Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πάτρα, 03.02.2021

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

Ομάδα 1

ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες)

Οι μετασχηματισμοί Fourier των σημάτων τριγωνικού παλμού $\Lambda_T(t)$ και τετραγωνικού παλμού $\Pi_T(t)$ αντίστοιχα, είναι:

$$\Lambda_T(\Omega) = 4\frac{sin^2\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\Omega^2 T} \qquad \text{και} \qquad \Pi_T(\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T)}{\Omega}$$

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης μεταξύ των σημάτων αυτών, δηλαδή του σήματος $y(t) = \Lambda_T(t) * \Pi_T(t)$ **[2]**

Απάντηση:

Με την ιδιότητα συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier $x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{F} X_1(\Omega)\, X_2(\Omega)$, έχουμε:

$$Y(\Omega) = \Lambda_T(\Omega)\, \Pi_T(\Omega) = 4\frac{sin^2\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\Omega^2 T}\, \frac{2\sin(\Omega T)}{\Omega}$$

ΘΕΜΑ 2 (4 μονάδες)

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ που δίνεται από τη σχέση:

$$H(\Omega) = \frac{5 + j\Omega}{8 + 6j\Omega - \Omega^2}$$

(α) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. **[2]**

Απάντηση: Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος θα υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμού Fourier στη δοθείσα απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$. Χρησιμοποιούμε την μέθοδο του αθροίσματος σε απλά κλάσματα, και έχουμε:

$$H(\Omega) = \frac{5 + j\Omega}{8 + 6j\Omega - \Omega^2} = \frac{5 + j\Omega}{(2 + j\Omega)(4 + j\Omega)} = \frac{A}{(2 + j\Omega)} + \frac{B}{(4 + j\Omega)} = \frac{4A + j\Omega A + 2B + j\Omega B}{(2 + j\Omega)(4 + j\Omega)}$$

προκύπτει το σύστημα εξισώσεων 4A+2B=5 και A+B=1, από λύση του οποίου βρίσκουμε A=3/2 και B=-1/2. Επομένως έχουμε:

$$H(\Omega) = \left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{(2 + j\Omega)} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(4 + j\Omega)}$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, βρίσκουμε:

$$h(t) = F^{-1}\{H(\Omega)\} = \frac{3}{2}\, F^{-1}\left\{\frac{1}{2 + j\Omega}\right\} - \frac{1}{2}\, F^{-1}\left\{\frac{1}{4 + j\Omega}\right\} = \left(\frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right)\, u(t)$$

(β) Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-5t}u(t)$. **[1]**

Απάντηση**:** Για τον υπολογισμό της εξόδου $y(t)$ εργαζόμαστε στο πεδίο συχνότητας. Αρχικά υπολογίζουμε τον FT της εισόδου $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = F\{e^{-5t}u(t)\} = \frac{1}{5 + j\Omega}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της εξόδου $Y(\Omega)$:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\,X(\Omega) = \frac{5 + j\Omega}{(2 + j\Omega)(4 + j\Omega)}\frac{1}{(5 + j\Omega)} = \frac{1}{(2 + j\Omega)(4 + j\Omega)} = \cdots = \frac{1}{2}\frac{1}{(2 + j\Omega)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(4 + j\Omega)}$$

Τέλος, με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (διαδικασία επίλυσης ανάλογη με του προηγούμενου ερωτήματος) ανακτούμε την έξοδο $y(t)$:

$$y(t) = F^{-1}\{Y(\Omega)\} = \cdots = \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-3t})\,u(t)$$

(γ) Να υπολογιστεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα. **[1]**

Απάντηση: Από τον ορισμό της απόκρισης συχνότητας έχουμε:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{5 + j\Omega}{8 + 6j\Omega - \Omega^2} \Rightarrow Y(\Omega)(8 + 6j\Omega - \Omega^2) = X(\Omega)(5 + j\Omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (j\Omega)^2 Y(\Omega) + 6j\Omega\, Y(\Omega) + 8Y(\Omega) = j\Omega X(\Omega) + 5X(\Omega)$$

Μετατρέπουμε την παραπάνω σχέση σε διαφορική εξίσωση χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier και λαμβάνουμε:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5\,x(t)$$

ΘΕΜΑ 3 (4 μονάδες)

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$ και δέχεται είσοδο το $x(t) = e^{-3t}u(t)$.

(α) Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace $H(s)$ και $X(s)$. **[1]**

Απάντηση: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-3t}\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(3+s)t}\, dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{3 + s}e^{-(3+s)t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{3 + s}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-(3+s)t} - e^0\right]$$

Το όριο μπορεί να υπολογιστεί μόνο όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός. Άρα ο μετασχηματισμός Laplace συγκλίνει μόνο στην περίπτωση που ισχύει :

$$3 + s > 0 \Rightarrow (3 + \sigma) + j\Omega > 0 \Rightarrow (3 + \sigma) > 0 \Rightarrow \sigma > -3$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$X(s) = -\frac{1}{3 + s}[0 - 1] = \frac{1}{s + 3}, \quad ROC: Re\{s\} > -3$$

Ομοίως υπολογίζεται και ο μετασχηματισμός Laplace της h(t) σε:

$$H(s) = \frac{1}{s + 2}, \quad ROC: Re\{s\} > -2$$

(β) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace $Y(s)$ της εξόδου $y(t)$. **[1]**

Απάντηση: Κάνοντας χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης του μετασχηματισμού Laplace:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{L} \mathrm{Y}(s) = X(s)\, H(s) \quad \text{με ΠΣ } R_X \cap R_H$$

βρίσκουμε:

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}\,\frac{1}{s+3} = \frac{1}{s^2+5s+6}, \quad ROC: R_Y > -2$$

(γ) Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του $Y(s)$. **[2]**

Απάντηση: Η συνάρτηση $Y(s)$ γράφεται:

$$Y(s) = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{s+3}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2:

$$C_1 = \lim_{s\to-2}[(s+2)Y(s)] = \lim_{s\to-2}\frac{1}{s+3} = 1$$

$$C_2 = \lim_{s\to-3}[(s+3)\,Y(s)] = \lim_{s\to-3}\frac{1}{s+2} = -1$$

Επομένως:

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος, δηλ. είναι:

$$x(t) = [e^{-2t} - e^{-3t}]\, u(t)$$

Πάτρα, 03.02.2021

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

Ομάδα 2

ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες)

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{-2t}u(t)$ είναι:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2 + j\Omega}$$

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της πρώτης παραγώγου του σήματος, δηλαδή του σήματος $y(t) = dx(t)/dt$. **[2]**

Απάντηση: Κάνοντας χρήση της ιδιότητας παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\Omega\, X(\Omega)$$

έχουμε:

$$Y(\Omega) = j\Omega\, X(\Omega) = \frac{j\Omega}{2 + j\Omega}$$

ΘΕΜΑ 2 (4 μονάδες)

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη Γραμμική Διαφορική Εξίσωση με Σταθερούς Συντελεστές (ΓΔΕΣΣ):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

(α) Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ του συστήματος. **[1]**

Απάντηση: Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της ΓΔΕΣΣ:

$$(j\Omega)^2Y(\Omega) + 6\, j\Omega\, Y(\Omega) + 8Y(\Omega) = j\Omega X(\Omega) + 3X(\Omega) \Longrightarrow$$

$$Y(\Omega)\ [(j\Omega)^2 + 6\, j\Omega + 8] = X(\Omega)[\, j\Omega + 3] \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{3 + j\Omega}{8 + 6\, j\Omega - \Omega^2}$$

(β) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. **[2]**

Απάντηση: Θα υπολογίσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην $H(\Omega)$. Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και έχουμε:

$$H(\Omega) = \frac{3 + j\Omega}{8 + 6\, j\Omega - \Omega^2} = \frac{3 + j\Omega}{(2 + j\Omega)(4 + j\Omega)}$$

Διασπάμε το κλάσμα σε επιμέρους κλάσματα και υπολογίζουμε τους συντελεστές A και B:

$$H(\Omega) = \frac{3+j\Omega}{(2+j\Omega)(4+j\Omega)} = \frac{A}{2+j\Omega} + \frac{B}{4+j\Omega} = \frac{4A + j\Omega A + 2B + j\Omega B}{(2+j\Omega)(4+j\Omega)}$$

προκύπτει το σύστημα εξισώσεων 4A+2B=3 και A+B=1, από λύση του οποίου βρίσκουμε A=1/2 και B=1/2. Επομένως έχουμε:

$$H(\Omega) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2+j\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4+j\Omega}$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, βρίσκουμε:

$$h(t) = F^{-1}\{H(\Omega)\} = \cdots = \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-4t})\, u(t)$$

(γ) Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-3t}u(t)$. **[1]**

<u>Απάντηση</u>**:** Για τον υπολογισμό της εξόδου $y(t)$ εργαζόμαστε στο πεδίο συχνότητας. Αρχικά υπολογίζουμε τον FT της εισόδου $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = F\{e^{-3t}u(t)\} = \frac{1}{3+j\Omega}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της εξόδου $Y(\Omega)$ με χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης του μετασχηματισμού Foyrier:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\, X(\Omega) = \frac{3+j\Omega}{(2+j\Omega)(4+j\Omega)}\frac{1}{(3+j\Omega)} = \frac{1}{(2+j\Omega)(4+j\Omega)} = \cdots = \frac{1}{2}\frac{1}{(2+j\Omega)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(4+j\Omega)}$$

Τέλος, με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (διαδικασία επίλυσης ανάλογη με του προηγούμενου ερωτήματος) ανακτούμε την έξοδο $y(t)$:

$$y(t) = F^{-1}\{Y(\Omega)\} = \cdots = \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-4t})\, u(t)$$

ΘΕΜΑ 3 (4 μονάδες)

Ένα ΓΧΑ σύστημα διαθέτει συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ που δίνεται από τη σχέση:

$$H(s) = \frac{s+4}{s^2 + 5s + 6}$$

(α) Να υπολογιστεί η διαφορική εξίσωση (ΓΔΕΣΣ) που περιγράφει το σύστημα. **[1]**

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+4}{s^2+5s+6} \Rightarrow$$

$$s^2 Y(s) + 5s\, Y(s) + 6\, Y(s) = sX(s) + 4X(s) \;\Rightarrow$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

(β) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. **[2]**

Απάντηση: Η συνάρτηση $H(s)$ γράφεται:

$$H(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{s+3}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2:

$$C_1 = \lim_{s \to -2} [(s+2)\, H(s)] = \lim_{s \to -2} \frac{s+4}{s+3} = 2$$

$$C_2 = \lim_{s \to -3} [(s+3)\, H(s)] = \lim_{s \to -3} \frac{s+4}{s+2} = -1$$

Επομένως:

$$H(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

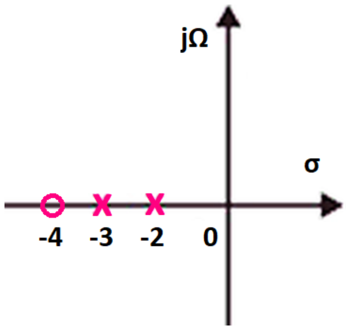
και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος, δηλ. είναι:

$$x(t) = [2e^{-2t} - e^{-3t}]\, u(t)$$

(γ) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων – μηδενικών και να κριθεί το σύστημα ως προς την ευστάθεια. **[1]**

Οι ρίζες του παρονομαστή είναι $(s+2)(s+3) = 0$ => Πόλοι: p1=-2, p2=-3

Η ρίζα του αριθμητή είναι: s+4=0 => μηδενικό: z = -4



Διάγραμμα πόλων - μηδενικών

Επειδή και οι δύο πόλοι βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το σύστημα είναι ευσταθές.