεί περιοδικό με περίοδο απροσδιόριστη, επειδή είναι δυνατό να γραφεί στη μορφή
$$x(t) = A = A\cos(0t).$$

Περιοδικά και Απεριοδικά Σήματα (5/5)

Έστω $x(t)$ και $y(t)$ περιοδικά σήματα με θεμελιώδεις περιόδους T_1 και T_2, αντίστοιχα. Θα μελετήσουμε τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες το **άθροισμα** $z(t) = x(t) + y(t)$ είναι περιοδικό σήμα.

- Εφόσον τα $x(t)$ και $y(t)$ είναι περιοδικά με θεμελιώδεις περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα, ισχύει:

$$x(t) = x(t + mT_1), \qquad m = 1,2,\ldots.$$
$$y(t) = y(t + nT_2), \qquad n = 1,2,\ldots.$$

- Αν το άθροισμα $z(t) = x(t) + y(t)$ είναι περιοδικό σήμα με **θεμελιώδη περίοδο $\boldsymbol{T}$**, τότε θα ισχύει $z(t) = z(t + T)$, η οποία γράφεται ως:

$$z(t + T) = x(t + mT_1) + y(t + nT_2)$$

- Η σχέση αυτή ικανοποιείται μόνο όταν ισχύει:

$$T = mT_1 = nT_2 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}}$$

που αποτελεί και την αναγκαία προϋπόθεση για να είναι περιοδικό σήμα το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων.

Άσκηση 8

Να αποδειχθεί πως το σήμα $x(t) = A\,cos(\Omega_0 t + \theta)$ είναι περιοδικό σήμα και να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδός του.

<u>Απάντηση</u>: Προκειμένου το σήμα $x(t)$ να είναι περιοδικό θα πρέπει να υπάρχει θετικός αριθμός T τέτοιος ώστε $x(t+T) = x(t)$.

Με βάση την εξίσωση ορισμού του δοθέντος σήματος, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$x(t+T) = A\,cos(\Omega_0(t+T) + \theta) = A\,cos(\Omega_0 t + \Omega_0 T + \theta)$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση συνημιτόνου είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi m$. Για να είναι $x(t+T) = x(t)$ ή $A\,cos(\Omega_0 t + \Omega_0 T + \theta) = A\,cos(\Omega_0 t + \theta)$, θα πρέπει $\Omega_0 T = 2\pi m$.

Θα ισχύει λοιπόν $T = m\left(\frac{\Omega_0}{2\pi}\right)$ και η θεμελιώδης περίοδος του σήματος θα είναι ίση με $T = \frac{\Omega_0}{2\pi}$.

Άσκηση 9

Για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα να εξετάσετε αν είναι περιοδικό ή όχι.

(α) $y(t) = 3sin(3\pi t) + 2sin(4\pi t)$

(β) $y(t) = 4cos(100t) + 5sin(70\sqrt{2}\,t)$

(γ) $y(t) = \sqrt{2}\,cos(12t) + 1{,}5\,cos(2\pi t)$

Απάντηση:

(α) Σχετικά με την κυκλική συχνότητα κάθε συνιστώσας του σήματος, ισχύει $\Omega_1 = 3\pi$ και $\Omega_2 = 4\pi$ και αφού το πηλίκο $\Omega_2/\Omega_1 = 4/3$ είναι ένας ρητός αριθμός, το σήμα $y(t)$ είναι περιοδικό.

(β) Ισχύει ότι $\Omega_1 = 100$ και $\Omega_2 = 70\sqrt{2}\,(\Omega_2/\Omega_1) = 70\sqrt{2}\,\frac{1}{100} = 7\sqrt{2}\,\frac{1}{10}$. Άρα το$y(t)$ δεν είναι περιοδικό.

(γ) Ισχύει ότι $\Omega_1 = 12$ και $\Omega_2 = 2\pi(\Omega_2/\Omega_1) = \pi/6$. Άρα το σήμα $y(t)$ δεν είναι περιοδικό.

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδος για καθένα από τα παρακάτω περιοδικά σήματα:

(α) $x_1(t) = e^{j\, 0.25\, \pi\, t}$

(β) $x_2(t) = cos(0.2\, \pi t)$

(γ) $x_3(t) = 2\, cos(0.1\, \pi t) + \ 2\, sin(0.2\, \pi t)$

<u>Απάντηση</u>:

(α) Το $x_1(t)$ γράφεται ως $e^{\,j\, 2\pi\, t\, /8}$ και επειδή ισχύει $2\pi/T_0 \ = 2\pi/8$, η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 \ = 8$.

(β) Η θεμελιώδης περίοδος του $x_2(t) = cos\ (0.2\, \pi t) = \cos\left(\frac{2\pi}{10} t\right)$ είναι $T_0 \ = 10$.

(γ) Η θεμελιώδης περίοδος του $2cos\ (0.1\, \pi t)$ είναι $T_0 \ = \frac{2\pi}{0.1\pi} = 20$, ενώ του $2\ sin(0.2\pi t)$ είναι $T_0 \ = \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10$. Επειδή το 20 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 10 είναι και περίοδος του $2\ sin(0.2\ \pi t)$. Επομένως, η θεμελιώδης περίοδος του $x_3(t)$ είναι $T_0 \ = 20$.

Άσκηση 11

Να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδος του σήματος $x(t) = cos(7\pi t) + 3\,sin(8\pi t)$.

<u>Απάντηση</u>: Εάν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, τότε θα ισχύει $x(t) = x(t + T)$. Το σήμα $x(t + T)$ ορίζεται ως:

$$x(t + T) = cos[7\pi(t + T)] + 3\,sin[8\pi(t + T)]$$
$$= cos(7\pi t + 15\pi T) + 3\,sin(8\pi t + 8\pi T)$$

Λαμβάνοντας υπ’ όψη πως οι περίοδοι των δύο ημιτονοειδών σημάτων είναι της μορφής $T_1 = 2\pi m$ και $T_2 = 2\pi n$, η συνθήκη περιοδικότητας ικανοποιείται εάν ισχύει:

$$7\pi T = 2\pi m \text{ και } 8\pi T = 2\pi n$$

Λύνοντας ως προς T, προκύπτει ότι:

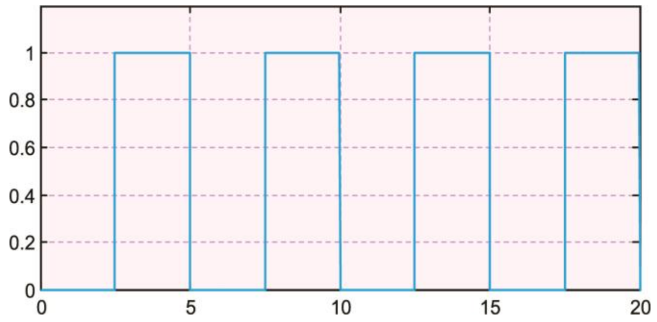
$$T = \frac{2m}{7} = \frac{2n}{8} \text{ ή ισοδύναμα } \frac{n}{m} = \frac{8}{7}$$

Οι δύο παραπάνω αριθμοί δεν διαθέτουν κάποιο κοινό διαιρέτη (εκτός από το 1).

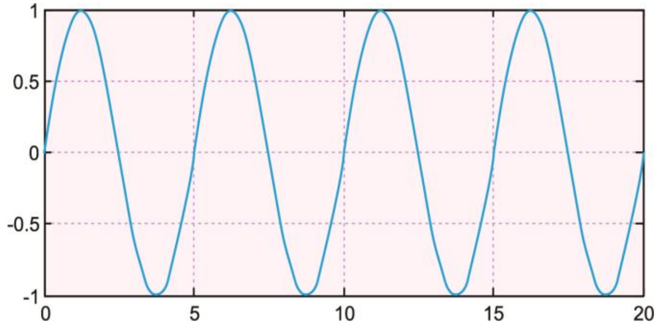
Θα είναι λοιπόν $n = 8$ και $m = 7$, από όπου προκύπτει ότι $T = 2n/8 = 4$

Παραδείγματα Περιοδικών Σημάτων

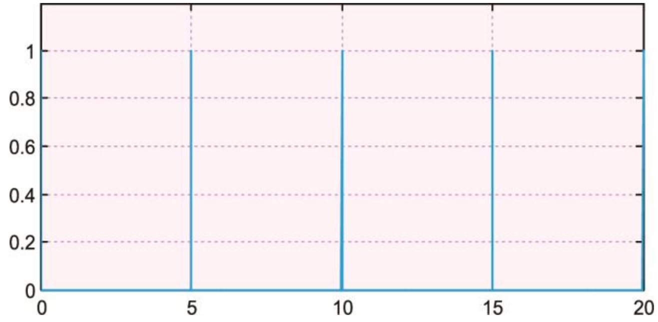
```
[y,t] = gensig('square',5,20,0.01);
plot(t,y); ylim([0, 1.2]); grid on
```




```
[y,t] = gensig('sin',5,20,0.01);
plot(t, y); ylim([-1, 1]); grid on
```

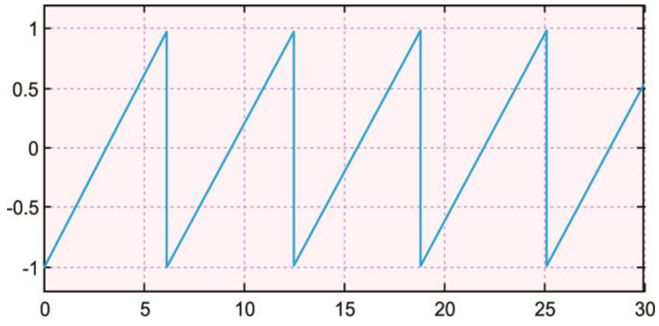



```
[y,t] = gensig('pulse',5,20,0.01);
plot(t, y); ylim([0, 1.2]); grid on
```

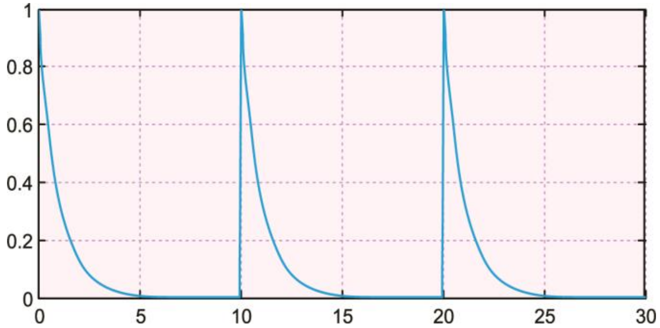


Παραδείγματα Περιοδικών Σημάτων

```
t = 0 : 0.1: 30;
y = sawtooth(t);
plot(t, y); ylim([-1.2, 1.2]);
grid on
```




```
N = 3;
t = 0 : 0.1 : 10;
x = exp(t);
y = repmat(x, 1, N);
ty = linspace(0,10*N,length(y));
plot(ty, y); grid on
```




```
N = 3;
x = [1 2 4 -2 1 0];
y = repmat(x, 1, N);
ty = linspace(0,10*N,length(y));
plot(ty, y); grid on
```