Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ

Εργαστηριακή Άσκηση 2
«Συστήματα Συνεχούς Χρόνου»

Λύσεις Ασκήσεων

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

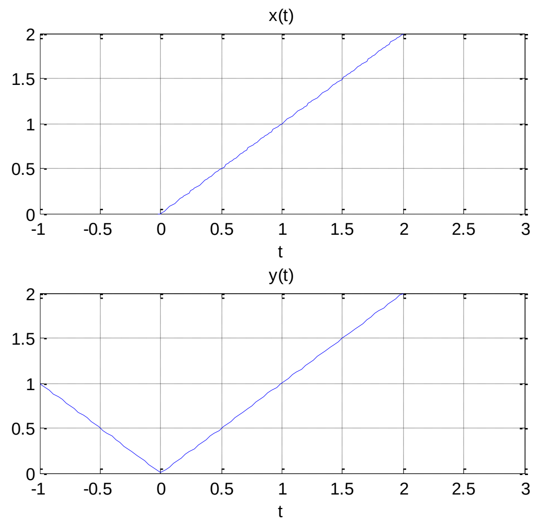
Οκτώβριος 2023

Μέρος Α' – Εισαγωγή στα Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

Άσκηση 1

Να εξετάσετε εάν το σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = x(|t|)$ είναι αιτιατό ή όχι. Για τη μελέτη σας θεωρήστε είσοδο $x(t) = t \cdot u(t)$.

```
clear all; syms t

u(t) = heaviside(t);
x(t) = t*u(t);
y(t) = x(abs(t));

subplot(211);
ezplot(x(t)); title('x(t)')
axis([-1 3 0 2]); grid on

subplot(212);
ezplot(y(t)); title('y(t)')
axis([-1 3 0 2]); grid on
```

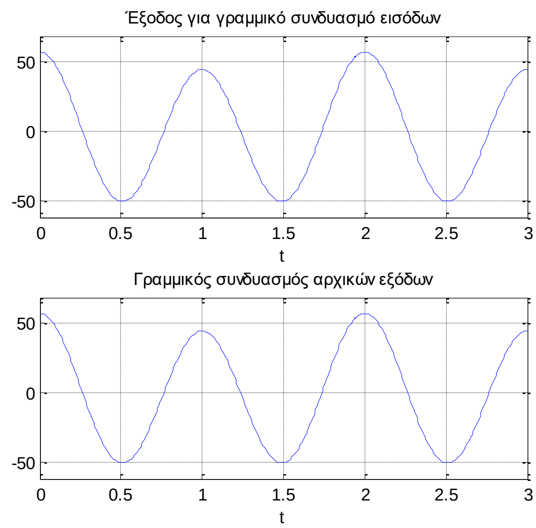


Παρατηρούμε ότι του σύστημα είναι μη-αιτιατό.

Άσκηση 2

Να εξετάσετε εάν το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = dx(t) \,/\, dt$είναι γραμμικό. Για εισόδους θεωρήστε τα $x_1(t) = \sin(\pi t)$ και $x_2(t) = 2\sin(2\pi t)$ και συντελεστές $a_1 = 2, a_2 = 4$.

```
clear all; syms t; a1 = 2; a2 = 4;
u(t) = heaviside(t);
x1(t) = sin(pi*t) ;
x2(t) = 2*sin(2*pi*t);
y1(t) = diff(x1(t), t);
y2(t) = diff(x2(t), t);
% Υπολογισμός γραμμικού συνδυασμού εισόδων
x(t) = a1*x1(t) + a2*x2(t);
% Υπολογισμός εξόδου για γραμμικό συνδυασμό
εισόδων
y(t) = diff(x(t), t);
% Υπολογισμός γραμμικού συνδυασμού εξόδων
yy(t) = a1*y1(t) + a2*y2(t);

subplot(211); ezplot( y(t), [0 3] ); grid on
title('Έξοδος για γραμμικό συνδυασμό εισόδων');
subplot(212); ezplot( yy(t), [0 3] ); grid on
title('Γραμμικός συνδυασμός αρχικών εξόδων');
```

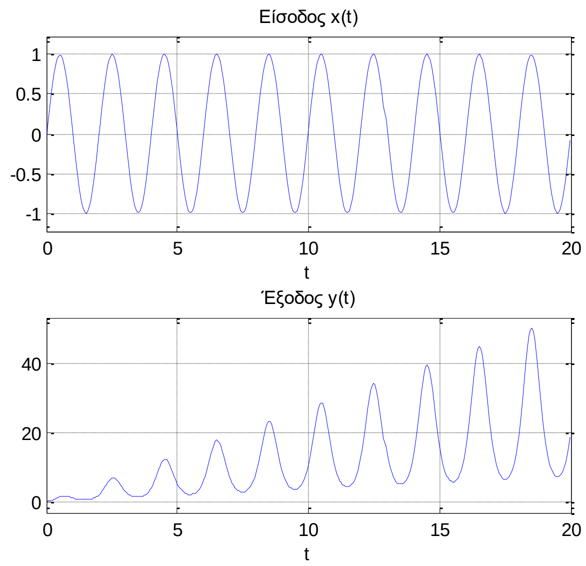


Από τη σύγκριση των παραπάνω σχημάτων προκύπτει ότι το σύστημα είναι γραμμικό.

Άσκηση 3

Να ελέγξετε αν το σύστημα με σχέση εισόδου - εξόδου $y(t) = t\,e^{x(t)}$ είναι ευσταθές ή όχι. Χρησιμοποιήστε είσοδο $x(t) = \sin(\pi t)$.

```
clear all; syms t

x(t) = sin(pi*t);
y(t) = t*exp( x(t) )

subplot(211);
ezplot( x(t), [0 20] );
grid on
title('Είσοδος x(t)');

subplot(212);
ezplot( y(t), [0 20] );
grid on
title('Έξοδος y(t)');
```

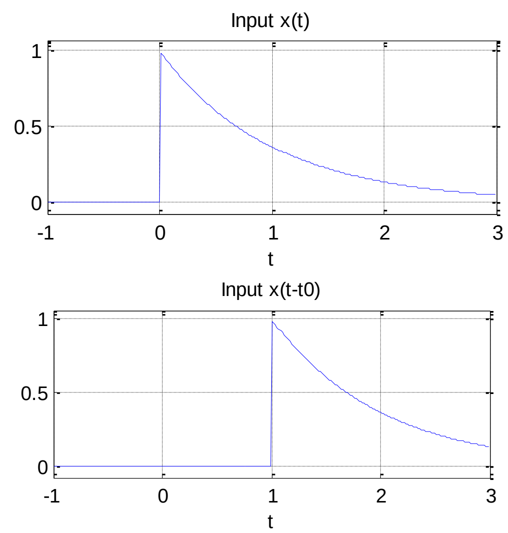


Από τη σύγκριση των δύο γραφημάτων, προκύπτει ότι για φραγμένη είσοδο παράγεται μη-φραγμένη έξοδος, οπότε το σύστημα είναι ασταθές.

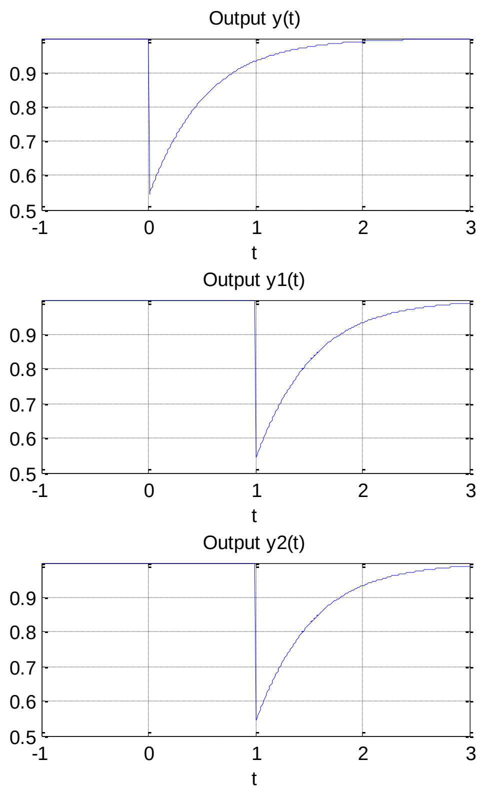
Άσκηση 4

Να εξετάσετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = cos[x(t)]$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή όχι. Θεωρείστε σήμα δοκιμής $x(t) = e^{-t}\,u(t)$ και χρονική ολίσθηση $t_0 = 1$.

```
clear all; syms t

t0 = 1;
u(t) = heaviside(t);
x(t) = exp(-t) * u(t);
y(t) = cos( x(t) );

% Έξοδος για χρονικά ολισθημένη είσοδο
y1(t) = cos( x(t-t0) );
% Χρονικά ολισθημένη έξοδος
y2(t) = y(t-t0);

figure(1)
subplot(211);
ezplot( x(t),[-1,3] );
title('Input x(t)'); grid on;
subplot(212);
ezplot(x(t-t0),[-1,3]);
title('Input x(t-t0)'); grid on
```



```
figure(2)
subplot(311);
ezplot(y(t),[-1,3]);
title('Output y(t)');
ylim([0.5 1]); grid on
subplot(312);
ezplot(y1(t),[-1,3]);
title('Output y1(t)');
ylim([0.5 1]); grid on
subplot(313);
ezplot(y2(t),[-1,3]);
title('Output y2(t)');
ylim([0.5 1]); grid on
```



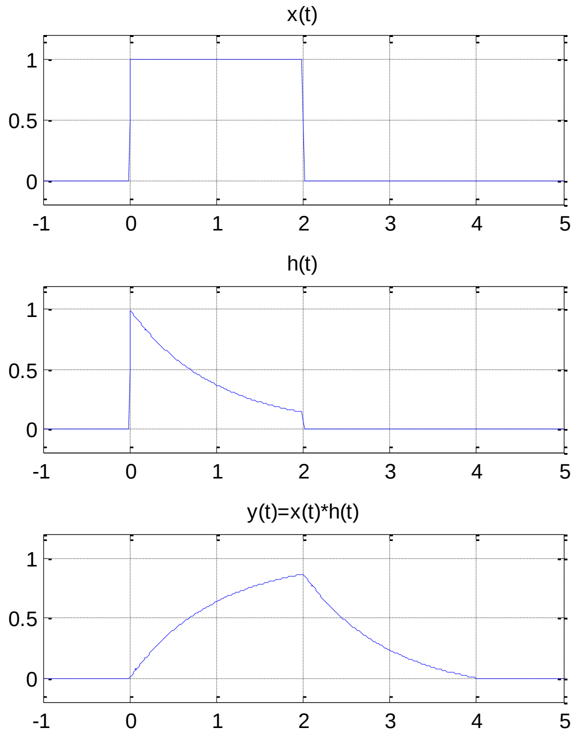
Παρατηρούμε ότι η έξοδος $y_1(t)$ (για είσοδο την $x(t-t_0)$) ταυτίζεται με την έξοδο $y_2(t)$ (μετατοπισμένη έξοδος κατά t_0), οπότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Μέρος Β' – Συνέλιξη & Συνδεσμολογίες Συστημάτων

Άσκηση 1

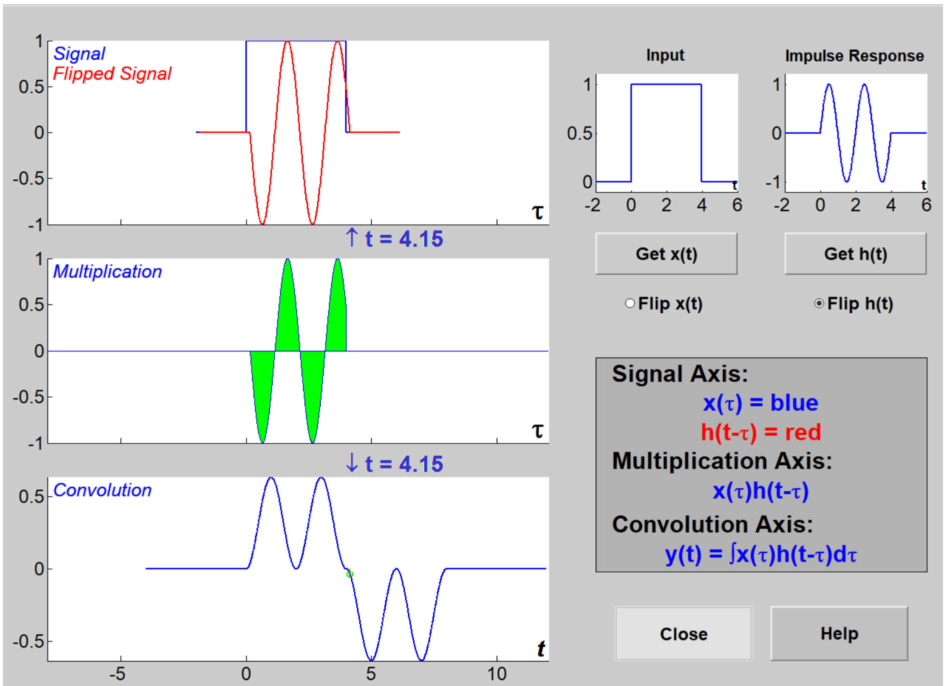
Υπολογίστε με χρήση συμβολικών μεταβλητών τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$ για τα σήματα $x(t) = u(t) - u(t-2)$ και $h(t) = e^{-t}[u(t) - u(t-2)]$.

```
clear all; syms t r

u(t) = heaviside(t);
x(t) = u(t) - u(t-2);
h(t) = exp(-t)*(u(t) - u(t-2));

y(t) = int(h(t-r)*x(r), r, -inf, inf);

tt = -1 : 0.01 : 5;
x = subs(x(t), t, tt);
h = subs(h(t), t, tt);
y = subs(y(t), t, tt);

subplot(311), plot(tt, x);
ylim([-0.2 1.2]), grid on, title('x(t)');
subplot(312), plot(tt, h);
ylim([-0.2 1.2]), grid on, title('h(t)');
subplot(313), plot(tt, y);
ylim([-0.2 1.2]), grid on, title('y(t)=x(t)*h(t)');
```



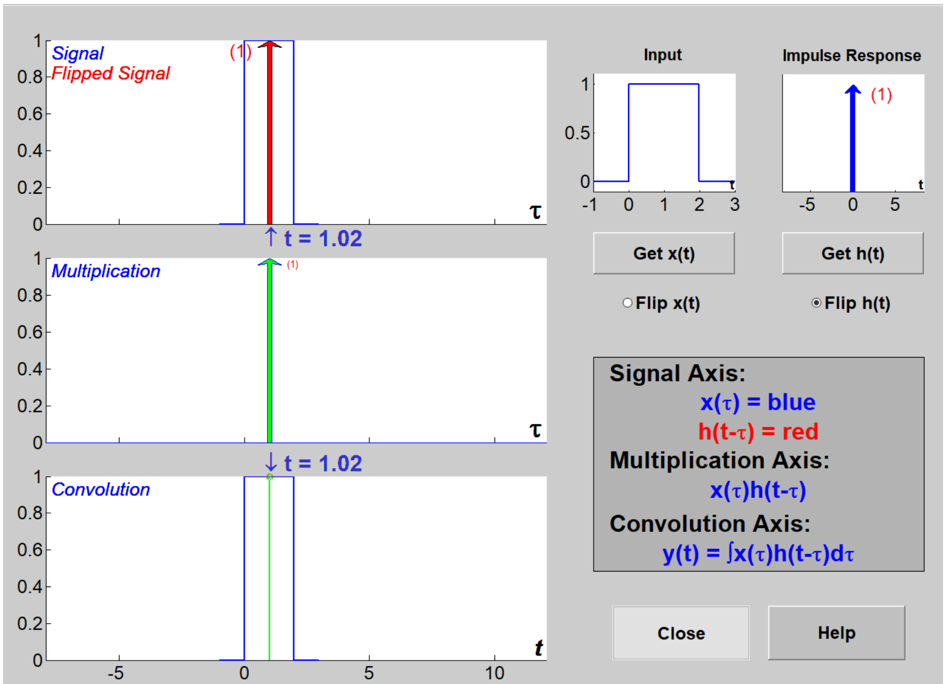
Άσκηση 2

Υπολογίστε με την εφαρμογή Convolution Demo 1 τη συνέλιξη για $x(t) = u(t) - u(t-4)$ και $h(t) = \sin(\pi t) * (u(t) - u(t-4))$



Άσκηση 3

Υπολογίστε την συνέλιξη ενός οποιουδήποτε συστήματος με τη συνάρτηση Dirac. Τι συμπεραίνετε;



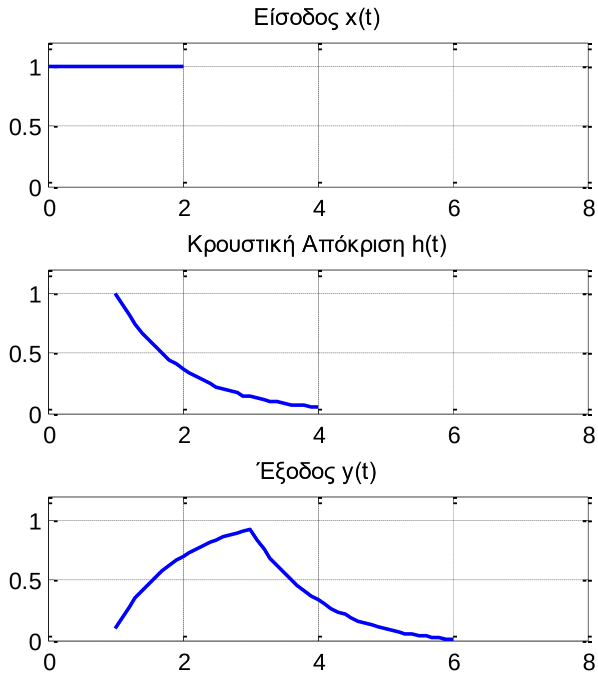
Επιβεβαιώνεται η ταυτοτική ιδιότητα της συνέλιξης, δηλαδή: $x(t) * \delta(t) = x(t)$. Επομένως, αν ένα σύστημα διαθέτει κρουστική απόκριση ίση με δ(t) τότε το σήμα εισόδου μεταφέρεται ακριβώς ίδιο στην έξοδο, δηλαδή δεν αλλοιώνεται κατά τη διέλευσή του μέσα από το σύστημα.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε με τη συνάρτηση conv() τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = u(t) - u(t-2)$ και $h(t) = e^{-(t-1)}[u(t-1) - u(t-4)]$.

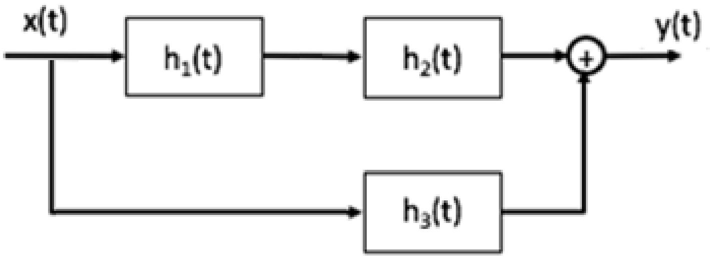
```
% Δημιουργία κλιμάκων χρόνου
Step = 0.1;
th = 1 : Step : 4;
tx = 0 : Step : 2;
% Δημιουργία σημάτων x(t) και h(t)
h = exp(-(th-1)) .* ones(1, length(th));
x = ones(1, length(tx));
% Υπολογισμός συνέλιξης
y = conv(x, h) .* Step;
% Δημιουργία κλίμακας χρόνου σήματος εξόδου
ty = min(tx) + min(th) : Step : max(tx) + max(th);
% Σχεδιασμός διαγραμμάτων
subplot(311);
plot(tx, x, 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 1.2]); title('Είσοδος x(t)')
subplot(312);
```

```
plot(th, h, 'LineWidth', 2); grid on;
axis([0, 8, 0, 1.2]); title('Κρουστική Απόκριση h(t)')
subplot(313);
plot(ty, y, 'LineWidth', 2); grid on;
axis([0, 8, 0, 1.2]); title('Έξοδος y(t)')
```



Άσκηση 5

Να υπολογίσετε την ισοδύναμη κρουστική απόκριση και την έξοδο $y(t)$ για την παρακάτω συνδεσμολογία συστημάτων:



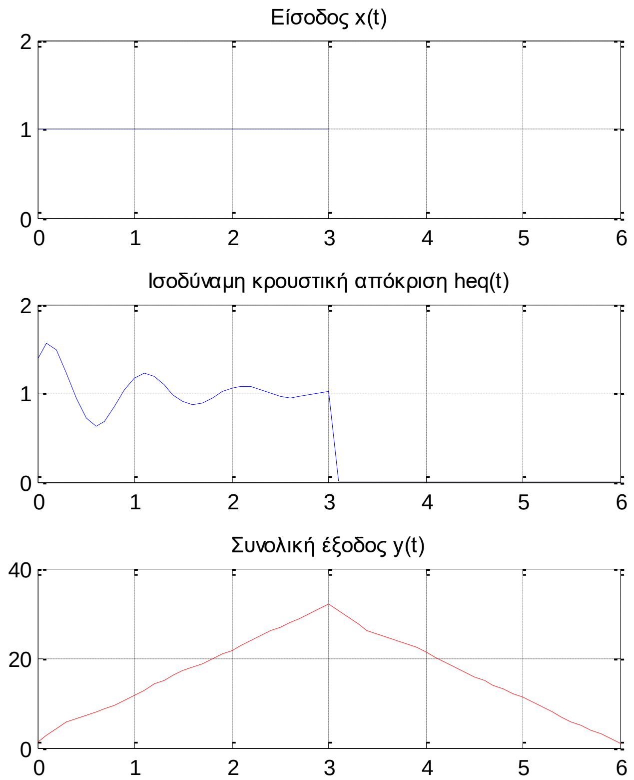
Δίνονται:

$h_1(t) = 4\,cos(2\pi t) \cdot e^{-t} \cdot\ [u(t) - u(t-3)],\ \ h_2(t) = e^{-4t}\ \cdot [u(t) - u(t-3)]$,

$h_3(t) = u(t) - u(t-3)$ και $x(t) = u(t) - u(t-3)$

```
clear all; clc
Step = 0.1;
% Δημιουργία κλίμακας χρόνου
```

```
t = 0 : Step : 3;
% Δημιουργία σημάτων x(t), h1(t), h2(t), h3(t)
x = ones(1, length(t));
h1 = 4*cos(2*pi*t) .* exp(-t).* ones(1, length(t));
h2 = exp(-4*t) .* ones(1, length(t));
h3 = [ones(1, length(t)) zeros(1, 30)];
% Υπολογισμός ισοδύναμης κρουστικής απόκρισης
heq = conv(h1, h2) * Step + h3;
% Υπολογισμός εξόδου y(t) = x(t) * h(t)
tt = 0 : Step : 2*max(t);
ty = 0 : Step : 3*max(t);
y = conv(heq, x);
% Σχεδιασμός διαγραμμάτων
subplot(311); plot(t, x);
title('Είσοδος x(t)'); xlim([0 6]); grid on
subplot(312); plot(tt, heq);
title('Ισοδύναμη κρουστική απόκριση heq(t)');
xlim([0 6]); grid on
subplot(313); plot(ty, y, 'r');
title('Συνολική έξοδος y(t)');
xlim([0 6]); grid on
```

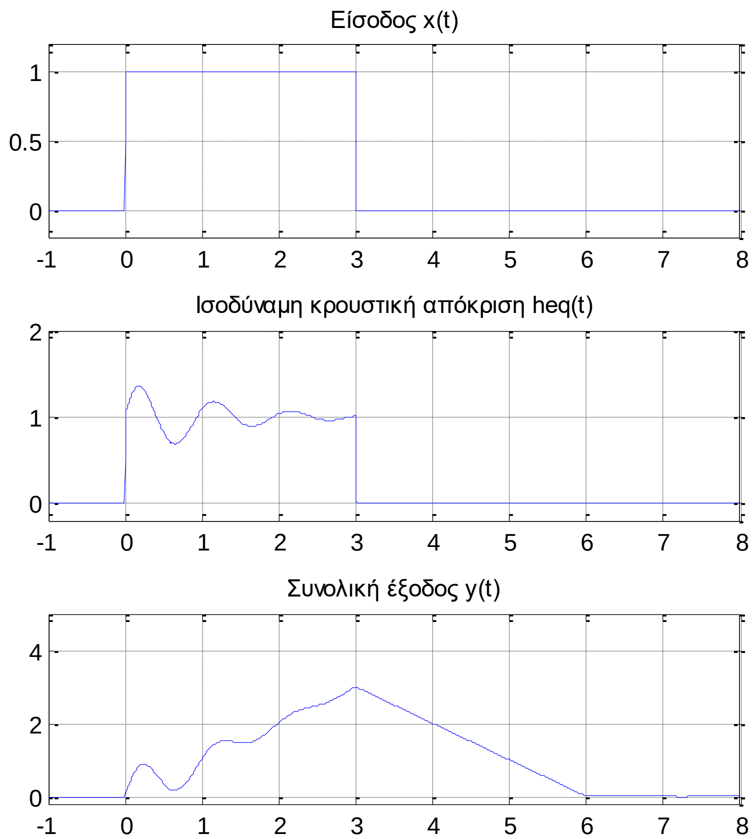


Άσκηση 6

Να επιλυθεί η προηγούμενη άσκηση με χρήση συμβολικών μεταβλητών. Τι παρατηρείτε;

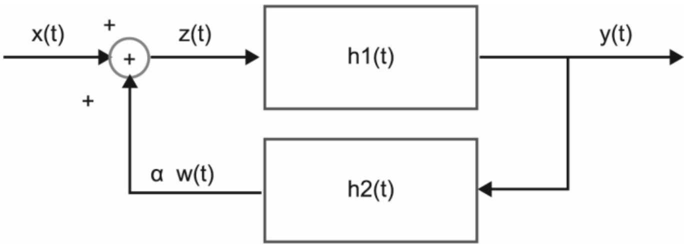
<u>Προσοχή</u>: Η παρούσα επίλυση έχει μεγάλο χρόνο υλοποίησης.

```
clear all; syms t r
% Δημιουργία σημάτων x(t), h1(t), h2(t), h3(t)
u(t) = heaviside(t); p(t) = u(t) - u(t-3);
x(t) = p(t);
h1(t) = 4*cos(2*pi*t) * exp(-t) * p(t);
h2(t) = exp(-4*t) * p(t);
h3(t) = p(t);
% Υπολογισμός ισοδύναμης κρουστικής απόκρισης
heq(t) = int(h1(t-r)*h2(r), r, -inf, inf) + h3(t);
% Υπολογισμός εξόδου y(t) = x(t) * h(t)
y(t) = int(heq(t-r)*x(r), r, -inf, inf);
% Υπολογισμός των σημάτων για tε[-1,8]
tt = -1 : 0.01 : 8;
x = subs(x(t), t, tt); heq = subs(heq(t), t, tt); y = subs(y(t), t, tt);
% Σχεδιασμός διαγραμμάτων
subplot(311), plot(tt, x); axis([-1 8 -0.2 1.2]), grid on;
title('Είσοδος x(t)');
subplot(312), plot(tt, heq); axis([-1 8 -0.2 2]), grid on;
title('Ισοδύναμη κρουστική απόκριση heq(t)');
subplot(313), plot(tt, y); axis([-1 8 -0.2 5]), grid on;
title('Συνολική έξοδος y(t)')
```



Άσκηση 7

Να υπολογίσετε την ισοδύναμη κρουστική απόκριση και την έξοδο $y(t)$ για την παρακάτω συνδεσμολογία συστημάτων:



Δίνονται:

$h_1(t) = e^{-2t}\cos(4\pi t)\ [u(t) - u(t-2)]$, $\qquad h_2(t) = e^{-t}[u(t) - u(t-2)]$

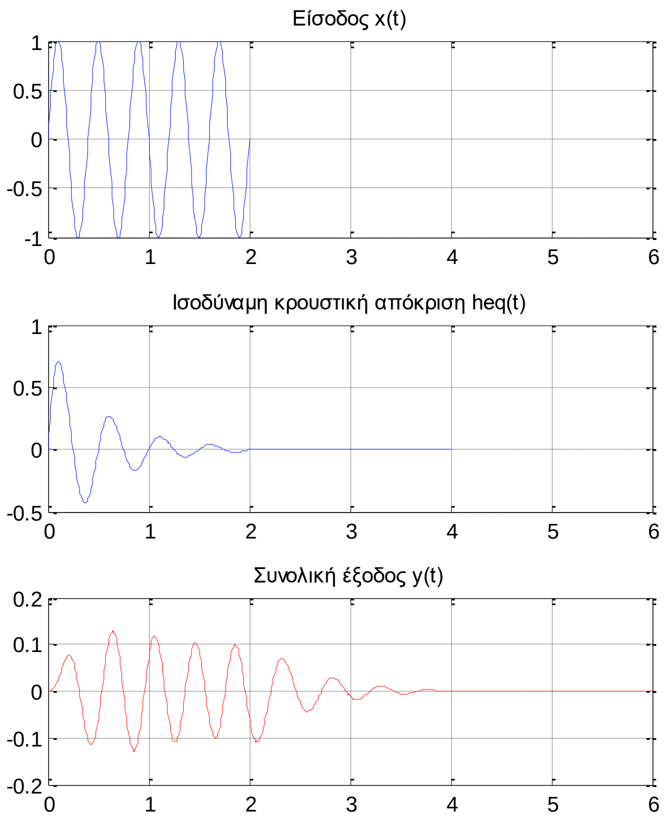
$x(t) = sin(5\pi t)\ [u(t) - u(t-2)]$, $\quad a = -2$ (αρνητική ανάδραση)

Απάντηση: Το ισοδύναμο σύστημα έχει κρουστική απόκριση που δίνεται από:

$$h_{eq}(t) = \frac{h_1(t)}{1 - a\, h_1(t) * h_2(t)}$$

Η έξοδος υπολογίζεται από τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * h_{eq}(t)$

```
Step = 0.01; a = -2;
% Δημιουργία κλίμακας χρόνου εισόδου
t = 0 : Step : 2;
N = length(t);
% Δημιουργία σημάτων x(t), h1(t), h2(t)
x = sin(5*pi*t) .* ones(1, N);
h1 = exp(-2*t) .* sin(4*pi*t) .* ones(1, N);
h2 = exp(-t) .* ones(1, N);
% Υπολογισμός ισοδύναμης κρουστικής απόκρισης heq(t)
hpar = (1 - a*conv(h1, h2) * Step);
h1( N+1 : 2*N-1 ) = 0; % Προσθήκη μηδενικών
heq = h1 ./ hpar;
% Υπολογισμός εξόδου y(t)=x(t)*h(t)
y = conv(x, heq) * Step;
% Δημιουργία κλίμακας χρόνου εξόδου
th = 0 : Step : 2*2;
ty = 0 : Step : 3*2;
% Σχεδιασμός διαγραμμάτων
subplot(311); plot(t, x);
title('Είσοδος x(t)'); xlim([0 6]); grid on
subplot(312); plot(th, heq);
title('Ισοδύναμη κρουστική απόκριση heq(t)');
xlim([0 6]); grid on
subplot(313); plot(ty, y, 'r');
title('Συνολική έξοδος y(t)');
xlim([0 6]); grid on
```


Είσοδος x(t)
Ισοδύναμη κρουστική απόκριση heq(t)
Συνολική έξοδος y(t)
1
0.5
0
-0.5
-1
0.2
0.1
-0.1
-0.2
0
1
2
3
4
5
6