Ν. Βαρουχάκης
Λ. Αδαμόπουλος
Χ. Γιαννίκος
Α. Μπέτσης
Δ. Νοταράς
Κ. Σολδάτος
Σ. Φωτόπουλος

μαθηματικά I

γ΄ λυκείου

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΘΗΝΑ

Οργανισμός
Εκδόσεως
Διδακτικών
Βιβλίων

Με απόφαση της ελληνικής κυβερνήσεως τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και μοιράζονται δωρεάν.

Ν. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗΣ - Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ - Χ. ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ
Α. ΜΠΕΤΣΗΣ - Δ. ΝΟΤΑΡΑΣ - Κ. ΣΟΛΔΑΤΟΣ - Σ. ΦΩΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Γ΄

ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ-ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ)

Το κεφάλαιο αυτό θα μπορούσε να είναι πολύ περιορισμένο. Πράγματι, πολύ μικρό μέρος από το περιεχόμενό του είναι άγνωστο στο μαθητή της Γ΄ Λυκείου. Το άλλο είναι περιληπτική ή αυτούσια παρουσίαση γνώσεων από τις προηγούμενες τάξεις.

Στην πραγματικότητα πρόκειται για μια συγκεντρωτική παρουσίαση εννοιών και αποτελεσμάτων, υπό μορφή επαναλήψεων και συμπληρώσεων, στην οποία οριοθετείται ό,τι συχνά αναφέρεται και χρησιμοποιείται για την κατανόηση εννοιών που θα ακολουθήσουν.

Έτσι διασφαλίζεται μια ομαλή εισαγωγή στις έννοιες της Ανάλυσης και επιτυγχάνεται, στο μέτρο του δυνατού, η απαιτούμενη αυτόνομη ανάπτυξη της ύλης του βασικού αυτού κλάδου των Μαθηματικών.

Το κεφάλαιο λοιπόν αυτό είναι κυρίως κεφάλαιο αναφοράς. Η διδασκαλία θα πρέπει να εναρμονίζεται προς τον εισαγωγικό και επαναληπτικό του χαρακτήρα ώστε να αποφεύγονται αδικαιολόγητες καθυστερήσεις.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

Επαγωγή

1.1 Είναι γνωστό από την Α΄ τάξη ότι για να αποδείξουμε ότι ένας προτασιακός τύπος $p(\nu)$ με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$ (ή το $\mathbb{N}^*$ ή, γενικότερα, το $\{\nu \in \mathbb{N}: \nu \geqslant \lambda\}$) ισχύει για κάθε ν (είναι καθολικά αληθής), χρησιμοποιούμε τη **μέθοδο της τελείας επαγωγής** η οποία συνίσταται στα εξής:

- Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση $p(0)$ (ή η $p(1)$ ή, γενικότερα, η $p(\lambda)$) είναι αληθής.
- Υποθέτουμε ότι η $p(\nu)$ είναι αληθής και κατασκευάζουμε μια απόδειξη της $p(\nu + 1)$.

Θα θυμίσουμε τη μέθοδο της τελείας επαγωγής με την παρακάτω εφαρμογή (ανισότητα Bernoulli):

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν $\alpha > -1$, να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ αληθεύει η $(1 + \alpha)^\nu \geq 1 + \nu\alpha$ (1)

Η (1) αληθεύει για $\nu = 0$, γιατί $(1 + \alpha)^0 = 1 + 0\alpha$.

΄Εστω ότι αληθεύει για την τιμή ν. Θα αποδείξουμε ότι τότε θα αληθεύει και για την τιμή $\nu + 1$, δηλαδή θα αληθεύει η

$$(1 + \alpha)^{\nu+1} \geq 1 + (\nu + 1)\alpha \qquad (2)$$

Πράγματι, το πρώτο μέλος της (2) γίνεται διαδοχικά:

$$(1+\alpha)^{\nu+1} = (1+\alpha)^\nu(1+\alpha) \underset{\varepsilon}{\geq} (1+\nu\alpha)(1+\alpha) = 1 + \alpha + \nu\alpha + \nu\alpha^2 \geq 1 + \nu\alpha + \alpha = 1 + (\nu+1)\alpha$$

΄Αρα η (1) αληθεύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

(Για $\alpha \neq 0$ και $\nu > 1$ ισχύει ειδικότερα η $(1 + \alpha)^\nu > 1 + \nu\alpha$)

Φραγμένο σύνολο

1.2 Αν Δ είναι ένα διάστημα (ανοικτό ή κλειστό) με άκρα τα α και β, το β και κάθε αριθμός $\varphi \geqslant \beta$ χαρακτηρίζεται ως *άνω φράγμα* του Δ, επειδή δεν υπάρχει στοιχείο του Δ μεγαλύτερο από το β (άρα και από το φ).
Ομοίως, το α και κάθε αριθμός $\varphi \leqslant \alpha$ χαρακτηρίζεται ως *κάτω φράγμα* του Δ επειδή δεν υπάρχει στοιχείο του Δ μικρότερο από το α (άρα και από το φ). Γενικά, δίνουμε τον ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω ένα μη κενό σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$. Ονομάζουμε

- *άνω φράγμα* **του Ε κάθε $\varphi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in E$:**

$$x \leqslant \varphi$$

- *κάτω φράγμα* **του Ε κάθε $\varphi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in E$:**

$$x \geqslant \varphi$$

Το σύνολο Ε λέγεται:

- **φραγμένο άνω,** όταν έχει άνω φράγμα
- **φραγμένο κάτω,** όταν έχει κάτω φράγμα
- **φραγμένο,** όταν είναι φραγμένο άνω **και** φραγμένο κάτω.

Π.χ. τα διαστήματα με άκρα τους πραγματικούς α και β είναι φραγμένα. Το $(\alpha,+\infty)$ δεν είναι φραγμένο άνω, ενώ το $(-\infty, \beta)$ δεν είναι φραγμένο κάτω.

Επίσης το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι φραγμένο κάτω, ενώ δεν είναι φραγμένο άνω, αφού (βλέπε 'Αλγεβρα Α' Λυκείου, κεφ. 4) για κάθε πραγματικό αριθμό α υπάρχει φυσικός $\nu > \alpha$ (*Θεώρημα Αρχιμήδη*).

Εξάλλου ένα άνω φράγμα ενός συνόλου μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο. Π.χ. το β είναι άνω φράγμα των διαστημάτων $(\alpha, \beta]$ και (α, β), αλλά ανήκει μόνο στο πρώτο.

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι:

Αν ένα άνω (κάτω) φράγμα φ ενός συνόλου Ε ανήκει στο Ε, είναι το μοναδικό στοιχείο με αυτή την ιδιότητα.

Πράγματι, αν υπήρχε, εκτός του φ, και άλλο άνω φράγμα $\varphi' \in E$, θα είχαμε $\varphi \leqslant \varphi'$ αλλά και $\varphi' \leqslant \varphi$. 'Αρα $\varphi' = \varphi$.

Το φ ονομάζεται **μέγιστο (ελάχιστο)** στοιχείο του Ε και συμβολίζεται **maxE** (**minE**)

Είναι φανερό ότι αν το Ε είναι πεπερασμένο σύνολο, υπάρχει πάντοτε το maxE καθώς και το minE

Μια βασική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών εκφράζεται με τα παρακάτω θεωρήματα[1]:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Αν ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο άνω, το σύνολο των άνω φραγμάτων του έχει ελάχιστο στοιχείο.**

(1) Η απόδειξή τους παραλείπεται.

Αυτό το ελάχιστο άνω φράγμα[1] Α χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες:

(i) *Για κάθε $x \in E$ είναι $x \leqslant A$.* [Το Α είναι άνω φράγμα]

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in E$ τέτοιος ώστε $x > A - \varepsilon$.* [Το Α-ε δεν είναι άνω φράγμα]

Εντελώς ανάλογο είναι και το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Αν ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο κάτω, το σύνολο των κάτω φραγμάτων του έχει μέγιστο στοιχείο.**

Αυτό το μέγιστο κάτω φράγμα[2] Κ χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες:

(i) *Για κάθε $x \in E$ είναι $x \geqslant K$* [Το Κ είναι κάτω φράγμα]

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in E$ τέτοιος ώστε $x < K + \varepsilon$* [Το Κ + ε δεν είναι κάτω φράγμα]

Μια άλλη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών είναι:

- **Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος k_0 τέτοιος ώστε**

$$k_0 \leqslant x < k_0 + 1$$

Ο k_0 λέγεται **ακέραιο μέρος του x** και συμβολίζεται **[x]**

Από τον ορισμό του [x] έχουμε

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

άρα και

$$x - 1 < [x] \leq x$$

Εξάλλου, επειδή $0 \leqslant x - [x] < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\theta \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$x = [x] + \theta$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Αν $0 < \alpha \leqslant 1$, να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ αληθεύει η**

$$(1-\alpha)^\nu < \frac{1}{1+\nu\alpha} \qquad (1)$$

Η (1) αληθεύει για $\nu = 1$, γιατί

$$1-\alpha < \frac{1}{1+\alpha} \Leftrightarrow 1-\alpha^2 < 1 \Leftrightarrow -\alpha^2 < 0$$

Έστω ότι αληθεύει για την τιμή ν.

Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει και για την τιμή ν+1, δηλαδή

$$(1-\alpha)^{\nu+1} < \frac{1}{1+(\nu+1)\alpha} \qquad (2)$$

Αλλά $(1-\alpha)^{\nu+1} = (1-\alpha)^\nu (1-\alpha) \leqslant \frac{1-\alpha}{1+\nu\alpha}$

(1) Συμβολίζεται **supE** απο τη λέξη **supremum**.
(2) Συμβολίζεται **infE** από τη λέξη **infimum**.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την

$$\frac{1-\alpha}{1+\nu\alpha} < \frac{1}{1+(\nu+1)\alpha} \qquad (3)$$

Η (3) γίνεται ισοδύναμα

$$1-\alpha+\nu\alpha+\alpha-\nu\alpha^2-\alpha^2 < 1+\nu\alpha \quad \text{ή} \quad -(\nu+1)\alpha^2 < 0$$

που είναι αληθής.

΄Αρα η (3), συνεπώς και η (2), είναι αληθής.

2. **Να αποδείξετε ότι ο 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου**

$$E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots\}$$

Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι $\frac{1}{\nu} > 0$. Συνεπώς ο 0 είναι κάτω φράγμα του Ε. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ακόμη (§ 1.2) ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός ν_o τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{\nu_o} < \varepsilon+0 \quad \text{ή} \quad \nu_o > \frac{1}{\varepsilon}$$

Αυτό όμως συμβαίνει (Θεώρημα Αρχιμήδη) και επομένως ο 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του Ε.

3. **Να αποδείξετε ότι, αν $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{Z}$, τότε $[x + \alpha] = [x] + \alpha$**

Είναι: $[x] \leqslant x < [x] + 1$, οπότε είναι και $[x] + \alpha \leqslant x + \alpha < [x] + \alpha + 1$. Επομένως, αφού $\alpha \in \mathbb{Z}$, σύμφωνα με τον ορισμό του ακέραιου μέρους θα είναι $[x + \alpha] = [x] + \alpha$

Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4, 5

Πραγματικές συναρτήσεις

1.3 Για τη διδασκαλία των επόμενων κεφαλαίων θεωρούμε απαραίτητο να υπενθυμίσουμε και να συμπληρώσουμε ορισμένες βασικές έννοιες που αναφέρονται στις συναρτήσεις.

΄Οταν λέμε **«πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής»**, εννοούμε μια συνάρτηση $f: A \to B$ που το πεδίο ορισμού Α και το σύνολο αφίξεως της Β είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$. ΄Οταν δίνεται η τιμή f(x) στο x, χωρίς να προσδιορίζονται ρητά τα σύνολα Α και Β, δεχόμαστε συμβατικά ως σύνολο αφίξεως Β το $\mathbb{R}$ και ως πεδίο ορισμού Α το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορεί να οριστεί ο αριθμός f(x).

Π.χ. η **πολυωνυμική** συνάρτηση f με $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots \alpha_1 x + \alpha_0$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ενώ η **ρητή** συνάρτηση g με $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$ και η (άρρητη) συνάρτηση h με $h(x) = \sqrt{x-1}$ το $A = \{x \in \mathbb{R}: x-1 \geqslant 0\} = [1, +\infty)$.

Αν $A_1 \subset A$, η συνάρτηση $f_1 : A_1 \to B$ με $f_1(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A_1$, λέγεται **περιορισμός** της f στο A_1, ενώ η f λέγεται **επέκταση** της f_1 στο Α.

Σύνολο τιμών

1.4 Αν A_1 είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης $f: A \to B$, το σύνολο των εικόνων των στοιχείων του A_1 συμβολίζεται **$f(A_1)$** και λέγεται **εικόνα** του A_1. Θα λέμε ότι *η f απεικονίζει το A_1 στο $f(A_1)$*. Η εικόνα f(A) του πεδίου ορισμού Α είναι **το σύνολο των τιμών** της συνάρτησης.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ένας αριθμός $y \in \mathbb{R}$ ανήκει στο f(A) αν και μόνο αν υπάρχει $x \in A$ με $f(x) = y$. Επομένως ο προσδιορισμός του f(A) ανάγεται στη λύση του προβλήματος:
«για ποιες τιμές του $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο x, έχει λύση στο Α».

Π.χ. για τη **σταθερή συνάρτηση u** με $u(x) = c$ είναι $u(\mathbb{R}) = \{c\}$, ενώ για την **ταυτοτική συνάρτηση ι** με $\iota(x) = x$ είναι $\iota(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ακόμη, για την **τετραγωνική συνάρτηση** f με $f(x) = x^2$ είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Το μεγαλύτερο (μικρότερο) στοιχείο του f(A), αν υπάρχει, λέγεται **μέγιστο (ελάχιστο)** της f. Το μέγιστο και το ελάχιστο λέγονται **ακρότατα** της f. Αν y_0 είναι ένα ακρότατο, τότε υπάρχει ένα ή και περισσότερα $x_0 \in A$ με $f(x_0) = y_0$. Θα λέμε ότι η f *παρουσιάζει ακρότατο* στο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα βρούμε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

Αρκεί να προσδιορίσουμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση

$$y = \frac{x}{x-2} \qquad (1)$$

με άγνωστο x, έχει λύση στο Α.
Η (1) για $x \in A$ γράφεται ισοδύναμα

$$(x-2)y = x \qquad (2)$$

ή

$$(y-1)x = 2y \qquad (3)$$

Η (3) έχει λύση **στο $\mathbb{R}$**, αν και μόνο αν $y \neq 1$. Η λύση αυτή ανήκει ειδικότερα και στο Α, γιατί για $x = 2$ η εξίσωση (2), που είναι ισοδύναμη με την (3), είναι αδύνατη. ΄Ωστε

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R}: y \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

Ασκήσεις: 6, 7, 8

Γραφική παράσταση συνάρτησης

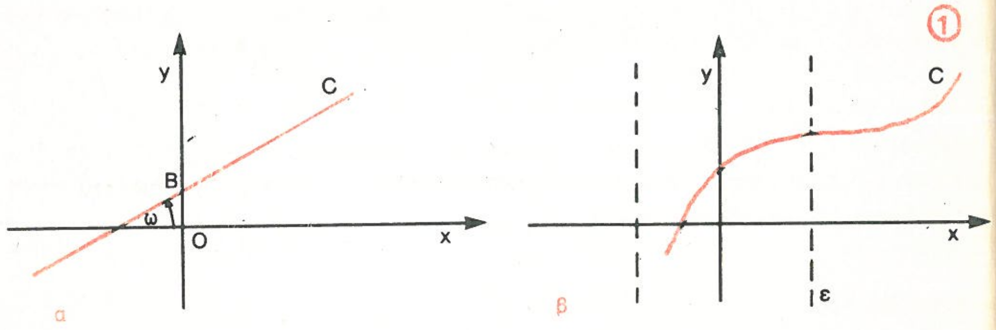
1.5 Ας θεωρήσουμε στο επίπεδο ένα σύστημα αναφοράς Oxy.
Γραφική παράσταση C μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A είναι το σύνολο των σημείων M(x,y) με

$$x \in A \quad \text{και} \quad y = f(x)$$

H C προσδιορίζεται λοιπόν από το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

$$y = f(x) \qquad (x \in A)$$

η οποία λέγεται *εξίσωση της C*.
Έτσι η γραφική παράσταση της ομοπαραλληλικής συνάρτησης f με f(x) = αx+β έχει εξίσωση y = αx+β και είναι ευθεία που έχει συντελεστή διευθύνσεως α = εφω[1] και διέρχεται από το σημείο B (0,β) του άξονα y΄y (σχ. 1α).



Χαρακτηριστικό της γραφικής παράστασης C μιας συνάρτησης είναι ότι κάθε ευθεία ε // y΄y τέμνει τη C σε **ένα το πολύ** σημείο (σχ. 1β).

Είδη συναρτήσεων

1.6 Μια συνάρτηση f: A → B λέγεται:

- **συνάρτηση επί,** όταν f(A) = B. Έτσι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι συνάρτηση «επί», αν θεωρήσουμε ως σύνολο αφίξεώς της το f(A).

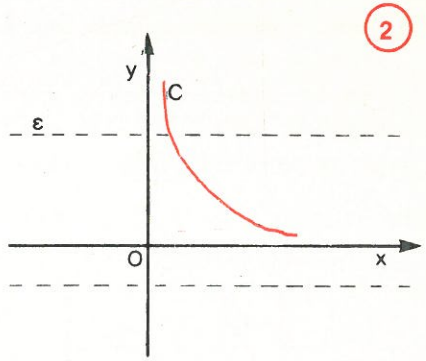
(1) ω είναι η θετική κυρτή γωνία που σχηματίζει ο ημιάξονας Ox με την ευθεία ε.

- **συνάρτηση 1-1,** όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ή, με αντίθετοαντιστροφή,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

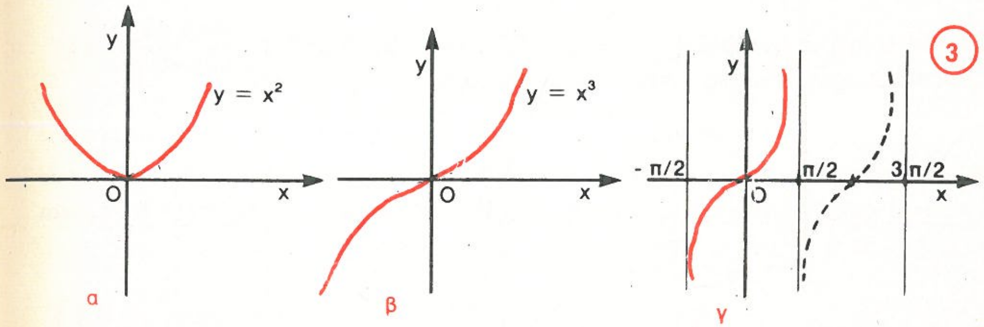


Χαρακτηριστικό μιας συνάρτησης 1-1 είναι ότι μια ευθεία ε // x΄x τέμνει τη γραφική της παράσταση C το πολύ σε ένα σημείο (σχ. 2).

- **άρτια,** όταν για κάθε x ∈ A είναι

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y (σχ. 3α).



- **περιττή,** όταν για κάθε x ∈ A είναι

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Από τον ορισμό της περιττής συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι η γραφική της παράσταση C έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων (σχ. 3β).
Έτσι, μπορούμε να περιορίζουμε τη μελέτη μιας άρτιας ή περιττής συνάρτησης στα x ∈ A με x > 0.

- **περιοδική,** όταν υπάρχει $T \in \mathbb{R}^*$ τέτοιος ώστε για κάθε x ∈ A να είναι

$$x + T \in A \quad \text{και} \quad f(x+T) = f(x)$$

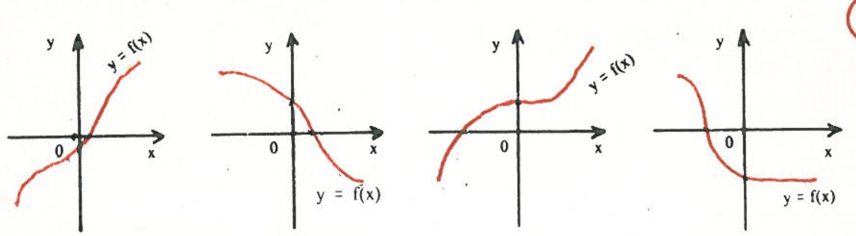
Έτσι, μπορούμε να περιορίζουμε τη μελέτη μιας περιοδικής συνάρτησης με περίοδο T σ' ένα διάστημα πλάτους T. Π.χ. τη συνάρτηση f με f(x) = εφx, που είναι περιοδική με περίοδο π, μπορούμε να τη μελετήσουμε (σχ. 3γ) στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

- **γνησίως μονότονη (μονότονη)**, και ειδικότερα:

γνησίως αύξουσα, όταν:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	(σχ. 4α)
γνησίως φθίνουσα, όταν:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	(σχ. 4β)
αύξουσα, όταν:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$	(σχ. 4γ)
φθίνουσα, όταν:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$	(σχ. 4δ)

(για κάθε x_1, $x_2 \in A$)

4



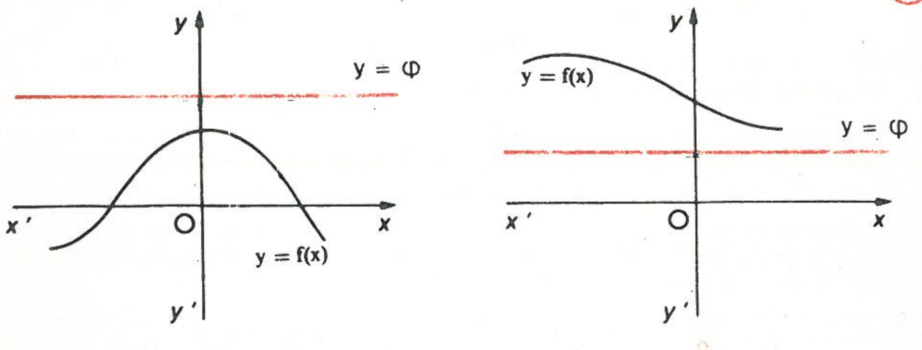
α β γ δ

Επειδή ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ των x_1, x_2 είναι $\lambda = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, οι παραπάνω συνεπαγωγές γράφονται ισοδύναμα

$$\lambda > 0, \quad \lambda < 0, \quad \lambda \geqslant 0, \quad \lambda \leqslant 0$$

- **φραγμένη** άνω ή κάτω όταν το σύνολο τιμών της είναι αντίστοιχα φραγμένο άνω ή κάτω. (Δηλαδή όταν υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να είναι $f(x) \leqslant \varphi$ ή $f(x) \geqslant \varphi$ αντιστοίχως).

5



α β

΄Οταν μια συνάρτηση είναι φραγμένη άνω και φραγμένη κάτω, λέγεται **φραγμένη**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

΄Οταν ο περιορισμός μιας συνάρτησης $f\colon A \to B$ σ' ένα σύνολο $A_1 \subset A$ έχει μια ιδιότητα p, τότε λέμε ότι η f έχει την ιδιότητα p **στο** A_1. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι **στο** $\mathbb{R}_+^*$ γνησίως φθίνουσα και φραγμένη κάτω, ιδιότητες που δεν τις έχει γενικά (στο πεδίο ορισμού της). Η f είναι ακόμη περιττή στο σύνολο $A = (-2,0) \cup (0,2)$, κτλ.

Ασκήσεις: 9, 10, 11, 12, 13

Πράξεις με συναρτήσεις

1.7 Αν f, f_1, f_2 είναι συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού A, ορίζεται:

- το **άθροισμα** f_1+f_2 των f_1 και f_2, με

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x)$$

- η **αντίθετη -f** της f, με

$$(-f)(x) = -f(x)$$

- το **γινόμενο λf** του $\lambda \in \mathbb{R}$ επί την f, με

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

- το **γινόμενο** f_1f_2 των f_1 και f_2, με

$$(f_1f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

- ο **λόγος (πηλίκο)** $\dfrac{f_1}{f_2}$ των f_1 και f_2, με

$$\frac{f_1}{f_2}(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

που ορίζεται στο σύνολο $A' = \{x \in A\colon f_2(x) \neq 0\}$

Αν οι f_1 και f_2 έχουν πεδία ορισμού τα A_1 και A_2 αντιστοίχως, οι πράξεις ορίζονται συμβατικά στο σύνολο $A = A_1 \cap A_2$.

Π.χ. αν $f_1(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}$ και $f_2(x) = \dfrac{3-x}{x^2-3x+2}$, τότε $A_1 = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και $A_2 = \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Οι συναρτήσεις f_1+f_2 και f_1f_2 ορίζονται στο σύνολο $A = A_1 \cap A_2 = \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$, ενώ η $\dfrac{f_1}{f_2}$ ορίζεται στο σύνολο $A' = \mathbb{R} - \{-1, 1, 2, 3\}$.

Αντίστροφη συνάρτηση

1.8 Μια συνάρτηση f: A → B αντιστρέφεται αν και μόνο αν είναι «1-1 και επί». Στην περίπτωση αυτή η αντίστροφη f^{-1} της f είναι επίσης «1-1 και επί». Αν $f(x) = y \in B$, τότε $f^{-1}(y) = x \in A$. Έτσι, για κάθε $x \in A$ είναι

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

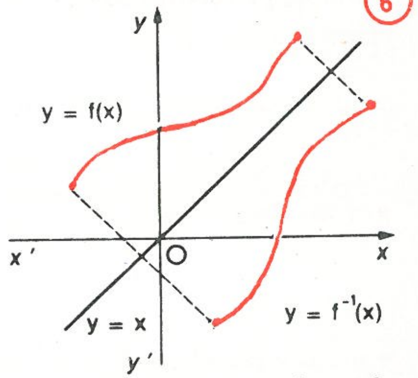
Επειδή αντίστροφη της f^{-1} είναι η f, ομοίως για κάθε $y \in B$ είναι

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει ότι σε κάθε ζεύγος (x, f(x)) του γραφήματος της f αντιστοιχεί το ζεύγος (f(x), x) του γραφήματος της f^{-1}.

Αν λοιπόν παραστήσουμε γραφικά τις f και f^{-1} **στο ίδιο σύστημα αναφοράς**, οι γραφικές τους παραστάσεις θα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}y$ (σχ. 6).

6



Εξάλλου όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση «1-1». Άρα μια γνησίως μονότονη συνάρτηση f: A → f(A) αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της είναι και αυτή γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Ασκήσεις: 14, 15, 16, 17, 18

Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

1.9 Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, η συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \quad \text{με } f(x) = \alpha^x$$

λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση α**. Για τη συνάρτηση αυτή ξέρουμε ότι:

- Είναι γνησίως μονότονη, και ειδικότερα
  γνησίως αύξουσα, όταν $\alpha > 1$
  γνησίως φθίνουσα, όταν $0 < \alpha < 1$
- Είναι συνάρτηση «επί», δηλαδή $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, που είναι και αυτή γνησίως

μονότονη (με το ίδιο είδος μονοτονίας) και απεικονίζει το $\mathbb{R}_+^*$ στο $\mathbb{R}$. Την f^{-1} τη συμβολίζουμε $\log_\alpha$ και την ονομάζουμε **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α.**

Από τον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι (§ 1.8):

- Επειδή $\alpha^0 = 1$, είναι και $\log_\alpha 1 = 0$.
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^{-1}(f(x)) = x$ (§ 1.8), που σημαίνει
  $$\log_\alpha \alpha^x = x \quad \text{και ειδικότερα} \quad \log_\alpha \alpha = 1$$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$ είναι $f(f^{-1}(x)) = x$, δηλαδή
  $$\alpha^{\log_\alpha x} = x \qquad (1)$$

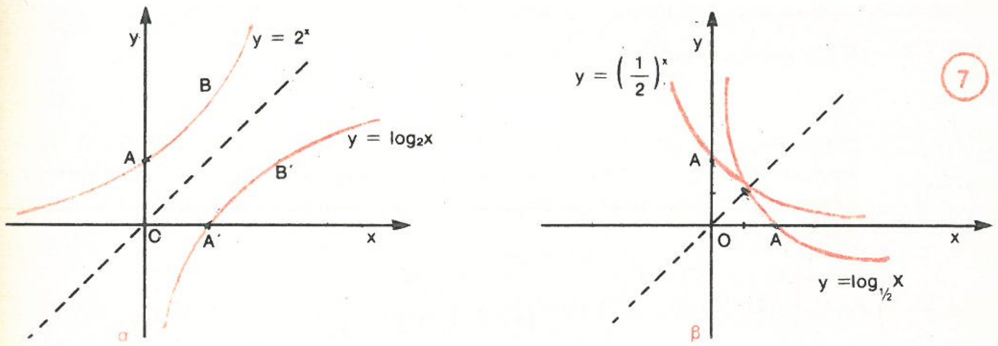
Άλλες βασικές ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης είναι:

$$\log_\alpha(xy) = \log_\alpha x + \log_\alpha y \quad (2) \qquad \log_\alpha x^y = y\log_\alpha x \quad (3)$$

$$\log_\alpha \frac{x}{y} = \log_\alpha x - \log_\alpha y \quad (4) \quad \text{και ειδικότερα} \quad \log_\alpha \frac{1}{x} = -\log_\alpha x \quad (5)$$

$$\log_\alpha x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha} \qquad (6)$$

Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση με βάση α, ως αντίστροφες, έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ (σχ. 7). Η γραφική παράσταση της εκθετικής διέρχεται από τα σημεία A (0,1) και B (1,α), ενώ η γραφική παράσταση της λογαριθμικής διέρχεται από τα σημεία A′ (1,0) και B′ (α,1).



Η εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό e, δηλαδή η e^x, λέγεται απλά *εκθετική συνάρτηση* (χωρίς να αναφέρεται η βάση e). Η αντίστροφη της e^x συμβολίζεται **ln** (αντί $\log_e$) και ο αριθμός **lnx** λέγεται *φυσικός* (ή *νεπέριος*) *λογάριθμος* του x.

Η ισότητα (1) για x = α και α = e γίνεται $\alpha = e^{\ln\alpha}$. Άρα $\alpha^x = (e^{\ln\alpha})^x$, δηλαδή

$$\alpha^x = e^{x\ln\alpha} \qquad (7)$$

Από την (6) τέλος, για $\beta = e$ παίρνουμε την

$$\log_\alpha x = \frac{\ln x}{\ln \alpha} \tag{8}$$

Με τη βοήθεια των (7) και (8), από οποιαδήποτε εκθετική ή λογαριθμική συνάρτηση αναγόμαστε αντίστοιχα στην e^x και την $\ln x$.

Ασκήσεις: 19, 20, 21

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2-6}{3}$.**

(i) Να εξετάσετε αν η f είναι συνάρτηση «1-1».
(ii) Να βρείτε το f(ℝ) και τα ακρότατα της f, αν έχει.
(iii) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
(iv) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
(v) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

(i) Η f έχει πεδίο ορισμού το ℝ. Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1^2-6}{3} = \frac{x_2^2-6}{3} \Rightarrow x_1^2-6 = x_2^2-6 \Rightarrow x_1^2-x_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 = -x_2)$$

Άρα η f δεν είναι «1-1».

(ii) Για να βρούμε το f(ℝ), αρκεί να βρούμε για ποιές τιμές του y η εξίσωση

$$y = \frac{x^2-6}{3} \tag{1}$$

με άγνωστο x, έχει λύση στο ℝ.

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $3y = x^2-6$ ή

$$x^2 = 3y+6 \tag{2}$$

Η (2), άρα και η (1), έχει λύση στο ℝ αν και μόνο αν $3y+6 \geqslant 0$, δηλαδή $y \geqslant -2$. Είναι λοιπόν $f(\mathbb{R}) = [-2, +\infty)$ και συνεπώς η f έχει ελάχιστο το -2, ενώ δεν έχει μέγιστο. Λύνοντας την εξίσωση $f(x) = -2$ βρίσκουμε $x = 0$. Επομένως η f παρουσιάζει το ελάχιστο στο σημείο 0.

(iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι (προφανώς $-x \in \mathbb{R}$ και)

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-6}{3} = \frac{x^2-6}{3} = f(x)$$

Συνεπώς η f είναι άρτια.

(iv) Αφού η f είναι άρτια, θα την μελετήσουμε στο $\mathbb{R}_+$
Υποθέτουμε λοιπόν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ $(x_1 \neq x_2)$ και έχουμε

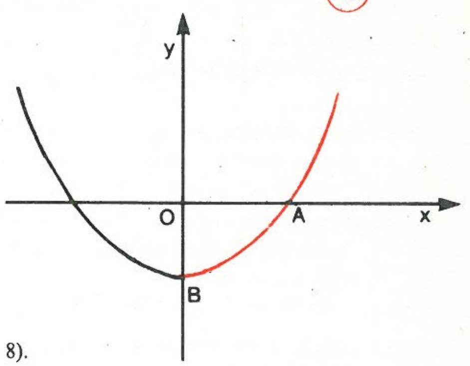
$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{x_1^2-6-x_2^2+6}{3(x_1-x_2)} = \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{3(x_1-x_2)} = \frac{x_1+x_2}{3} > 0$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_+$, οπότε θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_-$.

(v) Επειδή η γραφική παράσταση C της f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, αρκεί να σχεδιάσουμε τον «κλάδο» της για $x \geqslant 0$.
Υποθέτοντας λοιπόν $x \geqslant 0$, από την εξίσωση $f(x) = 0$ βρίσκουμε $x = \sqrt{6}$. Δηλαδή η C τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A(\sqrt{6}, 0)$. Ακόμη (βλέπε ii) η C τέμνει τον y΄y στο σημείο B (0, -2).

Βρίσκοντας ακόμη, από την (1), μερικά σημεία της C, π.χ. τα $\Gamma(1, -\frac{5}{3})$, $\Delta(2, -\frac{2}{3})$ και E (3, 1), και παίρνοντας υπόψη τη συμμετρία της ως προς τον y΄y, σχεδιάζουμε τη C (σχ. 8).

8



2. **Θεωρούμε τη συνάρτηση f: A → f(A) με $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$.**

(i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
(ii) Να βρείτε το $f(\mathbb{R}_+)$.

(i) Πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-4\}$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».
Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+3}{x_1+4} = \frac{2x_2+3}{x_2+4} \Rightarrow 2x_1x_2+8x_1+3x_2+12 = 2x_1x_2+8x_2+3x_1+12 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

Επομένως η f είναι συνάρτηση «1-1», οπότε (αφού είναι και «επί») αντιστρέφεται.
Για να ορίσουμε την f^{-1} πρέπει πρώτα να βρούμε το f(A).

Αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση

$$y = \frac{2x+3}{x+4} \tag{1}$$

με άγνωστο x, έχει λύση στο A.
Η (1) για $x \in A$ γράφεται ισοδύναμα

$$y(x+4) = 2x+3 \tag{2}$$

ή

$$(y-2)x = 3-4y \tag{3}$$

Η (3) έχει λύση στο ℝ, την

$$x = \frac{3-4y}{y-2} \tag{4}$$

αν και μόνο αν $y \neq 2$. Η λύση αυτή είναι διαφορετική από το -4, δηλαδή ανήκει στο A, γιατί η (2), που είναι ισοδύναμη με την (3), για $x = -4$ είναι αδύνατη.
Άρα $f(A) = \mathbb{R} - \{2\}$, οπότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{2\}$ και είναι, σύμφωνα με την (4), $f^{-1}(x) = \frac{3-4x}{x-2}$.

(ii) Η (4) έχει λύση στο $\mathbb{R}_+$ αν και μόνο αν:

$$\frac{3-4y}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow (4y-3)\,(y-2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq y < 2$$

Συνεπώς $f(\mathbb{R}_+) = [\frac{3}{4}, 2)$.

3. **Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση f είναι φραγμένη στο A, αν και μόνο αν υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}_+$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να είναι**

$$|f(x)| \leq \theta$$

Έστω ότι η f είναι φραγμένη στο A. Τότε υπάρχουν $\Phi \in \mathbb{R}$ και $\varphi \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in A$ να είναι

$$\varphi \leq f(x) \leq \Phi$$

Αλλά $\Phi \leq |\Phi|$ και $-|\varphi| \leq \varphi$. Συνεπώς **για κάθε** $x \in A$ είναι

$$-|\varphi| \leq f(x) \leq |\Phi| \qquad (1)$$

Έστω $\theta = \max\{|\varphi|, |\Phi|\}$. Τότε $-|\varphi| \geq -\theta$, οπότε από την (1) προκύπτει $-\theta \leq f(x) \leq \theta$ ή

$$|f(x)| \leq \theta$$

Αντιστρόφως, αν για κάθε $x \in A$ είναι $|f(x)| \leq \theta$, τότε θα είναι ισοδύναμα και

$$-\theta \leq f(x) \leq \theta$$

δηλαδή η f είναι φραγμένη στο A.

4. **Θεωρούμε τη συνάρτηση f με** $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
(ii) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

(i) Πρέπει: $\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-1, 1)$.

(ii) Για κάθε $x \in A$ είναι $-x \in A$ και

$$f(-x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} = -\ln\frac{1+x}{1-x} = -f(x) \qquad [\S\ 4.7,\ \text{τύπος } 5]$$

Άρα η f είναι περιττή.

Ασκήσεις: 22, 23

Σύνθεση συναρτήσεων

1.10 Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Η τιμή της f στο x μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις:
α) σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζουμε τον $1-x^2 = y$ και
β) στο y αντιστοιχίζουμε τη $\sqrt{y}$. (Αυτό γίνεται μόνο αν $y = 1-x^2 \geq 0$).

Στη διαδικασία αυτή εμφανίζονται δύο συναρτήσεις:
- η f_1 με $f_1(x) = 1-x^2$ (στην α΄ φάση)
- η f_2 με $f_2(y) = \sqrt{y}$ (στη β΄ φάση)

Έτσι, η τιμή της f στο x γράφεται τελικά

$$f(x) = f_2(f_1(x))$$

Η συνάρτηση f λέγεται *σύνθεση* των f_1, f_2 και συμβολίζεται $\mathbf{f_2 \circ f_1}$.

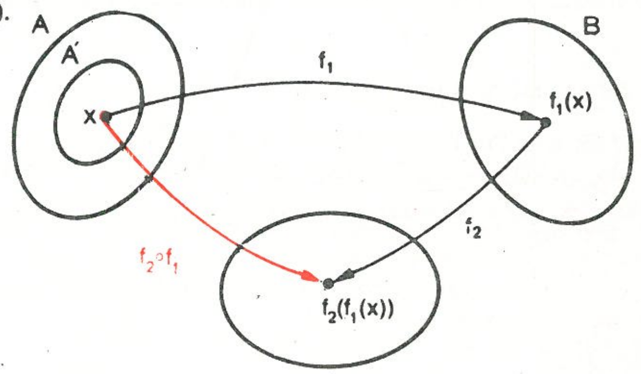
Το πεδίο ορισμού της f δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ της f_1, αλλά περιορίζεται στα x για τα οποία η $f_1(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού $\mathbb{R}_+$ της f_2, δηλαδή στο $[-1, 1]$.

Γενικά τώρα, έστω δύο συναρτήσεις f_1 και f_2 ορισμένες στα A και B αντιστοίχως. Τότε:

Για κάθε $x \in A$ ορίζεται με την f_1 ο αριθμός $f_1(x)$ και **αν $f_1(x) \in B$**, ορίζεται με την f_2 και ο αριθμός $f_2(f_1(x))$. Περιορίζοντας λοιπόν την f_1 στο σύνολο

$$A' = \{x \in A\colon f_1(x) \in B\}$$

ορίζουμε μια νέα συνάρτηση (σχ. 9) η οποία σε κάθε $x \in A'$ αντιστοιχίζει τον αριθμό $f_2(f_1(x_1))$.



9

Η συνάρτηση αυτή, με πεδίο ορισμού A΄, λέγεται **σύνθεση της f_1 με την f_2** και συμβολίζεται $f_2 \circ f_1$. Είναι λοιπόν

$$f_2 \circ f_1\colon A' \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η $f_2 \circ f_1$ ορίζεται όταν $A' \neq \varnothing$, δηλαδή όταν υπάρχουν στοιχεία του A για τα οποία οι τιμές της f_1 να ανήκουν στο B.
Αν $B = \mathbb{R}$, τότε (προφανώς) $A' = A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f_1 και f_2 με $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $f_2(x) = 3x + 2$ που είναι ορισμένες στο $A = [-1, 1]$ και στο $B = \mathbb{R}$ αντιστοίχως. Θα εξετάσουμε αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f_2 \circ f_1$ και $f_1 \circ f_2$.

(i) Επειδή $B = \mathbb{R}$, θα είναι $A' = A$.
Επομένως ορίζεται η $f_2 \circ f_1$ και είναι

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = 3\sqrt{1-x^2} + 2, \text{ με } x \in A.$$

(ii) $B' = \{x \in B: f_2(x) \in A\} = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leqslant 3x+2 \leqslant 1\} = [-1, -\frac{1}{3}] \neq \varnothing.$

Άρα ορίζεται και η $f_1 \circ f_2$ και είναι

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = \sqrt{1-(3x+2)^2} = \sqrt{-3(3x^2+4x+1)}, \text{ με } x \in B'$$

Είναι δηλαδή $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Έστω οι συναρτήσεις f_1 και f_2 με $f_1(x) = 3x-2$ και $f_2(x) = x^2+1$, ορισμένες στα σύνολα $A = [-2, 5]$ και $B = [-20, 10]$ αντιστοίχως. Να ορίσετε τις $f_2 \circ f_1$ και $f_1 \circ f_2$.**

(i) Θεωρούμε το σύνολο

$$A' = \{x \in A: f_1(x) \in B\} = \{x \in A: -20 \leqslant 3x-2 \leqslant 10\}$$

Για να ορίζεται η $f_2 \circ f_1$ πρέπει να είναι $A' \neq \varnothing$. Έχουμε

$$\begin{cases} -20 \leqslant 3x-2 \leqslant 10 \\ x \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leqslant 3x \leqslant 12 \\ -2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leqslant x \leqslant 4 \\ -2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 4.$$

Έτσι στο $A' = [-2, 4]$ ορίζεται η $f_2 \circ f_1$ και είναι

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = (3x-2)^2+1 = 9x^2-12x+5$$

(ii) Έχουμε:

$$B' = \{x \in B: f_2(x) \in A\} = \{x \in B: -2 \leqslant x^2+1 \leqslant 5\}$$

$$\begin{cases} -2 \leqslant x^2+1 \leqslant 5 \\ -20 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x^2 \leqslant 4 \\ -20 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant 4 \\ -20 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -20 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

Είναι λοιπόν $B' = [-2, 2] \neq \varnothing$, οπότε ορίζεται η $f_1 \circ f_2$ και έχουμε

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = 3(x^2+1)-2 = 3x^2+1$$

2. **Έστω οι συναρτήσεις f_1 και f_2 με $f_1(x) = \text{συν}x$ και $f_2(x) = \sqrt{1-4x^2}$. Να ορίσετε τις $f_2 \circ f_1$ και $f_1 \circ f_2$.**

Η f_1 είναι ορισμένη στο $A = \mathbb{R}$ και η f_2 στο $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

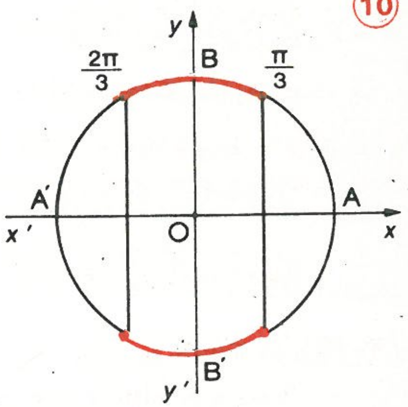
10

Έχουμε:

(i) $A' = \{x \in A: f_1(x) \in B\}$

$= \{x \in \mathbb{R}: -\frac{1}{2} \leqslant \text{συν}x \leqslant \frac{1}{2}\}$

$= [\kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}] \neq \varnothing \ (\kappa \in \mathbb{Z})$



Επομένως ορίζεται η $f_2 \circ f_1$ και είναι

$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = \sqrt{1-4\text{συν}^2 x}$

(ii) $B' = \{x \in B: f_2(x) \in A\} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \neq \varnothing$

Άρα ορίζεται και η $f_1 \circ f_2$ και είναι

$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = \text{συν}\sqrt{1-4x^2}$

3. **Να αποδειχτεί ότι αν οι συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: B \to \Gamma$ είναι:**

(i) γνησίως μονότονες με το ίδιο (διαφορετικό) είδος μονοτονίας, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι γν. αύξουσα (γν. φθίνουσα).

(ii) «1-1 και επί», τότε $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

(i) Αν π.χ. οι f και g είναι γν. φθίνουσες, θα έχουμε (για κάθε $x_1, x_2 \in A$):

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ [f γν. φθίνουσα]

$\Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ [g γν. φθίνουσα]

$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$

που σημαίνει ότι η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

Όμοια εξετάζονται και οι λοιπές περιπτώσεις

(ii) Η σύνθεση $g \circ f$: $A \to \Gamma$ είναι επίσης «1-1 και επί». Πράγματι:

- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ [αφού f, g είναι 1-1]
- $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = \Gamma$ [αφού f, g είναι «επί»]

Άρα (§ 1.8), το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις $g^{-1}: \Gamma \to B$, $f^{-1}: B \to A$, τη σύνθεσή τους $f^{-1} \circ g^{-1}: \Gamma \to A$, καθώς και για την $(g \circ f)^{-1}: \Gamma \to A$. Για να αποδείξουμε την ισότητα των δύο τελευταίων αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $z \in \Gamma$:

$$(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$$

Πράγματι, έστω $(g \circ f)^{-1}(z) = x \in A$ και $f(x) = y \in B$ Τότε:
$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$, $y = g^{-1}(z)$ καθώς και $x = f^{-1}(y)$. Άρα:
$(g \circ f)^{-1}(z) = x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$

Ασκήσεις: 24, 25, 26, 27

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu > 1$ είναι $(1-\alpha)^\nu > 1 - \nu\alpha$.

2. Αν $\alpha \geqslant 2$, να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι $\alpha^\nu \geqslant \nu + 1$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geqslant 5$ είναι $2^\nu > \nu^2$.

4. Θεωρούμε τα σύνολα $A_1 = \{x \in \mathbb{R}: x < 2\}$, $A_2 = \{\frac{1}{\nu}: \nu \in \mathbb{N}^*\}$ και $A_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \geqslant 0\}$.
Να εξετάσετε ποια από τα σύνολα αυτά είναι φραγμένα άνω, ποια είναι φραγμένα κάτω και ποιο είναι, σε κάθε περίπτωση, το ελάχιστο άνω φράγμα ή το μέγιστο κάτω φράγμα.

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$[x+y] = [x] + [y] \text{ ή } [x+y] = [x] + [y] + 1$$

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε αν η f είναι περιορισμός της g:

(i) f με $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ και g με $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

(ii) f με $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{|x|}$ και g με $g(x) = \sqrt{|1-x|} + \sqrt{x}$

7. Να βρεθούν τα σύνολα τιμών και τα ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) των συναρτήσεων:

(i) f με $f(x) = x^2+5x+6$ (ii) g με $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2}$

(iii) φ με $\varphi(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+3x+4}$ (iv) h με $h(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

8. Να βρείτε το σύνολο τιμών και τα ακρότατα της συνάρτησης f με
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in [1,2) \\ x+2, & \text{αν } x \in [2,4) \end{cases}$$

9. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

(i) f με $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

(ii) g με $g(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

(iii) $h: (-2, 9) \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

10. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

(i) f με $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (ii) g με $g(x) = \begin{cases} 4x+3, & \text{αν } x \in (-\infty,2) \\ -2x+1, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$

11. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2$. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα της f στα σύνολα: $A_1 = (1,2)$, $A_2 = [1,2]$ και $\mathbb{R}$.

12. Να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες

(α_ν) με $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu}{\nu^2+1}$ (β_ν) με $\beta_\nu = \dfrac{\nu-1}{2^\nu}$

(γ_ν) με $\gamma_\nu = \dfrac{\nu^2\eta\mu\nu+\sqrt{\nu}}{\nu^2+1}$ (δ_ν) με $\delta_1 = \sqrt{3}$ και $\delta_{\nu+1} = \sqrt{3+\delta_\nu}$

είναι φραγμένες.

13. Να εξετάσετε αν η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu+1} + \dfrac{1}{\nu+2} + \ldots + \dfrac{1}{2\nu}$ είναι μονότονη και φραγμένη.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις:

f με $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x \in (-2,0] \\ 3, & \text{αν } x \in (0,2] \end{cases}$ και g με $g(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x \in [-1,0] \\ 2x+1, & \text{αν } x \in (0,2] \end{cases}$

Να οριστεί η συνάρτηση f+g

15. Δίνονται οι συναρτήσεις:
f με $f(x) = \sqrt{x}$ και g με $g(x) = \sqrt{2-x}$
Να οριστούν οι συναρτήσεις $f \cdot g$ και $\dfrac{g}{f}$

16. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ή δύο άρτιων συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού είναι άρτια συνάρτηση, ενώ το γινόμενο μιας περιττής και μιας άρτιας είναι περιττή συνάρτηση.

17. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (-1,1) \to f((-1,1))$ με $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

18. (i) Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συναρτήσεις "1-1" και ποιες είναι «επί».

f με $f(x) = \alpha x+\beta$ $(\alpha \neq 0)$ g με $g(x) = x^2$

φ με $\varphi(x) = x^3$ h με $h(x) = 5+\sqrt{x-2}$

(ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη συνάρτηση καθεμιάς από τις συναρτήσεις αυτές, θεωρώντας ως σύνολο αφίξεως το σύνολο των τιμών της.

19. Αν φ και f είναι δύο συναρτήσεις με $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\alpha^x+\alpha^{-x})$ και $f(x) = \dfrac{1}{2}(\alpha^x-\alpha^{-x})$, να αποδείξετε ότι:

(i) $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)+f(x)f(y)$ (ii) $f(x+y) = \varphi(x)f(y)+\varphi(y)f(x)$

20. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύουν οι ανισώσεις:

(i) $5^x < 1$ (ii) $3^{2x^2+x+4} < 1$

21. Να βρείτε το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση:

(i) f με $f(x) = \dfrac{\log_\alpha(x^2-5x+6)}{\sqrt{16-x^2}}$ (ii) g με $g(x) = \log_x(3x-2)$

22. Να εξετάσετε αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή:

(i) f με $f(x) = \ln \dfrac{3-x^4}{7+x^2}$ (ii) g με $g(x) = (5-|x|)^{x^2+5}$

23. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0,1)$ με $f(x) = \dfrac{2^x}{1+2^x}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ και g με $g(x) = \dfrac{2}{x}$. Να οριστεί η συνάρτηση $g \circ f$.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ και g με $g(x) = x+7$. Να οριστεί η συνάρτηση $f \circ g$.

26. Αν για τις συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, να δείξετε ότι γενικά είναι $f \circ g \neq g \circ f$.

27. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g\colon A \to B$ και $f\colon B \to \Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
(i) Αν η g είναι περιοδική, τότε και η $f \circ g$ είναι περιοδική.
(ii) Αν οι g, f είναι περιττές συναρτήσεις, τότε η $f \circ g$ είναι περιττή συνάρτηση, ενώ αν η f είναι άρτια και η g περιττή ή άρτια, τότε η $f \circ g$ είναι άρτια.

2

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Στο κεφάλαο αυτό γίνεται συστηματική μελέτη της έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας. Για λόγους διδακτικούς και αυτοτέλειας του κεφαλαίου επαναλαμβάνονται, στο πρώτο μέρος του, οι βασικοί ορισμοί που είναι γνωστοί από τη Β΄ τάξη.
Προτάσσεται η ιδιαίτερη περίπτωση του δακτυλίου των ακολουθιών με όριο 0. Τα πρώτα συμπεράσματα δίνουν ευκαιρία για άσκηση και αφομοίωση της έννοιας του ορίου στην απλή αυτή μορφή του.
Ακολουθεί η μελέτη της γενικότερης περίπτωσης συγκλινουσών ακολουθιών. Μετά το γνωστό ορισμό μελετώνται συστηματικά οι γενικές ιδιότητες καθώς και οι ιδιότητες που συσχετίζουν τη σύγκλιση με τις πράξεις, τη διάταξη και τη μονοτονία. Εξοπλίζεται, έτσι, ο μαθητής με ποικιλία μεθόδων που του επιτρέπουν να ερευνά, αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα, χωρίς να προσφεύγει στον ορισμό, και να προσδιορίζει το όριό του.
Ως εφαρμογή δίνεται ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης. Κρίθηκε σκόπιμο να επαναληφθούν και συμπληρωθούν οι γνωστές από τη Β΄ τάξη βασικές ιδιότητες της εκθετικής, καθώς και οι ορισμοί και ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης.
Τέλος εξετάζονται οι περιπτώσεις ακολουθιών που δε συγκλίνουν και ιδιαίτερα εκείνων που έχουν όριο $+\infty$ ή $-\infty$. Σε ελάχιστα θεωρήματα συνοψίζονται τα συμπεράσματα που αφορούν πράξεις με ακολουθίες, από τις οποίες η μια τουλάχιστο έχει όριο μη πεπερασμένο, και εντοπίζονται οι περιπτώσεις απροσδιοριστίας. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο πίνακας της σελίδας 83 δεν είναι πίνακας απομνημόνευσης, αλλά πίνακας για άσκηση και έλεγχο των γνώσεων.
Η όλη διάρθρωση και παρουσίαση του κεφαλαίου αποβλέπει στο να υποβοηθήσει την εισαγωγή και κατανόηση της γενικότερης έννοιας του ορίου συνάρτησης που ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΜΕ ΟΡΙΟ ΤΟ ΜΗΔΕΝ

Προσεγγίσεις

2.1 Το προϊόν ενός εργοστασίου συσκευάζεται σε δοχεία των 500 gr. Ένα δοχείο θεωρείται αγορανομικά αποδεκτό όταν το βάρος x του περιεχομένου του (σε γραμμάρια) διαφέρει από το 500 λιγότερο από 15. Είναι δηλαδή $485 < x < 515$ ή $-15 < x-500 < 15$ ή τελικά

$$|x-500| < 15$$

Ο αριθμός 500 είναι μια *προσέγγιση* του x.
Γενικά, αν $x, \alpha \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, θα λέμε ότι ο α είναι μια **προσέγγιση** του x ή ο x **προσεγγίζει** το α με **ανοχή** ε, όταν

$$|x-\alpha| < \varepsilon \qquad (1)$$

που σημαίνει $\alpha-\varepsilon < x < \alpha + \varepsilon$ ή $x \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$.
Επειδή η ανοχή ε είναι (συνήθως) «μικρή», χρησιμοποιείται και η εποπτικότερη έκφραση *«ο x είναι (αρκετά) κοντά[1] στο α»*.
Όταν, ειδικότερα, είναι $\alpha=0$, δηλαδή όταν ο x προσεγγίζει το 0 με ανοχή ε, η (1) γράφεται

$$|x| < \varepsilon$$

και σημαίνει $-\varepsilon < x < \varepsilon$ ή $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Ορισμός

2.2 Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$, δηλαδή την

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{28}, \ldots, -\frac{1}{1991}, \ldots$$

Ποιοι από τους όρους της ακολουθίας αυτής προσεγγίζουν το 0 με ανοχή $\varepsilon = 0{,}001$; Η απάντηση είναι απλή. **Όλοι** εκτός από τους 1000 πρώτους. Θα μπορούσαμε να είχαμε $\varepsilon = 10^{-6}$ ή $\varepsilon = 10^{-29}$ ή ακόμη μικρότερο (οσοδήποτε μικρό), δηλαδή οι όροι της (α_ν) προσεγγίζουν το 0 «όσο θέλουμε». Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε:

(1) Ο αριθμός $|x - \alpha|$ λέγεται **απόσταση** των x και α.

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon \Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (1)$$

'Ετσι, αν εκλέξουμε ένα φυσικό $\nu_0 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ θα είναι $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ και, λόγω της (1),

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon$$

Δηλαδή *οι όροι της (α_ν) προσεγγίζουν το 0 «όσο θέλουμε», αρκεί να εξαιρέσουμε ένα πεπερασμένο πλήθος απ' αυτούς.*
Ακολουθίες με την παραπάνω ιδιότητα λέμε ότι έχουν όριο το 0. Πιο συγκεκριμένα, θα λέμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο το 0, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός[1] ν_0 τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι**

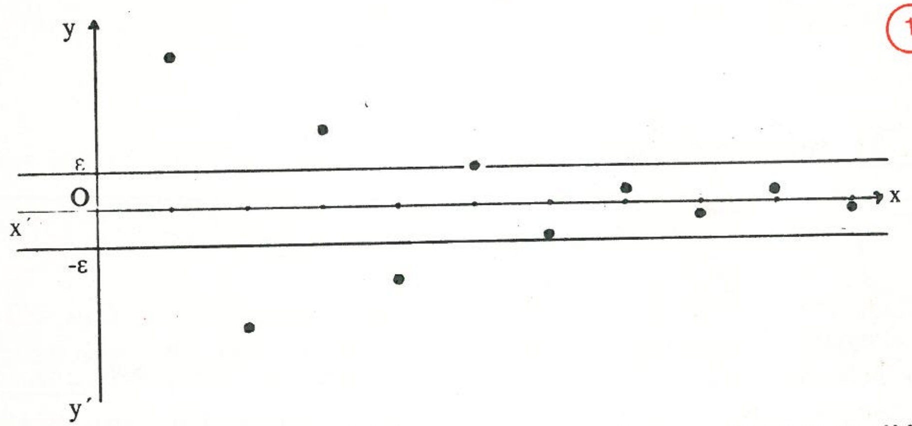
$$|\alpha_\nu| < \varepsilon$$

Για να δηλώσουμε ότι μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο το 0, γράφουμε

$$\lim \alpha_\nu = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha_\nu \to 0$$

Επειδή $|\alpha_\nu| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \alpha_\nu < \varepsilon$, από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό), όλοι οι όροι της (α_ν), με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος όρων, συσσωρεύονται στο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Τα αντίστοιχα σημεία της

1



γραφικής παράστασης της (α_ν) βρίσκονται στην ταινία που ορίζουν οι παράλληλες ευθείες $y = \varepsilon$ και $y = -\varepsilon$. Επομένως «πλησιάζουν όσο θέλουμε» τον άξονα $x'x$, αφού η απόστασή τους απ' αυτόν είναι μικρότερη από το ε.

(1) Ο ν_0 εξαρτάται, κάθε φορά, από το ε αλλά δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Μπορεί να αντικαθίσταται από οποιονδήποτε $\nu_0' > \nu_0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Η ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu = 0$ έχει όριο 0.**

Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $|\alpha_\nu| = 0 < \varepsilon$, δηλαδή η συνθήκη (1) του ορισμού αληθεύει αν θεωρήσουμε ως ν_0 οποιονδήποτε φυσικό, π.χ. $\nu_0 = 0$.

2. **Οι ακολουθίες με γενικούς όρους $\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^2}, \ldots, \frac{1}{\nu^\kappa}$ και $\frac{1}{\sqrt{\nu}}, \frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}}$ έχουν όριο 0.**

Πράγματι, έστω ένας οποιοσδήποτε αριθμός $\varepsilon > 0$.

Τότε: $$\left|\frac{1}{\nu^\kappa}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\nu^\kappa} < \varepsilon \Leftrightarrow \nu^\kappa > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \nu > \sqrt[\kappa]{\frac{1}{\varepsilon}} \qquad (1)$$

Αν εκλέξουμε λοιπόν φυσικό $\nu_0 \geqslant \sqrt[\kappa]{\frac{1}{\varepsilon}}$, τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι, λόγω της (1),

$$\frac{1}{\nu^\kappa} < \varepsilon$$

Συνεπώς $\lim = \frac{1}{\nu^\kappa} = 0$.

'Εχουμε ακόμη: $$\left|\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon^\kappa \Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon^\kappa} \qquad (2)$$

Αν εκλέξουμε ως ν_0 το $\left[\frac{1}{\varepsilon^\kappa}\right]$, ή οποιονδήποτε μεγαλύτερό του, τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι, λόγω της (2),

$$\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}} < \varepsilon$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}} = 0$

3. **Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = \frac{3\nu}{5\nu+6}$ δεν έχει όριο το 0.**

Είναι: $\frac{3\nu}{5\nu+6} \geqslant \frac{3\nu}{5\nu+6\nu} = \frac{3}{11}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

Αν λοιπόν πάρουμε $\varepsilon = \frac{3}{11}$, σε καμιά περίπτωση δεν έχουμε $|\alpha_\nu| < \varepsilon$. Επομένως η (α_ν) δεν έχει όριο το 0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. **Από τον προηγούμενο ορισμό, επειδή $|\alpha_\nu| = |-\alpha_\nu| = ||\alpha_\nu||$, προκύπτει ότι**

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = 0 \Leftrightarrow \lim (-\alpha_\nu) = 0 \Leftrightarrow \lim |\alpha_\nu| = 0}$$

2. Αν από μια ακολουθία (α_ν) παραλείψουμε κ αρχικούς όρους, προκύπτει ακολουθία με γενικό όρο $\beta_\nu = \alpha_{\nu+\kappa}$
Με βάση τον προηγούμενο ορισμό: αν $\lim\alpha_\nu = 0$ τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ **θα έχουμε $|\alpha_\nu| < \varepsilon$ άρα και $|\alpha_{\nu+\kappa}| < \varepsilon$, που σημαινει $\lim \beta_\nu = 0$.**
Αντιστρόφως, αν $\lim\beta_\nu = 0$ τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ θα έχουμε $|\beta_\nu| < \varepsilon$ δηλ. $|\alpha_{\nu+\kappa}| < \varepsilon$. Επομένως για κάθε $\nu > \nu_0' = \nu_0 + \kappa$ θα είναι $|\alpha_\nu| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim \alpha_\nu = 0$.
΄Ωστε για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = 0 \Leftrightarrow \lim \alpha_{\nu+\kappa} = 0}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Από την παρατήρηση 1 και το προηγούμενο παράδειγμα 2 προκύπτει ότι

$$\lim \left(-\frac{1}{\nu^\kappa}\right) = \lim (-1)^\nu \frac{1}{\nu^\kappa} = \lim \left(-\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}}\right) = \lim (-1)^\nu \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}} = 0.$$

2. Αφού $\lim \frac{1}{\nu^\kappa} = \lim \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}} = 0$ (βλέπε § 2.2, παραδ. 2), θα είναι και

$$\lim \frac{1}{(\nu+\mu)^\kappa} = \lim \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu+\mu}} = 0 \quad (\mu \in \mathbb{N}^*).$$

Ασκήσεις: 1, 2, 3

Μια άμεση συνέπεια του ορισμού

2.3 Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια ακολουθία (α_ν) με όριο 0 είναι φραγμένη.

Πράγματι, έστω ένας συγκεκριμένος $\varepsilon > 0$, π.χ. $\varepsilon = 1$. Τότε υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι

$$|\alpha_\nu| < 1$$

Αν λοιπόν θέσουμε $\theta = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{\nu_0}|, 1\}$, θα έχουμε, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha_\nu| \leqslant \theta$$

Επομένως η (α_ν) είναι φραγμένη.

΄Ωστε: **Κάθε ακολουθία που έχει όριο 0 είναι φραγμένη**

Ακολουθία που φράσσεται από άλλη με όριο 0

2.4 Μια μέθοδος για να διαπιστώσουμε ότι μια ακολουθία έχει όριο 0, είναι να συγκρίνουμε τους όρους της με τους αντίστοιχους όρους μιας άλλης ακολουθίας, η οποία έχει όριο 0.

Πιο συγκεκριμένα, έστω οι ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

- $\lim \beta_\nu = 0$
- $|\alpha_\nu| \leqslant |\beta_\nu|$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim \alpha_\nu = 0$

΄Εστω $\varepsilon > 0$. Αφού είναι $\lim\beta_\nu = 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι

$$|\beta_\nu| < \varepsilon$$

και επειδή $\quad |\alpha_\nu| \leqslant |\beta_\nu|$

θα είναι $\quad |\alpha_\nu| < \varepsilon$

΄Αρα $\lim \alpha_\nu = 0$

Αν υποθέσουμε γενικότερα ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε η $|\alpha_\nu| \leqslant |\beta_\nu|$ αληθεύει για κάθε $\nu > \kappa$ (δηλαδή αν εξαιρέσουμε τους κ αρχικούς όρους), τότε οι αρχικές υποθέσεις ισχύουν (§ 2.2, Παρατ. 2) για τις ακολουθίες $(\alpha_{\nu+\kappa})$ και $(\beta_{\nu+\kappa})$. ΄Αρα $\lim \alpha_{\nu+\kappa} = 0$, οπότε είναι και $\lim \alpha_\nu = 0$. ΄Ωστε:

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν η ακολουθία (β_ν) έχει όριο 0 και υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \kappa$ είναι $|\alpha_\nu| \leqslant |\beta_\nu|$, τότε και η ακολουθία (α_ν) έχει όριο 0.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η ακολουθία $\left(\frac{\eta\mu\nu}{\nu+1}\right)$ έχει όριο 0.

Πράγματι, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\left|\frac{\eta\mu\nu}{\nu+1}\right| = \frac{|\eta\mu\nu|}{\nu+1} \leqslant \frac{1}{\nu+1}$$

Αλλά $\lim \frac{1}{\nu+1} = 0$ (§ 2.2, παραδ.), οπότε και $\lim \frac{\eta\mu\nu}{\nu+1} = 0$

2. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\left(\frac{1}{\nu^\rho}\right)$ για κάθε θετικό ρητό ρ έχει όριο 0.

Είναι $\rho = \frac{\lambda}{\kappa}$ με $\lambda, \kappa \in \mathbb{N}^*$. ΄Αρα

$$\frac{1}{\nu^\rho} = \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu^\lambda}} = \frac{1}{(\sqrt[\kappa]{\nu})^\lambda} \leqslant \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}}$$

Είναι όμως (§ 2.2, παραδ. 2) $\lim \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}} = 0$. Άρα και $\lim \frac{1}{\nu^\rho} = 0$.

Με τη βοήθεια της παρατήρησης 1 της § 2.2 συμπεραίνουμε ότι είναι $\lim (-\frac{1}{\nu^\rho}) = \lim (-1)^\nu \frac{1}{\nu^\rho} = 0$, ενώ με τη βοήθεια της παρατήρησης 2 συμπεραίνουμε ότι θα είναι και

$\lim \frac{1}{(\nu+\kappa)^\rho} = 0$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$.

Ασκήσεις: 4, 5

Πρόσθεση ακολουθιών με όριο 0

2.5 Θα διαπιστώσουμε παρακάτω ότι το σύνολο των ακολουθιών με όριο 0 είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Θεωρούμε δύο ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) που έχουν όριο 0. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι και

$$\lim (\alpha_\nu + \beta_\nu) = 0$$

Έστω ένας οποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$. Τότε είναι και $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, και επειδή

$$\lim \alpha_\nu = 0 = \lim \beta_\nu,$$

- υπάρχει $\nu_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_1$ να είναι
$$|\alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$$
- υπάρχει $\nu_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_2$ να είναι
$$|\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Αν λοιπόν $\max\{\nu_1, \nu_2\} = \nu_0$, για κάθε $\nu > \nu_0$ θα έχουμε

$$|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

και επειδή $\quad |\alpha_\nu + \beta_\nu| \leqslant |\alpha_\nu| + |\beta_\nu|$

θα είναι $\quad |\alpha_\nu + \beta_\nu| < \varepsilon$

Άρα $\quad \lim (\alpha_\nu + \beta_\nu) = 0$

Έχουμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Το άθροισμα δυο ακολουθιών με όριο 0 είναι ακολουθία με όριο 0**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η ακολουθία$\left(\frac{\nu+1}{\nu^2}\right)$ έχει όριο 0, γιατί είναι

$$\frac{\nu+1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} \quad \text{και} \quad \lim \frac{1}{\nu} = \lim \frac{1}{\nu^2} = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

1. Το θεώρημα ισχύει φυσικά και για πεπερασμένο πλήθος ακολουθιών.
2. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Π.χ. αν $\alpha_\nu = \nu$ και $\beta_\nu = \frac{1}{\nu^2} - \nu$, **είναι** $\lim (\alpha_\nu + \beta_\nu) = \lim \frac{1}{\nu^2} = 0$, **ενώ η** (α_ν), **ως μη φραγμένη, δεν έχει όριο 0.**

Πολλαπλασιασμός με φραγμένη ακολουθία

2.6 Θεωρούμε τώρα δύο ακολουθίες (α_ν) και (β_ν), από τις οποίες η (α_ν) έχει όριο 0 και η (β_ν) είναι φραγμένη. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim (\alpha_\nu \beta_\nu) = 0$$

Αφού η (β_ν) είναι φραγμένη, υπάρχει $\theta > 0$ (εφαρμ. 3, § 1.7) τέτοιος ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ να είναι

$$|\beta_\nu| \leqslant \theta \tag{1}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Τότε είναι και $\frac{\varepsilon}{\theta} > 0$, και επειδή $\lim \alpha_\nu = 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι

$$|\alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{\theta} \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι

$$|\alpha_\nu|\,|\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{\theta} \cdot \theta$$

δηλαδή $\quad |\alpha_\nu \beta_\nu| < \varepsilon$

Άρα $\lim (\alpha_\nu \beta_\nu) = 0$

Ώστε αληθεύει το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Το γινόμενο μιας ακολουθίας που έχει όριο 0 με μια φραγμένη ακολουθία είναι ακολουθία με όριο 0.**

Για τις ειδικότερες περιπτώσεις που η (β_ν) είναι σταθερή ή έχει όριο 0, έχουμε:

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. **Το γινόμενο μιας ακολουθίας που έχει όριο 0 με ένα πραγματικό αριθμό είναι ακολουθία με όριο 0.**
2. **Το γινόμενο δυο ακολουθιών με όριο 0 είναι ακολουθία με όριο 0.**
3. **Κάθε γραμμικός συνδυασμός ακολουθιών με όριο 0 είναι ακολουθία με όριο 0.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η ακολουθία $\left(\dfrac{2\nu^2+1}{\nu^3}\right)$ έχει όριο 0.

Πράγματι, είναι $\dfrac{2\nu^2+1}{\nu^3} = \dfrac{2\nu^2}{\nu^3} + \dfrac{1}{\nu^3} = 2\cdot\dfrac{1}{\nu} + \dfrac{1}{\nu^3}$

Αλλά $\lim \dfrac{1}{\nu} = 0$ και $\lim \dfrac{1}{\nu^3} = 0$, οπότε και $\lim \dfrac{2\nu^2+1}{\nu^3} = 0$

2. Θα αποδείξουμε ότι $\lim \dfrac{\text{συν}\nu - 3\nu}{2\nu^5} = 0$

Είναι: $\dfrac{\text{συν}\nu-3\nu}{2\nu^5} = \dfrac{1}{2}\cdot\text{συν}\nu\cdot\dfrac{1}{\nu^5} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\nu^4}$

Όμως η (συν ν) είναι φραγμένη, γιατί για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι $|\text{συν}\nu| \leqslant 1$, και οι $\dfrac{1}{\nu^5}, \dfrac{1}{\nu^4}$ έχουν όριο 0.

Άρα $\lim \dfrac{\text{συν}\nu-3\nu}{2\nu^5} = 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο**

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+5}-\nu$$

έχει όριο 0.

Επειδή για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι $\alpha_\nu > 0$, έχουμε:

$$|\alpha_\nu| = \alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+5}-\nu = \frac{(\sqrt{\nu^2+5}-\nu)(\sqrt{\nu^2+5}+\nu)}{\sqrt{\nu^2+5}+\nu}$$

$$= \frac{\nu^2+5-\nu^2}{\sqrt{\nu^2+5}+\nu} = \frac{5}{\sqrt{\nu^2+5}+\nu} < \frac{5}{\nu}$$

Αλλά $\lim \dfrac{5}{\nu} = 0$, οπότε και $\lim \alpha_\nu = 0$.

2. **Αν $\alpha\in\mathbb{R}$ με $|\alpha|<1$, να αποδείξετε ότι $\lim \alpha^\nu = 0$**

(i) Αν $\alpha = 0$, τότε για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι $\alpha^\nu = 0$. Συνεπώς $\lim\alpha^\nu = 0$

(ii) Έστω $\alpha \neq 0$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε:

$|\alpha^\nu| < \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha|^\nu < \varepsilon \Leftrightarrow \nu\ln|\alpha| < \ln\varepsilon$ [η συνάρτηση ln είναι γν. αύξουσα]

$\Leftrightarrow \nu > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|\alpha|}$ [είναι $\ln|\alpha| < 0$, αφού $|\alpha| < 1$]

Αν εκλέξουμε λοιπόν φυσικό $\nu_0 \geqslant \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|\alpha|}$, για κάθε $\nu > \nu_0$ θα έχουμε

$$|\alpha^\nu| < \varepsilon$$

Συνεπώς $\lim\alpha^\nu = 0$.

Σημείωση

Κάθε γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ τέτοιον ώστε $|\lambda| < 1$, έχει όριο 0.

Πράγματι: αν $\alpha\lambda^{\nu-1}$ είναι ο γενικός όρος μιας τέτοιας προόδου, σύμφωνα με την προηγούμενη εφαρμογή θα έχουμε

$$\lim(\alpha\lambda^{\nu-1}) = 0$$

3. **Θεωρούμε μια ακολουθία (α_ν). Αν υπάρχει $\lambda < 1$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}$, να είναι $\alpha_\nu > 0$ και $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leqslant \lambda$, τότε η (α_ν) έχει όριο 0.**

Για κάθε $\nu > \kappa$ έχουμε: $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leqslant \lambda \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} \leqslant \alpha_\nu\cdot\lambda$. Άρα:

- Αν $\kappa = 0$, είναι

$$\begin{aligned} &\alpha_2 \leqslant \alpha_1\lambda \\ &\alpha_3 \leqslant \alpha_2\lambda \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_\nu \leqslant \alpha_{\nu-1}\lambda \end{aligned} \qquad (1)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1) προκύπτει η

$$\alpha_\nu \leqslant \alpha_1\lambda^{\nu-1}$$

Επειδή η $(\alpha_1\lambda^\nu)$, έχει όριο 0, αφού $|\lambda|<1$, θα είναι και $\lim \alpha_\nu = 0$.

- Αν $\kappa > 0$, εργαζόμαστε με την ακολουθία $(\alpha_{\nu+\kappa})$. Συμπεραίνουμε ότι $\lim\alpha_{\nu+\kappa} = 0$, οπότε (§ 2.2, παρατ. 2) και $\lim\alpha_\nu = 0$.

Ασκήσεις: 6, 7, 8, 9

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Σύγκλιση ακολουθίας

2.7 Στην § 2.2 είδαμε ότι οι όροι μιας ακολουθίας με όριο 0 (αν εξαιρέσουμε ένα πεπερασμένο πλήθος απ' αυτούς) προσεγγίζουν το 0 «όσο θέλουμε».
Με την ίδια έννοια οι όροι μιας ακολουθίας μπορεί να προσεγγίζουν, γενικότερα, έναν πραγματικό αριθμό $l \neq 0$. Π.χ. οι όροι της ακολουθίας με γενικό όρο $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu+1}{\nu}$, δηλαδή της

$$3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \dots, \frac{201}{100}, \dots, \frac{2983}{1991}, \dots$$

προσεγγίζουν τον αριθμό 2, αφού

$$\alpha_\nu - 2 = \frac{2\nu+1}{\nu} - 2 = 2 + \frac{1}{\nu} - 2 = \frac{1}{\nu}$$

Μπορούμε λοιπόν να λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το 2.
Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο $l \in \mathbb{R}$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός ν_0 τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι**

$$|\alpha_\nu - l| < \varepsilon$$

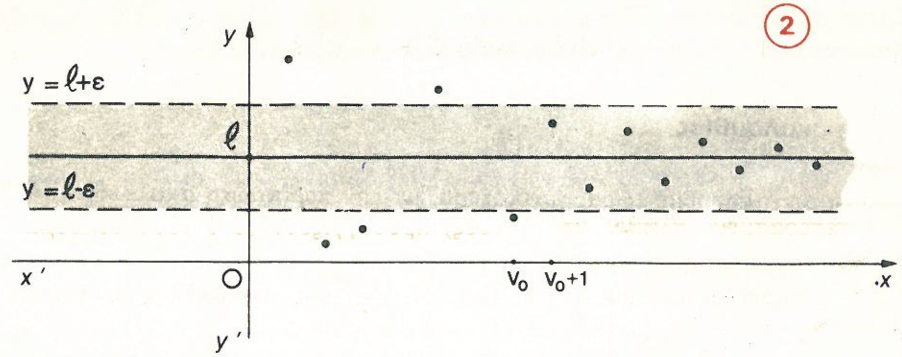
Μια τέτοια ακολουθία λέγεται **συγκλίνουσα.**
Είναι φανερό ότι οι ακολουθίες με όριο 0 είναι ειδική περίπτωση συγκλινουσών ακολουθιών.
Ισοδύναμες εκφράσεις με την «η (α_ν) έχει όριο $l \in \mathbb{R}$» είναι:

«η (α_ν) συγκλίνει προς τον $l \in \mathbb{R}$» ή «η (α_ν) τείνει στο $l \in \mathbb{R}$»

Επειδή

$$|\alpha_\nu - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l-\varepsilon < \alpha_\nu < l+\varepsilon$$

από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αν η (α_ν) συγκλίνει προς τον l, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ όλοι οι όροι της, με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος όρων, συσσωρεύονται στο διάστημα $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης (σχ. 2) βρίσκονται στην ταινία που ορίζουν οι παράλληλες $y = l-\varepsilon$ και



$y = l+\varepsilon$. Επομένως «πλησιάζουν» όσο θέλουμε την ευθεία $y = l$, αφού η απόστασή τους απ' αυτή είναι μικρότερη από το ε.

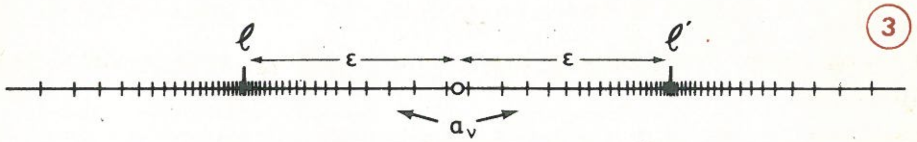
Αν λάβουμε υπόψη τον ορισμό της ακολουθίας με όριο 0, έχουμε την πρόταση:

Μία ακολουθία (α_ν) έχει όριο $l \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν η ακολουθία $(\alpha_\nu - l)$ έχει όριο 0.

Μοναδικότητα του ορίου

2.8 Έστω ότι μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο όχι μόνο τον $l \in \mathbb{R}$ αλλά και τον $l' \neq l$.

Τότε, για $\varepsilon = \dfrac{|l-l'|}{2} > 0$ υπάρχουν φυσικοί ν_1, ν_2 τέτοιοι ώστε:



- για κάθε $\nu > \nu_1$, $|\alpha_\nu - l| < \dfrac{|l-l'|}{2}$ (1)
- για κάθε $\nu > \nu_2$, $|\alpha_\nu - l'| < \dfrac{|l-l'|}{2}$ (2)

Αν θέσουμε $\nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, τότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι για κάθε $\nu > \nu_0$ θα είναι

$$|\alpha_\nu - l| + |\alpha_\nu - l'| < |l - l'|$$

και επειδή $\quad |(\alpha_\nu - l) - (\alpha_\nu - l')| \leqslant |\alpha_\nu - l| + |\alpha_\nu - l'|$

θα είναι $\quad |l-l'| < |l-l'|$

(άτοπο)

Επομένως αν μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο $l\in\mathbb{R}$, το όριο αυτό είναι **μοναδικό.** Το μοναδικό αυτό όριο το συμβολίζουμε $\lim\alpha_\nu$. Γράφουμε λοιπόν

$$\lim\alpha_\nu = l \text{ ή απλούστερα } \alpha_\nu \to l$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η σταθερή ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = c$ συγκλίνει προς το c, γιατί $\lim(\alpha_\nu - c) = 0$.
2. Για την ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu+3}{4\nu}$ έχουμε:

$$\alpha_\nu = \frac{2\nu+3}{4\nu} = \frac{2\nu}{4\nu} + \frac{3}{4\nu} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\nu} \quad \text{ή} \quad \alpha_\nu - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\nu}$$

Συνεπώς $\lim\left(\alpha_\nu - \frac{1}{2}\right) = 0$, οπότε $\lim\alpha_\nu = \frac{1}{2}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τον ορισμό της § 2.7 προκύπτει, όπως και για τις ακολουθίες με όριο 0, ότι

1. $\lim\alpha_\nu = l \Leftrightarrow \lim\alpha_{\nu+\kappa} = l \quad (\kappa\in\mathbb{N}^*)$

   Άρα το όριο μιας ακολουθίας δεν μεταβάλλεται, αν την περιορίσουμε στο $\{\nu\in\mathbb{N}: \nu > \kappa\}$.
2. $\lim\alpha_\nu = l \Leftrightarrow \lim(-\alpha_\nu) = -l$

Ένα κριτήριο μη σύγκλισης

2.9 Θεωρούμε μια ακολουθία (α_ν) με όριο l. Αν $\varepsilon > 0$, τότε είναι και $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Υπάρχει λοιπόν $\nu_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για τους φυσικούς $\nu_1 > \nu_0$ και $\nu_2 > \nu_0$ έχουμε

$$|\alpha_{\nu_1} - l| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{και} \qquad |\alpha_{\nu_2} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Τότε θα είναι και

$$|\alpha_{\nu_1} - \alpha_{\nu_2}| = |(\alpha_{\nu_1} - l) - (\alpha_{\nu_2} - l)| \leq |\alpha_{\nu_1} - l| + |\alpha_{\nu_2} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Δηλαδή, *αν η (α_ν) είναι συγκλίνουσα, τότε* **για κάθε** *$\varepsilon > 0$* **υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$** *τέτοιος ώστε για κάθε $\nu_1 > \nu_0$ και $\nu_2 > \nu_0$ να είναι*

$$|\alpha_{\nu_1} - \alpha_{\nu_2}| < \varepsilon$$

Από τα παραπάνω (με αντιθετοαντιστροφή) συμπεραίνουμε ότι:

Αν **υπάρχει** $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε **για κάθε** $\nu_0\in\mathbb{N}$ να **υπάρχουν** $\nu_1 > \nu_0$ και

$\nu_2 > \nu_0$ με $|\alpha_{\nu_1} - \alpha_{\nu_2}| \geq \varepsilon$, τότε η (α_ν) δεν είναι συγκλίνουσα. Έχουμε λοιπόν το παρακάτω θεώρημα, το οποίο αποτελεί κριτήριο για τη μη σύγκλιση ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ **Μια ακολουθία (α_ν) δεν είναι συγκλίνουσα, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu_0\in\mathbb{N}$ υπάρχουν φυσικοί $\nu_1 > \nu_0$ και $\nu_2 > \nu_0$ με**

$$|\alpha_{\nu_1} - \alpha_{\nu_2}| \geq \varepsilon$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = (-1)^\nu$.

Τότε για κάθε $\nu_0\in\mathbb{N}$ υπάρχουν φυσικοί, ένας άρτιος $\nu_1 > \nu_0$ και ένας περιττός $\nu_2 > \nu_0$, για τους οποίους είναι

$$|\alpha_{\nu_1} - \alpha_{\nu_2}| = |(-1)^{\nu_1} - (-1)^{\nu_2}| = 2$$

Αν λοιπόν εκλέξουμε το $\varepsilon \leq 2$, π.χ. $\varepsilon = 1$, για κάθε $\nu_0\in\mathbb{N}$ υπάρχουν $\nu_1 > \nu_0$ και $\nu_2 > \nu_0$ με $|\alpha_{\nu_1} - \alpha_{\nu_2}| > \varepsilon$. Συνεπώς η (α_ν) δεν είναι συγκλίνουσα.

Ασκήσεις: 10, 11

ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Η ιδιότητα του φραγμένου συνέπεια της σύγκλισης

2.10 Έστω μια ακολουθία (α_ν) με $\lim\alpha_\nu = l$. Τότε είναι $\lim(\alpha_\nu - l) = 0$ και συνεπώς (§ 2.3) η $(\alpha_\nu - l)$ είναι φραγμένη. Επομένως υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}^*_+$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ να είναι

$$|\alpha_\nu - l| \leq \theta$$

ή

$$l - \theta \leq \alpha_\nu \leq l + \theta$$

Δηλαδή η (α_ν) είναι φραγμένη

Ώστε: **Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη**

Η πρόταση αυτή χρησιμοποιείται και ως **κριτήριο μη σύγκλισης.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι ακολουθίες (ν), (2ν), $(\frac{1}{2}\nu)$ και γενικά $(\lambda\nu)$, με $\lambda \in \mathbb{R}^*$, καθώς και η $((-1)^\nu\lambda\nu)$, δεν είναι συγκλίνουσες γιατί δεν είναι φραγμένες. Πράγματι:

$$|(-1)^\nu\lambda\nu| = |\lambda\nu| \leq \theta \Leftrightarrow |\lambda|\,\nu \leq \theta \Leftrightarrow \nu \leq \frac{\theta}{|\lambda|}$$

Αλλά η τελευταία ανισότητα δεν αληθεύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, αφού (§ 1.2) υπάρχει φυσικός μεγαλύτερος του $\frac{\theta}{|\lambda|}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει. Π.χ. η ακολουθία με γενικό όρο $(-1)^\nu$ είναι φραγμένη, αφού είναι $|(-1)^\nu| \leq 1$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, αλλά (παραδ. § 2.9) δεν είναι συγκλίνουσα.

Όριο απόλυτης τιμής ακολουθίας

2.11 Έστω μια ακολουθία (α_ν) με όριο l. Τότε $\lim(\alpha_\nu - l) = 0$. Επειδή όμως είναι $||\alpha_\nu| - |l|| \leq |\alpha_\nu - l|$, θα είναι (§ 2.4) και $\lim(|\alpha_\nu| - |l|) = 0$.

Άρα
$$\lim|\alpha_\nu| = |l|$$

Ώστε: **Αν μια ακολουθία (α_ν) είναι συγκλίνουσα, τότε και η $(|\alpha_\nu|)$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα**

$$\lim|\alpha_\nu| = |\lim\alpha_\nu|$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει. Αν θεωρήσουμε π.χ. την ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, τότε $|\alpha_\nu| = 1$, που είναι συγκλίνουσα (παραδ. 1, § 2.8), ενώ η (α_ν) δεν είναι συγκλίνουσα (παραδ. § 2.9).

Πρόσημο των όρων και πρόσημο του ορίου

2.12 Για τις συγκλίνουσες ακολουθίες έχουμε ακόμη και το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω μια ακολουθία (α_ν) με όριο $l \neq 0$. Τότε υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε οι όροι με δείκτη $\nu > \nu_0$ να είναι ομόσημοι προς τον l.**

Απόδειξη. Αφού $\lim\alpha_\nu = l \neq 0$, για $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι

$$|\alpha_\nu - l| < \frac{|l|}{2}$$

ή
$$-\frac{|l|}{2} < \alpha_\nu - l < \frac{|l|}{2}$$

δηλαδή
$$l - \frac{|l|}{2} < \alpha_\nu < l + \frac{|l|}{2} \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- **$l > 0$.** Τότε η (1) γίνεται

$$\frac{l}{2} < \alpha_\nu < \frac{3l}{2} \qquad (2)$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι $\alpha_\nu > \frac{l}{2} > 0$, δηλαδή οι όροι με δείκτη $\nu > \nu_0$ είναι ομόσημοι προς τον l.

- **$l < 0$.** Τότε η (1) γίνεται

$$\frac{3l}{2} < \alpha_\nu < \frac{l}{2} \qquad (3)$$

Ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι $\alpha_\nu < \frac{l}{2} < 0$, δηλαδή οι όροι είναι ομόσημοι με τον l.

Επομένως το θεώρημα ισχύει σε κάθε περίπτωση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι για κάθε $\nu > \nu_0$ ισχύει

$$\frac{|l|}{2} < |\alpha_\nu| < \frac{3|l|}{2}$$

2. Αν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \kappa$ οι όροι μιας συγκλίνουσας ακολουθίας (α_ν) να είναι θετικοί (αρνητικοί), τότε το όριο της

(α_ν) αποκλείεται να είναι αρνητικός (θετικός) αριθμός, αλλά δεν αποκλείεται να είναι 0. Π.χ. η $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ έχει όρους θετικούς, αλλά $\lim \frac{1}{\nu} = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$

Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι $\sqrt[2\nu]{\nu} \geq 1$ ή $\sqrt[2\nu]{\nu} - 1 \geq 0$

Αν θέσουμε λοιπόν $\alpha_\nu = \sqrt[2\nu]{\nu} - 1$, θα είναι (για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$) $\alpha_\nu \geq 0$ και

$$\sqrt[2\nu]{\nu} = 1+\alpha_\nu \qquad (1)$$

Τότε, σύμφωνα και με την ανισότητα του Bernoulli, θα έχουμε

$$\sqrt{\nu} = (1+\alpha_\nu)^\nu \geq 1+\nu\alpha_\nu > \nu\alpha_\nu$$

οπότε είναι
$$\alpha_\nu < \frac{1}{\sqrt{\nu}} \quad \text{ή} \quad |\alpha_\nu| < \frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

Αλλά $\lim \frac{1}{\sqrt{\nu}} = 0$, οπότε και $\lim \alpha_\nu = 0$

Από την (1) έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\nu} = (1+\alpha_\nu)^2 = 1+2\alpha_\nu + \alpha_\nu^2$$

ή
$$\sqrt[\nu]{\nu}-1 = 2\alpha_\nu+\alpha_\nu^2$$

Αλλά $\lim (2\alpha_\nu) = 0$ και $\lim \alpha_\nu^2 = 0$

Άρα $\lim (\sqrt[\nu]{\nu}-1) = 0$, οπότε $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$

2. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = \frac{\nu^2-7\nu-18}{2\nu^2+1}$

(i) Να αποδείξετε ότι $\lim \alpha_\nu = \frac{1}{2}$

(ii) Να υπολογίσετε το ελάχιστο ν_0 τέτοιο ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι $\alpha_\nu > 0$.

(i) Είναι: $\frac{\nu^2-7\nu-18}{2\nu^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2\nu^2-14\nu-36-2\nu^2-1}{2(2\nu^2+1)} = -\frac{14\nu+37}{2(2\nu^2+1)}$

Αλλά $\left|-\frac{14\nu+37}{2(2\nu^2+1)}\right| = \frac{14\nu+37}{2(2\nu^2+1)} \leqslant \frac{14\nu+37\nu}{2\nu^2+1} < \frac{51\nu}{2\nu^2} = \frac{51}{2} \cdot \frac{1}{\nu}$

Είναι όμως $\lim \left(\frac{51}{2} \cdot \frac{1}{\nu}\right) = 0$, οπότε και $\lim \left(\alpha_\nu - \frac{1}{2}\right) = 0$, δηλαδή $\lim \alpha_\nu = \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{\nu^2-7\nu-18}{2\nu^2+1} > 0 \Leftrightarrow \nu^2-7\nu-18 > 0 \Leftrightarrow (\nu-9)(\nu+2) > 0 \Leftrightarrow \nu > 9$.

Ώστε ο ελάχιστος δείκτης ν_0 είναι ο 9

Ασκήσεις: 12, 13

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

2.13 Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι το σύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) είναι συγκλίνουσες, τότε και οι ακολουθίες $(\alpha_\nu+\beta_\nu)$ και $(\alpha_\nu\beta_\nu)$ είναι συγκλίνουσες και μάλιστα**

1. **$\lim (\alpha_\nu+\beta_\nu) = \lim\alpha_\nu+\lim\beta_\nu$**
2. **$\lim (\alpha_\nu\beta_\nu) = \lim\alpha_\nu \cdot \lim\beta_\nu$**

Απόδειξη

1. Έστω $\lim \alpha_\nu = l$ και $\lim \beta_\nu = m$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο

$$\gamma_\nu = (\alpha_\nu+\beta_\nu) - (l+m)$$

έχει όριο το 0.

Είναι $\gamma_\nu = (\alpha_\nu-l) + (\beta_\nu-m)$

Δηλαδή η (γ_ν) είναι άθροισμα δυο ακολουθιών που έχουν όριο το 0 και συνεπώς (§ 2.5) και η (γ_ν) έχει όριο το 0.

2. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο

$$\delta_\nu = (\alpha_\nu\beta_\nu) - (lm)$$

έχει όριο το 0.

Είναι $\delta_\nu = \alpha_\nu\beta_\nu - lm + m\alpha_\nu - m\alpha_\nu$ ή

$$\delta_\nu = \alpha_\nu(\beta_\nu-m) + m(\alpha_\nu-l)$$

Δηλαδή η ακολουθία (δ_ν) είναι άθροισμα δυο ακολουθιών:

- της ακολουθίας $\alpha_\nu(\beta_\nu-m)$ που έχει όριο το 0, γιατί είναι γινόμενο της (α_ν), που είναι φραγμένη, με την $(\beta_\nu-m)$, που έχει όριο το 0.
- της ακολουθίας $m(\alpha_\nu-l)$ που έχει όριο το 0, γιατί είναι γινόμενο του αριθμού m με την $(\alpha_\nu-l)$ που έχει όριο το 0.

Επομένως $\lim(\alpha_\nu\beta_\nu-lm) = \lim \delta_\nu = 0$, οπότε

$$\lim(\alpha_\nu\beta_\nu) = lm$$

Το θεώρημα ισχύει φυσικά και για πεπερασμένο πλήθος ακολουθιών.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. **Αν $\lim\alpha_\nu = l$, τότε $\lim(\lambda\alpha_\nu) = \lambda l$ $(\lambda\in\mathbb{R})$**
2. **Αν $\lim\alpha_\nu = l$, τότε $\lim(\alpha_\nu)^\kappa = l^\kappa$ $(\kappa\in\mathbb{N}^*)$**
3. **Κάθε γραμμικός συνδυασμός συγκλινουσών ακολουθιών είναι συγκλίνουσα ακολουθία.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = \dfrac{4\nu^3-5\nu+3}{2\nu^3}$.

Είναι
$$\frac{4\nu^3-5\nu+3}{2\nu^3} = 2 - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\nu^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\nu^3}$$

Επομένως η (α_ν) συγκλίνει (ως γραμμικός συνδυασμός συγκλινουσών ακολουθιών) και είναι

$$\lim\frac{4\nu^3-5\nu+3}{2\nu^3} = 2 - \frac{5}{2}\lim\frac{1}{\nu^2} + \frac{3}{2}\lim\frac{1}{\nu^3} = 2$$

Διαίρεση

2.14 Για τις συγκλίνουσες ακολουθίες θα αποδείξουμε και το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν η ακολουθία (α_ν), με $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, είναι συγκλίνουσα και $\lim\alpha_\nu \neq 0$, τότε η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{\alpha_\nu}\right)$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα**

$$\lim\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\lim\alpha_\nu}$$

Απόδειξη.

Είναι $\lim\alpha_\nu = l$, οπότε (§ 2.12 παρατήρηση 1) υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι
$$\frac{|l|}{2} < |\alpha_\nu| < \frac{3|l|}{2}$$

Είναι λοιπόν
$$|\alpha_\nu| > \frac{|l|}{2}$$
οπότε
$$\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right| < \frac{2}{|l|}$$

Έτσι, για κάθε $\nu > \nu_0$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{\alpha_\nu} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|\alpha_\nu - l|}{|l|}\cdot\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right| < \frac{2}{|l|^2}\cdot|\alpha_\nu - l| \qquad (1)$$

Αλλά $\lim(\alpha_\nu - l) = 0$, οπότε (§ 2.6, Πόρ.1) και $\lim\dfrac{2}{|l|^2}(\alpha_\nu - l) = 0$.

Συνεπώς θα είναι, λόγω της (1), και $\lim\left(\dfrac{1}{\alpha_\nu} - \dfrac{1}{l}\right) = 0$, δηλαδή $\lim\dfrac{1}{\alpha_\nu} = \dfrac{1}{l}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ **Έστω δύο συγκλίνουσες ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) με $\lim\beta_\nu \neq 0$. Αν για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ είναι $\beta_\nu \neq 0$, τότε η ακολουθία $\left(\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα**

$$\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\lim\alpha_\nu}{\lim\beta_\nu}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αφού είναι $l \neq 0$, υπάρχει $\kappa\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \kappa$ να είναι $\dfrac{|l|}{2} < |\alpha_\nu|$ (παρατ. 1, § 2.12). Συνεπώς η υπόθεση $\alpha_\nu \neq 0$ του θεωρήματος **ισχύει οπωσδήποτε** για $\nu > \kappa$. Έτσι το θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί και χωρίς τον περιορισμό $\alpha_\nu \neq 0$ ως εξής:

Αν $\lim\alpha_\nu \neq 0$, τότε υπάρχει $\kappa\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\lim\frac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}} = \frac{1}{\lim\alpha_\nu}$$

Όριο ρίζας

2.15 Έστω μια συγκλίνουσα ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu \geqslant 0$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι και η $(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})$ είναι συγκλίνουσα $(\kappa\in\mathbb{N}^*)$.

Έστω $\lim\alpha_\nu = l$. Επειδή οι όροι της (α_ν) είναι μη αρνητικοί, θα είναι $l \geqslant 0$ (§ 2.12, παρατ. 2).

● $l > 0$. Αν *υποθέσουμε* ότι η $(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})$ είναι συγκλίνουσα, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το όριό της, γιατί σύμφωνα με το πόρισμα 2 της § 2.13 θα έχουμε

$$(\lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^\kappa = \lim(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^\kappa = \lim\alpha_\nu = l \text{ και συνεπώς } \lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = \sqrt[\kappa]{l}$$

Δηλαδή το όριο της $(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})$, **αν υπάρχει**, θα είναι $\sqrt[\kappa]{l}$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\lim(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} - \sqrt[\kappa]{l}) = 0$. Έχουμε:

$$|\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} - \sqrt[\kappa]{l}| = \frac{|\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} - \sqrt[\kappa]{l}| \cdot |(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-1} + (\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-2}\sqrt[\kappa]{l} + \ldots + \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}(\sqrt[\kappa]{l})^{\kappa-2} + (\sqrt[\kappa]{l})^{\kappa-1}|}{|(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-1} + (\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-2}\sqrt[\kappa]{l} + \ldots + \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}(\sqrt[\kappa]{l})^{\kappa-2} + (\sqrt[\kappa]{l})^{\kappa-1}|}$$

$$= \frac{|\alpha_\nu - l|}{(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-1} + (\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-2}\sqrt[\kappa]{l} + \ldots + \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}(\sqrt[\kappa]{l})^{\kappa-2} + (\sqrt[\kappa]{l})^{\kappa-1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{(\sqrt[\kappa]{l})^{\kappa-1}} |\alpha_\nu - l|$$

Αλλά $\lim(\alpha_\nu - l) = 0$, οπότε και $\lim(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} - \sqrt[\kappa]{l}) = 0$

● $l = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε είναι και $\varepsilon^\kappa > 0$ και συνεπώς, αφού $\lim\alpha_\nu = 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon^\kappa$$

ή

$$\alpha_\nu < \varepsilon^\kappa$$

ή

$$\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} < \varepsilon$$

Άρα $\lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = 0 = \sqrt[\kappa]{0} = \sqrt[\kappa]{\lim\alpha_\nu}$

Ώστε: **Αν μια συγκλίνουσα ακολουθία (α_ν) έχει μη αρνητικούς όρους, τότε για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}^*$ θα έχουμε**

$$\lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = \sqrt[\kappa]{\lim\alpha_\nu}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ είναι $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$.**

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $\alpha \geqslant 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\beta_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha} - 1 \geqslant 0$ έχει όριο 0.

Πράγματι, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \beta_\nu$$

Άρα $\alpha = (1+\beta_\nu)^\nu \geqslant 1 + \nu\beta_\nu > \nu\beta_\nu$

ή $\beta_\nu < \alpha\frac{1}{\nu}$

ή $|\beta_\nu| < \alpha\frac{1}{\nu}$

Άρα $\lim\beta_\nu = 0$.

(ii) $0 < \alpha < 1$. Τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$, και σύμφωνα με την (i):

$$\lim\sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha}} = 1 \quad \text{ή} \quad \lim\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}} = 1$$

και τελικά (§ 2.14) $\lim\sqrt[\nu]{\alpha} = 1$.

Ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ είναι $\lim\sqrt[\nu]{\alpha} = 1$

2. **Να βρεθεί το $\lim \dfrac{3\nu^4 - 2\nu^3 + 4\nu - 1}{4\nu^4 - 5\nu^2 + \nu - 2}$**

Έχουμε

$$\frac{3\nu^4 - 2\nu^3 + 4\nu - 1}{4\nu^4 - 5\nu^2 + \nu - 2} = \frac{\nu^4(3 - \frac{2}{\nu} + \frac{4}{\nu^3} - \frac{1}{\nu^4})}{\nu^4(4 - \frac{5}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} - \frac{2}{\nu^4})} = \frac{3 - \frac{2}{\nu} + \frac{4}{\nu^3} - \frac{1}{\nu^4}}{4 - \frac{5}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} - \frac{2}{\nu^4}}.$$

Αλλά $\lim\frac{2}{\nu} = \lim\frac{4}{\nu^3} = \lim\frac{1}{\nu^4} = \lim\frac{5}{\nu^2} = \lim\frac{1}{\nu^3} = \lim\frac{2}{\nu^4} = 0.$

Άρα $\lim(3 - \frac{2}{\nu} + \frac{4}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^4}) = 3$, $\quad \lim(4 - \frac{5}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} - \frac{2}{\nu^4}) = 4$

και συνεπώς $\lim\dfrac{3\nu^4 - 2\nu^3 + 4\nu - 1}{4\nu^4 - 5\nu^2 + \nu - 2} = \dfrac{3}{4}$

3. **Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας (α_ν) με**

$$\alpha_\nu = \frac{7^\nu + 2^\nu}{2 \cdot 7^\nu + 3^\nu}$$

Διαιρούμε και τους δύο όρους του κλάσματος με το 7^ν, που είναι η δύναμη με τη μεγαλύτερη βάση. Τότε

$$\alpha_\nu = \frac{1 + (\frac{2}{7})^\nu}{2 + (\frac{3}{7})^\nu}$$

Αλλά (εφ. 2, § 2.6) $\lim(\frac{2}{7})^\nu = \lim(\frac{3}{7})^\nu = 0$

Επομένως $\lim \alpha_\nu = \dfrac{1+\lim\left(\frac{2}{7}\right)^\nu}{2+\lim\left(\frac{3}{7}\right)^\nu} = \dfrac{1}{2}$

Ασκήσεις: 14, 15, 16.

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

Συμβιβαστότητα ορίου και διάταξης

2.16 Θα αποδείξουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) είναι συγκλίνουσες και υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \kappa$ να είναι $\alpha_\nu \leqslant \beta_\nu$, τότε**

$$\lim \alpha_\nu \leqslant \lim \beta_\nu$$

Απόδειξη. Η ακολουθία $(\alpha_\nu - \beta_\nu)$ είναι συγκλίνουσα και για $\nu > \kappa$ έχει όρους μη θετικούς. Επομένως το όριό της δε μπορεί να είναι θετικός αριθμός (§ 2.12, παρατ. 2).

´Αρα $\lim(\alpha_\nu - \beta_\nu) \leqslant 0$, δηλαδή $\lim \alpha_\nu \leqslant \lim \beta_\nu$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Μπορεί να είναι, για κάθε $\nu > \kappa$, $\alpha_\nu < \beta_\nu$ και $\lim \alpha_\nu = \lim \beta_\nu$.

Π.χ. όταν $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$ και $\beta_\nu = \dfrac{2}{\nu}$

Ακολουθίες με το ίδιο όριο

2.17 Μπορούμε να βρούμε το όριο μιας ακολουθίας, αν οι όροι της φράσσονται από τους αντίστοιχους όρους δυο ακολουθιών που έχουν το ίδιο όριο. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το

ΘΕΩΡΗΜΑ **´Εστω μια ακολουθία (β_ν). Αν υπάρχουν δυο ακολουθίες (α_ν) και (γ_ν) με κοινό όριο, τέτοιες ώστε για κάθε $\nu > \kappa$ (κ ένας συγκεκριμένος φυσικός) να είναι $\alpha_\nu \leqslant \beta_\nu \leqslant \gamma_\nu$, τότε και η (β_ν) έχει το ίδιο όριο.**

Απόδειξη. Από την $\alpha_\nu \leqslant \beta_\nu \leqslant \gamma_\nu$ προκύπτει ότι για κάθε $\nu > \kappa$ είναι

$$0 \leqslant \beta_\nu - \alpha_\nu \leqslant \gamma_\nu - \alpha_\nu$$

δηλαδή

$$|\beta_\nu - \alpha_\nu| \leqslant |\gamma_\nu - \alpha_\nu|$$

Αλλά $\lim(\gamma_\nu - \alpha_\nu) = \lim \gamma_\nu - \lim \alpha_\nu = 0$, οπότε και $\lim(\beta_\nu - \alpha_\nu) = 0$

Επειδή $\beta_\nu = \alpha_\nu + (\beta_\nu - \alpha_\nu)$, θα είναι

$$\lim \beta_\nu = \lim[\alpha_\nu + (\beta_\nu - \alpha_\nu)] = \lim \alpha_\nu + 0 = \lim \alpha_\nu$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι $\lim \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} = 7$

´Εχουμε διαδοχικά:

$$7^\nu < 3^\nu + 5^\nu + 7^\nu < 7^\nu + 7^\nu + 7^\nu$$

ή $\quad \sqrt[\nu]{7^\nu} < \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} < \sqrt[\nu]{3 \cdot 7^\nu}$

Δηλαδή $\quad 7 < \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} < 7\sqrt[\nu]{3}$

Αλλά $\quad \lim(7\sqrt[\nu]{3}) = 7 \lim \sqrt[\nu]{3} = 7 \cdot 1 = 7$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της § 2.17, θα είναι

$$\lim \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} = 7$$

2. Να βρεθεί το $\lim \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3}$

Για $\nu \geqslant 2$ είναι $\nu^2 \geqslant 2\nu$ ή $\nu^2 - 2\nu \geqslant 0$. ´Αρα

$$\sqrt[\nu]{3} \leqslant \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} < \sqrt[\nu]{\nu^2 + 3}$$
$$\sqrt[\nu]{3} \leqslant \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} < \sqrt[\nu]{\nu^2 + 3\nu^2}$$
$$\sqrt[\nu]{3} \leqslant \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} < \sqrt[\nu]{4\nu^2}$$
$$\sqrt[\nu]{3} \leqslant \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} < \sqrt[\nu]{4}\,\sqrt[\nu]{\nu^2}$$

Αλλά $\lim \sqrt[\nu]{3} = 1$, $\lim \sqrt[\nu]{4} = 1$ και $\lim \sqrt[\nu]{\nu^2} = \lim \sqrt[\nu]{\nu} \cdot \lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1 \cdot 1 = 1$

´Αρα $\lim \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} = 1$

3. ´Εστω μια ακολουθία (α_ν) με θετικούς όρους. Αν $\lim \alpha_\nu = \alpha > 0$, τότε $\lim \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$.

Αφού $\lim \alpha_\nu = \alpha > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι

$$\frac{\alpha}{2} < \alpha_\nu < \frac{3\alpha}{2} \qquad [\S\ 2.12.\ \text{παρατ. } 1]$$

οπότε $\quad \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{2}} < \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < \sqrt[\nu]{\dfrac{3\alpha}{2}}$

Αλλά (§ 2.15, εφαρμ. 1) $\lim \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{2}} = \lim \sqrt[\nu]{\dfrac{3\alpha}{2}} = 1$

´Αρα και $\lim \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$.

Ασκήσεις: 17, 18, 19, 20

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Ένα κριτήριο σύγκλισης

2.18 Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu} \qquad (1)$$

Ας *υποθέσουμε* ότι η (α_ν) είναι συγκλίνουσα. Τότε μπορούμε να εντοπίσουμε το όριό της l.

Πράγματι, από την (1) έχουμε

$$\lim\alpha_{\nu+1} = \lim\sqrt{2+\alpha_\nu} = \sqrt{2+\lim\alpha_\nu} \qquad [\S\ 2.15]$$

Άρα $\quad l = \sqrt{2+l} \quad$ ή $\quad l^2-l-2 = 0$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $l_1 = -1$ και $l_2 = 2$.

Αλλά οι όροι της (α_ν) είναι θετικοί (γιατί $\alpha_1 = 1 > 0$ και αν υποθέσουμε ότι $\alpha_\nu > 0$, τότε και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu} > 0$). Αν λοιπόν η (α_ν) έχει όριο, αυτό θα είναι το 2.

Είναι όμως η (α_ν) πράγματι συγκλίνουσα;

Ένα πολύ σημαντικό **κριτήριο σύγκλισης** ακολουθιών μας παρέχει το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Κάθε ακολουθία αύξουσα και φραγμένη άνω ή φθίνουσα και φραγμένη κάτω είναι συγκλίνουσα**

Απόδειξη. Έστω μια ακολουθία (α_ν) αύξουσα και φραγμένη άνω. Τότε η (α_ν) έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω το l, οπότε (§ 1.2) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει όρος α_κ της ακολουθίας με $\alpha_\kappa > l - \varepsilon$. Έτσι, αφού η (α_ν) είναι αύξουσα, για κάθε $\nu > \kappa$ θα έχουμε

$$l - \varepsilon < \alpha_\nu \leqslant l$$

ή $\quad l - \varepsilon < \alpha_\nu < l + \varepsilon$

και τελικά $\quad |\alpha_\nu - l| < \varepsilon$

Άρα $\lim\alpha_\nu = l$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το θεώρημα και στην περίπτωση που η (α_ν) είναι φθίνουσα και φραγμένη κάτω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας επανέλθουμε στην ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη άνω.

- Είναι $\alpha_2 - \alpha_1 = \sqrt{3} - 1 > 0$, δηλαδή $\alpha_2 > \alpha_1$

  Υποθέτουμε ότι $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$. Τότε

  $$2+\alpha_{\nu+1} > 2+\alpha_\nu \text{ ή } \sqrt{2+\alpha_{\nu+1}} > \sqrt{2+\alpha_\nu} \text{ ή } \alpha_{\nu+2} > \alpha_{\nu+1}$$

  Άρα η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα

- Η (α_ν) έχει άνω φράγμα το 2. Πράγματι:

  Είναι $\alpha_1 = 1 < 2$ και αν υποθέσουμε ότι $\alpha_\nu < 2$, τότε είναι και

  $$\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu} < \sqrt{2+2} = 2$$

Ώστε η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη άνω, οπότε είναι συγκλίνουσα. Το όριό της είναι, όπως είδαμε παραπάνω, $l = 2$.

Σημείωση

Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται συνήθως όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία που ορίζεται επαγωγικά είναι συγκλίνουσα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{\nu!}$ είναι συγκλίνουσα. ($\nu! = 1 \cdot 2 \dots \nu$)

Πράγματι:

- Η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα γιατί για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι

  $$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{\nu!} + \frac{1}{(\nu+1)!} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{\nu!}\right) = \frac{1}{(\nu+1)!} > 0$$

- Θα δείξουμε ότι η (α_ν) είναι φραγμένη άνω.

  Πράγματι, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε:

  $$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{\nu!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \nu}$$

  $$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{\nu-1}} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^\nu - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

  $$= 1 - 2\left(\frac{1}{2^\nu} - 1\right) = 1 + 2 - \frac{1}{2^{\nu-1}} < 3$$

  Δηλαδή $\alpha_\nu < 3$.

  Ώστε η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη άνω, οπότε είναι συγκλίνουσα.

Ο αριθμός e

2.19 Αν υποθέσουμε ότι μια δραχμή τοκίζεται με επιτόκιο 100%, σε ένα έτος θα γίνει 2 δρχ. δηλαδή θα διπλασιαστεί. Αν όμως ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο, σε ένα έτος θα γίνει

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 > 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

Ομοίως, αν ανατοκίζεται

- Κάθε τρίμηνο, θα γίνει $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$
- Κάθε μήνα, θα γίνει $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$
- Κάθε $\frac{1}{\nu}$ του έτους, θα γίνει $\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν αντί του έτους θεωρήσουμε γενικότερα το χρόνο διπλασιασμού (με απλό τόκο) της δραχμής με οποιοδήποτε επιτόκιο. (Π.χ. αν το επιτόκιο είναι 25%, ο χρόνος διπλασιασμού είναι 4 έτη).
Αν φανταστούμε ότι η δραχμή ανατοκίζεται κάθε στιγμή, τότε οδηγούμαστε στο $\lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$.
Αποδεικνύεται ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ είναι συγκλίνουσα. Το όριό της το συμβολίζουμε με **e** και είναι το ίδιο με το όριο της ακολουθίας της εφαρμογής της § 2.18.
Ώστε

$$\boxed{\lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = \lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{\nu!}\right) = e}$$

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός e είναι άρρητος. Μια δεκαδική προσέγγισή του είναι

$$e \simeq 2{,}718281$$

Όπως είδαμε, ο αριθμός e εκφράζει π.χ. πόσο γίνεται μια «συνεχώς ανατοκιζόμενη» δραχμή στο χρονικό διάστημα που με απλό τόκο θα διπλασιαζόταν.

Ασκήσεις: 21, 22, 23, 24, 25, 26

ΜΗ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ακολουθίες με όριο το +∞ ή το -∞

2.20 Έστω μια ακολουθία (β_ν) με όριο 0. Τότε οι όροι της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{1}{\beta_\nu}$ γίνονται απολύτως «όσο θέλουμε» μεγάλοι, αρκεί το ν να γίνει «αρκετά» μεγάλο. Πράγματι, έστω $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλος). Αφού $\lim \beta_\nu = 0$, υπάρχει $\nu_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_1$ να είναι

$$|\beta_\nu| < \varepsilon = \frac{1}{M}, \text{ οπότε } |\alpha_\nu| > M \qquad (1)$$

Εξάλλου:

- Αν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}^*$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \kappa$ να είναι $\beta_\nu > 0$, τότε θα είναι και $\alpha_\nu > 0$. Αν θέσουμε λοιπόν $\nu_0 = \max\{\nu_1, \kappa\}$, τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ θα είναι, λόγω της (1),
$$\alpha_\nu > M$$
Δηλαδή οι όροι της (α_ν) γίνονται «όσο θέλουμε» μεγάλοι, αρκεί το ν να γίνει «αρκετά» μεγάλο. Γι' αυτό ορίζουμε ως όριο της (α_ν) το $+\infty$.
- Αν για κάθε $\nu > \kappa$ είναι $\beta_\nu < 0$, τότε συμπεραίνουμε, με συλλογισμούς ανάλογους προς τους προηγούμενους, ότι για κάθε $\nu > \nu_0$ οι όροι της (α_ν) γίνονται αρνητικοί «όσο θέλουμε» μεγάλοι απολύτως. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε ως όριο της (α_ν) το $-\infty$.

Συγκεκριμένα δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

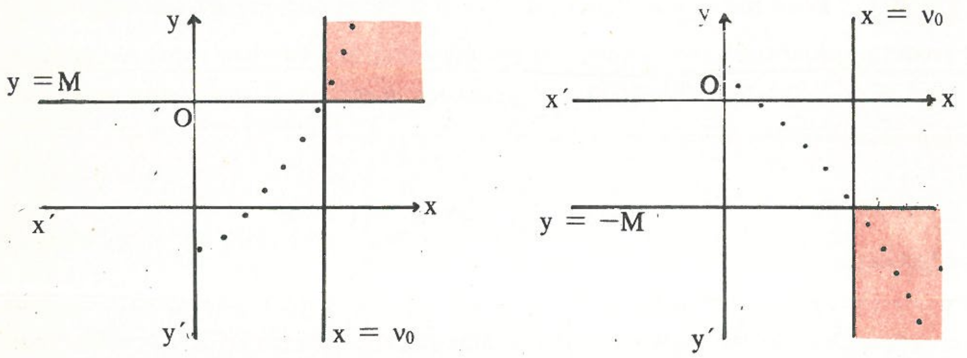
ΟΡΙΣΜΟΣ **Μια ακολουθία (α_ν) θα λέμε ότι** ***έχει όριο:***
- *το $+\infty$*, **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός ν_0 τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι**
$$\alpha_\nu > M$$
- *το $-\infty$*, **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός ν_0 τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι**
$$\alpha_\nu < -M$$

Για να δηλώσουμε ότι η (α_ν) έχει αντίστοιχα όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$, γράφουμε

$$\lim\alpha_\nu = +\infty \quad \text{ή} \quad \alpha_\nu \to +\infty$$
και
$$\lim\alpha_\nu = -\infty \quad \text{ή} \quad \alpha_\nu \to -\infty$$

Από τον προηγούμενο ορισμό γίνεται φανερό ότι, αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ (ή $-\infty$) τότε για κάθε $M > 0$ **όλοι** οι όροι, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα (Μ, +∞) [ή στο (-∞, -Μ)]. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης της (α_ν) βρίσκονται (σχ. 6α) «πάνω» από την ευθεία y = M (ή (σχ. 6β) «κάτω» από την y = -M).

6



α β

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = \lambda\nu$ $(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$. Τότε για κάθε $M > 0$ έχουμε:

$$\lambda\nu > M \Leftrightarrow \nu > \frac{M}{\lambda} \qquad (1)$$

Αν εκλέξουμε λοιπόν ως ν_0 ένα φυσικό μεγαλύτερο του $\frac{M}{\lambda}$, τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι

$$\nu > \frac{M}{\lambda}$$

ή, λόγω της (1), $\lambda\nu > M$

Άρα $\lim (\lambda\nu) = +\infty$

2. Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = \frac{1-\nu}{3}$. Τότε για κάθε $M > 0$ έχουμε

$$\frac{1-\nu}{3} < -M \Leftrightarrow 1-\nu < -3M \Leftrightarrow \nu > 1+3M \qquad (1)$$

Αν θεωρήσουμε λοιπόν το φυσικό $\nu_0 = [1+3M]$, τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι

$$\nu > 1+3M$$

ή, λόγω της (1), $\frac{1-\nu}{3} < -M$

Άρα $\lim \alpha_\nu = -\infty$

3. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο

$$\alpha_\nu = (-1)^\nu \nu$$

δεν έχει όριο ούτε το +∞ ούτε το -∞.

Έστω $M > 0$. Τότε για κάθε $\nu_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\nu > \nu_0$ (αρκεί ο ν να είναι περιττός) τέτοιος ώστε

$$(-1)^\nu \nu < 0$$

Δηλαδή για κάθε $\nu_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\nu > \nu_0$ τέτοιος ώστε

$$\alpha_\nu < M$$

Αυτό σημαίνει ότι η (α_ν) δεν έχει όριο το +∞.

Με όμοιο τρόπο (αρκεί να πάρουμε το ν άρτιο) αποδεικνύουμε ότι η (α_ν) δεν έχει όριο ούτε το -∞.

Άμεση συνέπεια των όσων είπαμε προηγουμένως είναι το παρακάτω κριτήριο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Αν $\lim \alpha_\nu = 0$ και υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \kappa$ να είναι $\alpha_\nu > 0$ (ή $\alpha_\nu < 0$), τότε**

$$\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = +\infty \ (\text{ή } -\infty)$$

Ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ ή $\lim \alpha_\nu = -\infty$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι $\alpha_\nu \neq 0$, τότε $\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = 0$**

Απόδειξη

Έστω π.χ. $\lim\alpha_\nu = -\infty$. Αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε $\varepsilon > 0$, θα είναι και $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Επομένως, αφού $\lim\alpha_\nu = -\infty$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι

$$\alpha_\nu < -M = -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad -|\alpha_\nu| < -\frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{αφού } -|\alpha_\nu| \leqslant \alpha_\nu)$$

Τότε θα είναι και $|\alpha_\nu| > \frac{1}{\varepsilon}$, οπότε $\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right| < \varepsilon$

Άρα $\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = 0$.

Με όμοιο τρόπο εργαζόμαστε και όταν $\lim\alpha_\nu = +\infty$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Στο θεώρημα 1, αν οι όροι της (α_ν) δε διατηρούν σταθερό πρόσημο, τότε η $\left(\frac{1}{\alpha_\nu}\right)$ δεν έχει όριο.
2. Στο θεώρημα 2, αν η συνθήκη $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει για κάθε $\nu > \kappa$, όπου κ συγκεκριμένος φυσικός (και όχι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$), τότε $\lim \frac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}} = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Με βάση το θεώρημα 1, από το παράδειγμα 2 της § 2.2 συμπεραίνουμε ότι:
   - Οι ακολουθίες $\nu, \nu^2, \dots, \nu^\kappa$ $(\kappa \in \mathbb{N}^*)$ έχουν όριο το $+\infty$, ενώ οι $-\nu, -\nu^2, \dots, -\nu^\kappa$ έχουν όριο το $-\infty$.
   - Οι ακολουθίες $\sqrt{\nu}, \sqrt[3]{\nu}, \dots, \sqrt[\kappa]{\nu}$ $(\kappa \in \mathbb{N}^*)$ έχουν όριο το $+\infty$, ενώ οι $-\sqrt{\nu}, -\sqrt[3]{\nu}, \dots, -\sqrt[\kappa]{\nu}$ έχουν όριο το $-\infty$.
2. Θα αποδείξουμε ότι $\lim \frac{\nu^2}{5-2\nu} = -\infty$.

   Για την ακολουθία $\frac{5-2\nu}{\nu^2}$ έχουμε:
   - $\lim \frac{5-2\nu}{\nu^2} = \lim \frac{5}{\nu^2} - \lim \frac{2}{\nu} = 0 - 0 = 0$
   - για κάθε $\nu > 2$, $\frac{5-2\nu}{\nu^2} < 0$.

   Άρα (θεώρ. 1) $\lim \frac{\nu^2}{5-2\nu} = -\infty$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τους ορισμούς της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει άμεσα ότι:

1. **$\lim \alpha_\nu = +\infty$ (ή $-\infty$) $\Leftrightarrow \lim \alpha_{\nu+\kappa} = +\infty$ (ή $-\infty$) $(\kappa \in \mathbb{N}^*)$**
2. **$\lim \alpha_\nu = +\infty \Leftrightarrow \lim(-\alpha_\nu) = -\infty$**
3. **$\lim \alpha_\nu = +\infty$ (ή $-\infty$) $\Rightarrow \lim |\alpha_\nu| = +\infty$**
4. **Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ (ή $-\infty$), τότε υπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι $\alpha_\nu > 0$ (ή $\alpha_\nu < 0$).**
5. **Έστω ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για τις ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) να είναι $\alpha_\nu \leqslant \beta_\nu$ για κάθε $\nu > k$. Τότε:**
   - **αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$, είναι και $\lim \beta_\nu = +\infty$**
   - **αν $\lim \beta_\nu = -\infty$, είναι και $\lim \alpha_\nu = -\infty$**

Ακολουθίες που δεν έχουν όριο

2.21 Στην προηγούμενη παράγραφο (παραδ. 1) είδαμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = (-1)^\nu \nu$ δεν έχει όριο ούτε το $+\infty$ ούτε το $-\infty$. Στο παράδειγμα της § 2.10 είδαμε ακόμη ότι η (α_ν) δε συγκλίνει προς πραγματικό αριθμό. Επομένως η (α_ν) δεν έχει όριο.

Απο τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μια ακολουθία **μη συγκλίνουσα**, που δεν έχει δηλαδή πεπερασμένο όριο $l \in \mathbb{R}$, είναι δυνατό:

- να έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$
- να μην έχει όριο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδείξετε ότι, αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι $\alpha_\nu \geqslant 0$, τότε $\lim \sqrt[k]{\alpha_\nu} = +\infty$ $(k \in \mathbb{N}^*)$**

   Εστω $M > 0$. Τότε είναι και $M^k > 0$, και επειδή $\lim \alpha_\nu = +\infty$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι
   $$\alpha_\nu > M^k$$
   ή
   $$\sqrt[k]{\alpha_\nu} > M$$
   Άρα
   $$\lim \sqrt[k]{\alpha_\nu} = +\infty$$

2. **Να αποδειχτεί ότι, αν $\alpha > 1$ τότε $\lim \alpha^\nu = +\infty$**

   Θέτουμε $\alpha = 1 + \theta$, με $\theta > 0$. Τότε έχουμε
   $$\alpha^\nu = (1+\theta)^\nu \geqslant 1 + \theta\nu > \theta\nu$$
   Αλλά $\lim(\theta\nu) = +\infty$ (§ 2.20, παράδ. 1). Συνεπώς, επειδή $\alpha^\nu > \theta\nu$, θα είναι και
   $$\lim \alpha^\nu = +\infty \qquad [\text{§ 2.20, παρατήρ. 5}]$$

3. **Έστω μια ακολουθία (α_ν) με θετικούς όρους. Να αποδείξετε ότι:**
   (i) αν $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda < 1$, τότε $\lim \alpha_\nu = 0$. (ii) Αν $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda > 1$, τότε $\lim \alpha_\nu = +\infty$.

   (i) Από τη $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda < 1$ έχουμε
   $$\lim \left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} - 1\right) < 0$$
   Συνεπώς (§ 2.12) υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \kappa$ να έχουμε
   $$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} - 1 < 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1$$
   Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $(\alpha_{\nu+\kappa})$ είναι γνησίως φθίνουσα και επειδή είναι φραγμένη κάτω (ένα κάτω φράγμα είναι το 0) θα συγκλίνει προς έναν πραγματικό αριθμό l, οπότε είναι και $\lim \alpha_\nu = l$. Είναι όμως (§ 2.12, παρατηρ. 2) $l \geqslant 0$.

Αν $l > 0$, τότε $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\lim\alpha_{\nu+1}}{\lim\alpha_\nu} = \frac{l}{l} = 1$, άτοπο, αφού $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda < 1$.

Άρα $l = 0$, δηλαδή $\lim\alpha_\nu = 0$.

(ii) Από την $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda > 1$ προκύπτει ότι $\lim \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{1}{\lambda} < 1$.

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο, θα είναι $\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = 0$.

Επειδή οι όροι της $\left(\frac{1}{\alpha_\nu}\right)$ είναι θετικοί, θα είναι (§ 2.20, θεωρ. 1) $\lim \alpha_\nu = +\infty$.

Ασκήσεις: 27, 28, 29, 30

Μη πεπερασμένα όρια και πράξεις

2.22 Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τις προϋποθέσεις με τις οποίες έχει όριο το άθροισμα και το γινόμενο δυο ακολουθιών, από τις οποίες μια τουλάχιστο έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε τα θεωρήματα

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Έστω (α_ν) μια ακολουθία με όριο το $+\infty$.**

I. **Αν η ακολουθία (β_ν) είναι φραγμένη κάτω, τότε**

$$\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu) = +\infty$$

II. **Αν η (β_ν) έχει κάτω φράγμα θετικό, τότε**

$$\lim(\alpha_\nu\,\beta_\nu) = +\infty$$

III. **Αν η (β_ν) έχει άνω φράγμα αρνητικό, τότε**

$$\lim(\alpha_\nu\,\beta_\nu) = -\infty$$

Απόδειξη.

I. Αν φ είναι ένα κάτω φράγμα της (β_ν), τότε για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ είναι

$$\beta_\nu \geqslant \varphi \qquad (1)$$

Έστω $M > 0$.

Επειδή $\lim\alpha_\nu = +\infty$, αν θεωρήσουμε ένα οποιονδήποτε θετικό αριθμό $\theta > M-\varphi$, υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι

$$\alpha_\nu > \theta$$

ή $\quad \alpha_\nu > M-\varphi \qquad (2)$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι

$$\alpha_\nu+\beta_\nu > \varphi+M-\varphi$$

δηλαδή $\quad \alpha_\nu+\beta_\nu > M$

Άρα $\quad \lim(\alpha_\nu+\beta_\nu) = +\infty$

II. Έστω θ ένα θετικό κάτω φράγμα της (β_ν). Τότε για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ είναι

$$\beta_\nu \geqslant \theta \qquad (3)$$

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε πραγματικό $M > 0$. Τότε είναι και $\frac{M}{\theta} > 0$, και επειδή $\lim\alpha_\nu = +\infty$, υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu>\nu_0$ να είναι

$$\alpha_\nu > \frac{M}{\theta}$$

ή, λόγω της (3), $\quad \alpha_\nu\,\beta_\nu > \frac{M}{\theta}\cdot\theta$

δηλαδή $\quad \alpha_\nu\,\beta_\nu > M$

Συνεπώς $\quad \lim(\alpha_\nu\,\beta_\nu) = +\infty$

III. Η $(-\beta_\nu)$ έχει κάτω φράγμα θετικό και συνεπώς

$$\lim[\alpha_\nu(-\beta_\nu)] = +\infty \Leftrightarrow \lim[-(\alpha_\nu\,\beta_\nu)] = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim(\alpha_\nu\,\beta_\nu) = -\infty \qquad (§\ 2.20)$$

Αναλογικά έχουμε το ακόλουθο θεώρημα για την περίπτωση που η (α_ν) έχει όριο το $-\infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Έστω (α_ν) μια ακολουθία με όριο το $-\infty$.**

I. **Αν η ακολουθία (β_ν) είναι φραγμένη άνω, τότε**

$$\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = -\infty$$

II. **Αν η (β_ν) έχει άνω φράγμα αρνητικό, τότε**

$$\lim(\alpha_\nu\,\beta_\nu) = +\infty$$

III. Αν η (β_ν) έχει κάτω φράγμα θετικό, τότε

$$\lim(\alpha_\nu\ \beta_\nu) = -\infty$$

Η απόδειξη είναι άμεση, αν εργαστούμε με τις ακολουθίες $(-\alpha_\nu)$ και $(-\beta_\nu)$ οι οποίες ικανοποιούν τις αντίστοιχες συνθήκες του θεωρήματος 1.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. **Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ και**
   - $\lim \beta_\nu = +\infty$ ή $\lim \beta_\nu = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = +\infty$
   - $\lim \beta_\nu = +\infty$ ή $\lim \beta_\nu = l \in \mathbb{R}^*_+$, τότε $\lim(\alpha_\nu\beta_\nu) = +\infty$
   - $\lim \beta_\nu = -\infty$ ή $\lim \beta_\nu = l \in \mathbb{R}^*_-$, τότε $\lim(\alpha_\nu\beta_\nu) = -\infty$
2. **Αν $\lim \alpha_\nu = -\infty$ και**
   - $\lim \beta_\nu = -\infty$ ή $\lim \beta_\nu = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = -\infty$
   - $\lim \beta_\nu = +\infty$ ή $\lim \beta_\nu = l \in \mathbb{R}^*_+$, τότε $\lim(\alpha_\nu\beta_\nu) = -\infty$
   - $\lim \beta_\nu = -\infty$ ή $\lim \beta_\nu = l \in \mathbb{R}^*_-$, τότε $\lim(\alpha_\nu\beta_\nu) = +\infty$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τα θεωρήματα 1 και 2 εφαρμόζονται και στην περίπτωση που οι υποθέσεις για τη (β_ν) ισχύουν για κάθε $\nu > \kappa$ $(\kappa \in \mathbb{N})$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = \nu^2(3 - \eta\mu\nu)$. Είναι $\lim \nu^2 = +\infty$ και η $(3 - \eta\mu\nu)$ έχει κάτω φράγμα το 2 (θετικό), γιατί για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι $3 - \eta\mu\nu \geqslant 2$. Άρα $\lim \alpha_\nu = +\infty$.
2. Είναι $\lim(\sqrt[\nu]{\nu} - \nu) = -\infty$, γιατί $\lim(-\nu) = -\infty$ και $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$ (εφαρμ. 1, § 2.12).
3. Επειδή $\lim \nu^3 = +\infty$ και $\lim \sqrt[\nu]{5} = 1$, είναι $\lim(\nu^3 + \sqrt[\nu]{5}) = +\infty$.

   Συνεπώς (§ 2.20, θεωρ. 2) $\lim \dfrac{1}{\nu^3 + \sqrt[\nu]{5}} = 0$

Ασκήσεις: 31, 32, 33

Πίνακας ανακεφαλαίωσης

2.23 Τα συμπεράσματα από τα θεωρήματα των παραγράφων 2.13, 2.14, 2.20, 2.22 εμφανίζονται στον επόμενο πίνακα.

$\lim\alpha_\nu$	$\lim\beta_\nu$	$\lim\frac{1}{\beta_\nu}$	$\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)$	$\lim(\alpha_\nu\ \beta_\nu)$	$\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \neq 0$	$\frac{1}{l_2}$	l_1+l_2	$l_1\ l_2$	$\frac{l_1}{l_2}$
	$l_2 = 0$	$+\infty,\ \beta_\nu > 0$ $-\infty,\ \beta_\nu < 0$	l_1	0	$+\infty,\ l_1\beta_\nu > 0$ $-\infty,\ l_1\beta_\nu < 0$ $;,\ l_1 = 0$
	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty,\ l_1 > 0$ $-\infty,\ l_1 < 0$ $;,\ l_1 = 0$	0
	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty,\ l_1 > 0$ $+\infty,\ l_1 < 0$ $;,\ l_1 = 0$	0
$+\infty$	$l_2 \neq 0$	$\frac{1}{l_2}$	$+\infty$	$+\infty,\ l_2 > 0$ $-\infty,\ l_2 < 0$	$+\infty,\ l_2 > 0$ $-\infty,\ l_2 < 0$
	$l_2 = 0$	$+\infty,\ \beta_\nu > 0$ $-\infty,\ \beta_\nu < 0$	$+\infty$	;	$+\infty,\ \beta_\nu > 0$ $-\infty,\ \beta_\nu < 0$
	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	;
	$-\infty$	0	;	$-\infty$	;
$-\infty$	$l_2 \neq 0$	$\frac{1}{l_2}$	$-\infty$	$-\infty,\ l_2 > 0$ $+\infty,\ l_2 < 0$	$-\infty,\ l_2 > 0$ $+\infty,\ l_2 < 0$
	$l_2 = 0$	$+\infty,\ \beta_\nu > 0$ $-\infty,\ \beta_\nu < 0$	$-\infty$	;	$-\infty,\ \beta_\nu > 0$ $+\infty,\ \beta_\nu < 0$
	$+\infty$	0	;	$-\infty$	;
	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	;

Απροσδιόριστες μορφές

2.24 Από τον πίνακα της προηγούμενης παραγράφου δεν προκύπτει κανένα συμπέρασμα για το όριο

- Του αθροίσματος $\alpha_\nu + \beta_\nu$, όταν $\lim\alpha_\nu = +\infty$ και $\lim\beta_\nu = -\infty$
  Λέμε τότε ότι η $(\alpha_\nu+\beta_\nu)$ παρουσιάζει την απροσδιόριστη μορφή: $\infty - \infty$
- Του γινομένου $\alpha_\nu\beta_\nu$, όταν $\lim\alpha_\nu = 0$ και $\lim\beta_\nu = +\infty$ ή $-\infty$
  Έχουμε τότε την απροσδιόριστη μορφή: $0 \cdot \infty$
- Του πηλίκου (λόγου) $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ όταν $\lim\alpha_\nu = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim\beta_\nu = +\infty$ ή $-\infty$
  (μορφή $\frac{\infty}{\infty}$) ή $\lim\alpha_\nu = 0$ και $\lim\beta_\nu = 0$ (μορφή $\frac{0}{0}$)

Όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα, από τις ακολουθίες που παρουσιάζουν μια από τις παραπάνω απροσδιόριστες μορφές, άλλες δεν έχουν όριο και άλλες έχουν όριο, όχι όλες το ίδιο, πεπερασμένο ή άπειρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω οι ακολουθίες με γενικούς όρους $\alpha_\nu = 5\nu$ και $\beta_\nu = -\nu$
   Είναι $\lim \alpha_\nu = +\infty$, $\lim \beta_\nu = -\infty$ (μορφή $\infty-\infty$) και $\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu) = \lim 4\nu = +\infty$

   Αν $\alpha_\nu = \nu$ και $\beta_\nu = (-1)^\nu - \nu$, είναι πάλι $\lim\alpha_\nu = +\infty$, $\lim\beta_\nu = -\infty$, αλλά τώρα η $\alpha_\nu + \beta_\nu = (-1)^\nu$ δεν έχει όριο.

2. Ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες με $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ και $\beta_\nu = 3\nu$.
   Είναι $\lim \frac{1}{\nu} = 0$, $\lim \beta_\nu = +\infty$ (μορφή $0 \cdot \infty$) και $\lim(\alpha_\nu\, \beta_\nu) = 3$.

   Αν πάρουμε όμως την $\alpha_\nu = \frac{2}{\nu^3}$ και τη $\beta_\nu = 3\nu$, έχουμε πάλι $\lim\alpha_\nu = 0$, $\lim\beta_\nu = +\infty$,

   αλλά $\lim(\alpha_\nu\, \beta_\nu) = \lim \frac{6}{\nu^2} = 0$.

Άρση της απροσδιοριστίας

2.25 Όταν μια ακολουθία έχει απροσδιόριστη μορφή, είναι δυνατό, με κατάλληλο μετασχηματισμό του γενικού της όρου, να «άρουμε» την απροσδιοριστία και να υπολογίσουμε το όριό της, αν υπαρχει.

Τέτοιους μετασχηματισμούς κάναμε π.χ. στην εφαρμογή 1 (§ 2.6), εφαρμ. 2, 3 (§ 2.15) κτλ.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε δυο γενικότερες περιπτώσεις.

1. Έστω μια ακολουθία που είναι περιορισμός στο $\mathbb{N}^*$ πολυωνυμικής συνάρτησης, π.χ. η (α_ν) με

$$\alpha_\nu = \beta_k \nu^k + \beta_{k-1} \nu^{k-1} + \ldots + \beta_1 \nu + \beta_0$$

όπου οι σταθεροί αριθμοί $\beta_k, \beta_{k-1}, \ldots, \beta_1$ δεν είναι όλοι ομόσημοι, ενώ είναι $\beta_k \neq 0$ (μορφή $\infty-\infty$). Ο γενικός όρος γράφεται

$$\alpha_\nu = \nu^k \left(\beta_k + \frac{\beta_{k-1}}{\nu} + \ldots + \frac{\beta_1}{\nu^{k-1}} + \frac{\beta_0}{\nu^k}\right)$$

και επειδή $\lim\nu^k = +\infty$, $\lim\left(\beta_k + \frac{\beta_{k-1}}{\nu} + \ldots + \frac{\beta_1}{\nu^{k-1}} + \frac{\beta_0}{\nu^k}\right) = \beta_k$, θα είναι (§ 2.23)

- $\lim\alpha_\nu = +\infty$, αν $\beta_k > 0$
- $\lim\alpha_\nu = -\infty$, αν $\beta_k < 0$

2. Ας θεωρήσουμε και την ακολουθία με γενικό όρο

$$\alpha_\nu = \frac{\beta_k \nu^k + \beta_{k-1} \nu^{k-1} + \ldots + \beta_1 \nu + \beta_0}{\gamma_\lambda \nu^\lambda + \gamma_{\lambda-1} \nu^{\lambda-1} + \ldots + \gamma_1 \nu + \gamma_0}$$

στην οποία είναι (περίπτωση 1) $\lim(\beta_k\nu^k + \beta_{k-1}\nu^{k-1} + \ldots + \beta_1\nu + \beta_0) = +\infty$ (ή $-\infty$) και $\lim(\gamma_\lambda\nu^\lambda + \gamma_{\lambda-1}\nu^{\lambda-1} + \ldots + \gamma_1\nu + \gamma_0) = +\infty$ (ή $-\infty$)

Ο γενικός όρος γράφεται:

$$\alpha_\nu = \frac{\nu^k \left(\beta_k + \frac{\beta_{k-1}}{\nu} + \ldots + \frac{\beta_1}{\nu^{k-1}} + \frac{\beta_0}{\nu^k}\right)}{\nu^\lambda \left(\gamma_\lambda + \frac{\gamma_{\lambda-1}}{\nu} + \ldots + \frac{\gamma_1}{\nu^{\lambda-1}} + \frac{\gamma_0}{\nu^\lambda}\right)} = \nu^{k-\lambda} \frac{\beta_k + \frac{\beta_{k-1}}{\nu} + \ldots + \frac{\beta_1}{\nu^{k-1}} + \frac{\beta_0}{\nu^k}}{\gamma_\lambda + \frac{\gamma_{\lambda-1}}{\nu} + \ldots + \frac{\gamma_1}{\nu^{\lambda-1}} + \frac{\gamma_0}{\nu^\lambda}}$$

$$\text{Αλλά } \lim \frac{\beta_k + \frac{\beta_{k-1}}{\nu} + \ldots + \frac{\beta_1}{\nu^{k-1}} + \frac{\beta_0}{\nu^k}}{\gamma_\lambda + \frac{\gamma_{\lambda-1}}{\nu} + \ldots + \frac{\gamma_1}{\nu^{\lambda-1}} + \frac{\gamma_0}{\nu^\lambda}} = \frac{\beta_k}{\gamma_\lambda}$$

Διακρίνουμε τώρα τρεις περιπτώσεις:

(i) $k > \lambda$. Τότε $\lim \nu^{k-\lambda} = +\infty$ και συνεπώς

- αν $\frac{\beta_k}{\gamma_\lambda} > 0$, τότε $\lim \alpha_\nu = +\infty$
- αν $\frac{\beta_k}{\gamma_\lambda} < 0$, τότε $\lim \alpha_\nu = -\infty$

(ii) $k = \lambda$. Τότε $\lim\nu^{k-\lambda} = 1$ και συνεπώς $\lim\alpha_\nu = \frac{\beta_k}{\gamma_\lambda}$

(iii) $k < \lambda$. Τότε $\lim \nu^{k-\lambda} = 0$, οπότε και $\lim \alpha_\nu = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 2 + 7\nu^2 - 5\nu^4$. Επειδή συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι ο $-5 < 0$, είναι $\lim \alpha_\nu = -\infty$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο

$$\alpha_\nu = \sqrt[3]{\nu+7} - \sqrt[3]{\nu}$$

Είναι $\lim \sqrt[3]{\nu+7} = \lim \sqrt[3]{\nu} = +\infty$ (μορφή $\infty - \infty$)

Για να «άρουμε» την απροσδιοριστία εργαζόμαστε ως εξής:

$$\alpha_\nu = \frac{(\sqrt[3]{\nu+7} - \sqrt[3]{\nu})\left[(\sqrt[3]{\nu+7})^2 + \sqrt[3]{\nu+7}\cdot\sqrt[3]{\nu} + (\sqrt[3]{\nu})^2\right]}{(\sqrt[3]{\nu+7})^2 + \sqrt[3]{\nu+7}\cdot\sqrt[3]{\nu} + (\sqrt[3]{\nu})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{\nu+7})^3 - (\sqrt[3]{\nu})^3}{\sqrt[3]{\nu^2+14\nu+49} + \sqrt[3]{\nu^2+7\nu} + \sqrt[3]{\nu^2}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt[3]{\nu^2+14\nu+49} + \sqrt[3]{\nu^2+7\nu} + \sqrt[3]{\nu^2}} < \frac{7}{\sqrt[3]{\nu^2}}$$

Αλλά (§ 2.21, εφαρμ. 1) $\lim \sqrt[3]{\nu^2} = +\infty$, οπότε (§ 2.20, θεώρ. 2) $\lim \alpha_\nu = 0$.

Ασκήσεις: 34, 35, 36

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim \frac{2}{3\nu+1} = 0$ (ii) $\lim \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} = 0$ (iii) $\lim \frac{10000}{2\nu+3} = 0$

2. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim \frac{1+\sqrt{\nu}}{\nu^2} = 0$ (ii) $\lim \frac{3}{2(2\nu^2-1)} = 0$ (iii) $\lim \left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^7 - 1\right] = 0$

3. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim \frac{\eta\mu \frac{\nu\pi}{3}}{\nu^2} = 0$ (ii) $\lim \frac{\eta\mu 2\nu + 2\sigma\upsilon\nu^2\nu}{\nu} = 0$

4. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim \frac{(-1)^\nu}{\nu^2+3\nu+15} = 0$ (ii) $\lim \frac{c+\sqrt{\nu}}{\nu^3} = 0$, $(c \in \mathbb{R}^*_+)$

5. Να αποδείξετε:

(i) Αν $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ και $\alpha > 1$ τότε $0 < \sqrt[\nu]{\alpha} - 1 < \frac{1}{\nu}(\alpha - 1)$ (ii) $\lim (\sqrt[\nu]{\alpha} - 1) = 0$

6. Να αποδείξετε ότι:

$\lim (\sqrt{\nu^2+2} - \sqrt{\nu^2+1}) = 0$

7. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim \frac{3\nu^3-5\nu^2+6\nu+1}{\nu^4} = 0$ (ii) $\lim \frac{\nu}{(-2)^\nu(\nu^2+1)} = 0$

8. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim \frac{2^\nu}{\nu!} = 0$ (ii) $\lim \frac{3\cdot 5 \ldots (2\nu+1)}{2\cdot 5 \ldots (3\nu-1)} = 0$, $(\nu \in \mathbb{N}^*)$

9. Αν $\alpha \in [0,1)$ να αποδείξετε ότι:

(i) Για κάθε $\nu > \frac{2}{1-\alpha}$ ισχύει $\alpha + \frac{1}{\nu} < \frac{\alpha+1}{2}$ (ii) $\lim \left(\alpha + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = 0$

10. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim \frac{\nu^2}{\nu^2-1} = 1$, $(\nu \neq 1)$. (ii) $\lim 5\left[\left(\frac{2}{3}\right)^\nu - 1\right] = -5$

11. Να αποδείξετε ότι δε συγκλίνει η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{\nu+3}{2\nu}$

12. Να αποδείξετε ότι δε συγκλίνει η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = (-1)^\nu \nu$.

13. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = \frac{3\nu^2-2\nu-4}{\nu^2+1}$. (i) Να αποδείξετε ότι $\lim \alpha_\nu = 3$. (ii) Να υπολογίσετε το ελάχιστο ν_0 τέτοιο ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να είναι $\alpha_\nu > 2$.

14. Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών με γενικό όρο

(i) $\alpha_\nu = \frac{\nu^3-5\nu^2+6}{2\nu^3}$ (ii) $\alpha_\nu = \frac{2\nu^2-6\nu+3}{3\nu^2-1}$ (iii) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2$

15. Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών με γενικό όρο:

(i) $\alpha_\nu = \frac{3\cdot 4^\nu - 5^{2\nu}}{7+6^{2\nu+1}}$. (ii) $\alpha_\nu = \frac{5\cdot 3^{2\nu}-2}{4\cdot 9^\nu+7}$.

16. Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών με γενικό όρο:

(i) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{\dfrac{8\nu^2+3\nu+5}{27\nu^2-5}}$ (ii) $\alpha_\nu = \sqrt{\dfrac{3\nu^2+2}{5\nu^3-1}}$

17. Αν (α_ν) συγκλίνουσα και για κάθε $\nu > \nu_0$ είναι $\mu \leqslant \alpha_\nu \leqslant M$, τότε θα είναι και $\mu \leqslant \lim \alpha_\nu \leqslant M$.

18. Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών με γενικό όρο

(i) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{1+\dfrac{1}{3\nu}}$ (ii) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\left(\dfrac{3}{5}\right)^\nu + \left(\dfrac{5}{6}\right)^\nu}$

19. Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{1+2^\nu+\ldots+\mu^\nu}$, $\mu \in \mathbb{N}^*$. Να δείξετε ότι $\lim \sqrt[\nu]{1+2^\nu+\ldots+\mu^\nu} = \mu$

20. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim \left[\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{\nu^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}} \right] = 1$$

21. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας (α_ν) με $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{\alpha_\nu+7}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

22. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας (α_ν) με $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \dfrac{2^2}{\alpha_\nu}\right)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

23. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}$ (πλήθος ριζικών ν) συγκλίνει και να υπολογίσετε το όριό της.

24. Αν $x > 1$ και θέσουμε $[x] = \nu$, να αποδειχτεί ότι: $\left(1+\dfrac{1}{\nu+1}\right)^\nu < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$

25. Να αποδείξετε ότι $\lim \left(1+\dfrac{2}{\nu}\right)^\nu = e^2$

26. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ (ii) $\lim \left(1+\dfrac{1}{2\nu}\right)^\nu$

27. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim (\nu^2+2) = +\infty$ (ii) $\lim \sqrt{\nu^2+\nu+1} = +\infty$ (iii) $\lim (-\nu^2+2) = -\infty$ (iv) $\lim \dfrac{2-\nu^3}{2\nu} = -\infty$

28. Αν για τις ακολουθίες (α_ν), (β_ν) έχουμε για κάθε $\nu \geqslant k$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_\nu \leqslant \vartheta \beta_\nu$ με $\vartheta > 0$, τότε:

(i) Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ τότε και $\lim \beta_\nu = +\infty$ (ii) Αν $\lim \beta_\nu = -\infty$ τότε και $\lim \alpha_\nu = -\infty$

29. Αν για την ακολουθία (α_ν) ισχύει $\lim \alpha_\nu = +\infty$ τότε η (α_ν) δεν είναι φραγμένη άνω.

30. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν μία ακολουθία (α_ν) είναι αύξουσα και όχι φραγμένη άνω τότε $\lim \alpha_\nu = +\infty$

(ii) Με τη βοήθεια της ακολουθίας: (α_ν) με $\alpha_\nu = \begin{cases} 3\nu & \text{αν ν άρτιος} \\ 3\nu-5 & \text{αν ν περιττός} \end{cases}$

να δείξετε ότι η (i) είναι ικανή συνθήκη για να έχει μια ακολουθία όριο το $+\infty$, αλλά όχι και αναγκαία.

31. Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:

(α_ν) με $\alpha_\nu = -3\nu^2+\nu-1$ (β_ν) με $\beta_\nu = 3\nu^2+\nu-1$ (γ_ν) με $\gamma_\nu = \dfrac{\nu^5+1}{2\nu^2+\nu+7}$

32. Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:

(α_ν) με $\alpha_\nu = \sqrt{3\nu^2-\nu+1}$ (β_ν) με $\beta_\nu = \sqrt{\nu^2+5}+\sqrt{\nu}$ (γ_ν) με $\gamma_\nu = \sqrt{\nu^2+5}-\sqrt{\nu}$

33. Αν $\alpha \in [1, +\infty)$ και $k \in \mathbb{N}^*$ τότε να δείξετε ότι $\lim \alpha^\nu \cdot \nu^k = +\infty$.

34. Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών με

(i) $\alpha_\nu = \dfrac{5-2\nu^2}{\nu^2+1}$ (ii) $\beta_\nu = \dfrac{3\nu^3-5\nu+6}{2\nu^2+1}$ (iii) $\gamma_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu^2+9\nu-10}$

35. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο $\alpha_\nu = \sqrt{2\nu^5-\nu^2+4}$

36. Να βρεθεί το $\lim \dfrac{\nu^{\nu+1}+2^\nu \nu!}{(2\nu)^\nu}$

3 ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Το όριο συνάρτησης είναι η κεντρική έννοια γύρω από την οποία αναπτύσσεται ο κλάδος της Ανάλυσης.
Για να κατανοήσει ο μαθητής στη γενικότητά της τη λεπτή αυτή έννοια, που άρχισε να διαμορφώνεται από την εποχή του Αρχιμήδη, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή και επιμέλεια.
Η ανάπτυξη του θέματος εδώ γίνεται επαγωγικά: Πρώτα δίνεται ο ορισμός του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$, που αποτελεί γενίκευση της γνωστής από το προηγούμενο κεφάλαιο έννοιας του ορίου ακολουθίας. Ακολουθεί το όριο στο $-\infty$ και στο $x_0 \in \mathbb{R}$, για να δοθεί τελικά η γενική έννοια του ορίου που καλύπτει όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Επισημαίνεται ιδιαίτερα ότι ο ορισμός του ορίου συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ καλύπτει και την περίπτωση που το x_0 είναι άκρο του πεδίου ορισμού της.
Στη συνέχεια διατυπώνονται οι ιδιότητες του ορίου, εντελώς ανάλογες με τις γνωστές ιδιότητες του ορίου ακολουθίας, για να ακολουθήσει η βασική έννοια της συνέχειας. Προέχουσα θέση έχει το θεώρημα που αφορά το όριο και τη συνέχεια μιας σύνθετης συνάρτησης, που αποτελεί μια δυναμική μέθοδο για τον υπολογισμό του ορίου με πολλαπλές δυνατότητες εφαρμογής.
Το κεφάλαιο συμπληρώνεται με τα βασικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων, που φωτίζουν την έννοια της συνέχειας και επιβεβαιώνουν τη σπουδαιότητά της.
Τέλος οι ιδιότητες της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης παρέχουν ευκαιρίες για άσκηση καθώς και για επανάληψη και εμπέδωση των εννοιών που προηγήθηκαν.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Γενικά

3.1 Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάζοντας τη συμπεριφορά μιας ακολουθίας (α_ν) για «μεγάλες» τιμές του ν, ξεχωρίσαμε τις περιπτώσεις που η ακολουθία μπορεί να έχει όριο (πεπερασμένο ή άπειρο).

Έτσι π.χ. για την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = \frac{2\nu-3}{\nu}$ έχουμε $\lim\alpha_\nu = 2$. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές της (α_ν) «συσσωρεύονται» γύρω από το 2, που σημαίνει, όπως ξέρουμε, ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ όλοι οι όροι της (α_ν) που αντιστοιχούν σε δείκτη μεγαλύτερο από ένα φυσικό ν_0 (που εξαρτάται από το ε) βρίσκονται στο διάστημα $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$.

Ανάλογα φαινόμενα συναντάμε γενικότερα και στη συμπεριφορά συναρτήσεων για «μεγάλες» τιμές της μεταβλητής x. Ας θεωρήσουμε π.χ. τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2x-3}{x}$, της οποίας ο περιορισμός στο $\mathbb{N}^*$ είναι η προηγούμενη ακολουθία (α_ν) με όριο 2. Μπορούμε να ζητήσουμε, αν δοθεί οποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$, με ποιες προϋποθέσεις θα έχουμε $f(x)\in(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, δηλαδή $|f(x)-2| < \varepsilon$.

Είναι:

$$\begin{aligned} |f(x)-2| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{2x-3}{x} - 2\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \left|-\frac{3}{x}\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x| > \frac{3}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow x > \frac{3}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad x < -\frac{3}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Άρα οι τιμές της f θα βρίσκονται στο διάστημα $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, όταν ο x είναι μεγαλύτερος του $\frac{3}{\varepsilon}$ ή μικρότερος του $-\frac{3}{\varepsilon}$. Μάλιστα όσο πιο μικρός είναι ο ε, δηλαδή, όσο πιο «κοντά» στο 2 θέλουμε τις τιμές f(x), τόσο πιο μεγάλο, κατ'

απόλυτη τιμή, x πρέπει να πάρουμε.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε το 2 ως *όριο* της συνάρτησης f.

Εξάλλου, όπως και στις ακολουθίες με όριο +∞ ή -∞, μπορεί για κάθε $M > 0$ οι τιμές f(x) μιας συνάρτησης, για «μεγάλες» τιμές του x, να γίνονται μεγαλύτερες του M ή μικρότερες του -M.

Έστω π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^2$. Για να έχουμε

$$x^2 > M, \text{ αρκεί να πάρουμε } x > \sqrt{M}$$

Ακόμη για τις ίδιες τιμές του x οι αντίστοιχες τιμές της -f είναι μικρότερες του -M.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε ως όριο της f το +∞ και της -f το -∞. Με αυτή την έννοια του «ορίου συνάρτησης» θα ασχοληθούμε στα επόμενα.

Όριο συνάρτησης στο +∞

3.2 **Για να μελετήσουμε γενικά τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης f για μεγάλες τιμές της μεταβλητής x, είναι φυσικά απαραίτητο το πεδίο ορισμού της να μήν είναι φραγμένο άνω.**

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε διάστημα (α, +∞) υπάρχουν στοιχεία του A. Δηλαδή το σύνολο $A \cap (\alpha, +\infty)$ δεν είναι κενό.

Κάθε σύνολο της μορφής $A \cap (\alpha, +\infty)$ λέγεται **περιοχή του +∞ (ως προς το A).**

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε την έννοια του ορίου ακολουθίας με τον εξής ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω μια συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού A δεν είναι φραγμένο άνω. Θα λέμε ότι *η f έχει στο + ∞ όριο:***

- *το* $l \in \mathbb{R}$, **όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x > X_0$ (και $x \in A$[1]) να είναι**
$$|f(x)-l| < \varepsilon \qquad (1)$$
- *το* + ∞, **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x > X_0$ να είναι**
$$f(x) > M \qquad (2)$$
- *το* - ∞, **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x > X_0$ να είναι**
$$f(x) < -M \qquad (3)$$

(1) Υπονοείται ότι η μεταβλητή x διατρέχει το A.

Στην περίπτωση που η f είναι ακολουθία ($A = \mathbb{N}$) ο ορισμός αυτός καλύπτει τους ορισμούς των § 2.7 και 2.20.

Ο X_0 εξαρτάται κάθε φορά από το ε ή το M αντιστοίχως, αλλά δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Μπορεί να αντικατασταθεί με οποιονδήποτε $X_0' > X_0$.

Επειδή ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$|f(x)-l| < \varepsilon \Leftrightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$
$$f(x) > M \Leftrightarrow f(x) \in (M, +\infty)$$
$$f(x) < -M \Leftrightarrow f(x) \in (-\infty, -M)$$

από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

Η συνάρτηση f έχει στο +∞ **όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν για κάθε διάστημα Δ_L της μορφής**

- $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, αν $L \in \mathbb{R}$
- $(M, +\infty)$, αν $L = +\infty$
- $(-\infty, -M)$, αν $L = -\infty$

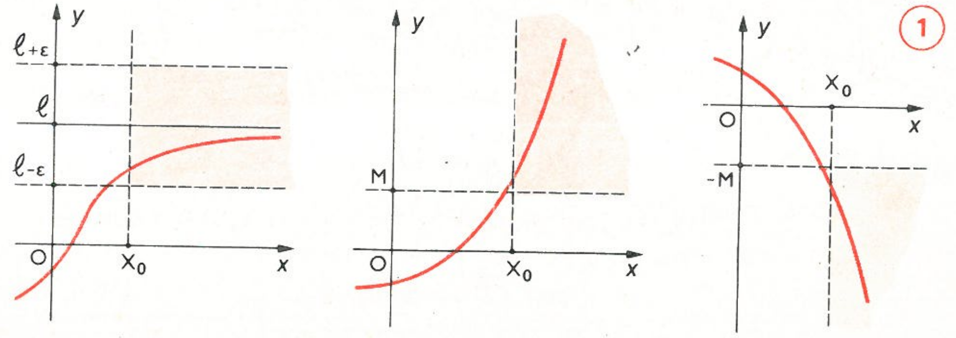
υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x > X_0$ *που ανήκει και στο A*, δηλαδή για κάθε $x \in (X_0, +\infty) \cap A$, να έχουμε $f(x) \in \Delta_L$.

Τα παραπάνω εκφράζονται με ενιαία συντομευμένη διατύπωση ως εξής:

> ***Η συνάρτηση f έχει στο +∞ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν για κάθε διάστημα Δ_L, οι τιμές της σε μια περιοχή του +∞ ανήκουν όλες στο Δ_L.***

Στα επόμενα θα θεωρούμε ειδικότερα συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού A περιέχει ένα διάστημα της μορφής (α, +∞), δηλαδή συναρτήσεις που ορίζονται σε κάθε $x > \alpha$. Στην περίπτωση αυτή η φράση *"σε μια περιοχή του +∞"* σημαίνει *"σε ένα διάστημα με άκρο +∞"*, π.χ. $(X_0, +\infty)$.

Στο σχήμα 1 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού αυτού. Αν π.χ. η f έχει στο +∞ όριο $l \in \mathbb{R}$, τα σημεία της γραφικής της παράστασης C που έχουν



α β γ

τετμημένη $x > X_0$ βρίσκονται στο εσωτερικό της ταινίας που ορίζεται από τις παράλληλες $y = l\text{-}\varepsilon$ και $y = l+\varepsilon$. Έτσι τα σημεία με κοινή τετμημένη $x > X_0$ που βρίσκονται στη $\mathcal{C}$ και τη μεσοπαράλληλο $y = l$, απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από ε. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η $\mathcal{C}$ πλησιάζει την ευθεία $y = l$ «όσο θέλουμε», δηλαδή λιγότερο από ένα αυθαίρετο (οσοδήποτε μικρό) $\varepsilon > 0$, αρκεί να θεωρήσουμε τα σημεία της με τετμημένη μεγαλύτερη από ένα κατάλληλο X_0 (που εξαρτάται από το ε). Γι αυτό η ευθεία

$$y = l$$

λέγεται **(οριζόντια) ασύμπτωτη** της $\mathcal{C}$.

Στην περίπτωση ορίου $l \in \mathbb{R}$ αποδεικνύεται, όπως ακριβώς και στις ακολουθίες (§ 2.8), η **μοναδικότητα του ορίου.**

Εξάλλου, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό, οι περιπτώσεις που η συνάρτηση έχει όριο $l \in \mathbb{R}$ ή $+\infty$ ή $-\infty$, είναι ανά δύο ασυμβίβαστες, δηλαδή καθεμιά αποκλείει τις δυό άλλες.

Γενικά, για να δηλώσουμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, γράφουμε συμβολικά

$$\lim_{+\infty} f = L \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

και διαβάζουμε αντίστοιχα

"όριο της f στο +∞ ίσον L"
"όριο του f(x) όταν το x τείνει στο +∞, ίσον L"

Ειδικότερα, αν το όριο είναι ο πραγματικός αριθμός l χρησιμοποιείται και η έκφραση *«η f(x) συγκλίνει προς τον l, όταν το x τείνει στο +∞».*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από τη σχέση (1) του ορισμού προκύπτει ότι:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} [f(x)-l] = 0}$$

2. Επειδή: $\quad |f(x)-l| < \varepsilon \Leftrightarrow |-f(x)-(-l)| < \varepsilon$

από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = l \Leftrightarrow \lim_{+\infty} (-f) = -l}$$

Ομοίως επειδή: $\quad f(x) > M \Leftrightarrow -f(x) < -M \quad$ προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty \Leftrightarrow \lim_{+\infty} (-f) = -\infty}$$

3. Το όριο μιας συνάρτησης στο $+\infty$ δεν μεταβάλλεται αν περιορίσουμε τη συνάρτηση σε οποιαδήποτε περιοχή $(\alpha, +\infty)$ του $+\infty$.

Έτσι, κατά την αναζήτηση του ορίου στο +∞ μιας συνάρτησης f μπορούμε να υποθέτουμε $x > \alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το όριο στο $+\infty$ της σταθερής συνάρτησης u με τιμή c είναι το c, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $|u(x)\text{-}c| = 0 < \varepsilon$.

2. Οι συναρτήσεις x, x^2, x^3 και γενικά $x^k (k \in \mathbb{N}^*)$ έχουν στο $+\infty$ όριο $+\infty$.

Η συνάρτηση x^k έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

Έστω ένας οποιοσδήποτε $M > 0$. Τότε, περιορίζοντας τη συνάρτηση στο $\mathbb{R}_+$, δηλαδή για $x \geqslant 0$, έχουμε:

$$x^k > M \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{M}$$

Έτσι, αν εκλέξουμε ως X_0 το $\sqrt[\kappa]{M}$ (ή οποιοδήποτε μεγαλύτερό του), για κάθε $x > X_0$ θα είναι

$$x^k > M$$

Άρα $\quad \lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty$

3. Οι συναρτήσεις $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ και γενικά $\sqrt[\kappa]{x}$ $(\kappa \in \mathbb{N}^*)$ έχουν στο $+\infty$ όριο το $+\infty$.
Η συνάρτηση $\sqrt[\kappa]{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_+$.
Έστω $M > 0$. Τότε έχουμε: $\sqrt[\kappa]{x} > M \Leftrightarrow x > M^\kappa$.
Αν εκλέξουμε λοιπόν ως X_0 το M^κ, ή οποιονδήποτε μεγαλύτερό του, για κάθε $x > X_0$ θα είναι $\sqrt[\kappa]{x} > M$.

Άρα $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[\kappa]{x} = +\infty$

4. Επίσης οι συναρτήσεις $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ και γενικά $\frac{1}{x^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ έχουν στο $+\infty$ όριο 0.

Η συνάρτηση $\frac{1}{x^k}$ έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Έστω ένας οποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$. Τότε για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^k} < \varepsilon \Leftrightarrow x^k > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$$

Έτσι, αν εκλέξουμε $X_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ για κάθε $x > X_0$ θα έχουμε

$$\left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon$$

που σημαίνει $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

5. Θα δείξουμε ότι είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-7}{x-3} = 2$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

Έστω (ένας οποιοσδήποτε) $\varepsilon > 0$. Τότε για $x \in (3, +\infty)$ έχουμε:

$$\left|\frac{2x-7}{x-3} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{x-3}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x-3 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x > 3 + \frac{1}{\varepsilon}$$

Αν εκλέξουμε ως X_0 το $3 + \frac{1}{\varepsilon}$ (ή οποιοδήποτε αριθμό μεγαλύτερό του), για κάθε $x > X_0$ θα είναι

$$\left|\frac{2x-7}{x-3} - 2\right| < \varepsilon$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-7}{x-3} = 2$

6. Από την παρατήρηση 2 προκύπτει επίσης ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^k) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{1}{x^k}) = 0$.

Ασκήσεις: 1, 2

Όριο συνάρτησης στο $-\infty$

3.3 Θεωρούμε τώρα συναρτήσεις που **το πεδίο ορισμού τους δεν είναι φραγμένο κάτω**. Μπορούμε να ορίσουμε το όριο στο $-\infty$ μιας τέτοιας συνάρτησης, αρκεί στον ορισμό της § 3.2 να αντικαταστήσουμε την ανίσωση $x > X_0$ με την $x < -X_0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω μια συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού A δεν είναι φραγμένο κάτω. Θα λέμε ότι** *η f έχει στο $-\infty$ όριο:*

- *το $l \in \mathbb{R}$*, **όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο** ώστε για κάθε $x < -X_0$ (και $x \in A$) να είναι
$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad (4)$$
- *το $+\infty$*, **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο** ώστε για κάθε $x < -X_0$ να είναι
$$f(x) > M \quad (5)$$
- *το $-\infty$*, **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο** ώστε για κάθε $x < -X_0$ να είναι
$$f(x) < -M \quad (6)$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι:

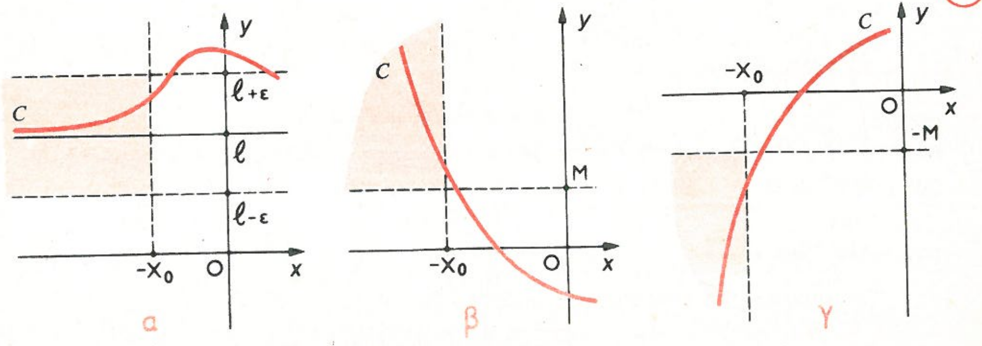
Η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό διάστημα Δ_L υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x < -X_0$ *που ανήκει και στο A*, δηλαδή για κάθε $x \in (-\infty, -X_0) \cap A$, να έχουμε $f(x) \in \Delta_L$ ή συντομότερα:

Η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν για κάθε διάστημα Δ_L, οι τιμές της **σε μια περιοχή**[1] **του $-\infty$** *ανήκουν όλες στο Δ_L.*

Στα επόμενα θα θεωρούμε ειδικότερα συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού A περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$. Στην περίπτωση αυτή η φράση "*σε μια περιοχή του $-\infty$*" σημαίνει "*σε ένα διάστημα με άκρο $-\infty$*".

Στο σχήμα 2 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του ορίου στο $-\infty$ μιας συνάρτησης f. Ειδικά στο σχήμα 2α η ευθεία $y = l$ είναι (*οριζόντια*) *ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f.

2



(1) Όπως και στην περίπτωση του $+\infty$, ονομάζουμε **περιοχή του $-\infty$** (ως προς το A) κάθε σύνολο $(-\infty, \beta) \cap A$.

Όπως και στην περίπτωση του ορίου στο $+\infty$, αποδεικνύεται η μοναδικότητα και του ορίου στο $-\infty$.

Για να δηλώσουμε ότι η f έχει στο $-\infty$ όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ γράφουμε συμβολικά:

$$\lim_{-\infty} f = L \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για το όριο στο $-\infty$ μιας συνάρτησης f διατυπώνουμε ανάλογες παρατηρήσεις με εκείνες της § 3.2. Δηλαδή:

- Είναι

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-l] = 0 \\ &\lim_{-\infty} f = l \Leftrightarrow \lim_{-\infty}(-f) = -l \\ &\lim_{-\infty} f = +\infty \Leftrightarrow \lim_{-\infty}(-f) = -\infty \end{aligned}}$$

- Το όριο μιας συνάρτησης στο $-\infty$ δεν μεταβάλλεται αν περιορίσουμε τη συνάρτηση σε οποιαδήποτε περιοχή $(-\infty, \beta)$ του $-\infty$.
Έτσι, για την αναζήτηση του ορίου στο $-\infty$ μπορούμε να υποθέτουμε $x < \beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το όριο στο $-\infty$ της σταθερής συνάρτησης με τιμή c είναι το c.

2. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

   Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

   Έστω (ένας οποιοσδήποτε) $M > 0$. Τότε περιορίζοντας τη συνάρτηση στο $\mathbb{R}_-$, δηλαδή για $x \leq 0$, έχουμε:

$$x^2 > M \Leftrightarrow -x > \sqrt{M} \Leftrightarrow x < -\sqrt{M}$$

   Έτσι, αν εκλέξουμε ως X_0 το $\sqrt{M}$ (ή οποιοδήποτε μεγαλύτερό του), για κάθε $x < -X_0$ θα είναι

$$x^2 > M$$

   Άρα $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

   Γενικότερα ισχύει και αποδεικνύεται ομοίως ότι:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^{2k} = +\infty \ (k \in \mathbb{N}^*)}$$

3. Επίσης είναι $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

   Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

   Έστω $M > 0$. Τότε για $x < 0$ έχουμε

$$x^3 < -M \Leftrightarrow x < -\sqrt[3]{M}$$

   Έτσι, αν εκλέξουμε $X_0 \geq \sqrt[3]{M}$, τότε η $x^3 < -M$ θα ισχύει για κάθε $x < -X_0$, που σημαίνει $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

   Γενικότερα είναι

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^{2k+1} = -\infty \ (k \in \mathbb{N})}$$

4. Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ είναι $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

   Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

   Έστω (ένας οποιοσδήποτε) $\varepsilon > 0$. Τότε για $x < 0$ έχουμε:

$$\left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^k| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$$

$$\Leftrightarrow -x > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$$

   Αν εκλέξουμε ως X_0 το $\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ (ή οποιοδήποτε μεγαλύτερό του), τότε η $\left|\frac{1}{x^k}\right| < \varepsilon$ θα ισχύει για κάθε $x < -X_0$, που σημαίνει ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να δειχτεί ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$

   Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

   Έστω $M > 0$. Τότε για $x < 2$ έχουμε:

$$\frac{x^2}{x-2} < -M \Leftrightarrow x^2 > -Mx+2M \Leftrightarrow x^2+Mx-2M > 0$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-M-\sqrt{M^2+8M}}{2} \qquad \text{ή} \qquad x > \frac{-M+\sqrt{M^2+8M}}{2}$$

   Περιορίζοντας τώρα τη συνάρτηση στο $\mathbb{R}_-$ και εκλέγοντας ως X_0 το $\frac{M+\sqrt{M^2+8M}}{2}$, θα έχουμε ότι η $\frac{x^2}{x-2} < -M$ θα ισχύει για κάθε $x < -X_0$, που σημαίνει ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$.

2. Αν $g(x) = \frac{2x-|x-1|}{x}$ να βρεθούν τα όρια της $g(x)$ στο $+\infty$ και το $-\infty$.

   Η g έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

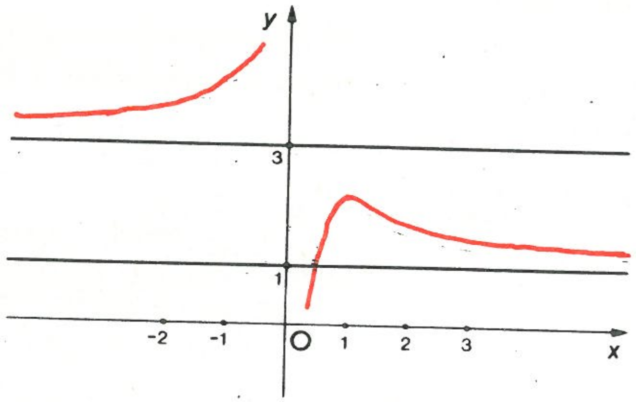
   Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $x \geq 1$. Τότε έχουμε:

$$g(x) = \frac{2x-(x-1)}{x} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x) - 1 = \frac{1}{x}$$

Επειδή όμως (§ 3.2, πρδ. 4) είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, θα έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)-1] = 0$, που σημαίνει $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

3



Έτσι η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g (σχ. 3).

- $x < 1$ και $x \neq 0$. Τότε έχουμε:

$$g(x) = \frac{2x+(x-1)}{x} = \frac{3x-1}{x} = 3 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x)-3 = -\frac{1}{x}$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to -\infty} [g(x)-3] = \lim\limits_{x \to -\infty} (-\frac{1}{x}) = 0$ ή $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 3$

Δηλαδή και η ευθεία $y = 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g (σχ. 3).

Ασκήσεις: 3, 4, 5, 6

Ιδιότητες ορίου

3.4 Όπως είδαμε ο ορισμός που δόθηκε στην § 3.2 για το όριο συνάρτησης στο $+\infty$ αποτελεί γενίκευση των ορισμών των § 2.7 και 2.20 για το όριο ακολουθίας. Γι' αυτό ισχύουν, και αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο, οι ίδιες ιδιότητες των ορίων και για συναρτήσεις (στη θέση των ν, ν_0, α_ν θέτουμε x, x_0, $f(x)$ αντιστοίχως). Μπορούμε λοιπόν να γενικεύσουμε τα θεωρήματα των

ακολουθιών ώστε να ισχύουν και για συναρτήσεις που έχουν όριο στο $+\infty$ με την ακόλουθη διευκρίνιση:

Όταν σε θεώρημα ακολουθιών αναφέρεται ότι

«*υπάρχει* $k \in \mathbb{N}$, *τέτοιο ώστε για κάθε* $\nu > k$ *η ακολουθία έχει μια ιδιότητα p* (π.χ. είναι φραγμένη, έχει τιμές θετικές κτλ.)»

το αντίστοιχο θεώρημα για συναρτήσεις διατυπώνεται με την έκφραση ότι

«*σε μια περιοχή του* $+\infty$ *η συνάρτηση έχει την ιδιότητα p*»

που σημαίνει ακριβώς ότι

«υπάρχει $\alpha > 0$, τέτοιο ώστε ο περιορισμός της συνάρτησης στο $(\alpha, +\infty) \cap A$ έχει την ιδιότητα p»

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεώρημα ακολουθιών	**Θεώρημα συναρτήσεων**
Αν $\lim \alpha_\nu = 0$ **και** *υπάρχει* $k \in \mathbb{N}$, *τέτοιο ώστε για κάθε* $\nu > k$ **είναι:**	**Αν** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **και** *σε μια περιοχή του* $+\infty$ **είναι:**
• $\alpha_\nu > 0$, **τότε** $\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = +\infty$	• $f(x) > 0$, **τότε** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
• $\alpha_\nu < 0$, **τότε** $\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = -\infty$	• $f(x) < 0$, **τότε** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Εξάλλου ο ορισμός του ορίου στο $-\infty$ είναι εντελώς ανάλογος με εκείνον του ορίου στο $+\infty$.

Με την αντικατάσταση λοιπόν του $+\infty$ με $-\infty$ στις φράσεις «όριο στο $+\infty$» και «σε μια περιοχή του $+\infty$» έχουμε αντίστοιχα θεωρήματα για συναρτήσεις με όριο στο $-\infty$. Π.χ. το αντίστοιχο για όριο στο $-\infty$ του παραπάνω θεωρήματος είναι το εξής:

Αν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **και** *σε μια περιοχή του* $-\infty$ **είναι:**

- $f(x) > 0$, **τότε** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- $f(x) < 0$, **τότε** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Το θεώρημα που αφορά πράξεις συναρτήσεων με πεπερασμένα όρια στο $+\infty$ διατυπώνεται ως εξής:

Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A που δεν είναι φραγμένο άνω. Αν οι f, g έχουν στο $+\infty$ πεπερασμένα όρια, τότε:

(i) $\lim\limits_{+\infty}(f+g) = \lim\limits_{+\infty} f + \lim\limits_{+\infty} g$

(ii) $\lim\limits_{+\infty}(f \cdot g) = \lim\limits_{+\infty} f \cdot \lim\limits_{+\infty} g$

(iii) $\lim\limits_{+\infty}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \lim\limits_{+\infty} f \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

(iv) Αν $\lim\limits_{+\infty} g \neq 0$, τότε $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{\lim\limits_{+\infty} g}$ και $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim\limits_{+\infty} f}{\lim\limits_{+\infty} g}$

(v) Αν για κάθε[1] $x \in A$, $f(x) \geqslant 0$ και $k \in \mathbb{N}^*$, τότε $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[k]{f} = \sqrt[k]{\lim\limits_{+\infty} f}$

Ανάλογη είναι η διατύπωση για πράξεις με συναρτήσεις που έχουν στο $-\infty$ πεπερασμένα όρια.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Οι προτάσεις (i) και (ii) επεκτείνονται επαγωγικά και για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων.
2. Στην περίπτωση (iv), επειδή $\lim\limits_{+\infty} g \neq 0$, σε μια περιοχή του $+\infty$ είναι $g(x) \neq 0$ και επομένως εκεί ορίζεται η $\dfrac{1}{g}$.
3. Για την εφαρμογή της (v) αρκεί (σύμφωνα με την § 3.2, παρατ. 3) να είναι $f(x) \geqslant 0$ σε μια περιοχή του $+\infty$. Αυτό συμβαίνει ειδικότερα αν $\lim\limits_{+\infty} f > 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Επειδή $\dfrac{3x-2}{x} = 3 - \dfrac{2}{x} = 3 - 2\dfrac{1}{x}$, θα έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(3 - 2\cdot\frac{1}{x}\right) = 3 - \lim_{x\to-\infty}\left(2\cdot\frac{1}{x}\right) = 3 - 2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 3 - 2\cdot 0 = 3$$

2. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(4+\dfrac{5}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\dfrac{5}{x^2}\right) = 1\cdot 4 = 4$ και ομοίως

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(4+\frac{5}{x^2}\right) = 4$$

3. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x-1}{x} = 5 > 0$, θα έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{5x-1}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-1}{x}} = \sqrt{5}$.

Εφαρμογή Όριο ρητής συνάρτησης

3.5 Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το όριο στο $+\infty$ της μονωνυμικής συνάρτησης αx^k ($k \in \mathbb{N}^*$) με $\alpha \neq 0$ είναι το $+\infty$, όταν $\alpha > 0$ και το $-\infty$, όταν $\alpha < 0$.

(1) Η συνθήκη: Για κάθε $x \in A$, $f(x) \geqslant 0$, γράφεται συντομότερα $f \geqslant 0$.

Πράγματι, έστω ένας οποιοσδήποτε $M > 0$. Τότε:

- Αν $\alpha > 0$, έχουμε για $x \in (0, +\infty)$

$$\alpha x^k > M \Leftrightarrow x^k > \frac{M}{\alpha} \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{\frac{M}{\alpha}}$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha x^k) = +\infty$$

- Αν $\alpha < 0$, βρίσκουμε επίσης ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha x^k) = -\infty$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το όριο στο $-\infty$ της συνάρτησης αx^k ($k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq 0$):

- Αν $\alpha > 0$, είναι $\begin{cases} +\infty, & \text{όταν } k \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{όταν } k \text{ περιττός} \end{cases}$
- Αν $\alpha < 0$, είναι $\begin{cases} -\infty, & \text{όταν } k \text{ άρτιος} \\ +\infty, & \text{όταν } k \text{ περιττός} \end{cases}$

Ας θεωρήσουμε τώρα την πολυωνυμική συνάρτηση P με

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0 \qquad \text{και} \qquad \alpha_\nu \neq 0$$

Έχουμε για $x \neq 0$

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu\left(1 + \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{x^\nu}\right)$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\cdot\dfrac{1}{x} + \ldots + \dfrac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\cdot\dfrac{1}{x^\nu}\right) = 1 + \dfrac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} + \ldots + \dfrac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^\nu} = 1$

και συνεπώς (βλ. και § 2.22, πορ. 1)

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Δηλαδή:

Το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης ισούται με το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) του μεγιστοβάθμιου όρου της:

Εξάλλου η ρητή συνάρτηση Q με $Q(x) = \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_0}$ και $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$, γράφεται για $x \neq 0$.

$$Q(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{x^\nu}}{1 + \frac{\beta_{\mu-1}}{\beta_\mu} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{\beta_0}{\beta_\mu} \cdot \frac{1}{x^\mu}}$$

και συνεπώς έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}, \qquad \lim_{x\to-\infty} Q(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}$$

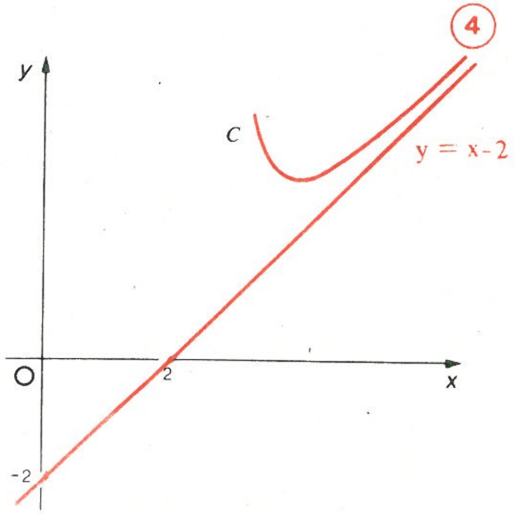
Δηλαδή:

Το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) κάθε ρητής συνάρτησης ισούται με το όριο στο $+\infty$ (στο $-\infty$) του λόγου των μεγιστοβάθμιων όρων του αριθμητή και του παρονομαστή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι: $\lim_{x\to+\infty} (5x^3-12x+4) = \lim_{x\to+\infty} (5x^3) = +\infty$
2. Ομοίως είναι: $\lim_{x\to-\infty} (-3x^4+7x^2-2x) = \lim_{x\to-\infty} (-3x^4) = -\infty$
3. Επίσης είναι: $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5-7x^3+6x-2}{-4x^2-5x+11} = \lim_{x\to-\infty} (-\frac{3}{4}x^3) = +\infty$

Πλάγια ασύμπτωτη



3.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-3}$$

Εχουμε $f(x) = \frac{x^2-3x-(2x-7)}{x-3} = x - \frac{2x-7}{x-3}$

Αρα $f(x)-x = -\frac{2x-7}{x-3}$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-7}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$,

θα έχουμε $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = -2$

ή $$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(x-2)] = 0 \qquad (7)$$

Ας δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία της (7). Θεωρούμε τη γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ της f και την ευθεία με εξίσωση

$$y = x-2$$

Τότε τα σημεία με κοινή τετμημένη x που βρίσκονται στη $\mathcal{C}$ και την $y = x-2$ (σχ. 4), θα απέχουν μεταξύ τους $|f(x)-(x-2)|$. Αυτό σημαίνει, λόγω της (7),ότι η $\mathcal{C}$ πλησιάζει την ευθεία $y = x-2$ «όσο θέλουμε», δηλαδή λιγότερο από ένα αυθαίρετο $\varepsilon > 0$, αρκεί να θεωρήσουμε τα σημεία της με τετμημένη αρκετά μεγάλη. Γι αυτό η ευθεία $y = x-2$ λέγεται *(πλάγια) ασύμπτωτη της $\mathcal{C}$*.

Γενικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x+\beta$ λέγεται *(πλάγια) ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, όταν:**

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0 \quad ή \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0 \qquad (8)$$

Αν η ευθεία $y = \lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη, θα έχουμε π.χ. $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0$, δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-\lambda x] = \beta \qquad (9)$$

Τότε όμως,επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$,θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\lambda x}{x} = \lim_{x\to+\infty} [f(x)-\lambda x] \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

και συνεπώς $$\lim_{x\to+\infty} [\frac{f(x)}{x} - \lambda] = 0$$

ή $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \qquad (10)$$

Αντιστρόφως, αν ισχύουν οι (10) και (9), η ευθεία $y = \lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Ώστε:

Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x+\beta$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \quad \textbf{και} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x)-\lambda x] = \beta \quad ή$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \quad \textbf{και} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x)-\lambda x] = \beta$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το όριο στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ του λόγου $\frac{f(x)}{x}$ είναι 0, οπότε $\lambda = 0$, τότε η ευθεία $y = \lambda x+\beta$ γίνεται $y = \beta$. Συνεπώς το προηγούμενο συμπέρασμα ισχύει και για την εύρεση, αν υπάρχει, οριζόντιας ασύμπτωτης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρείτε, αν υπάρχουν, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+3}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2+x+3 είναι $\Delta = -11 < 0$ και συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Αν η ευθεία $y = \lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, τότε θα είναι

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]$$

ή

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]$$

- Για $x > 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2} = 0$, θα έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$, δηλαδή $\lambda = 1$.

Τότε είναι

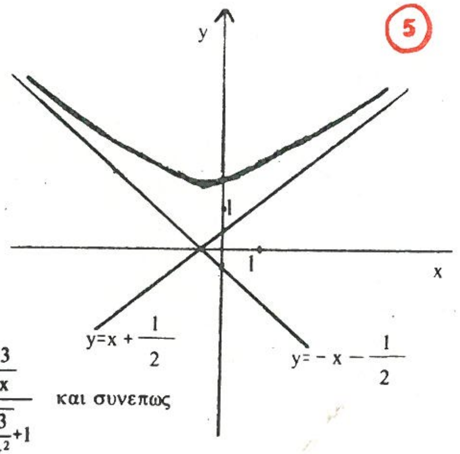
$$f(x)-x = \sqrt{x^2+x+3}-x = \frac{(\sqrt{x^2+x+3}-x)(\sqrt{x^2+x+3}+x)}{\sqrt{x^2+x+3}+x} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+x} = \frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$$

και συνεπώς $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \frac{1}{2}$,

δηλαδή $\beta = \frac{1}{2}$

Άρα η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

5



- Για $x < 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x} = -\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

και συνεπώς $\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -1$

Τότε είναι $f(x)+x = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}-x} = \dfrac{-1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$ και συνεπως

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}[f(x)+x] = -\frac{1}{2}$$

Άρα και η ευθεία $y = -x - \frac{1}{2}$ είναι επίσης ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Ασκήσεις: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

Γενικά

37 **Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της συμπεριφοράς μιας συνάρτησης όχι μόνο σε μια περιοχή του +∞ ή του -∞, αλλά και σε σημεία «γειτονικά» ενός $x_0 \in \mathbb{R}$ (όταν μάλιστα η συνάρτηση δεν ορίζεται στο ίδιο το x_0). Και στην** περίπτωση αυτή οι τιμές της συνάρτησης μπορεί να προσεγγίζουν έναν αριθμό «όσο θέλουμε» ή να γίνονται «όσο θέλουμε» μεγάλες απολύτως, αρκεί το x να παίρνει τιμές «αρκετά κοντά» στο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 2x-1$, που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η f έχει στο $x_0 = 3$ τιμή 5, ενώ οι τιμές της «κοντά» στα 3 προσεγγίζουν το 5. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε:

$$|f(x)-5| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow 3 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 3 + \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{1}{x^2}$ δεν ορίζεται στο $x_0 = 0$, ορίζεται όμως «γύρω» από το 0. Οι τιμές της g «κοντά» στο 0 είναι θετικές και γίνονται «όσο θέλουμε» μεγάλες. Πράγματι, για κάθε $M > 0$ έχουμε:

$$g(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Δηλαδή οι τιμές της g γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο), αρκεί το x να περιέχεται σε «κατάλληλο» διάστημα κέντρου 0.
Εξάλλου για τις ίδιες τιμές του x οι αντίστοιχες τιμές της -g είναι μικρότερες του -M.

3. Η συνάρτηση h με $h(x) = \sqrt{x-2}$ ορίζεται για $x \geqslant 2$. Οι τιμές της h προσεγγίζουν το 0, όταν το x προσεγγίζει το 2. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε:

$$|h(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x-2} < \varepsilon \Leftrightarrow x-2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow 2 < x < 2+\varepsilon^2$$

Ώστε οι τιμές της h περιέχονται στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$, αρκεί $x \in (2, 2+\varepsilon^2)$.

Στα παραπάνω παραδείγματα προσδιορίσαμε «πόσο κοντά» στο x_0 παίρνει τιμές η μεταβλητή x ώστε οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης να περιέχονται σε προκαθορισμένο διάστημα κέντρου $l \in \mathbb{R}$ ή σε προκαθορισμένη περιοχή του +∞ ή του -∞. Συγκεκριμένα, για κάθε $\varepsilon > 0$ ή $M > 0$ ορίσαμε αντιστοίχως έναν αριθμό $\delta > 0$ (που εξαρτάται από το ε ή το M) τον οποίο δεν πρέπει να υπερβαίνει η απόσταση του x από το x_0.
(Στα παραδείγματά μας είναι κατά σειρά $\delta = \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{\sqrt{M}}$ και ε^2).

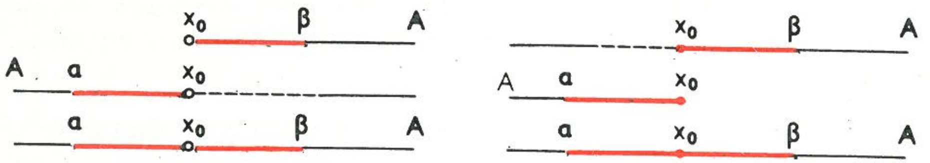
Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

3.8 Η μελέτη μιας συνάρτησης f σε «γειτονικά» σημεία ενός $x_0 \in \mathbb{R}$ προϋποθέτει ότι στο πεδίο ορισμού της A υπάρχουν τέτοια σημεία, ανεξάρτητα αν το ίδιο το x_0 ανήκει ή όχι στο A. Αυτή η προϋπόθεση σημαίνει πιο συγκεκριμένα ότι:

σε κάθε ανοικτό διάστημα Δ_{x_0} κέντρου x_0 υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το x_0, δηλαδή το σύνολο $\Delta x_0 \cap A - \{x_0\}$ είναι διαφορετικό από το κενό. Στην περίπτωση αυτή το x_0 λέγεται **σημείο συσσωρεύσεως** του A. Κάθε σύνολο $\Delta x_0 \cap A - \{x_0\}$ λέγεται **περιοχή του x_0** (ως προς το A).

Στα επόμενα περιοριζόμαστε στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού A περιέχει τουλάχιστο ένα ανοικτό διάστημα με άκρο x_0, πράγμα που σημαίνει ότι το A περιέχει οπωσδήποτε:

6



α β

- ή ένα διάστημα της μορφής (x_0, β), όταν η f δεν ορίζεται «αριστερά» του x_0
- ή ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), όταν η f δεν ορίζεται «δεξιά» του x_0
- ή ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, άρα και ένα διάστημα της μορφής $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ χωρίς το κέντρο x_0.

Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού A περιέχει τουλάχιστο ένα ανοικτό διάστημα με άκρο x_0. Θα λέμε ότι *η f έχει στο x_0 όριο:*

- *το $l \in \mathbb{R}$,* **όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε**

$$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad (1)$$

για κάθε $x \in A$ με $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$

- *το $+\infty$,* **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε**

$$f(x) > M \qquad (2)$$

για κάθε $x \in A$ με $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$

- *το $-\infty$,* **όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε**

$$f(x) < -M \qquad (3)$$

για κάθε $x \in A$ με $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$

Ο δ εξαρτάται κάθε φορά από το ε ή το M αντιστοίχως, αλλά δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Μπορεί να αντικαθίσταται από ένα οποιοδήποτε θετικό $\delta' < \delta$. Εξάλλου *$x \in \Delta$ με $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$* σημαίνει ότι το x ανήκει σε μια περιοχή του x_0, η οποία, για «αρκετά μικρό» δ, συμπίπτει με ένα από τα διαστήματα $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ ή την ένωσή τους. Μπορούμε λοιπόν να λέμε ότι:

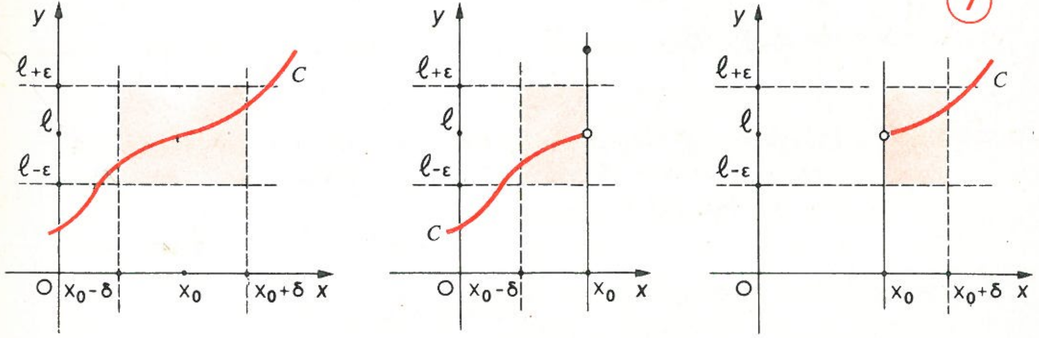
Η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν, για κάθε διάστημα Δ_L οι τιμές της ***σε μια περιοχή του x_0*** *ανήκουν όλες στο Δ_L.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο παραπάνω ορισμός καθώς και η τελευταία ενιαία διατύπωσή του ισχύουν και στη γενικότερη περίπτωση που το x_0 είναι, απλώς, ένα σημείο συσσωρεύσεως του A.

Στο σχήμα 7 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω ορισμού στην περίπτωση που το όριο της f στο x_0 είναι $l \in \mathbb{R}$. Τα σημεία της γραφικής παράστασης C της f με τετμημένη $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, εκτός ίσως εκείνου που αντιστοιχεί στο x_0, βρίσκονται στο ορθογώνιο που ορίζεται από την ταινία των ευθειών $y = l-\varepsilon$, $y = l+\varepsilon$ και την ταινία των ευθειών $x = x_0-\delta$ και $x = x_0+\delta$ (σχ. 7α).

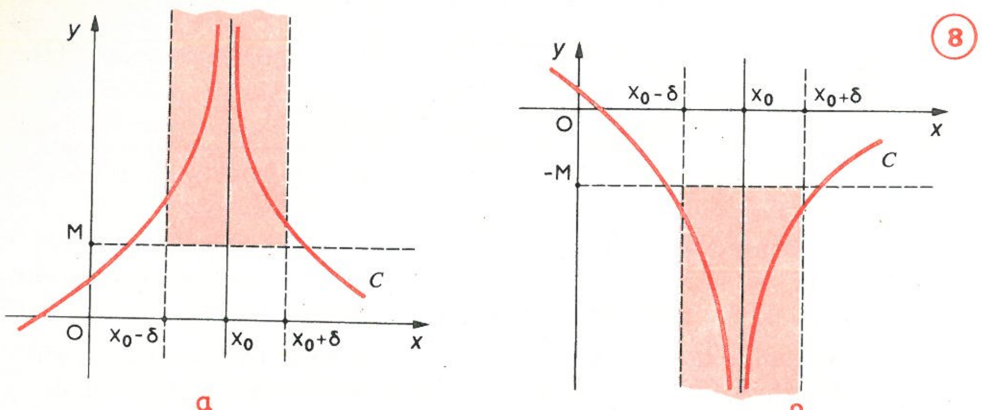
7



α β γ

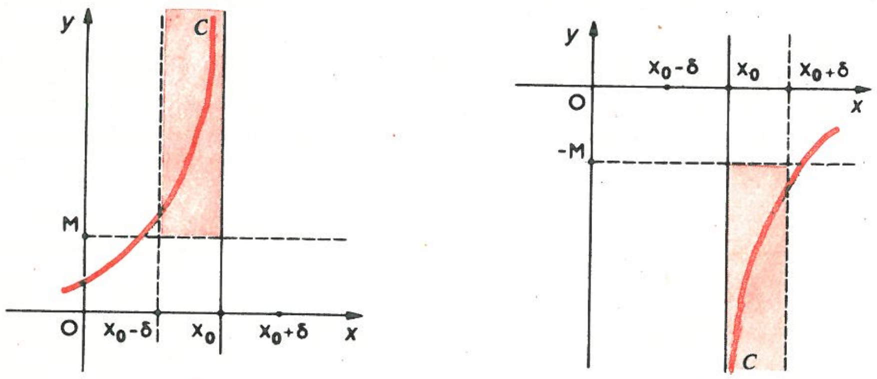
Ειδικότερα στο σχήμα 7β το ορθογώνιο περιορίζεται από τις ευθείες $x = x_0-\delta$ και $x = x_0$, γιατί η συνάρτηση δεν ορίζεται στο διάστημα $(x_0, x_0+\delta)$. Ανάλογη είναι η ερμηνεία του σχήματος 7γ.

Εξάλλου, αν η f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ (ή $-\infty$) τα σημεία της γραφικής της παράστασης με τετμημένη $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ βρίσκονται «πάνω» από την ευθεία $y = M$ (ή «κάτω» από την ευθεία $y = -M$) (σχήματα 8α και 8β). Τα σημεία αυτά απέχουν από την ευθεία $x = x_0$ λιγότερο από δ. Διαπιστώνουμε ότι η $\mathcal{C}$ πλησιάζει την ευθεία $x = x_0$ όλο και «περισσότερο», αρκεί να θεωρήσουμε σημεία της με τεταγμένη μεγαλύτερη από ένα αρκετά μεγάλο $M > 0$ (μικρότερη του $-M$).



α β

Ανάλογες καταστάσεις αισθητοποιούν και τα σχήματα 8γ και 8δ.



γ δ

Στις περιπτώσεις του σχήματος 8 η ευθεία

$$x = x_0$$

λέγεται (κατακόρυφη) ασύμπτωτη της $\mathcal{C}$.

Όπως και στην περίπτωση ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$, αποδεικνύεται η μοναδικότητα και του ορίου στο x_0.

Για να δηλώσουμε ότι η f έχει στο x_0 όριο L, γράφουμε συμβολικά:

$$\lim_{x_0} f = L \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ διατυπώνουμε ανάλογες παρατηρήσεις με εκείνες της § 3.2. Δηλαδή

- Είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-l] = 0$

  $\lim_{x_0} f = l \Leftrightarrow \lim_{x_0}(-f) = -l$

  $\lim_{x_0} f = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x_0}(-f) = -\infty$

- Το όριο μιας συνάρτησης στο x_0 δεν μεταβάλλεται αν περιορίσουμε τη συνάρτηση σε οποιαδήποτε περιοχή του x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το όριο στο x_0 της σταθερής συνάρτησης u με τιμή c είναι το c, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $|u(x)-c| = 0 < \varepsilon$.

2. Το όριο στο x_0 της ταυτοτικής συνάρτησης ι με $\iota(x) = x$ είναι το x_0. Πράγματι, έστω (ένας οποιοσδήποτε) $\varepsilon > 0$. Τότε

$$|\iota(x)-x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

Έτσι, αν εκλέξουμε ως δ το ε (ή οποιοδήποτε μικρότερό του), για κάθε $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta) - \{x_0\}$ έχουμε

$$|\iota(x)-x_0| < \varepsilon$$

που σημαίνει $\lim_{x\to x_0}\iota(x) = x_0$

3. Είναι $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$

Η συνάρτηση $\frac{x^2-4}{x-2}$ έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για $x \neq 2$ έχουμε:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x+2)\ (x-2)}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+2-4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon$$

Έτσι, αν εκλέξουμε ως δ το ε (ή οποιοδήποτε μικρότερό του), τότε η $\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon$ θα ισχύει για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ με $x \neq 2$, που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{|x|}{x}$ δεν έχει όριο στο 0.

Η f ορίζεται στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Δηλαδή η f είναι φραγμένη και συνεπώς δε μπορεί να έχει όριο $+\infty$ ή $-\infty$.

Έστω ότι η f έχει στο 0 όριο $l \in \mathbb{R}$. Τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in (-\delta, \delta)-\{0\}$ να έχουμε

$$|f(x)-l| < \varepsilon$$

Έτσι όμως για $x > 0$ θα είναι

$$|1-l| < \varepsilon$$

ενώ για $x < 0$

$$|-1-l| < \varepsilon \Leftrightarrow |1+l| < \varepsilon$$

Συνεπώς

$$2\varepsilon > |1-l| + |1+l| \geqslant |1-l+1+l| = 2$$

Αλλά η σχέση αυτή δεν αληθεύει για κάθε $\varepsilon > 0$ (π.χ. για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ γίνεται $1 > 2$).

Άρα η f δεν έχει όριο στο 0.

Πλευρικά όρια συνάρτησης

3.9 Αν μια συνάρτηση f δεν έχει όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$, δεν αποκλείεται να έχει στο x_0 όριο ο περιορισμός της σ' ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) ή της μορφής (α, x_0). Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{|x|}{x}$ δεν έχει όριο στο 0 (§ 3.8, εφαρ.). Αλλά ο περιορισμός f_1 της f στο $(0, +\infty)$ είναι η σταθερή συνάρ-

τηση με τιμή 1 και συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1$. Επίσης ο περιορισμός f_2 της f στο $(-\infty, 0)$ είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή -1 και συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = -1$. Τα όρια των συναρτήσεων f_1 και f_2 στο 0 χαρακτηρίζονται αντιστοίχως ως *όριο από δεξιά* και *όριο από αριστερά της f στο 0*.

Γενικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A.**

- **Αν το A περιέχει τουλάχιστο ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) και ο περιορισμός f_1 της f στο (x_0, β) έχει στο x_0 όριο L, θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 *όριο από δεξιά* το L.**
- **Αν το A περιέχει τουλάχιστο ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) και ο περιορισμός f_2 της f στο (α, x_0) έχει στο x_0 όριο L, θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 *όριο από αριστερά* το L.**

Γράφουμε συμβολικά:

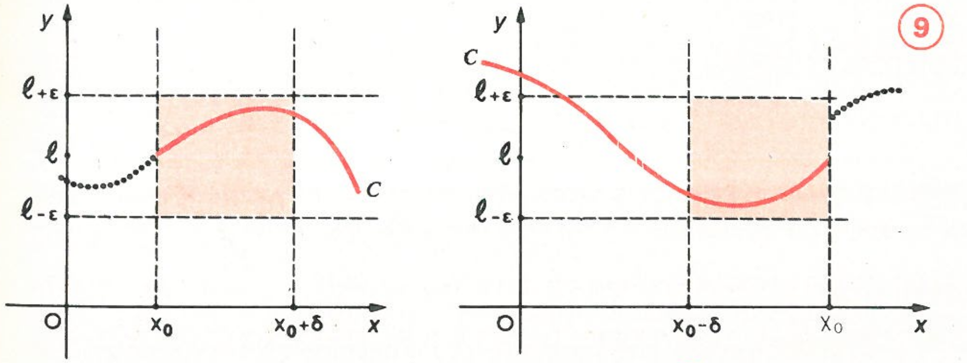
$\lim\limits_{x_0^+} f = L$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ για το όριο από δεξιά και

$\lim\limits_{x_0^-} f = L$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ για το όριο από αριστερά.

Τα «από δεξιά» και «από αριστερά» όρια μιας συνάρτησης χαρακτηρίζονται και ως *«πλευρικά όρια»*.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν η f δεν ορίζεται «αριστερά» του x_0, δηλαδή υπάρχει διάστημα της μορφής $(x_0-\delta, x_0)$ έξω από το A, δεν υπάρχει λόγος να μιλάμε για «όριο

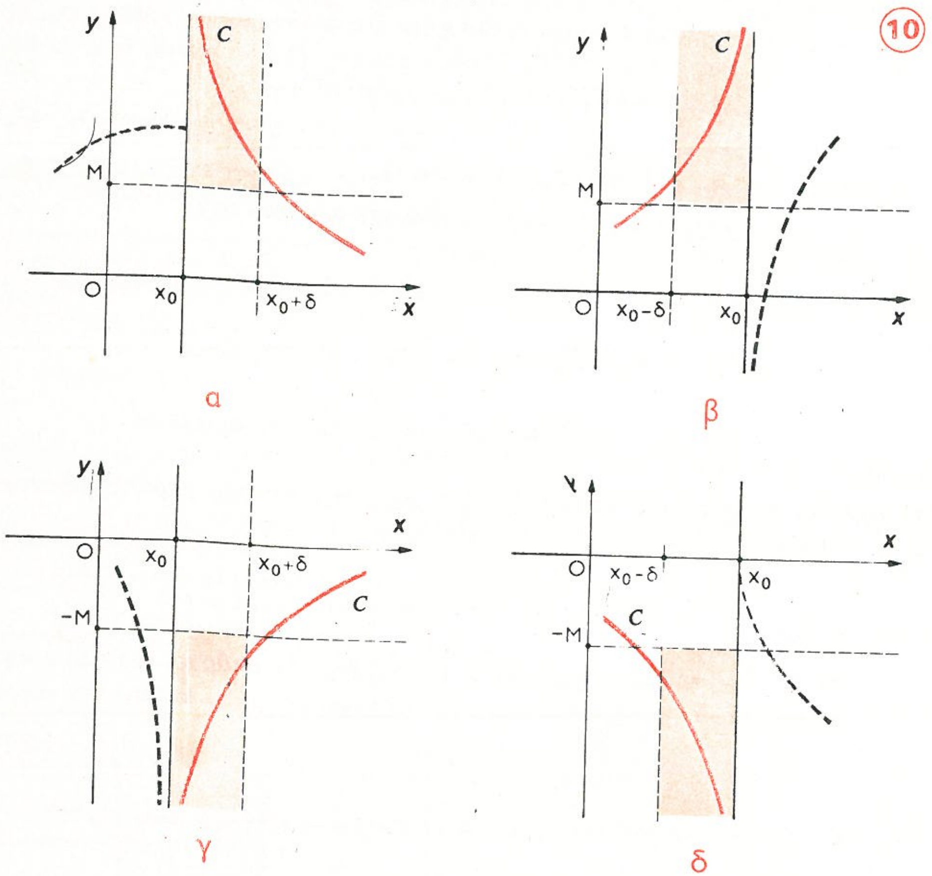


α β

από δεξιά στο x_0», αφού ως έννοια συμπίπτει με το «όριο στο x_0». Επίσης στην περίπτωση που η f δεν ορίζεται «δεξιά» του x_0, οι έννοιες «όριο από αριστερά στο x_0» και «όριο στο x_0» ταυτίζονται.

Στο σχήμα 9 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία των πλευρικών ορίων τής f στο x_0, όταν τα όρια αυτά είναι πεπερασμένα.

Επίσης στο σχήμα 10 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία των πλευρικών ορίων στο x_0, όταν είναι $+\infty$ (σχ. 10α, β) ή $-\infty$ (σχ. 10γ, δ). Ειδικότερα στην περίπτωση αυτή



η ευθεία $x = x_0$ είναι επίσης *(κατακόρυφη) ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Συνήθως η αναζήτηση της κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της f γίνεται στα σημεία $x_0 \in \mathbb{R}$, στα οποία η f δεν ορίζεται.

Σχετικά με τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης ισχύει το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω f μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού A περιέχει ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Η f έχει στο x_0 όριο $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά της όρια στο x_0 και είναι ίσα με L.**

Απόδειξη. Αν $\lim\limits_{x_0} f = L$, τότε και ο περιορισμός της f στο διάστημα (x_0, β) ή (α, x_0) έχει επίσης όριο το L. Είναι δηλαδή

$$\lim_{x_0^+} f = L \qquad \text{και} \qquad \lim_{x_0^-} f = L \tag{4}$$

Αντιστρόφως, αν ισχύουν οι (4) και είναι π.χ. L πραγματικός, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$, τέτοια ώστε:

- για κάθε $x \in (x_0, x_0+\delta_1)$ να είναι $|f(x) - L| < \varepsilon$
- για κάθε $x \in (x_0-\delta_2, x_0)$ να είναι $|f(x)-L| < \varepsilon$

Έτσι, αν πάρουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$ θα είναι

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x_0} f = L$

Με όμοιο τρόπο γίνεται η απόδειξη για $L = +\infty$ ή $-\infty$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι το όριο στο 2 της συνάρτησης f με $f(x) = |x-2|+x$ είναι 2.**

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Ο περιορισμός της f στο $(2,+\infty)$ είναι η συνάρτηση $f_1(x) = x-2+x = 2x-2$ και το όριό της στο $x_0 = 2$ είναι 2.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$|f_1(x)-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |(2x-2)-2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x \in (2,\ 2 + \frac{\varepsilon}{2})$$

Έτσι, αν εκλέξουμε $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, η $|f_1(x)-2| < \varepsilon$ θα ισχύει για κάθε $x \in (2, 2+\delta)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f_1(x) = 2$, οπότε θα έχουμε και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$.

Επίσης ο περιορισμός της f στο $(-\infty, 2)$ είναι η σταθερή συνάρτηση $f_2(x) = -x+2+x = 2$ για την οποία είναι $\lim\limits_{x\to 2} f_2(x) = 2$. Άρα θα έχουμε και $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, θα είναι και $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$.

2. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x+4, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$ έχει στο $x_0 = 1$ όριο 3.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Ο περιορισμός της g στο $(1,+\infty)$ είναι η συνάρτηση $g_1(x) = 3x$ καί βρίσκουμε εύκολα ότι είναι $\lim\limits_{x\to 1} g_1(x) = 3$.

Άρα θα είναι και $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 3$.

Ομοίως ο περιορισμός της g στο $(-\infty, 1)$ είναι η συνάρτηση $g_2(x) = -x+4$ και είναι $\lim\limits_{x\to 1} g_2(x) = 3$.

Άρα είναι και $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 3$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 3$, θα έχουμε και $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$.

3. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση [x] δεν έχει όριο σε κανένα $x_0 \in \mathbb{Z}$.

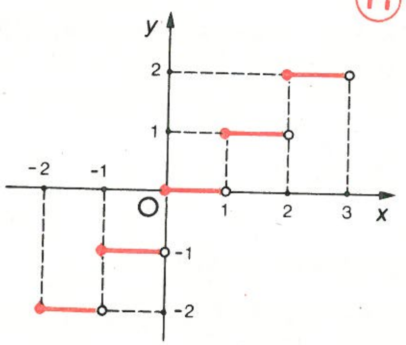
Πράγματι, η συνάρτηση [x] έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$. Ο περιορισμός της [x] στο (x_0, x_0+1) είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή x_0 και συνεπώς

$$\lim_{x\to x_0^+} [x] = x_0$$

Ομοίως, ο περιορισμός της [x] στο (x_0-1, x_0) είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή $x_0 - 1$ και συνεπώς $\lim\limits_{x\to x_0^-} [x] = x_0 - 1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0^+} [x] \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} [x]$, η συνάρτηση [x] δεν έχει όριο στο x_0.

11



Ασκήσεις: 15, 16, 17

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΟΥ

Το όριο γενικά

3.10 Στα προηγούμενα δώσαμε τον ορισμό του ορίου μιας συνάρτησης στο $+\infty$, στο $-\infty$ και στο $x_0 \in \mathbb{R}$, γενικά δηλαδή σ' ένα σημείο $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Θα κάνουμε δυο βασικές παρατηρήσεις:

1. Προϋπόθεση για να έχει νόημα ένας τέτοιος ορισμός είναι η συνάρτηση να ορίζεται[1] σε σημεία «γειτονικά» του σ. Το σ λοιπόν δεν είναι «απομονωμένο» από το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι:

(1) Στο ίδιο το σ η συνάρτηση μπορεί να μην ορίζεται ή και αν ορίζεται δε μας ενδιαφέρει εδώ η τιμή της.

- Αν $\sigma \in \mathbb{R}$, σε κάθε διάστημα Δ_σ με **κέντρο** σ υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το σ.

- Αν $\sigma = +\infty$ (ή $-\infty$) το A δεν είναι φραγμένο άνω (ή κάτω), που σημαίνει ότι και πάλι σε κάθε διάστημα Δ_σ με **άκρο** τώρα το σ, υπάρχουν σημεία του A.

Γενικά λοιπόν υποθέτουμε ότι

$$(\Delta_\sigma \cap A) - \{\sigma\} \neq \varnothing$$

Στις περιπτώσεις αυτές (βλ. και § 3.8) το σ λέγεται **σημείο συσσωρεύσεως** του A. Συνεπώς:

Το όριο συνάρτησης έχει νόημα μόνο σε σημεία συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Δεν έχει νόημα το όριο ακολουθίας στο $k \in \mathbb{N}$, γιατί το k δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathbb{N}$, αφού π.χ. το διάστημα $(k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})$ δεν περιέχει άλλο, εκτός του k, στοιχείο του $\mathbb{N}$. Το μόνο σημείο συσσωρεύσεως του $\mathbb{N}$ είναι το $+\infty$, γιατί σε κάθε διάστημα $(\alpha, +\infty)$ υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{N}$.**

2. **Αντίθετα, έχει νόημα το όριο μιας συνάρτησης στο x_0, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι σημείο ή άκρο διαστήματος που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της.**

3. Αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{Q}$, έχει νόημα να μιλάμε για όριο της f στο $x_0 \in \mathbb{R}$, αφού σε κάθε περιοχή του x_0 υπάρχουν ρητοί, δηλαδή κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathbb{Q}$.
Π.χ. αν $f(x) = x^2$ με $x \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

2. Μπορούμε τώρα να περιλάβουμε τους ορισμούς των § 3.2, 3.3, 3.8 και 3.9 στην παρακάτω γενική διατύπωση:

ΟΡΙΣΜΟΣ	**Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και σ ένα σημείο συσσωρεύσεως του A. Θα λέμε ότι η f έχει στο σ όριο L, όταν για κάθε ανοικτό διάστημα Δ_L[1] οι τιμές της σε μια περιοχή του σ ανήκουν όλες στο Δ_L.**

(1) Με κέντρο L, αν $L \in \mathbb{R}$, ή με άκρο L, αν $L = +\infty$ ή $-\infty$.

Αυτό σημαίνει ακριβώς ότι:

Για κάθε ανοικτό διάστημα Δ_L υπάρχει αντίστοιχο διάστημα Δ_σ, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta_\sigma \cap A$, εκτός[1] του σ, να είναι $f(x) \in \Delta_L$.

Γενικές Ιδιότητες

3.11 Στα επόμενα θεωρούμε συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού Α που έχουν όριο σ' ένα σημείο συσσωρεύσεως του Α

Στις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται η έκφραση «σε μια περιοχή του σ ισχύει η συνθήκη p», αυτό θα σημαίνει ότι υπάρχει διάστημα Δ_σ, τέτοιο ώστε η p ισχύει για κάθε x που ανήκει στο σύνολο

$$A_1 = (\Delta_\sigma \cap A) - \{\sigma\}$$

Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε **να περιορίζουμε τη συνάρτηση στο A_1**, αφού, όπως ξέρουμε (παρατηρήσεις § 3.2, 3.3. και 3.8), τα όρια παραμένουν αμετάβλητα.

Ύστερα από τις παραπάνω διευκρινίσεις οι γενικές ιδιότητες του ορίου των συναρτήσεων στο σ, διατυπώνονται ως εξής:

(Οι αποδείξεις είναι εντελώς ανάλογες με εκείνες που έγιναν στο κεφάλαιο 2. Γι' αυτό οι περισσότερες αφήνονται ως άσκηση).

1. Αν μια συνάρτηση f έχει στο σ όριο μηδέν και η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ, τότε η f·g έχει στο σ επίσης όριο μηδέν.

Η απόδειξη στην περίπτωση π.χ. $\sigma \in \mathbb{R}$ γίνεται ως εξής:

Αφού η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ, θα υπάρχει αριθμός $\varphi > 0$ καθώς και διάστημα Δ_σ κέντρου σ, τέτοια ώστε, αν $A_1 = (\Delta_\sigma \cap A) - \{\sigma\}$, για κάθε $x \in A_1$ να είναι

$$|g(x)| \leqslant \varphi \tag{1}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\frac{\varepsilon}{\varphi} > 0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = 0$, θα υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\sigma-\delta, \sigma+\delta) - \{\sigma\}$ να είναι

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{\varphi}$$

ή

$$|f(x)|\,|g(x)| < \frac{\varepsilon}{\varphi}\cdot\varphi \qquad \text{[λόγω της (1)]}$$

ή

$$|f(x)\cdot g(x)| < \varepsilon$$

Άρα $\lim\limits_{x\to\sigma} (f\cdot g)(x) = 0$

(1) Η εξαίρεση είναι περιττή όταν $\sigma \notin A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\eta\mu x}{x}$, ορισμένη στο $\mathbb{R}^*$, είναι γινόμενο της $\frac{1}{x}$ που έχει στο $+\infty$ όριο 0 με τη φραγμένη συνάρτηση ημx, θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

2. Έστω ότι για τις συναρτήσεις f, g σε μια περιοχή του σ είναι $|g(x)| \leqslant |f(x)|$. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = 0$, τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$

Πράγματι για $x \in \mathbb{R}^*$, είναι $|x\eta\mu\frac{1}{x}| = |x|\,|\eta\mu\frac{1}{x}| \leqslant |x|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, θα έχουμε και

$\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0.$

2. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$

Πράγματι, για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $\sqrt{x^2+1} - x > 0$ και:

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.

3. *Το κριτήριο μη σύγκλισης:* **Μια συνάρτηση f** *δεν έχει* **στο σ πεπερασμένο όριο[1], αν** *υπάρχει* **$\varepsilon > 0$, ώστε σε** *κάθε* **διάστημα Δ_σ** *υπάρχουν* **x_1, x_2 τέτοια ώστε:**

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$ δεν έχει πεπερασμένο όριο στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$. Πράγματι, από κάθε διάστημα $(M, +\infty)$ εκλέγουμε σημεία της μορφής $x_1 = 2\nu\pi$ και $x_2 = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2}$ (αρκεί $\nu > \frac{M}{2\pi}$). Έτσι θα έχουμε $|f(x_1)-f(x_2)| = |0-1| = 1 \geqslant \varepsilon$ (αρκεί να

(1) Δηλαδή δεν έχει όριο ή έχει το $+\infty$ ή το $-\infty$

εκλέξουμε $\varepsilon \leqslant 1$, π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Άρα η f δεν έχει πεπερασμένο όριο στο $+\infty$.

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε για το όριο στο $-\infty$.

4. Αν μια συνάρτηση έχει στο σ πεπερασμένο όριο l, τότε είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, π.χ. $\varepsilon = 1$. Τότε υπάρχει διάστημα Δ_σ, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A \cap \Delta_\sigma$, εκτός του σ, να έχουμε $|f(x)-l| < 1$ ή ισοδύναμα

$$l-1 < f(x) < l+1$$

5. Αν μια συνάρτηση f έχει στο σ:

- **πεπερασμένο όριο, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)| = |\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)|$**
- **όριο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)| = +\infty$**

6. Έστω ότι μια συνάρτηση f έχει στο σ όριο $L \neq 0$. Τότε σε μια περιοχή του σ οι τιμές της f έχουν το πρόσημο του ορίου της[1].

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν σ' ένα διάστημα Δ_σ οι τιμές της f είναι θετικές (αρνητικές) και υπάρχει στο σ το όριό της, τότε το όριο αυτό αποκλείεται να είναι αρνητικό (θετικό), αλλά δεν αποκλείεται να είναι 0. Π.χ. οι τιμές της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι θετικές, αλλά το όριό της στο $+\infty$ είναι 0.

2. Αν το όριο στο σ μιας συνάρτησης f είναι $l \in \mathbb{R}^*$, τότε όχι μόνο η f αλλά και η $\frac{1}{f}$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ.

   Πράγματι, αποδεικνύεται (§ 2.12) ότι υπάρχει διάστημα Δ_σ τέτοιο ώστε

   $$\frac{|l|}{2} < |f(x)| < \frac{3|l|}{2}$$

3. Αν για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) \geqslant 0$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$, (βλέπε και § 2.21, εφαρμ. 1)

Ασκήσεις: 18, 19

(1) Για την ενιαία διατύπωση της ιδιότητας αυτής θεωρούμε ως πρόσημο του $+\infty$ το + και του $-\infty$ το -.

Όρια και πράξεις

3.12 Τα θεωρήματα που συσχετίζουν όρια και πράξεις συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού A είναι τα ακόλουθα:

1. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν στο σ πεπερασμένα όρια. Τότε:

(i) $\lim\limits_{\sigma}(f+g) = \lim\limits_{\sigma} f + \lim\limits_{\sigma} g$

(ii) $\lim\limits_{\sigma}(f\cdot g) = (\lim\limits_{\sigma} f)\cdot(\lim\limits_{\sigma} g)$

(iii) $\lim\limits_{\sigma}(\lambda\cdot f) = \lambda\cdot\lim\limits_{\sigma} f \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

(iv) Αν $\lim\limits_{\sigma} g \neq 0$, τότε $\lim\limits_{\sigma}\frac{1}{g} = \frac{1}{\lim\limits_{\sigma} g}$, $\lim\limits_{\sigma}\frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_{\sigma} f}{\lim\limits_{\sigma} g}$

(v) Αν για κάθε $x \in A$, $f(x) \geqslant 0$ και $k \in \mathbb{N}^*$, τότε $\lim\limits_{\sigma}\sqrt[k]{f} = \sqrt[k]{\lim\limits_{\sigma} f}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι προτάσεις (i) και (ii) επεκτείνονται επαγωγικά και για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων, οπότε είναι και $\lim\limits_{\sigma} f^\kappa = (\lim\limits_{\sigma} f)^\kappa$. Επίσης ισχύουν οι παρατηρήσεις 2 και 3 της § 3.4 αρκεί να αντικατασταθεί το «$+\infty$» με το «σ».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε το όριο στο 2 τη συνάρτησης f με

$$f(x) = 2x^3 - 7x + \sqrt{2x-1}$$

Επειδή: $2x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$, το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3) = 2\lim\limits_{x\to 2}(x\cdot x\cdot x) = 2\cdot 2^3 = 16$

$\lim\limits_{x\to 2}(7x) = 7\cdot 2 = 14$

και $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x-1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)} = \sqrt{3}$.

Συνεπώς θα είναι

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(2x^3) - \lim_{x\to 2}(7x) + \lim_{x\to 2}\sqrt{2x-1} = 16-14+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$$

Έστω ότι η συνάρτηση f έχει στο σ όριο + ∞. Τότε:

I **Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη κάτω σε μια περιοχή του σ, θα είναι**

$$\lim_{\sigma}(f+g) = +\infty$$

II **Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη κάτω σε μια περιοχή του σ από θετικό αριθμό, θα είναι**

$$\lim_{\sigma}(f\cdot g) = +\infty$$

III **Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη άνω σε μια περιοχή του σ από αρνητικό αριθμό, θα είναι**

$$\lim_{\sigma}(f\cdot g) = -\infty$$

Ανάλογη διατύπωση γίνεται στην περίπτωση που η f έχει στο σ όριο -∞.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Αν $\lim_{\sigma} f = +\infty$ και
   - $\lim_{\sigma} g = +\infty$ ή $\lim_{\sigma} g = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{\sigma}(f+g) = +\infty$
   - $\lim_{\sigma} g = +\infty$ ή $\lim_{\sigma} g = l \in \mathbb{R}^*_+$, τότε $\lim_{\sigma}(fg) = +\infty$
   - $\lim_{\sigma} g = -\infty$ ή $\lim_{\sigma} g = l \in \mathbb{R}^*_-$, τότε $\lim_{\sigma}(fg) = -\infty$
2. Αν $\lim_{\sigma} f = -\infty$ και
   - $\lim_{\sigma} g = -\infty$ ή $\lim_{\sigma} g = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{\sigma}(f+g) = -\infty$
   - $\lim_{\sigma} g = +\infty$ ή $\lim_{\sigma} g = l \in \mathbb{R}^*_+$, τότε $\lim_{\sigma}(fg) = -\infty$
   - $\lim_{\sigma} g = -\infty$ ή $\lim_{\sigma} g = l \in \mathbb{R}^*_-$, τότε $\lim_{\sigma}(fg) = +\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι $\lim_{x\to+\infty}(2-\text{συν}x+x^2) = +\infty$. Πράγματι, το $2-\text{συν}x+x^2$ είναι το άθροισμα των τιμών στο x των συναρτήσεων f με $f(x) = x^2$ και g με $g(x) = 2-\text{συν}x$. Η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ όριο $+\infty$, ενώ η g είναι κάτω φραγμένη από το 1, γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $1 \leqslant 2-\text{συν}x$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 2, θα είναι $\lim_{x\to+\infty}(2-\text{συν}x+x^2) = +\infty$.

2. Επίσης είναι $\lim_{x\to-\infty} x(\text{ημ}^2x-2) = +\infty$. Πράγματι, το $x(\text{ημ}^2x-2)$ είναι το γινόμενο των τιμών στο x των συναρτήσεων f με $f(x) = x$ και g με $g(x) = \text{ημ}^2x-2$. Η f έχει στο $-\infty$ όριο $-\infty$, ενώ η g είναι άνω φραγμένη από το -1, γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\text{ημ}^2x-2 \leqslant -1$. Άρα θα είναι $\lim_{x\to-\infty} x(\text{ημ}^2x-2) = +\infty$.

3.(i) Αν $\lim_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)} = 0$

(ii) Αν $\lim_{x\to\sigma} f(x) = 0$, και σε μια περιοχή του σ είναι:

- **$f(x) > 0$, τότε $\lim_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)} = +\infty$**
- **$f(x) < 0$, τότε $\lim_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)} = -\infty$**

Αν στον πίνακα της § 2.23 θέσουμε αντί α_ν και β_ν τις συναρτήσεις f και g αντιστοίχως, τότε θα έχουμε αντίστοιχο ανακεφαλαιωτικό πίνακα για τα θεωρήματα 1, 2 και 3.

Όρια και διάταξη

3.13 Σχετικά με το όριο συναρτήσεων στο σ ισχύουν και οι επόμενες προτάσεις που είναι ανάλογες με αντίστοιχες προτάσεις που αφορούν στη σύγκλιση, διάταξη και μονοτονία των ακολουθιών.

1. Έστω ότι για τις συναρτήσεις f και g σε μια περιοχή του σ είναι $f(x) \leqslant g(x)$.

- **Αν οι f και g έχουν στο σ πεπερασμένα όρια, τότε $\lim_{x\to\sigma} f(x) \leqslant \lim_{x\to\sigma} g(x)$.**
- **Αν $\lim_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$.**
- **Αν $\lim_{x\to\sigma} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to\sigma} f(x) = -\infty$.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επειδή (§ 1.2) $x-1 < [x]$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$, θα έχουμε $\lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$.

Ομοίως, επειδή $[x] \leqslant x$, θα έχουμε $\lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$.

2. Έστω ότι για τις συναρτήσεις f, t, g σε μια περιοχή του σ είναι

$$f(x) \leqslant t(x) \leqslant g(x)$$

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο σ όριο $l\in\mathbb{R}$, τότε και η t έχει στο σ όριο l.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση P με $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_0$ όπου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ έχουμε (§ 3.12, 1)

$$\lim_{x\to x_0} (\alpha_k x^k) = \alpha_k \lim_{x\to x_0} (\underbrace{x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{k \text{ παράγοντες}}) = \alpha_k x_0^k$$

Τότε θα έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) + \ldots + \lim_{x\to x_0} (\alpha_1 x) + \alpha_0$$

$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0)$$

2. **Αν τα πολυώνυμα $P_1(x)$ και $P_2(x)$ έχουν κοινή ρίζα ρ, να βρεθεί το όριο στο ρ (ή ρ^+ ή ρ^-) της συνάρτησης $\frac{P_1}{P_2}$**

Επειδή $\lim\limits_{x\to\rho} P_1(x) = P_1(\rho) = 0$ και $\lim\limits_{x\to\rho} P_2(x) = P_2(\rho) = 0$, είναι φανερό ότι δε μπορούμε να εφαρμόσουμε, για το όριο στο ρ, τα θεωρήματα 1, iv ή 3, ii της § 3.12.

Από την $P_1(\rho) = P_2(\rho) = 0$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν πολυώνυμα $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ τέτοια ώστε $P_1(x) = (x-\rho)\,Q_1(x)$, $P_2(x) = (x-\rho)\,Q_2(x)$ και συνεπώς για $x \neq \rho$.

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- **$Q_2(\rho) \neq 0$.** Τότε $\lim\limits_{x\to\rho} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \lim\limits_{x\to\rho} \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\rho} Q_1(x)}{\lim\limits_{x\to\rho} Q_2(x)} = \frac{Q_1(\rho)}{Q_2(\rho)}$

- **$Q_1(\rho) = Q_2(\rho) = 0$.** Τότε εργαζόμαστε με τις συναρτήσεις Q_1 και Q_2 όπως αρχικά με τις P_1 και P_2.

- **$Q_1(\rho) \neq 0$ και $Q_2(\rho) = 0$.** Έστω ότι το ρ είναι ρίζα πολλαπλότητας κ του $Q_2(x)$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $Q_2'(x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{Q_1(x)}{Q_2'(x)} \cdot \frac{1}{(x-\rho)^\kappa}, \text{ με } Q_2'(\rho) \neq 0.$$

Αν ο κ είναι άρτιος, τότε $\lim\limits_{x\to\rho} \frac{1}{(x-\rho)^\kappa} = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to\rho} \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = +\infty$ ή $-\infty$

Αν ο κ είναι περιττός, τότε $\lim\limits_{x\to\rho^+} \frac{1}{(x-\rho)^\kappa} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\rho^-} \frac{1}{(x-\rho)^\kappa} = -\infty$

Τότε τα πλευρικά όρια στο ρ του $\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$ δεν συμπίπτουν και συνεπώς δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\rho} \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$.

Π.χ. επειδή για $x \neq 2$, $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$, θα είναι

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} = -4$$

Επίσης για $x \neq 1$, έχουμε $\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{1}{x-1}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{x-2} = -3$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, θα έχουμε

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2(x-2)} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2(x-2)} = +\infty.$$

Ασκήσεις: 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

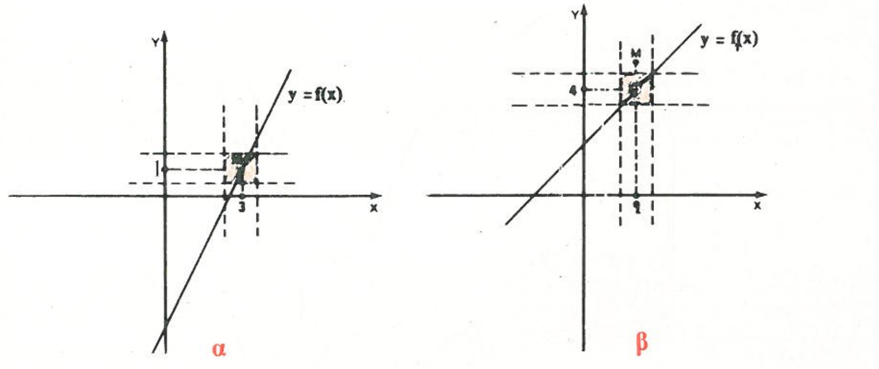
Συνεχής συνάρτηση

3.14 Είδαμε ότι μια συνάρτηση f που έχει όριο σ' ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται στο σημείο αυτό, και αν ορίζεται, η τιμή της $f(x_0)$ μπορεί να διαφέρει από το $\lim\limits_{x_0} f$. Όμως σε πολλές περιπτώσεις το όριο και η τιμή της f στο x_0 συμπίπτουν, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

Π.χ. αν $f(x) = 2x-5$ (σχ. 12α) είναι $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (2x-5) = 1 = f(3)$.

12



α β

Εξάλλου η συνάρτηση f_1 με $f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{2\}$ και είναι

$$\lim_{x\to 2} f_1(x) = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$$

Έτσι, αν f είναι μια επέκταση στο $\mathbb{R}$ της f_1 με π.χ. $f(2) = 5$, θα έχουμε (σχ. 12β)

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} f_1(x) = 4 \neq f(2)$$

Στην περίπτωση που ισχύει η (1) η συνάρτηση f χαρακτηρίζεται *ως συνεχής στο x_0*. Συγκεκριμένα:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Μια συνάρτηση f λέγεται *συνεχής σ' ένα σημείο x_0* του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι δεν μπορεί να γίνει λόγος για συνέχεια μιας συνάρτησης, παρά μόνο σε σημεία συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού της.

Εξάλλου, σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου, μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $x \neq x_0$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

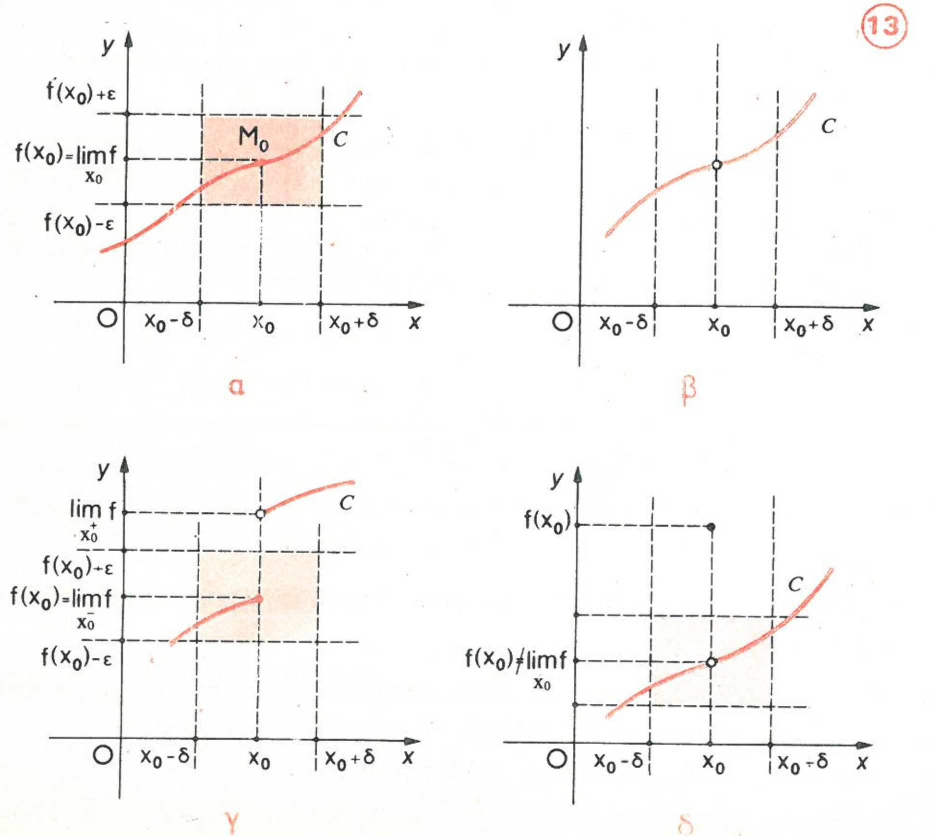
Η συνεπαγωγή όμως αυτή αληθεύει και όταν $x = x_0$.

Ώστε: **Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να είναι**

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Μια συνάρτηση λέγεται *συνεχής σ' ένα σύνολο E,* όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του E.

Έστω C η γραφική παράσταση της συνεχούς στο x_0 συνάρτησης f (σχ. 13).



Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζεται το ορθογώνιο των ευθειών $y = f(x_0) - \varepsilon$, $y = f(x_0) + \varepsilon$ και $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 + \delta$. Σε κάθε τέτοιο ορθογώνιο (για οσοδήποτε μικρό ε) βρίσκονται, όχι μόνο το σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$, αλλά και άλλα «γειτονικά» του σημεία: όλα όσα έχουν τετμημένες στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Έτσι η C δε μπορεί να διακόπτεται στο σημείο M_0, είναι λοιπόν μια γραμμή «συνεχής» στο M_0 (σχ. 13α).

Δε μπορεί να γίνει λόγος για «συνέχεια» όταν δεν υπάρχει το M_0, δηλαδή όταν η f δεν ορίζεται στο x_0 (σχ. 13β).

Αλλά και όταν υπάρχει το $f(x_0)$, η C διακόπτεται στο M_0 στις περιπτώσεις που:

- δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$.

Στις περιπτώσεις αυτές η f λέγεται **ασυνεχής στο x_0** (σχ. 13γ, δ).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η σταθερή συνάρτηση u με $u(x) = c$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ (§ 3.8, πρδ. 1) είναι $\lim_{x \to x_0} u(x) = c = u(x_0)$.
2. Ομοίως η ταυτοτική συνάρτηση ι με $\iota(x) = x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Πράγματι (§ 3.8, πρδ. 2) είναι $\lim_{x \to x_0} \iota(x) = x_0 = \iota(x_0)$.
3. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι και η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2 + 1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Πράγματι είναι $\lim_{x \to x_0} (3x^2 + 1) = \lim_{x \to x_0} (3x^2) + 1 = 3x_0^2 + 1 = f(x_0)$.

Για να έχουν νόημα τα μέλη της (1) του ορισμού, στα επόμενα θεωρούμε συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού περιέχει ένα διάστημα Δ με $x_0 \in \Delta$. Το Δ είναι γενικά ένα ανοικτό διάστημα (α, β). Αν ειδικότερα η συνάρτηση ορίζεται «μόνο δεξιά» ή «μόνο αριστερά» του x_0, τότε $\Delta = [x_0, \beta)$ ή $\Delta = (\alpha, x_0]$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να περιορίζουμε τις συναρτήσεις στο Δ.

Ασκήσεις: 27, 28

Πλευρική συνέχεια

3.15 Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Τότε:

- Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ και είναι $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, η f λέγεται **συνεχής από δεξιά στο x_0.**
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και είναι $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, η f λέγεται **συνεχής από αριστερά στο x_0.**

Π.χ. η συνάρτηση [x] είναι συνεχής από δεξιά σε κάθε $x_0 \in \mathbb{Z}$ (§ 3.9, εφαρ. 3), ενώ δεν είναι συνεχής από αριστερά στο x_0.

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος της § 3.9 είναι ότι:

Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) είναι συνεχής στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, αν και μόνο αν είναι συνεχής από δεξιά και από αριστερά στο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{3|x-1|}{2}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Η f ορίζεται στο $x_0 = 1$ και είναι $f(1) = 0$. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3|x-1|}{2} = 0$.

Πράγματι, για $x \geqslant 1$ έχουμε $f(x) = \frac{3(x-1)}{2}$ και είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$.
Δηλαδή η f είναι συνεχής από δεξιά στο 1.

Ομοίως για $x < 1$ έχουμε $f(x) = \frac{-3(x-1)}{2}$ και είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0$.
Δηλαδή η f είναι συνεχής από αριστερά στο 1.

Άρα σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Συνέχεια και πράξεις

3.16 Σχετικά με τις πράξεις συνεχών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g ορίζονται σ' ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο $x_0 \in \Delta$ και είναι $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:**

- Οι συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, λf, $|f|$ είναι συνεχείς στο x_0.
- **Αν είναι $g(x_0) \neq 0$, τότε και οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι συνεχείς στο x_0.**
- **Αν για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) \geqslant 0$, τότε και η συνάρτηση $\sqrt[k]{f}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ είναι συνεχής στο x_0.**

Πράγματι, επειδή οι f, g είναι συνεχείς στο x_0, θα είναι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Έτσι θα έχουμε π.χ.

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0}f(x) + \lim_{x\to x_0}g(x) = f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = (fg)(x_0)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι το άθροισμα και το γινό-

μενο πεπερασμένου πλήθους συνεχών συναρτήσεων σ' ένα διάστημα Δ, είναι επίσης συνεχής συνάρτηση στο Δ. Ειδικότερα η $\sqrt[k]{f}$ είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \Delta$ με $f(x_0) > 0$ (Παρατήρ. § 3.12).

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

3.17 Στην § 3.14 είδαμε ότι η σταθερή και η ταυτοτική συνάρτηση είναι συνεχείς σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα εξετάσουμε τώρα τη συνέχεια άλλων βασικών συναρτήσεων.

I. **Συνέχεια πολυωνυμικής συνάρτησης.** Έστω η συνάρτηση P με

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0 \quad \text{και} \quad \alpha_\nu \neq 0$$

Επειδή (§ 3.13, εφαρμ. 1) για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, συμπεραίνουμε ότι:

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

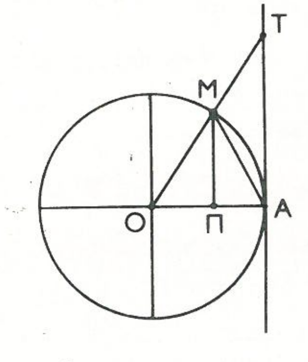
II. **Συνέχεια ρητής συνάρτησης.** Συνέπεια της προηγούμενης περίπτωσης και του θεωρήματος της § 3.16, είναι ότι:

Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

III. **Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων.** Για την απόδειξη της συνέχειας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων θα αποδείξουμε πρώτα ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι

$$|\eta\mu x| < |x| \qquad (1)$$

14



Στον τριγωνομετρικό κύκλο O (σχ. 14) θεωρούμε το τόξο AM με αλγεβρική τιμή $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$. Από τη γεωμετρία ξέρουμε ότι:

$$E_{(\tau\rho\iota\gamma.\ OAM)} < E_{(\tau o\mu.\ OAM)} < E_{(\tau\rho\iota\gamma.\ OAT)}$$

ή

$$\frac{1}{2}(OA)(\Pi M) < \frac{1}{2}(OA)\,|\overset{\frown}{AM}| < \frac{1}{2}(OA)(AT)$$

Συνεπώς για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ είναι

$$|\eta\mu x| < |x| < |\varepsilon\varphi x| \qquad (2)$$

Το πρώτο μέρος της (2) ισχύει και για κάθε $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$, γιατί

$$|\eta\mu x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$$

Συνεπώς η (1) ισχύει γενικά

● **Συνέχεια ημιτόνου.** Έστω οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε για $x \neq x_0$ έχουμε

$$|\eta\mu x - \eta\mu x_0| = 2\left|\eta\mu \frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\sigma\upsilon\nu \frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\eta\mu \frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$< 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0| \quad \text{[λόγω της (1)]}$$

Από τη σχέση αυτή, επειδή $\lim\limits_{x \to x_0}(x-x_0) = 0$, βρίσκουμε (§ 3.11, 2) $\lim\limits_{x \to x_0}(\eta\mu x - \eta\mu x_0) = 0$ και συνεπώς $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$.

Ώστε:

Η συνάρτηση **ημ** *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$

● **Συνέχεια συνημιτόνου.** Επειδή για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι

$$|\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x_0| = \left|-2\eta\mu \frac{x+x_0}{2} \eta\mu \frac{x-x_0}{2}\right| < |x-x_0|$$

θα έχουμε ομοίως ότι:

Η συνάρτηση **συν** *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$

● **Συνέχεια εφαπτομένης.** Συνέπεια των παραπάνω και του θεωρήματος της § 3.16 είναι ότι:

Η συνάρτηση **εφ** *είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της*

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

Από τη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$1 < \left|\frac{x}{\eta\mu x}\right| < \left|\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right| \quad \text{ή} \quad |\sigma\upsilon\nu x| < \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| < 1$$

Αλλά όμως για $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$, οι x και ημx είναι ομόσημοι και συνx > 0. Έτσι θα είναι

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1$$

Επειδή τώρα $\lim\limits_{x \to 0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, θα έχουμε και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

2. **Να αποδειχτεί ότι** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = 1$

Πράγματι, έχουμε $\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$.

Αλλά $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \sigma\upsilon\nu x} = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

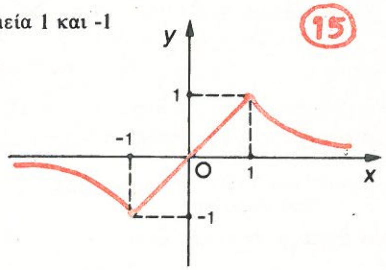
Έτσι θα είναι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

3. **Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } |x| > 1 \\ x, & \text{αν } |x| \leqslant 1 \end{cases}$ **είναι συνεχής στο** $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (-1, 1)$ καθώς επίσης και σε κάθε $x_0 < -1$ και κάθε $x_0 > 1$.

Μένει να εξετάσουμε τη συνέχειά της στα σημεία 1 και -1



15

Έχουμε:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

και συνεπώς $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο 1.

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x = -1$, $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = -1$

και συνεπώς $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1 = f(-1)$. Άρα η f είναι συνεχής στο -1.

Επομένως η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Το βασικό θεώρημα

3.18 Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση g με πεδίο ορισμού A, ένα σημείο συσσωρεύσεως σ του A και ας υποθέσουμε ότι

$$\lim_{x \to \sigma} g(x) = \sigma_1 \qquad (1)$$

Έστω ακόμη μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού B, του οποίου σημείο συσσωρεύσεως είναι το σ_1. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{y\to\sigma_1} f(y) = L \tag{2}$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει γενικά το όριο της $f\circ g$ στο σ και είναι L. Υπό τον όρο φυσικά ότι

$$\text{η } f\circ g \text{ ορίζεται τουλάχιστο σε μια περιοχή του } \sigma \tag{α}$$

δηλαδή σ' ένα σύνολο A_1 της μορφής $(\Delta_\sigma \cap A) - \{\sigma\}$.
Περιορίζοντας την $f\circ g$ καθώς και τη g στο A_1, η απόδειξη για την περίπτωση $\sigma, \sigma_1, L \in \mathbb{R}$ γίνεται ως εξής:

- Υποθέτουμε πρώτα ότι *η f είναι συνεχής στο σ_1*. Τότε $L = f(\sigma_1)$ και η (2) σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in B$ με $y \in (\sigma_1-\delta_1, \sigma_1+\delta_1)$ είναι

$$|f(y)-L| < \varepsilon \tag{3}$$

Εξάλλου η (1) σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = \delta_1$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A_1$ με $x \in (\sigma-\delta, \sigma+\delta)$

$$|g(x)-\sigma_1| < \delta_1 \tag{4}$$

και επειδή για κάθε $x\in A_1$, $g(x)\in B$, έχουμε λόγω της (3)

$$|f(g(x))-L| < \varepsilon \tag{5}$$

που σημαίνει

$$\lim_{x\to\sigma} (f\circ g)(x) = L$$

- Στη γενική περίπτωση (π.χ. όταν η f δεν ορίζεται στο σ_1) αντί της (3) έχουμε από τη (2) ότι για κάθε $y \in B$ με $y \in (\sigma_1-\delta_1, \sigma_1+\delta_1) - \{\sigma_1\}$ είναι

$$|f(y)-L| < \varepsilon \tag{3΄}$$

Η απόδειξη συνεχίζεται όπως προηγουμένως αλλά με την **πρόσθετη προϋπόθεση** ότι για κάθε $x\in A_1$ είναι

$$g(x) \neq \sigma_1 \tag{β}$$

Η απόδειξη στις άλλες περιπτώσεις γίνεται με ανάλογη εργασία.
Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι:**

- **Η συνάρτηση g έχει στο σ όριο σ_1.**
- **Η συνάρτηση f έχει στο σ_1 όριο L.**

Αν σε μια περιοχή του σ ορίζεται η $f\circ g$ και είναι $g(x) \neq \sigma_1$, τότε

$$\lim_{\sigma} f\circ g = L$$

Το θεώρημα εφαρμόζεται (εφόσον εξασφαλίζονται οι προϋποθέσεις του) και όταν ειδικότερα μια τουλάχιστο από τις g, f είναι ακολουθία. Έστω π.χ. ότι η g είναι μια ακολουθία (α_ν). Έχουμε $A = \mathbb{N}$, $\sigma = +\infty$ και $\lim \alpha_\nu = \sigma_1$. Εξάλλου $\lim\limits_{y\to\sigma_1} f(y) = L$.

Ακόμη, σε μια περιοχή του $+\infty$, δηλαδή για $\nu > \kappa$, οι όροι α_ν ανήκουν στο B και είναι $\alpha_\nu \neq \sigma_1$. Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, είναι και $\lim\limits_{\nu\to+\infty} f(\alpha_\nu) = L$.
Συνεπώς, αντικαθιστώντας για λόγους απλότητας το σ_1 με το σ και το B με A, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A έχει στο σ όριο L, τότε για κάθε ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu \in A$, $\alpha_\nu \neq \sigma$ $(\nu > \kappa \in \mathbb{N})$ και $\lim \alpha_\nu = \sigma$, η αντίστοιχη ακολουθία $f(\alpha_\nu)$ των τιμών της συνάρτησης έχει επίσης όριο L[1].**

Από το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει ότι, αν υπάρχει ακολουθία (α_ν) με όριο σ, τέτοια ώστε η αντίστοιχη ακολουθία $f(\alpha_\nu)$ **να μην έχει όριο,** τότε και η συνάρτηση f **δεν έχει όριο** στο σ.
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν υπάρχουν δυο ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) με όριο σ, ενώ οι $f(\alpha_\nu)$ και $f(\beta_\nu)$ έχουν **διαφορετικά** όρια.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο πόρισμα στην ειδική περίπτωση $\sigma = +\infty$ και $\alpha_\nu = \nu$ καταλήγουμε (επειδή $\lim \nu = +\infty$) στη συνεπαγωγή

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim f(\nu) = L}$$

Έτσι το όριο μιας ακολουθίας $f(\nu)$ μπορεί να βρεθεί ως όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$. (Όπως π.χ. θα δούμε στην εφαρμογή της § 4.20).

Συνέχεια και σύνθεση

3.19 Όπως είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος τη προηγούμενης § 3.18, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\sigma_1 = \lim\limits_{\sigma} g$, επειδή $\lim\limits_{\sigma_1} f = f(\sigma_1)$, θα έχουμε

$$\lim_{\sigma} (f\circ g) = f(\sigma_1)$$

Αν επιπλέον και η g είναι συνεχής στο σ, τότε θα είναι $\sigma_1 = g(\sigma)$ και συνεπώς

$$\lim_{\sigma} (f\circ g) = f\big(g(\sigma)\big) = (f\circ g)(\sigma)$$

που σημαίνει ότι η $f\circ g$ είναι συνεχής στο σ. Υποτίθεται φυσικά ότι ισχύει η (α) της § 3.18 που εδώ σημαίνει ότι η $f\circ g$ ορίζεται τουλάχιστο σε ένα διάστημα Δ με $\sigma \in \Delta$.

---

(1) Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο του πορίσματος αυτού.

Έτσι έχουμε το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο σ και η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο g(σ), τότε και η σύνθεσή τους(1) $f \circ g$ είναι συνεχής στο σ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = ημ(x^2 - 3)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = x^2 - 3$ και ημx οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Αλλαγή μεταβλητής

3.20 Έστω φ μια συνάρτηση και σ ένα σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού της. Το πρόβλημα της εύρεσης του $\lim\limits_{σ} φ$, μπορεί να απλοποιηθεί με μετατροπή της φ σε σύνθεση $f \circ g$ δυο άλλων συναρτήσεων, έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{σ} g = σ_1$ (με $g(x) \neq σ_1$ για $x \neq σ$) καθώς και το $\lim\limits_{σ_1} f$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της § 3.18, αν θέσουμε $g(x) = y$, το ζητούμενο $\lim\limits_{σ} φ$, δηλαδή το $\lim\limits_{x \to σ} f(g(x))$, ανάγεται στο $\lim\limits_{y \to σ_1} f(y)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{εφ3x}{x}$ υπολογίζεται ως εξής:

Έχουμε $\frac{εφ3x}{x} = 3 \cdot \frac{εφ3x}{3x}$

Έστω $g(x) = 3x = y$ και $f(y) = \frac{εφy}{y}$. Τότε $\frac{εφ3x}{3x} = f(g(x))$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0}(3x) = 0$ ($g(x) \neq 0$, για $x \neq 0$) και (§ 3.17, εφ. 2) $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = 1$, θα έχουμε και

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{εφ3x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} f(g(x)) = 1$. Συνεπώς $\lim\limits_{x \to 0} \frac{εφ3x}{x} = 3 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{εφ3x}{3x} = 3$.

2. Επίσης είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} xημ\frac{1}{x} = 1$.

Πράγματι είναι:

$$xημ\frac{1}{x} = \frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

(1) Εφόσον φυσικά ορίζεται σ' ένα διάστημα που περιέχει το σ.

και, αν θέσουμε $g(x) = \frac{1}{x}$ και $f(y) = \frac{ημy}{y}$, θα έχουμε $xημ\frac{1}{x} = f(g(x))$

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim\limits_{y \to 0} \frac{ημy}{y} = 1$, θα είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(g(x)) = 1$.

Άρα

$$\lim_{x \to +\infty} xημ\frac{1}{x} = 1$$

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε κάθε σημείο ενός διαστήματος Δ, εκτός ίσως του $x_0 \in Δ$.

1. Υποθέτουμε ότι: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Αν θέσουμε $x = x_0 + h$, το σύνολο $I_0 = \{h : x_0 + h \in Δ\}$ είναι διάστημα που περιέχει το 0. Αν ορίσουμε στο I_0 τη συνάρτηση g με $g(h) = x_0 + h$, θα έχουμε

$$\lim_{h \to 0} g(h) = x_0 \quad (\text{με } g(h) \neq x_0 \text{ για } h \neq 0)$$

Τότε, επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, θα έχουμε και $\lim\limits_{h \to 0} f(g(h)) = L$, δηλαδή

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$$

Αντιστρόφως, αν ισχύει η προηγούμενη ισότητα, τότε θέτουμε $φ(h) = f(x_0 + h)$ και στο σύνολο Δ ορίζουμε τη συνάρτηση g_1 με $g_1(x) = x - x_0$.

Έτσι θα έχουμε $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = 0$ και $\lim\limits_{h \to 0} φ(h) = L$ και συνεπώς $\lim\limits_{x \to x_0} φ(g_1(x)) = L$, δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L} \qquad (4)$$

2. Αν για $x_0 \neq 0$ θέσουμε $x = x_0 h$, το σύνολο $I_1 = \{h : x_0 h \in Δ\}$ είναι διάστημα που περιέχει το 1.

Τότε, όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \to 1} f(x_0 h) = L} \qquad (5)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Η συνάρτηση g με $g(x) = x^α$ ($x \geq 0$, $α \in \mathbb{R}$) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+$.**

Θα δείξουμε πρώτα ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Αρκεί να δείξουμε $\lim\limits_{x \to 1} x^α = 1^α = 1$ ή ισοδύναμα $\lim\limits_{x \to 1}(x^α - 1) = 0$.

Έστω k_0 το ακέραιο μέρος του α. Τότε:

- για $x > 1$ έχουμε: $x^{k_0} \leq x^α < x^{k_0+1} \Leftrightarrow x^{k_0} - 1 \leq x^α - 1 < x^{k_0+1} - 1$

και επειδή για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση x^k είναι (§ 3.17, I) συνεχής στο 1, θα είναι

$$\lim_{x \to 1^+}(x^α - 1) = 0 \quad ή \quad \lim_{x \to 1^+} x^α = 1$$

- για $0 < x < 1$, θα είναι $\frac{1}{x} > 1$ και συνεπώς $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = 1$ ή $\lim_{x\to 1^-} x^{\alpha} = 1$

Συνεπώς είναι $\lim_{x\to 1} x^{\alpha} = 1$ και η g είναι συνεχής στο 1.

Έστω τώρα $x_0 > 0$. Τότε, αν θέσουμε $x = x_0 h$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} x^{\alpha} = x_0^{\alpha}$. (1)

Έχουμε $\lim_{x\to x_0} x^{\alpha} = x_0^{\alpha} \Leftrightarrow \lim_{h\to 1}\left[(x_0h)^{\alpha} - x_0^{\alpha}\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 1}\left[x_0^{\alpha}(h^{\alpha}-1)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 1}(h^{\alpha}-1) = 0$$

Αλλά η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε και η (1) είναι αληθής.
Άρα η g είναι συνεχής σε κάθε $x_0 > 0$.
Τέλος, όταν η g ορίζεται και στο 0, δηλαδή όταν $\alpha > 0$, αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής και στο 0, δηλαδή $\lim_{x\to 0} x^{\alpha} = 0^{\alpha} = 0$.

2. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Για την απόδειξη της παραπάνω ισότητας υποθέτουμε $x > 1$. Τότε, επειδή

$$[x] \leqslant x < [x]+1 \qquad (1)$$

θα έχουμε

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]} \qquad (2)$$

Αλλά λόγω της (1) είναι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]+1}$

και λόγω της (2) $\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]}$, και $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$.

Έτσι θα έχουμε:

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \qquad (3)$$

Έστω τώρα $g(x) = [x]$ και $f(\nu) = \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu}$. Τότε $\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = f(g(x))$.

Αλλά είναι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Εξάλλου επειδή $\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu} = \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)}$ και $\lim\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} = e$,

$\lim\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right) = 1$, θα είναι και $\lim_{\nu\to+\infty} f(\nu) = e$.

Έτσι θα έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = e$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e$

Τότε από την (3) θα έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Σημείωση

Αποδεικνύεται (βλέπε άσκηση 60 του κεφ. 4) ότι είναι και $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

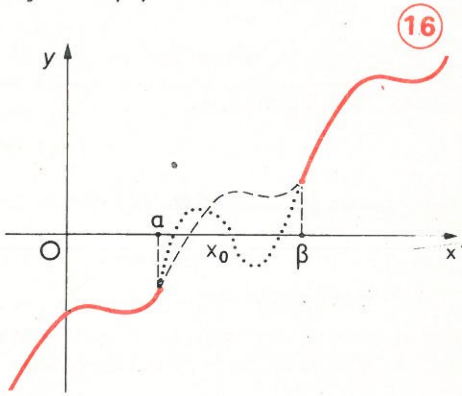
Ασκήσεις: 36, 37, 38, 39, 40

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Ένα βασικό θεώρημα

3.21 Στο σχήμα 16 από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f λείπει το τμήμα μεταξύ των σημείων με τετμημένες α και β για τα οποία είναι

$$f(\alpha) < 0 \quad \text{και} \quad f(\beta) > 0$$



Αν θελήσουμε να συμπληρώσουμε με **συνεχή** γραμμή το τμήμα που λείπει, φαίνεται αναπόφευκτο ότι θα τμήσουμε υποχρεωτικά τον άξονα x΄x. Δηλαδή θα υπάρχει σημείο x_0 μεταξύ α και β με

$$f(x_0) = 0$$

Γενικά μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι η συνάρτηση f:**

- **είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα [α, β]**
- **έχει τιμές ετερόσημες στα άκρα α και β, δηλαδή**

$$f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$$

Τότε η f μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστο σημείο του (α, β)

* **Απόδειξη.** Έστω ότι είναι $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) > 0$. Θα προσδιορίσουμε $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Θεωρούμε το κέντρο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ του [α, β]. Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$, τότε $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Διαφορετικά:

- αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 0$, θέτουμε $\frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha_1$ και $\beta = \beta_1$
- αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$, θέτουμε $\alpha = \alpha_1$ και $\frac{\alpha+\beta}{2} = \beta_1$

Και στις δυο περιπτώσεις ορίζεται διάστημα $[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$ με:

$$f(\alpha_1) < 0, \quad f(\beta_1) > 0 \quad \text{και} \quad \beta_1-\alpha_1 = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Εργαζόμαστε τώρα με το διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ όπως προηγουμένως με το [α, β]. Δηλαδή, αν είναι $f\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) = 0$, τότε $x_0 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$

Στην αντίθετη περίπτωση ορίζουμε το κέντρο του $[\alpha_1, \beta_1]$ και όπως προηγουμένως βρίσκουμε διάστημα $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$ με:

$$f(\alpha_2) < 0, \quad f(\beta_2) > 0 \quad \text{και} \quad \beta_2-\alpha_2 = \frac{\beta_1-\alpha_1}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2^2}$$

Συνεχίζοντας τις διαδοχικές αυτές «διχοτομήσεις» διαπιστώνουμε ότι:

- ή ένα από τα κέντρα των διαστημάτων είναι το x_0
- ή ορίζεται μια ακολουθία διαστημάτων $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, με πλάτος $\frac{\beta-\alpha}{2^\nu}$, τα οποία είναι κιβωτισμένα, αφού για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

$$[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}] \subset [\alpha_\nu, \beta_\nu] \quad \text{και} \quad \lim(\beta_\nu-\alpha_\nu) = \lim \frac{\beta-\alpha}{2^\nu} = (\beta-\alpha)\lim\frac{1}{2^\nu} = 0$$

Επομένως, τα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ ορίζουν ένα αριθμό x_0.

Επίσης για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$f(\alpha_\nu) < 0, \quad f(\beta_\nu) > 0 \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αύξουσα με άνω φράγμα το x_0. Άρα έχει όριο $l \leqslant x_0$. Επίσης η (β_ν) είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα το x_0. Άρα έχει όριο $m \geqslant x_0$. Επειδή όμως $\lim(\alpha_\nu-\beta_\nu) = 0$, θα έχουμε $l = m$ και αφού $l \leqslant x_0 \leqslant m$ θα είναι $l = x_0 = m$. Δηλαδή το x_0 είναι το κοινό όριο των (α_ν) και (β_ν).

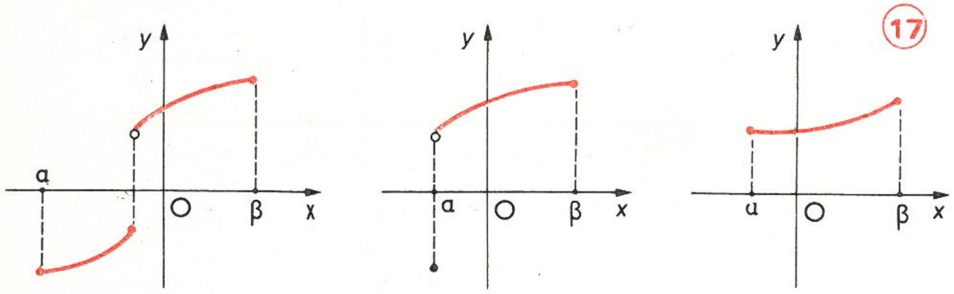
Επειδή τώρα η f είναι συνεχής, οι ακολουθίες με γενικούς όρους $f(\alpha_\nu)$ και $f(\beta_\nu)$ έχουν κοινό όριο $f(x_0)$. Αλλά λόγω των (1) θα έχουμε συγχρόνως

$$f(x_0) \leqslant 0 \quad \text{και} \quad f(x_0) \geqslant 0$$

και συνεπώς $f(x_0) = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για να ισχύει το θεώρημα πρέπει να πληρούνται και οι δυο προϋποθέσεις του. Έτσι π.χ. στα σχήματα 17α, β έχουμε $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.



$f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$ f ασυνεχής στο $[\alpha,\beta]$ — α

$f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$ f συνεχής στο $(\alpha, \beta]$ — β

$f(\alpha) > 0$, $f(\beta) > 0$ f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ — γ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μπορούμε να εντοπίσουμε μια ρίζα της εξίσωσης $x^4+30x-29 = 0$.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = x^4+30x-29$$

η οποία είναι συνεχής στο [0,1], έχουμε $f(0) = -29 < 0$ και $f(1) = 2 > 0$. Επομένως υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (0,1).

Παρατηρούμε ακόμη ότι $f(0{,}9) = 0{,}9^4+27-29 < 1+27-29 = -1 < 0$ και επειδή $f(1) > 0$ υπάρχει ρίζα x_0 της εξίσωσης μεταξύ 0,9 και 1. Δηλαδή, μπορούμε να θεωρήσουμε ως x_0 το 0,9 με προσέγγιση δεκάτου.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

3.22 Άμεση συνέπεια του θεωρήματος της προηγούμενης παραγράφου είναι το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι η συνάρτηση f:**

- **είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] με**
- **$f(\alpha) \neq f(\beta)$**

Τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των f(α) και f(β).

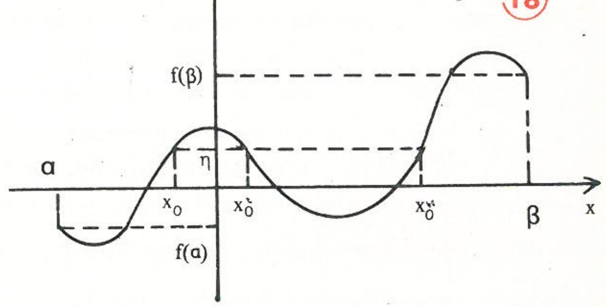
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι είναι $f(\alpha) < f(\beta)$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\eta \in (f(\alpha), f(\beta))$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$ (σχ. 18)

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με

$$g(x) = f(x)-\eta$$

η οποία:

- είναι συνεχής στο [α,β] με
- $g(\alpha) = f(\alpha)-\eta < 0$,
  $g(\beta) = f(\beta)-\eta > 0$



Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$. Τότε θα είναι $f(x_0)-\eta = 0$ και συνεπώς $f(x_0) = \eta$.

Η περίπτωση $f(\alpha) > f(\beta)$ εξετάζεται ομοίως.

Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως **θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών** και ισχύει, όπως το θεώρημα της §3.21, μόνο όταν η f είναι συνεχής σε **κλειστό** διάστημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ **Μια μη σταθερή συνεχής συνάρτηση f απεικονίζει ένα οποιοδήποτε διάστημα Δ (όχι κατ' ανάγκη κλειστό ή φραγμένο) σε διάστημα.**

Πράγματι, αν η_1, η_2 είναι δυο οποιαδήποτε στοιχεία του συνόλου $f(\Delta)$, τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in \Delta$, τέτοια ώστε $f(\alpha) = \eta_1$ και $f(\beta) = \eta_2$. Σύμφωνα με το θεώρημα, αν π.χ. $f(\alpha) < f(\beta)$, στο $f(\Delta)$ περιέχεται το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)] = [\eta_1, \eta_2]$. Αυτή η ιδιότητα του $f(\Delta)$ είναι χαρακτηριστική των διαστημάτων[1] και συνεπώς το $f(\Delta)$ είναι διάστημα.

Σημείωση

Είναι φανερό ότι, αν η f είναι σταθερή συνάρτηση με τιμή π.χ. c, απεικονίζει το Δ στο μονομελές σύνολο {c}.

Μονοτονία και συνέχεια

3.23 Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη, συνεχή και γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ (όχι κατ' ανάγκη κλειστό ή φραγμένο). Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα η f απεικονίζει το Δ στο **διάστημα** $f(\Delta)$. Αν θεωρήσουμε ως σύνολο αφίξεως της f το $f(\Delta)$, η f είναι συνάρτηση «επί» αλλά και (§ 1.11) «1 - 1». Αποδεικνύεται[2] ότι και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$. Συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη, συνεχής και γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ, τότε:**

- **είναι μια «1 - 1 και επί» απεικόνιση του Δ στο διάστημα $f(\Delta)$.**
- **η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως μονότονη *(με το ίδιο είδος μονοτονίας)* στο $f(\Delta)$.**

Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης

3.24 Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι ορισμένη σε **κλειστό** διά-

(1) Αποδεικνύεται, δηλαδή, ότι ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα, αν και μόνο αν, για κάθε $\eta_1, \eta_2 \in E$ είναι $[\eta_1, \eta_2] \subseteq \mathbb{R}$.

(2) Η απόδειξη παραλείπεται.

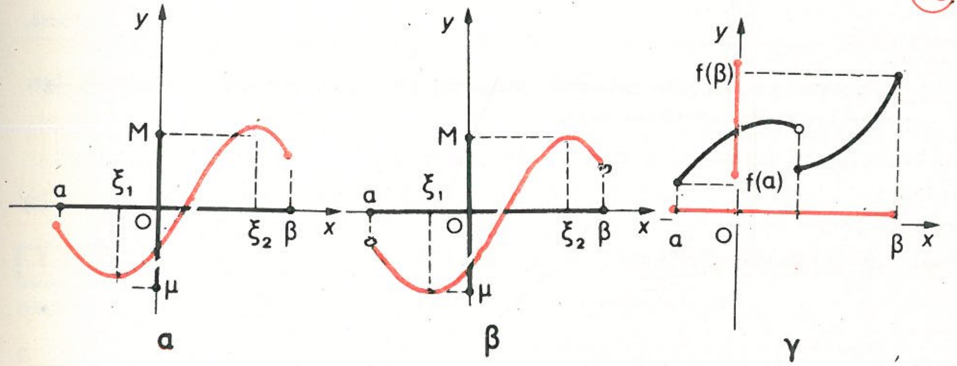
στημα, αποδεικνύεται ότι το σύνολο των τιμών της έχει και *μέγιστο* και *ελάχιστο*. Π.χ. αν η f είναι αύξουσα στο [α, β], τότε σύνολο τιμών της είναι το [f(α), f(β)]. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται[1] το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β]. Τότε υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in [\alpha,\beta]$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ να ισχύει:**

$$f(\xi_1) \leqslant f(x) \leqslant f(\xi_2)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, στο διάστημα [α,β] η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο $M = f(\xi_2)$ και ελάχιστο $\mu = f(\xi_1)$. Αλλά σύμφωνα με το θεώρημα της §3.22, αν υποθέσουμε $\mu \neq M$, η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ μ και M (σχ. 19α). Άρα η εικόνα του [α,β] με την f είναι το [μ,M].

19



Σημείωση

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει και στην ειδική περίπτωση $\mu = M$, που τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο [α,β].

Έχουμε λοιπόν το

ΠΟΡΙΣΜΑ **Η εικόνα κλειστού διαστήματος με συνεχή συνάρτηση είναι κλειστό διάστημα.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

1. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Ενδέχεται δηλαδή η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ να είναι κλειστό διάστημα και το Δ να μην είναι κλειστό (σχ. 19β) ή η συνάρτηση να μην είναι συνεχής (σχ. 19γ).

Έστω τώρα f μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα (α, β). Αν π.χ. η f είναι γνησίως αύξουσα και

(1) Η απόδειξη παραλείπεται

- φραγμένη άνω, τότε, όπως είδαμε και στην § 2.18, έχει ελάχιστο άνω φράγμα το $\lim\limits_{x \to \beta} f(x)$.
- δεν είναι φραγμένη άνω, τότε (§ 2.20) $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = +\infty$.

Ώστε υπάρχει το $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = L_2$ (πεπερασμένο ή $+\infty$). Ομοίως βρίσκουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L_1$ (πεπερασμένο ή $-\infty$).

Είναι φανερό ότι εικόνα του (α, β) είναι το **ανοικτό** διάστημα (L_1, L_2). Πράγματι, αν $l \in (L_1, L_2)$, η f παίρνει τιμές μεγαλύτερες και μικρότερες του l, άρα και την ενδιάμεση τιμή l. Εξάλλου δεν μπορεί να πάρει την τιμή L_1 ή L_2, γιατί αν π.χ. $f(\xi) = L_2$, τότε θα υπήρχε $\xi' > \xi$ με $f(\xi') > L_2$, άτοπο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Η εικόνα ανοικτού διαστήματος (α, β) με συνεχή και γνησίως μονότονη συνάρτηση f είναι ανοικτό διάστημα με άκρα $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to \beta} f(x)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, έχει τουλάχιστο μια πραγματική ρίζα.**

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού ν, έστω το (1)

$$P(x) = x^{\nu} + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση P, θα έχουμε (§ 3.5)

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} x^{\nu} = +\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} x^{\nu} = -\infty$$

Άρα υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$P(\alpha) < 0 \qquad \text{και} \qquad P(\beta) > 0$$

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της §3.21, θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$. Δηλαδή το $P(x)$ έχει ρίζα το $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. **(i) Να δειχτεί ότι η εξίσωση $5x^5+25x-11 = 0$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο διάστημα [0,1].**

(ii) Να υπολογιστεί, με προσέγγιση εκατοστού, μια τέτοια ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση P με $\quad P(x) = 5x^5+25x-11$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [0,1].

(i) Είναι $P(0) = -11 < 0$ και $P(1) = 19 > 0$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της §3.21, η εξίσωση (1) θα έχει ρίζα στο (0, 1).

(ii) Είναι $P(\frac{0+1}{2}) = P(0{,}5) \quad 1{,}65625 > 0$ και συνεπώς η (1) έχει ρίζα στο (0, 0,5).

(1) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $\alpha_\nu = 1$.

Συνεχίζοντας βρίσκουμε $P(0{,}4) = -0{,}9488 < 0$. Άρα η (1) έχει ρίζα στο (0,4, 0,5).

Ομοίως βρίσκουμε $P(0{,}43) = -0{,}1765 < 0$ και $P(0{,}44) = 0{,}824 > 0$ και συνεπώς η εξίσωση έχει ρίζα $x_0 \in (0{,}43,\ 0{,}44)$.

Επομένως με προσέγγιση εκατοστού είναι $x_0 \simeq 0{,}43$.

3. **Να δειχτεί ότι κάθε πραγματικός αριθμός $\alpha > 0$ έχει νιοστή ρίζα ($\nu > 1$).**

Το γνωστό αυτό θεώρημα μπορούμε να το αποδείξουμε αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση P με

$$P(x) = x^{\nu} - \alpha$$

Είναι $P(0) = -\alpha < 0$ και $P(\alpha+1) = (\alpha+1)^{\nu} - \alpha \geqslant \alpha+1-\alpha = 1 > 0$

Επομένως, αφού η P είναι συνεχής στο $[0, \alpha+1]$, υπάρχει $x_0 \in (0, \alpha+1)$, τέτοιος ώστε $P(x_0) = 0$.

Δηλαδή είναι $x_0^{\nu} - \alpha = 0$ ή $x_0^{\nu} = \alpha$.

Ασκήσεις: 41, 42, 43

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ιδιότητες εκθετικής συνάρτησης

3.25 Στο πρώτο κεφάλαιο γνωρίσαμε την εκθετική συνάρτηση α^x ($\alpha > 0$) η οποία, όταν $\alpha \neq 1$:

- *είναι μια «1-1 και επί» απεικόνιση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}_+^*$.*
- *είναι γνησίως αύξουσα, όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα, όταν $0 < \alpha < 1$.*

Ειδικότερα, αν $\alpha = e$, η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Εδώ θα αναφέρουμε μερικές άλλες χρήσιμες ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών.

I. **Η συνάρτηση α^x (και συνεπώς η e^x) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.**

- Θα αποδείξουμε πρώτα τη συνέχεια της α^x στο 0, δηλαδή ότι

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \alpha^x = 1} \quad (1)$$

* **Απόδειξη της (1).**

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$ να είναι

$$|\alpha^x - 1| < \varepsilon$$

Έστω **$\alpha > 1$**. Ξέρουμε (§ 2.15, εφαρ. 1) ότι $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$ ή ισοδύναμα $\lim (\alpha^{1/\nu} - 1) = 0$, που σημαίνει ότι υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για $\nu > \nu_0$ να έχουμε $\alpha^{1/\nu} - 1 < \varepsilon$.

Ειδικότερα έχουμε

$$\alpha^{\frac{1}{\nu_0+1}}-1<\varepsilon$$

Εκλέγουμε ως δ το $\frac{1}{\nu_0+1}$. Τότε, αν $0<x<\delta$ θα έχουμε:

$\alpha^x<\alpha^{\frac{1}{\nu_0+1}}$ ή $\alpha^x-1<\alpha^{\frac{1}{\nu_0+1}}-1$, δηλαδή $\alpha^x-1<\varepsilon$.

Αυτό σημαίνει $\lim\limits_{x\to0^+}\alpha^x=1$

Αν $-\delta<x<0$ θα είναι $0<-x<\delta$. Συνεπώς, θέτοντας $y=-x$ έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}\alpha^{-x}=\lim_{y\to0^+}\alpha^y=1 \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to0^-}\frac{1}{\alpha^x}=1$$

δηλαδή $\lim\limits_{x\to0^-}\alpha^x=1$

Άρα έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\alpha^x=1$

Έστω τώρα $0<\alpha<1$. Τότε θα είναι $\frac{1}{\alpha}>1$ και κατά την προηγούμενη περίπτωση $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\alpha})^x=1$ ή $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\alpha^x}=1$ και επομένως και στην περίπτωση αυτή $\lim\limits_{x\to0}\alpha^x=1$.

Ειδικότερα είναι

$$\boxed{\lim_{x\to0}e^x=1} \tag{2}$$

● Έστω, τώρα, $x_0\in\mathbb{R}$. Τότε αρκεί να δείξουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha^x=\alpha^{x_0}$. Πράγματι, αν λάβουμε υπόψη την ισοδυναμία (4) της § 3.20, θα έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\alpha^x=\lim_{h\to0}\alpha^{x_0+h}=\lim_{h\to0}(\alpha^{x_0}\alpha^h)=\alpha^{x_0}\lim_{h\to0}\alpha^h=\alpha^{x_0}$$

II. Έστω (x_ν) μια συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε για κάθε $\alpha>0$

$$\boxed{\lim\alpha^{x_\nu}=\alpha^{\lim x_\nu}} \tag{3}$$

Πράγματι, έστω $\lim x_\nu=x_0$. Τότε, επειδή η α^x είναι συνεχής, η ακολουθία (α^{x_ν}) έχει (§ 3.18, Πόρισμα) όριο $\alpha^{x_0}=\alpha^{\lim x_\nu}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Με βάση αυτή την ιδιότητα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων και για πραγματικούς εκθέτες.

III. $$\boxed{\lim(1+\frac{\alpha}{\nu})^\nu=e^\alpha \ , \ \alpha\in\mathbb{R}} \tag{4}$$

Απόδειξη.

Η (4) είναι φανερή για $\alpha=0$.

Για $\alpha\neq0$ έχουμε

$$(1+\frac{\alpha}{\nu})^\nu=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{\nu}{\alpha}}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}}\right]^\alpha$$

Επειδή (§ 3.20 εφ. 2) η συνάρτηση $g(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ έχει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ όριο e και η ακολουθία με γενικό όρο $x_\nu=\frac{\nu}{\alpha}$ έχει όριο $+\infty$ αν $\alpha>0$ και $-\infty$ αν $\alpha<0$, θα έχουμε σύμφωνα με το πόρισμα της § 3.18 $\lim g(x_\nu)=e$, δηλαδή

$$\lim\left(1+\frac{1}{\frac{\nu}{\alpha}}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}}=e$$

Εξάλλου είναι $(1+\frac{\alpha}{\nu})^\nu=[g(x_\nu)]^\alpha$. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha$ είναι συνεχής (§ 3.20, εφ. 1) θα έχουμε

$$\begin{aligned}\lim(1+\frac{\alpha}{\nu})^\nu&=\lim[g(x_\nu)]^\alpha=\lim f(g(x_\nu))\\&=\lim_{x\to e}f(x) && \text{[πόρισμα § 3.18]}\\&=f(e)=e^\alpha && \text{[λόγω συνέχειας της f]}\end{aligned}$$

IV. $$\boxed{e^x\geqslant1+x \ , \ x\in\mathbb{R}} \tag{5}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θεωρούμε $\nu\in\mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $\nu>-x$, δηλαδή $\nu+x>0$. Τότε έχουμε $1+\frac{x}{\nu}>0$ και συνεπώς (ανισότητα Bernoulli)

$$(1+\frac{x}{\nu})^\nu\geqslant1+\frac{x}{\nu}\cdot\nu=1+x$$

Τότε (§ 2.15) θα είναι $\lim(1+\frac{x}{\nu})^\nu\geqslant1+x$ και επειδή $\lim(1+\frac{x}{\nu})^\nu=e^x$ θα έχουμε την (5).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι:

(i) Αν $\alpha>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$

(ii) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$

Θα αποδείξουμε μόνο την $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$. Οι άλλες περιπτώσεις αφήνονται ως ασκήσεις.

Υποθέτουμε $x>0$. Επειδή $[x]\leqslant x$, θα έχουμε:

$$\alpha^{[x]}\leqslant\alpha^x \tag{1}$$

Τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\alpha^{[x]}$ έχει στο $+\infty$ όριο $+\infty$.

Αφού $\alpha > 1$, θα υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $\alpha = 1+\theta$. Έτσι θα έχουμε:

$$\alpha^{[x]} = (1+\theta)^{[x]} \geqslant 1+[x]\theta > [x]\theta \geqslant (x-1)\theta$$

και επειδή $\lim_{x\to+\infty} \theta(x-1) = +\infty$, θα είναι και $\lim_{x\to+\infty} \alpha^{[x]} = +\infty$. Τότε από την (1) έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$$

2. **Να αποδειχτεί ότι** $\lim_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Αν στη σχέση (5) θέσουμε -x αντί x έχουμε $e^{-x} \geqslant 1-x$ και για $x\in(-1, 1)$:

$$e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$$

Έτσι έχουμε

$$1+x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow x \leqslant e^x-1 \leqslant \frac{1}{1-x}-1 \Leftrightarrow x \leqslant e^x-1 \leqslant \frac{x}{1-x} \quad (1)$$

Από την (1) βρίσκουμε:

Αν $0 < x < 1$, τότε

$$1 \leqslant \frac{e^x-1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x} \quad (2)$$

Αν $-1 < x < 0$, τότε

$$1 \geqslant \frac{e^x-1}{x} \geqslant \frac{1}{1-x} \quad (3)$$

Επειδή $\lim_{x\to0} \dfrac{1}{1-x} = 1$, από τις (2) και (3) έχουμε

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Ιδιότητες λογαριθμικής συνάρτησης

3.26 Είδαμε ότι η α^x είναι μια «1 - 1 και επί» συνεχής συνάρτηση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^*_+$. Συνεπώς (θεώρημα § 3.23) η αντίστροφή της λογαριθμική συνάρτηση $\log_\alpha x$:

- *Είναι μια «1 - 1 και επί» απεικόνιση του $\mathbb{R}^*_+$ στο $\mathbb{R}$.*
- *Είναι συνεχής.*
- *Είναι γνησίως αύξουσα, όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα, όταν $0 < \alpha < 1$.*

Ειδικότερα η λογαριθμική συνάρτηση **lnx** είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*_+$.

Μια ακόμη χρήσιμη ιδιότητα της συνάρτησης αυτής είναι η εξής:

$$\boxed{\ln x \leqslant x-1 \quad , x > 0} \quad (6)$$

Επειδή (§ 3.25, ιδ. IV) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x \geqslant 1+x$, θα έχουμε και $e^{x-1} \geqslant 1+x-1 = x$, από την οποία, επειδή $x\in\mathbb{R}^*_+$ και η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $\ln e^{x-1} \geqslant \ln x$ και τελικά την (6).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$ (ii) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$**

Έστω $M > 0$. Τότε, επειδή $x > 0$, έχουμε:

(i) $\ln x < -M \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-M} \Leftrightarrow x < e^{-M}$

Επομένως, αν εκλέξουμε $\delta = e^{-M} > 0$, για κάθε $x\in(0, \delta)$ θα έχουμε

$$\ln x < -M$$

που σημαίνει ότι $\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$

(ii) $\ln x > M \Leftrightarrow \ln x > \ln e^M \Leftrightarrow x > e^M$

Επομένως, αν εκλέξουμε $X_0 = e^M$, για κάθε $x > X_0$ θα έχουμε

$$\ln x > M$$

που σημαίνει ότι $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

2. **Να αποδειχτεί ότι** $\lim_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.

Από τη σχέση (6), αν θέσουμε $\frac{1}{x}$ αντί x, βρίσκουμε:

$$\ln\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \leqslant \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \ln x \geqslant \frac{x-1}{x}$$

Έτσι έχουμε:

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x-1 \quad (1)$$

Από την (1) βρίσκουμε:

Αν $x > 1$, τότε

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln x}{x-1} \leqslant 1 \quad (2)$$

Αν $0 < x < 1$, τότε

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{\ln x}{x-1} \geqslant 1 \quad (3)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$, από τις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$$

3. Να αποδειχτεί ότι για $x > -1$, $x \neq 0$, και $\alpha \in \mathbb{R}^*$ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Επειδή $x+1 > 0$, θέτουμε

$$1+x = e^h, \text{ δηλαδή } h = \ln(1+x)$$

Τότε είναι $x = e^h - 1$ και συνεπώς

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha h}-1}{e^h-1} = \frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h}\,\frac{\alpha h}{e^h-1}$$

Επειδή η ln είναι συνεχής, θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x) = \ln 1 = 0$

Άρα (§ 3.20) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h}\lim_{h\to 0}\left(\alpha\cdot\frac{h}{e^h-1}\right)$$

$$= 1\cdot\alpha\cdot 1 = \alpha \qquad [\S 3.25 \text{ εφ. } 3]$$

Ασκήσεις: 44, 45, 46, 47, 48, 49

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχτεί ότι:
(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1} = 2$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+2} = 1$, (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

2. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+c) = -\infty$ ($c\in\mathbb{R}$), (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1} = +\infty$.

3. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-5}{x+2} = 2$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0$

4. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+7} = -\infty$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5x) = +\infty$

5. Να βρείτε, αν η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

6. Να βρείτε το όριο της f με $f(x) = 3 - \frac{|x+1|}{x}$ στο $+\infty$ καθώς και στο $-\infty$ και κατόπιν να διαπιστώσετε ότι οι ευθείες $y = 2$ και $y = 4$ είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

7. Να βρείτε τα όρια:
(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^5-7x+9)$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+2}$, (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^8+7x^2+6x)$, (iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+2}$

8. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3-9x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3-9x}$ και κατόπιν να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \frac{x^2}{x^3-9x}$ έχει την ευθεία $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

9. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-x)(x^2-3)}{2x^3-1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-5x^4}{9x^2-2}$

10. Να βρείτε τα όρια:
(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)\left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}$, (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

11. Αν υπάρχουν, να βρείτε τα όρια:
(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x+1}$, (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{2x+1}$, (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3-x}$, (v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}}$

12. Να βρείτε τα όρια:
(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

13. Για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ να βρεθούν τα όρια:
(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}$

14. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με:
(i) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, (ii) $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x-1}$, (iii) $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

15. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$, (ii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$

16. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x} = +\infty$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|(x+1)}{x} = -1$

17. Να αποδειχτεί ότι για τη συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x \leqslant 2 \\ x-1 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ είναι

$$\lim_{x\to 2^-}f(x) = 5 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2^+}f(x) = 1$$

18. Να αποδείξετε ότι:
(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^2+1} = 0$, (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{x^2-1} = 0$, (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{3x+4}-\frac{4}{3}\right) = 0$

19. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο στο 0 της συνάρτησης f με $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$

20. Να βρείτε τα όρια:

21. (i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{2x+5}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$, (iii) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$, (iv) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$, (v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-1}$

22. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-3|}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4}$

Να βρείτε τα όρια:

23. (i) $\lim\limits_{x\to 5}(12+\sqrt{x-5})$, (ii) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, (iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f \text{ με } f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, & \text{αν } x\neq 3\\ 1, & \text{αν } x=3\end{cases} \quad \text{και} \quad g \text{ με } g(x)=\begin{cases}x^2, & \text{αν } x\in[-2,2)\\ 1, & \text{αν } x=2\\ 3x-2, & \text{αν } x>2\end{cases}$$

24. Να υπολογιστούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, (ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$, (iii) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}$ στο σημείο $x_0=0$ (ii) $f(x)=-\dfrac{(1+x)|x|}{x}$ στο σημείο $x_0=0$

25. (iii) $f(x)=x-[x]$ στο σημείο $x_0=5$.

Να βρείτε τα όρια:

26. (i) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+\eta\mu x)$, (ii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{4x}-\sigma\upsilon\nu 2x\right)$, (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2(2-\eta\mu x)}{x+1}$ (iv) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)}+\sqrt[3]{x^2(x+1)}\right)$

27 Αν $\mu\in\mathbb{R}$ να βρεθούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\mu x\right)$ (ii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\mu x\right)$

Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς οι συναρτήσεις f με:

(i) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν } x\neq 1\\ 0 & \text{αν } x=1\end{cases}$ στο σημείο $x_0=1$

(ii) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{αν } x\leqslant 0\\ 1-4x, & \text{αν } x>0\end{cases}$ στο σημείο $x_0=0$

(iii) $f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{αν } x<2\\ x^2, & \text{αν } x\geqslant 2\end{cases}$ στο σημείο $x_0=2$

(iv) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{|x|}, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$ στο σημείο $x_0=0$ (v) $f(x)=x-\sqrt{x-[x]}$ στο σημείο $x_0=-5$

28. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με

(i) $f(x)=|x|-x$, (ii) $f(x)=\sqrt{|x|}$

(iii) $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 1 & \text{αν } x=0\end{cases}$

29. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$ (ii) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{αν } -1\leqslant x<4\\ \dfrac{x+1}{x-1}, & \text{αν } x\geqslant 4\end{cases}$ (iii) $f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{αν } x<-1\\ 2x, & \text{αν}, -1\leqslant x\leqslant 1\\ 3x-1, & \text{αν } x>1\end{cases}$

30. Να προσδιορίσετε το α ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x-1}, & \text{αν } x\neq 1\\ \alpha, & \text{αν } x=1\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

31. Να προσδιορίσετε τα α και β ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\alpha x+1, & \text{αν } x\geqslant 0\\ x+\beta, & \text{αν } x<0\end{cases}$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

32. Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\eta\mu x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\varepsilon\varphi x}$

33. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x-1}{3-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ (ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{|x|}, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$

34. Να προσδιορίσετε τα α και β ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}-2\,\eta\mu x, & \text{αν } x\leqslant -\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha\eta\mu x+\beta, & \text{αν } -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \sigma\upsilon\nu x, & \text{αν } \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\end{cases}$$

να είναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.

35. Να προσδιοριστεί το λ ώστε η συνάρτηση

f με $f(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x+\lambda\eta\mu x, & \text{αν } x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]\\ (2\lambda+1)\,\varepsilon\varphi x, & \text{αν } x\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$ να είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\dfrac{\pi}{2})$.

36. Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{2x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha x}{\beta x}$ ($\alpha, \beta\in\mathbb{R}^*$)

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$, (v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{\eta\mu x-\eta\mu\frac{\pi}{4}}$

37. Με κατάλληλες ακολουθίες να δειχτεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu\dfrac{1}{x}$ δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$.

38. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

(i) f με $f(x) = \eta\mu\sqrt{1-x^2}$, (ii) g με $g(x) = \sigma\upsilon\nu\,(\eta\mu 5x)$

39. Να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[[x]]{x} = 1$.

40. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \begin{cases} \eta\mu\dfrac{1}{x}, & \alpha\nu\ x > 0 \\ x, & \alpha\nu\ x \leqslant 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,\eta\mu\dfrac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x = 0. \end{cases}$

41. Αν η συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και δε μηδενίζεται για καμιά τιμή του $x\in[\alpha, \beta]$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$.

42. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+5x^3-x^2+x-1 = 0$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα (0, 1).

43. Αν f και g είναι δυο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [0, 1] τέτοιες, ώστε $f(0) = g(1)$, $f(1) = g(0)$ και $g(0) \neq g(1)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0, 1]$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

44. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

45. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ ($\alpha > 0$).

46. Να υπολογίσετε τα όρια

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$), (iii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$

47. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 1, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$

48. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \alpha\nu\ x \leqslant 1 \\ x-2+\ln x, & \alpha\nu\ 1 < x \leqslant 2 \\ \ln x, & \alpha\nu\ x > 2 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \alpha\nu\ x \leqslant 1 \\ 1+\ln x, & \alpha\nu\ x > 1 \end{cases}$

4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Η ιδέα της παραγώγου σίγουρα έχει τις ρίζες της στην τάση του ανθρώπου να υποκαθιστά στη σκέψη του μια καμπύλη με τεθλασμένη γραμμή που έχει «απειροελάχιστες» πλευρές, εφαπτόμενες της καμπύλης σε αντίστοιχα σημεία της. Είναι γνωστό πόσο αποδοτική έχει αποδειχτεί αυτή η υποκατάσταση, ιδιαίτερα σε θέματα μετρήσεων.

Όταν πρόκειται για γραφική παράσταση συνάρτησης, ο καθορισμός της εφαπτομένης σ' ένα σημείο της, οδηγεί στη χρησιμοποίηση του λόγου μεταβολής της συνάρτησης. Έτσι ορίζεται ο «παράγωγος αριθμός» σε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης και στη συνέχεια η έννοια της παραγώγου. Η μικρή και προσωρινή απόκλιση από την καθιερωμένη ορολογία, που υιοθετείται εδώ, αποβλέπει στη σαφή διάκριση των δυο εννοιών. Η πρώτη έννοια –παράγωγος αριθμός– είναι όριο πεπερασμένο, δηλαδή είναι πράγματι αριθμός· η δεύτερη –παράγωγος– είναι συνάρτηση που ορίζεται εκ των υστέρων με βάση την πρώτη.

Εφόσον ο μαθητής ξεκαθαρίσει τις παραπάνω έννοιες, δε θα έχει καμιά δυσκολία, χρησιμοποιώντας και αξιοποιώντας βέβαια την έννοια του ορίου, να υπολογίσει τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και να ανακαλύψει τους κανόνες που επιτρέπουν την παραγώγιση άλλων συναρτήσεων πιο σύνθετης μορφής. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας του μαθητή, τα οποία εμφανίζονται σε σχετικό συγκεντρωτικό πίνακα, είναι απαραίτητο να τα συγκρατήσει για να μπορεί με ευχέρεια να τα χρησιμοποιεί.

Το κεφάλαιο περιλαμβάνει ακόμη το θεώρημα Rolle και το βασικό θεώρημα της μέσης τιμής, εμπνευσμένα από απλές γεωμετρικές καταστάσεις. Άμεση συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής είναι και η έννοια της παράγουσας μιας συνάρτησης, που αποτελεί το συνδετικό κρίκο με το επόμενο κεφάλαιο του ολοκληρώματος.

Εξάλλου ενδιαφέρουσες εφαρμογές των παραγώγων είναι: ο υπολογισμός ορισμένων ορίων σε περιπτώσεις απροσδιόριστων μορφών, η μελέτη της μονοτονίας, η εύρεση σημείων καμπής κτλ.

Το κεφάλαιο κλείνει με μια σύνθεση γνώσεων που έχουν προηγηθεί. Εδώ δίνεται ευκαιρία στο μαθητή να μελετήσει με πληρότητα μια συνάρτηση, αξιοποιώντας αποτελεσματικά τα δυο ισχυρά μέσα που διαθέτει, τις έννοιες του ορίου και της παραγώγου.

ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΛΟΓΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Στιγμιαία ταχύτητα

4.1 Η θέση ενός *κινητού* Μ σ' ένα άξονα x΄x αρχής Ο συνήθως καθορίζεται με μια συνάρτηση s, η οποία σε κάθε χρονική στιγμή t αντιστοιχίζει την τετμημένη x = s(t) του Μ (σχ. 1). Τότε:

1

- το διανυόμενο διάστημα μεταξύ t_0 και t είναι $s(t)\text{-}s(t_0)$
- η *μέση ταχύτητα* του κινητού στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι

$$\upsilon_\mu(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Δηλαδή είναι ο λόγος μεταβολής της s μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t, ο οποίος είναι μια νέα συνάρτηση υ_μ της μεταβλητής t.

- η **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού κατά τη χρονική στιγμή t_0 είναι το όριο (αν υπάρχει) του λόγου μεταβολής της s, όταν το t τείνει στο t_0, δηλαδή

$$\upsilon = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Ένα πλήθος άλλων εννοιών της φυσικής ορίζεται με βάση το λόγο μεταβολής μιας συνάρτησης, όπως π.χ. η επιτάχυνση, η ένταση του ρεύματος κτλ.

Κόστος παραγωγής

4.2 Στην Οικονομία το **κόστος** παραγωγής ενός προϊόντος εκφράζεται ως συνάρτηση της ποσότητας που παράγεται. Αν αντιμετωπίζεται αύξηση της παραγωγής από x_0 μονάδες με κόστος $k(x_0)$ σε x μονάδες με κόστος k(x), τότε:

- το κόστος της επιπλέον ποσότητας είναι $k(x)-k(x_0)$ με **μέσο κόστος** (δηλαδή κόστος ανά μονάδα)

$$\frac{k(x)-k(x_0)}{x-x_0}$$

  που είναι ο λόγος μεταβολής της συνάρτησης k μεταξύ x_0 και x.

- το **οριακό κόστος** στο x_0 είναι το όριο του λόγου αυτού, όταν το x τείνει στο x_0. Το οριακό κόστος στο x_0 εκφράζεται κατά προσέγγιση, με το μέσο κόστος $\frac{k(x_0+h)-k(x_0)}{h}$ μιας συμπληρωματικής ποσότητας h επιπλέον της ποσότητας x_0, όταν το h είναι συγκριτικά ελάχιστο ως προς το x_0. Με κατάλληλη επιλογή μονάδων σημαίνει πρακτικά το κόστος παραγωγής **μιας** μονάδας επιπλέον ενός «μεγάλου» αριθμού μονάδων, όπως φαίνεται στο επόμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν μετράμε την παραγωγή σε τόννους, τότε το οριακό κόστος στο $x_0 = 3$ είναι, κατά προσέγγιση (για $h = 0{,}001$),

$$\frac{k(3{,}001)-k(3)}{0{,}001}\,\text{δρχ./τον.} = [k(3{,}001)-k(3)]\cdot 1000\ \text{δρχ./τον.} = k(3{,}001)-k(3)\ \text{δρχ./κιλ.}$$

Έτσι, με μονάδα το **κιλό**, το οριακό κόστος εκφράζεται με το κόστος παραγωγής του 3001ου κιλού.

Εφαπτομένη καμπύλης

4.3 Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού και M_0 το σημείο της γραφικής της παράστασης C με τετμημένη x_0 (σχ. 2α). Αν M είναι ένα άλλο σημείο της C με τετμημένη x, τότε από τις συντεταγμένες των σημείων $M_0(x_0, f(x_0))$ και $M(x, f(x))$ βρίσκουμε ότι η ευθεία M_0M έχει συντελεστή διευθύνσεως

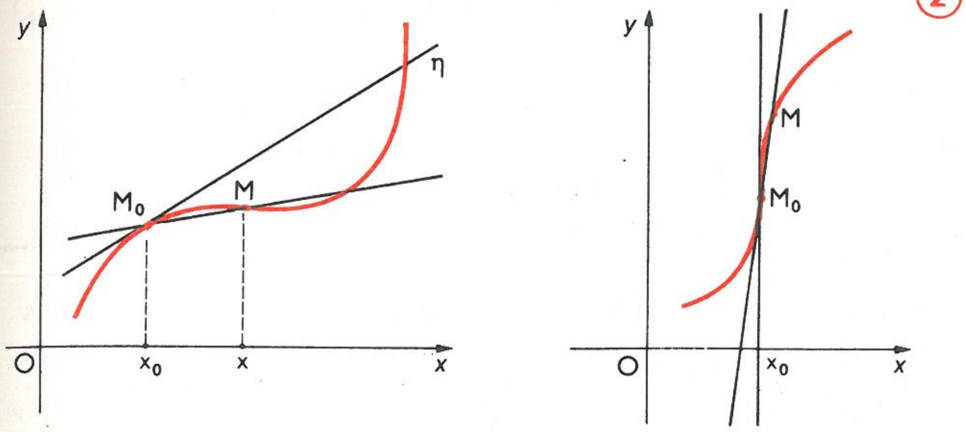
$$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

δηλαδή το **λόγο μεταβολής** της f μεταξύ x και x_0.

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\lambda(x)$. Τότε:

- Αν το όριο αυτό είναι **πεπερασμένο**, δηλαδή $\lim_{x\to x_0}\lambda(x) = l \in \mathbb{R}$, οι τιμές του λ(x) συσσωρεύονται στο διάστημα $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ και μάλιστα «όσο θέλουμε κοντά» στο *l*, αρκεί να πάρουμε το x «αρκετά κοντά» στο x_0. Έτσι, για σημεία M «γειτονικά» του M_0, ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας M_0M είναι κατά προσέγγιση *l*, που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά πρακτικά βρίσκονται στην ευθεία που *διέρχεται από το M_0 και έχει συντελεστή διευθύνσεως τον αριθμό l*. Αυτή η ευθεία με εξίσωση

2



α β

$$\boxed{y - f(x_0) = l(x-x_0)} \qquad (1)$$

ονομάζεται **εφαπτομένη της C στο σημείο M_0.**

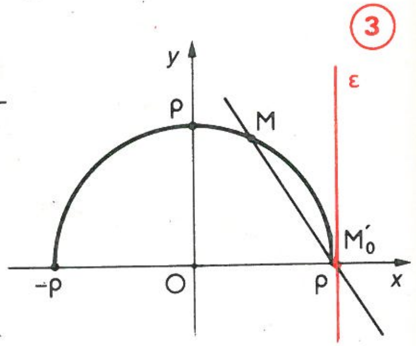
- Αν $\lim_{x\to x_0}\lambda(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε για σημεία M «γειτονικά» του M_0, οι συντελεστές διευθύνσεως των ευθειών M_0M (σχ. 2β), δε συσσωρεύονται γύρω από κάποιο πραγματικό αριθμό, αλλά για κάθε σημείο M υπάρχει άλλο M΄ στο οποίο αντιστοιχεί συντελεστής διευθύνσεως, κατ' απόλυτη τιμή, μεγαλύτερος. Εξάλλου η ευθεία $x = x_0$, που είναι παράλληλη προς τον άξονα y΄y, δε μπορεί να έχει άλλο κοινό σημείο με την C, εκτός από το M_0 (αφού η C είναι γραφική παράσταση συνάρτησης). Είναι λοιπόν εύλογο να ορίσουμε, στην περίπτωση αυτή, ως **εφαπτομένη της C** την ευθεία

$$\boxed{x = x_0} \qquad (2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι γνωστές από την Αναλυτική Γεωμετρία εξισώσεις εφαπτομένης των κωνικών τομών προκύπτουν και με τον παραπάνω γενικότερο ορισμό της εφαπτομένης. Π.χ. το ημικύκλιο $x^2+y^2=\rho^2$, $y\geq 0$, είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x)=\sqrt{\rho^2-x^2},\ x\epsilon[-\rho,\rho]$$



΄Εστω $x_0\epsilon(-\rho,\rho)$. Τότε

$$\lambda(x)=\frac{\sqrt{\rho^2-x^2}-\sqrt{\rho^2-x_0^2}}{x-x_0}=\frac{x_0^2-x^2}{(x-x_0)(\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2})}$$

$$=-\frac{x+x_0}{\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2}}$$

και συνεπώς $\quad \lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)=-\dfrac{2x_0}{2\sqrt{\rho^2-x_0^2}}=-\dfrac{x_0}{y_0}$

που είναι ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης στο $M_0\,(x_0, f(x_0))$.

Εξάλλου η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο M'_0 $(\rho, 0)$ είναι (σχ. 3) η ευθεία $x=\rho$. Πράγματι, ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ ρ και $x\epsilon(-\rho,\rho)$ είναι

$$\lambda(x)=-\frac{\sqrt{\rho^2-x^2}}{\rho-x}=-\sqrt{\frac{\rho+x}{\rho-x}}$$

με $\lim\limits_{x\to\rho}\lambda(x)=-\infty$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια της παραγώγου

4.4 Τα παραδείγματα που αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους, αν και ανήκουν σε διαφορετικούς κλάδους επιστημών (Φυσική, Οικονομία, Γεωμετρία), οδηγούν στο ίδιο μαθηματικό «φαινόμενο»: Ξεκινώντας κάθε φορά από μια συνάρτηση f και ένα ορισμένο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Δ

- Σχηματίζουμε μια **νέα** συνάρτηση λ που σε κάθε σημείο $x\neq x_0$ του Δ αντιστοιχίζει το λόγο μεταβολής $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ της f μεταξύ x_0 και x.
- Αναζητούμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)$

Προϋπόθεση είναι βέβαια *ότι το πεδίο ορισμού της* f *περιέχει ένα διάστημα στο οποίο ανήκει το* x_0. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να *περιορίζουμε* την

f στο διάστημα αυτό.

Για την ιδιαίτερη περίπτωση που το παραπάνω όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)$ είναι **πεπερασμένο,** δίνεται ο ακόλουθος

ΟΡΙΣΜΟΣ **΄Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0\epsilon\Delta$. Η συνάρτηση f λέγεται** *παραγωγίσιμη στο* x_0, **όταν ο λόγος μεταβολής**

$$\lambda(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

έχει πεπερασμένο όριο στο x_0.

Το όριο αυτό λέγεται *παράγωγος αριθμός της f στο* x_0.

΄Εστω τώρα Δ΄ το σύνολο των $x\epsilon\Delta$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $\Delta'\neq\varnothing$. Αν σε κάθε $x_0\epsilon\Delta'$ αντιστοιχίσουμε τον παράγωγο αριθμό τής f στο x_0, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση στο Δ΄, που συμβολίζεται f΄, η οποία λέγεται **παράγωγος (συνάρτηση) της f.**

΄Ετσι, *ο παράγωγος αριθμός της f στο* x_0 *είναι η τιμή της παραγώγου* f' *στο* x_0.

Δηλαδή

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \qquad (1)$$

Εξάλλου έστω h, τέτοιο ώστε $x_0+h\epsilon\Delta$. ΄Οπως είπαμε στην § 3.20, το σύνολο $\{h:x_0+h\epsilon\Delta\}$ είναι ένα διάστημα I_0 που περιέχει το 0. Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0 και x_0+h, για κάθε $h\epsilon I_0-\{0\}$, γράφεται και ως συνάρτηση του h:

$$\lambda(x_0+h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)=f'(x_0)$, θα είναι, σύμφωνα με την ισοδυναμία (4) της § 3.20,

$$\lim_{h\to 0}\lambda(x_0+h)=f'(x_0)$$

Δηλαδή

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \qquad (2)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Μετά τον παραπάνω ορισμό, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφι-

κής παράστασης C της f στο σημείο M_0 $(x_0, f(x_0))$ είναι (§ 4.3)

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \qquad (3)$$

2. Η στιγμιαία ταχύτητα υ ενός κινητού στη χρονική στιγμή t_0 είναι η τιμή $s'(t_0)$ της παραγώγου του διαστήματος s στο t_0.

Επίσης το οριακό κόστος είναι η παράγωγος του κόστους παραγωγής.

Μια συνάρτηση λέγεται **παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο,** όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = x^2+xx_0+x_0^2$$

και $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x) = x_0^2+x_0x_0+x_0^2 = 3x_0^2$. Συνεπώς $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Αλλά το x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}$. Έτσι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει παράγωγο (συνάρτηση) f΄ με

$$f'(x) = 3x^2$$

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = \frac{1}{x}$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^*$ και Δ ένα ανοικτό διάστημα τέτοιο ώστε $x_0 \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^*$. Τότε ο λόγος μεταβολής της g μεταξύ x_0 και $x_0+h \in \Delta$, με $h \neq 0$ είναι

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = -\frac{1}{x_0(x_0+h)}$$

Άρα
$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0}\left[-\frac{1}{x_0(x_0+h)}\right] = -\frac{1}{x_0^2}$$

Έτσι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και έχει παράγωγο g΄ με

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

3. Θα ζητήσουμε την παράγωγο της συνάρτησης φ με

$$\varphi(x) = |x|$$

Βρίσκουμε πρώτα αν υπάρχει παράγωγος αριθμός στο σημείο 0. Ο λόγος μεταβολής της φ μεταξύ 0 και x είναι

$$\lambda(x) = \frac{|x| - |0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ αν } x > 0 \\ -1, \text{ αν } x < 0 \end{cases}$$

Έτσι θα είναι: $\lim\limits_{x \to 0^+} \lambda(x) = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0^-} \lambda(x) = -1$

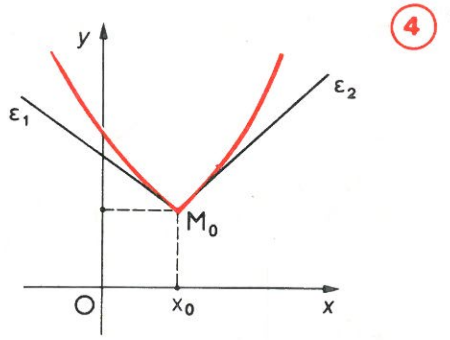
Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} \lambda(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \lambda(x)$, η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Αντίθετα σε κάθε $x_0 \neq 0$ η φ είναι παραγωγίσιμη, γιατί υπάρχει ανοικτό διάστημα Δ με $x_0 \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^*$, στο οποίο ο λόγος μεταβολής παραμένει σταθερός με τιμή 1, αν $x_0 > 0$ και -1, αν $x_0 < 0$.

Άρα
$$\varphi'(x) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x > 0 \\ -1, \text{ αν } x < 0 \end{cases}$$

Πλευρική παράγωγος

4.5 Η συνάρτηση f θα λέγεται **παραγωγίσιμη από αριστερά (από δεξιά) στο x_0**, όταν υπάρχει το όριο από αριστερά (από δεξιά) του λόγου μεταβολής της f και είναι **πεπερασμένο.** Το όριο αυτό είναι η τιμή της **παραγώγου από αριστερά (δεξιά)** της f στο x_0 και σημειώνεται $f'_\alpha(x_0)$ $[f'_\delta(x_0)]$.



Οι ημιευθείες (σχ. 4)

$$y - f(x_0) = f'_\alpha(x_0)(x-x_0), \quad x \leqslant x_0$$
$$y - f(x_0) = f'_\delta(x_0)(x-x_0), \quad x \geqslant x_0$$

λέγονται αντιστοίχως **ημιεφαπτόμενες από αριστερά** ή **από δεξιά** της γραφικής παράστασης[1] C της f στο σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$.

Έτσι, είναι φανερό ότι **μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν οι αριθμοί $f'_\alpha(x_0)$, $f'_\delta(x_0)$ και είναι**

$$f'_\alpha(x_0) = f'_\delta(x_0)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+|x+2|$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = -2$.

Είναι $f(-2) = (-2)^2 = 4$. Συνεπώς ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ -2 και x είναι:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)-4}{x+2} = \frac{x^2+|x+2|-4}{x+2} = x-2+\frac{|x+2|}{x+2} = \begin{cases} x-3, \text{ αν } x < -2 \\ x-1, \text{ αν } x > -2 \end{cases}$$

Έτσι θα έχουμε $f'_\alpha(-2) = \lim\limits_{x \to -2} (x-3) = -5$, $f'_\delta(-2) = -3$ και επειδή $f'_\alpha(-2) \neq f'_\delta(-2)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο -2.

(1) Όταν ένα πλευρικό όριο του λόγου μεταβολής της f στο x_0 είναι $\pm\infty$, η ευθεία $x = x_0$ λέγεται εφαπτομένη της C.

Διαδοχικές παράγωγοι

4.6 Η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f είναι μια νέα συνάρτηση. Επομένως είναι δυνατό να είναι και αυτή παραγωγίσιμη σ' ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Έτσι, θα ορίζεται μια άλλη συνάρτηση, η παράγωγος της f', που λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται συνήθως f''. Ομοίως η παράγωγος της f'' (αν υπάρχει) λέγεται **τρίτη παράγωγος της f** και συμβολίζεται f''' κτλ. Γενικά, για κάθε $\nu \geqslant 2$ η παράγωγος της ν-1 παραγώγου της f (αν υπάρχει) λέγεται **νιοστή παράγωγος της f** και συνήθως για $\nu \geqslant 4$ συμβολίζεται $f^{(\nu)}$, επειδή ο συμβολισμός της με τόνους δεν είναι πρόσφορος. Η παράγωγος της f λέγεται και **πρώτη παράγωγος**.

Αν υπάρχει η $f^{(\nu)}$, τότε λέμε ότι η f είναι **ν φορές παραγωγίσιμη.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ (§ 4.4 πρδ. 1).

Ο λόγος μεταβολής της f' μεταξύ x_0 και x_0+h, με $h \neq 0$, είναι

$$\frac{3(x_0+h)^2 - 3x_0^2}{h} = 6x_0 + 3h$$

Επειδή για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{h\to 0}(6x_0 + 3h) = 6x_0$, υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f και είναι η συνάρτηση f'' με

$$f''(x) = 6x$$

Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Παράγωγος και συνέχεια

4.7 Η παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης συνεπάγεται τη συνέχειά της. Πράγματι, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε θα είναι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Είναι
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right]$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0. Συνεπώς έχουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Π.χ. η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x) = |x|$$

είναι συνεχής στο 0, γιατί

$$\lim_{x\to 0^-}\varphi(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0 = \varphi(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = \varphi(0)$$

αλλά **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό (§ 4.4, πρδ. 3).

Ασκήσεις: 11, 12

Παράγωγος βασικών συναρτήσεων

4.8 Στην παράγραφο αυτή θα βρούμε τις παραγώγους μερικών βασικών συναρτήσεων. *Για την τιμή της παραγώγου στο* $x \in \mathbb{R}$, *θα χρησιμοποιήσουμε, για λόγους πρακτικούς, και* **το συμβολισμό (f(x))'** *αντί του* $f'(x)$.

I. **Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης.** Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Ο λόγος μεταβολής της ταυτοτικής συνάρτησης ι μεταξύ x_0 και x είναι, για κάθε $x \neq x_0$

$$\lambda(x) = \frac{\iota(x)-\iota(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x) = 1$ και συνεπώς $\iota'(x_0) = 1$. Επειδή όμως το x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}$,

Η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\boxed{\iota'(x) = (x)' = 1} \qquad (4)$$

II. **Παράγωγος σταθερής συνάρτησης.** Για τη σταθερή συνάρτηση u με $u(x) = c$, έχουμε

$$\lambda(x) = \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

και συνεπώς $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x) = 0$

Ώστε: **Η σταθερή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και**

$$\boxed{u'(x) = (c)' = 0} \tag{5}$$

III. Παράγωγος δύναμης. Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ορίζεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = x^{\nu}$$

Για $\nu = 1$ είναι $f'(x) = 1$. Για $\nu > 1$, ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0 και x, για κάθε $x \neq x_0$ είναι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^{\nu} - x_0^{\nu}}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x_0x^{\nu-2} + \ldots + x_0^{\nu-2}x + x_0^{\nu-1}$$

και επειδή η πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής, έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1} + x_0x^{\nu-2} + \ldots + x_0^{\nu-2}x + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0x_0^{\nu-2} + \ldots + x_0^{\nu-2}x_0 + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \nu . x_0^{\nu-1}$

Ώστε: **Η συνάρτηση x^{ν} ($\nu\in\mathbb{N}^*$) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και**

$$\boxed{(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}} \tag{6}$$

Γενικότερα, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = x^{\alpha}$$

που έχει πεδίο ορισμού:

- το $\mathbb{R}$, αν $\alpha\in\mathbb{N}^*$
- το $\mathbb{R}^*$, αν $\alpha\in\mathbb{Z}_-$ [π.χ. η x^{-2} ή η x^0 με σταθερή τιμή 1]
- το $\mathbb{R}_+$, αν $\alpha > 0$ και $\alpha\notin\mathbb{N}^*$ [π.χ. η $x^{1/2}$, δηλαδή η $\sqrt{x}$]
- το $\mathbb{R}_+^*$, αν $\alpha < 0$ και $\alpha\notin\mathbb{Z}$ [π.χ. η $x^{-2/3}$, δηλαδή η $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x > 0$]

Έστω A το πεδίο ορισμού της f και $x_0\in A$. Τότε (υποθέτοντας $\alpha \neq 1$):

1. Αν $x_0 \neq 0$ υπάρχει, σε κάθε περίπτωση, ανοικτό διάστημα Δ με $x_0\in\Delta\subseteq A$. Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0 και x_0+h με $h \neq 0$, γράφεται:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}{h} = \frac{x_0^{\alpha}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}{h} = x_0^{\alpha-1}\,\frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{h}{x_0}}$$

Αλλά ((4), § 3.20, και § 3.26, εφαρ. 3) είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{h}{x_0}} = \alpha$ και συνεπώς

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} x_0^{\alpha-1}\,\frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{h}{x_0}} = \alpha x_0^{\alpha-1}$$

2. Αν $x_0 = 0$, ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ 0 και x είναι $\dfrac{x^{\alpha} - 0}{x - 0} = x^{\alpha-1}$ και έχει όριο 0, εκτός από την περίπτωση $0 < \alpha < 1$ που έχει όριο $+\infty$.

Γενικά: **Η συνάρτηση x^{α} είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της A, εκτός από το 0 όταν $0 < \alpha < 1$, και**

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}} \tag{7}$$

IV. Παράγωγος τετραγωνικής ρίζας. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα, για $\alpha = \dfrac{1}{2}$, έχουμε ότι:

Η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ και

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}} \tag{8}$$

V. Παράγωγος ημιτόνου. Για τη συνάρτηση ημίτονο έχουμε για κάθε $h\in\mathbb{R}^*$

$$\frac{\eta\mu(x_0+h) - \eta\mu x_0}{h} = \frac{2\eta\mu\frac{h}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$$

Αλλά (§ 3.17) είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu x_0$

Άρα $$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu(x_0+h)-\eta\mu x_0}{h}=\sigma\upsilon\nu x_0$$

Ώστε: **Η συνάρτηση ημίτονο είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και**

$$\boxed{(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x} \qquad (9)$$

VI. Παράγωγος συνημιτόνου. Ομοίως, για τη συνάρτηση συνημίτονο έχουμε για κάθε $h\in\mathbb{R}^*$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(x_0+h)-\sigma\upsilon\nu x_0}{h}=\frac{-2\eta\mu\frac{h}{2}\,\eta\mu\,(x_0+\frac{h}{2})}{h}=-\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,\eta\mu(x_0+\frac{h}{2})$$

Άρα $$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu(x_0+h)-\sigma\upsilon\nu x_0}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\eta\mu(x_0+\frac{h}{2})=-\eta\mu x_0$$

Ώστε: **Η συνάρτηση συνημίτονο είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και**

$$\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x} \qquad (10)$$

VII. Παράγωγος της e^x. Η συνάρτηση f με

$$f(x)=e^x$$

έχει λόγο μεταβολής μεταξύ x_0 και x_0+h, για κάθε $h\in\mathbb{R}^*$,

$$\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h}$$

Αλλά (§ 3.25, εφαρ. 2) είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ και συνεπώς

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}(e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h})=e^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^{x_0}$$

Ώστε: **Η συνάρτηση e^x είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και**

$$\boxed{(e^x)'=e^x} \qquad (11)$$

VIII. Παράγωγος της lnx. Θεωρούμε τέλος τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\ln x$$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ και $h\neq 0$ τέτοιο ώστε $x_0+h\in\mathbb{R}_+^*$, δηλαδή $h>-x_0$

Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0, $x_0+h\in\mathbb{R}_+^*$, είναι

$$\frac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h}=\frac{\ln\frac{x_0+h}{x_0}}{h}=\frac{1}{x_0}\,\frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{\frac{h}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\,\frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{(1+\frac{h}{x_0})-1}$$

Αλλά (§ 3.26, εφαρ. 2) είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{(1+\frac{h}{x_0})-1}=1$ και συνεπώς

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h}=\frac{1}{x_0}\cdot 1=\frac{1}{x_0}$$

Ώστε: **Η συνάρτηση lnx είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ και**

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}} \qquad (12)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=x^2$ (παραβολή). Να βρεθούν οι ευθείες $y=\lambda x-1$ οι οποίες εφάπτονται της C και να δειχτεί ότι τέμνονται σ' ένα σημείο του άξονα y'y.**

Αν (x_0, y_0) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου επαφής, τότε θα είναι (σχ. 5α)

(1) $\qquad y_0=x_0^2 \qquad$ και $\qquad y_0=\lambda x_0-1 \qquad$ (2)

Η τιμή της παραγώγου της f στο x_0 είναι $f'(x_0)=2x_0$ και συνεπώς ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης θα είναι

$$\lambda=2x_0 \qquad (3)$$

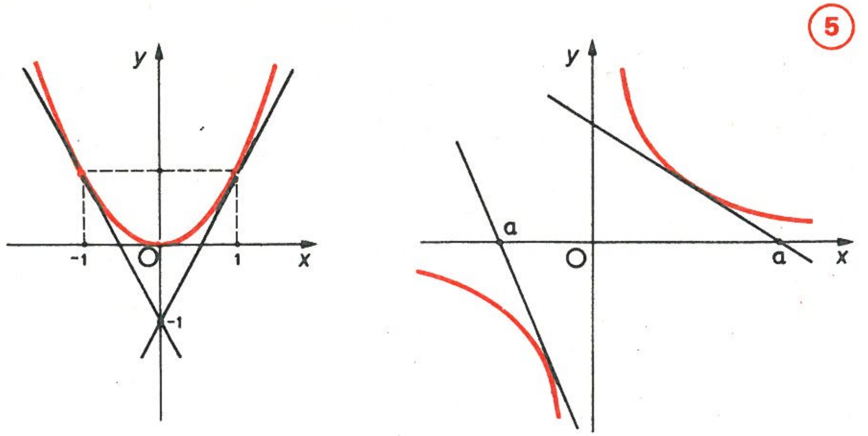
Από το σύστημα των (1), (2), (3) βρίσκουμε:

$x_0=1,\ y_0=1,\ \lambda=2 \qquad$ ή $\qquad x_0=-1,\ y_0=1,\ \lambda=-2$

Άρα οι ευθείες είναι: η $y=2x-1$ που εφάπτεται της C στο (1, 1)
και η $y=-2x-1$ που εφάπτεται της C στο (-1, 1)

Οι ευθείες αυτές διέρχονται από το σημείο (0, -1) του άξονα y'y.

5



α β

2. **Να δειχτεί ότι από κάθε σημείο (α, 0), με $\alpha \neq 0$, του άξονα x΄x διέρχεται μια μόνο εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = \frac{1}{x}$ (υπερβολή).**

Αν (x_0, y_0) είναι το σημείο επαφής, τότε ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης θα είναι $\lambda = g'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. Ἀρα η εφαπτομένη που διέρχεται από το (α, 0) θα είναι η $y = -\frac{1}{x_0^2}(x-\alpha)$. Ἐτσι θα έχουμε το σύστημα $\begin{cases} y_0 = \frac{1}{x_0} \\ y_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x_0-\alpha) \end{cases}$ το οποίο, επειδή $x_0 \neq 0$, έχει τη μοναδική λύση $x_0 = \frac{\alpha}{2}$, $y_0 = \frac{2}{\alpha}$ (σχ. 5β).

Ἀρα από το (α, 0) διέρχεται μόνο μια εφαπτομένη, η $y = -\frac{4}{\alpha^2}(x-\alpha)$

Ασκήσεις: 13, 14, 15

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

4.9 Στα επόμενα θα θεωρήσουμε συναρτήσεις που ορίζονται σ' ένα διάστημα Δ και είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο $x_0 \in \Delta$. Για το άθροισμα δυο τέτοιων συναρτήσεων έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$, τότε και η f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι**

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη

Ο λόγος μεταβολής της f+g μεταξύ x_0 και $x_0+h \in \Delta$ με $h \neq 0$ είναι

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \frac{[f(x_0+h)+g(x_0+h)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

δηλαδή $\quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g, f_1, f_2, ..., f_k είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε και οι f+g, $f_1+f_2+\ldots+f_k$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και είναι**

- $(f+g)' = f'+g'$
- $(f_1+f_2+\ldots+f_k)' = f_1'+f_2'+\ldots+f_k'$

Η δεύτερη περίπτωση του πορίσματος αποδεικνύεται επαγωγικά.

Παράγωγος γινομένου

4.10 Επίσης για το γινόμενο συναρτήσεων που ορίζονται στο διάστημα Δ έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$, τότε και η $(f\cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι**

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Απόδειξη

Ο λόγος μεταβολής της $f\cdot g$ μεταξύ x_0 και $x_0+h \in \Delta$ με $h \neq 0$ είναι

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,g(x_0+h)+f(x_0)\,\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι (§ 4.7) συνεχής και συνεπώς $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h)=g(x_0)$. Εξάλλου, επειδή και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, από την παραπάνω ισότητα θα έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)\right]+\lim_{h\to 0} f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0} g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

δηλαδή $$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι συναρτήσεις $f, g, f_1, f_2, \ldots, f_k$ είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $k\in\mathbb{N}^*$, τότε και οι $f\cdot g$, λf, $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_k$, f^k είναι παραγωγίσιμες στο Δ και είναι**

1. $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
2. $(\lambda\cdot f)'=\lambda f'$
3. $(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_k)'=\sum\limits_{i=1}^{k}(f_1\cdot\ldots\cdot f_{i-1}f_i'f_{i+1}\cdot\ldots\cdot f_k)$
4. $(f^k)'=kf^{k-1}f'$

Πράγματι, η περίπτωση 1 προκύπτει άμεσα από το θεώρημα και η 2 από την 1, όταν η g είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή λ. Η περίπτωση 3 αποδεικνύεται επαγωγικά, ενώ η 4 είναι συνέπεια της 3.

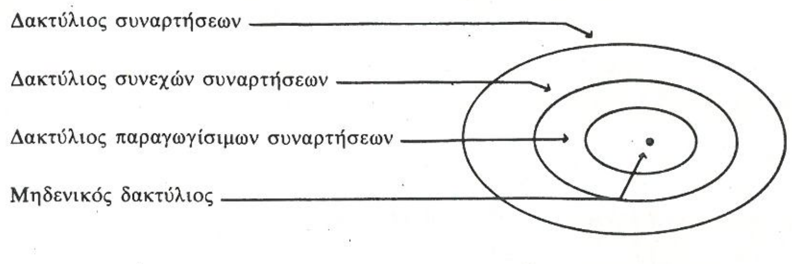
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα της § 4.9 έχουμε ότι:

Το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' ένα κοινό διάστημα Δ είναι διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού Δ.

Επειδή ακόμη το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο Δ είναι κλειστό και ως προς τον πολλαπλασιασμό, συμπεραίνουμε ότι:

Το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' ένα κοινό διάστημα Δ είναι δακτύλιος.



6

Τα ίδια συμβαίνουν και με το σύνολο των συναρτήσεων που είναι 2, 3, ..., ν φορές παραγωγίσιμες στο Δ, καθώς και γενικότερα για τις συνεχείς συναρτήσεις στο Δ (§ 3.14).

Στο σχήμα 6 φαίνονται όλοι οι παραπάνω «υποδακτύλιοι» του δακτυλίου F_Δ των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για την παράγωγο της συνάρτησης P με $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, έχουμε

$$P'(x)=(\alpha x^2)'+(\beta x)'+(\gamma)'=\alpha(x^2)'+\beta(x)'=\alpha\cdot 2x+\beta=2\alpha x+\beta$$

$$P''(x)=(2\alpha x+\beta)'=(2\alpha x)'=2\alpha(x)'=2\alpha$$

$$P'''(x)=0$$

Γενικότερα για τη συνάρτηση P με

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$$

έχουμε:

$$P'(x)=(\alpha_\nu x^\nu)'+(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})'+\ldots+(\alpha_1x)'+(\alpha_0)'=\alpha_\nu(x^\nu)'+\alpha_{\nu-1}(x^{\nu-1})'+\ldots+\alpha_1(x)'$$

$$=\alpha_\nu\nu x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}(\nu-1)x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1=\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1$$

Αποδεικνύεται επαγωγικά (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση) ότι

$$P^{(\nu)}(x)=\nu(\nu-1)\ldots 2\alpha_\nu=\nu!\alpha_\nu$$

2. Για τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f με

$$f(x)=(x-\alpha)^3,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

έχουμε (§ 4.10, Πόρισμα 4)

$$f'(x) = [(x-\alpha)^3]' = 3\cdot(x-\alpha)^2(x-\alpha)' = 3(x-\alpha)^2[(x)'-(\alpha)'] = 3(x-\alpha)^2 \text{ και}$$

$$f''(x) = [3(x-\alpha)^2]' = 3[(x-\alpha)^2]' = 3[2(x-\alpha)(x-\alpha)'] = 6(x-\alpha)$$

3. Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ με $g(x) = (x+\sqrt{x})^2$ έχει παράγωγο g' με

$$g'(x) = 2(x+\sqrt{x})(x+\sqrt{x})' = 2(x+\sqrt{x})[(x)'+(\sqrt{x})']$$

$$= 2(x+\sqrt{x})\,[1+\frac{1}{2\sqrt{x}}] = \frac{2(x+\sqrt{x})(1+2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = (1+\sqrt{x})\,(1+2\sqrt{x}).$$

4. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \text{συν}x - \text{ημ}x$. Τότε έχουμε:

$$f'(x) = (\text{συν}x)' - (\text{ημ}x)' = -\text{ημ}x - \text{συν}x$$

$$f''(x) = (-\text{ημ}x - \text{συν}x)' = -\text{συν}x - (-\text{ημ}x) = -\text{συν}x + \text{ημ}x$$

$$f'''(x) = (-\text{συν}x + \text{ημ}x)' = -(-\text{ημ}x) + \text{συν}x = \text{ημ}x + \text{συν}x$$

$$f^{(4)}(x) = (\text{ημ}x + \text{συν}x)' = \text{συν}x - \text{ημ}x = f(x)$$

5. Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2e^x + x\ln x$ έχει παράγωγο g' με

$$g'(x) = (x^2e^x)' + (x\ln x)' = [(x^2)'e^x + x^2(e^x)'] + [(x)'\ln x + x(\ln x)']$$

$$= (2xe^x + x^2e^x) + (\ln x + x\cdot\frac{1}{x}) = xe^x(x+2) + \ln x + 1$$

και δεύτερη παράγωγο g'' με

$$g''(x) = [xe^x(x+2)]' + (\ln x)' = (x)'e^x(x+2) + x(e^x)'(x+2) + xe^x(x+2)' + \frac{1}{x}$$

$$= e^x(x+2) + xe^x(x+2) + xe^x\cdot 1 + \frac{1}{x} = e^x(x^2+4x+2) + \frac{1}{x}$$

Παράγωγος πηλίκου

4.11 Για το πηλίκο συναρτήσεων που ορίζονται στο διάστημα Δ έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 \in \Delta$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε και οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και είναι**

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Απόδειξη

1. Ο λόγος μεταβολής της $\frac{1}{g}$ μεταξύ x_0, $x_0+h \in \Delta$ με $h \neq 0$ είναι

$$\lambda(x_0+h) = \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h) - \frac{1}{g}(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h\cdot g(x_0)\cdot g(x_0+h)}$$

$$= -\frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}\cdot\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι συνεχής και συνεπώς $\lim_{h\to0} g(x_0+h) = g(x_0)$. Έτσι από την προηγούμενη ισότητα θα έχουμε

$$\lim_{h\to0}\lambda(x_0+h) = -\frac{1}{g(x_0)\lim_{h\to0} g(x_0+h)}\cdot\lim_{h\to0}\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = -\frac{1}{[g(x_0)]^2}\cdot g'(x_0).$$

2. Έχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι $g(x) \neq 0$, τότε και οι $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και**

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι ζητείται η παράγωγος της συνάρτησης f με

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι πηλίκο των συναρτήσεων f_1 με $f_1(x) = x^3$ και f_2 με $f_2(x) = x^2-1$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Η f ορίζεται στο $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Επειδή σε καθένα από τα διαστήματα που αποτελούν το A ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγούμενου πορίσματος, η f είναι παραγωγίσιμη στο A και είναι

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x) = \frac{f_1'(x)\cdot f_2(x) - f_1(x)\cdot f_2'(x)}{[f_2(x)]^2}$$

$$= \frac{(x^3)'(x^2-1)-x^3(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι** $(\log_\alpha x)' = \dfrac{1}{x\ln\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Είναι (§ 1.9) $\log_\alpha x = \dfrac{\ln x}{\ln\alpha}$. Επομένως (§ 4.10, πορ.) έχουμε

$$(\log_\alpha x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln\alpha}\right)' = \frac{1}{\ln\alpha}(\ln x)' = \frac{1}{\ln\alpha}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln\alpha}$$

2. **Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση εφαπτομένη είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και**

$$(\text{εφ}x)' = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

Πράγματι, η εφx ορίζεται σε κάθε x με συνx $\neq 0$. 'Εχουμε:

$$(\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x - \text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x} = \frac{1}{\text{συν}^2x}$$

Ασκήσεις: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27

Σύνθεση συναρτήσεων

4.12 'Εστω ότι ζητάμε την παράγωγο της συνάρτησης

$$\text{ημ}2x$$

η οποία είναι σύνθεση της συνάρτησης g με $g(x) = 2x$ και της συνάρτησης ημίτονο. Επειδή ημ2x = 2ημxσυνx, θα έχουμε

$$\begin{aligned}(\text{ημ}2x)' &= 2[(\text{ημ}x)'\text{συν}x+\text{ημ}x(\text{συν}x)'] \\ &= 2(\text{συν}^2x-\text{ημ}^2x) = 2\text{συν}2x\end{aligned}$$

'Ετσι η παράγωγος της συνάρτησης ημ2x θα είναι η συνάρτηση **2συν2x** και όχι η συν2x, όπως ίσως θα περίμενε κανείς.

Για την παράγωγο της σύνθεσης συναρτήσεων θα αποδείξουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **'Εστω g και f δυο συναρτήσεις από τις οποίες η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$. Τότε η σύνθεσή τους $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και**

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

Απόδειξη. 'Εστω Δ ένα διάστημα στο οποίο ορίζεται η $f\circ g$. Ο λόγος μεταβολής της $f\circ g$ μεταξύ x_0, $x\in\Delta$ γράφεται για κάθε $x \neq x_0$:

$$\lambda(x) = \frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} \qquad (1)$$

- 'Οταν $g(x) \neq g(x_0)$, η (1) γράφεται

$$\lambda(x) = \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

'Οταν $g(x) = g(x_0)$, τότε $\lambda(x) = 0$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση F ορισμένη στο πεδίο ορισμού της f με

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}, & \text{αν } y \neq y_0 \\ f'(y_0), & \text{αν } y = y_0 \end{cases}$$

Τότε η (2) γράφεται

$$\lambda(x) = F(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \qquad (3)$$

Αλλά η (3) εξακολουθεί να ισχύει και όταν $g(x) = g(x_0)$ επειδή το δεύτερο μέλος της μηδενίζεται.

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)$ από την (3).

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$

Εξάλλου η F είναι συνεχής στο $y_0 = g(x_0)$ επειδή

$$\lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} = f'(y_0) = F(y_0)$$

'Αρα, σύμφωνα με το θεώρημα της § 3.19, η $F\circ g$ είναι συνεχής στο x_0 και

$$\lim_{x\to x_0} F(g(x)) = F(g(x_0)) = f'(g(x_0))$$

Επομένως έχουμε τελικά:

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\lambda(x) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, τότε (§ 3.22, Πόρισμα) το g(Δ) είναι επίσης διάστημα. Αν λοιπόν και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ), τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1 **Η συνάρτηση $\alpha^x (\alpha > 0)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και**

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$$

Πράγματι, επειδή (§ 1.9) $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ η συνάρτηση α^x είναι σύνθεση των συναρτήσεων g με $g(x) = x\ln\alpha$ και f με $f(x) = e^x$. Έτσι έχουμε:

$$(\alpha^x)' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2 **Έστω g μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $g(x) > 0$, τότε**

$$(\sqrt{g(x)})' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

Πράγματι, επειδή η $\sqrt{g(x)}$ είναι σύνθεση των g και f με $f(x) = \sqrt{x}$, θα έχουμε

$$(\sqrt{g(x)})' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω ότι ζητείται η παράγωγος της συνάρτησης F με $F(x) = (5x^3-7)^2$. Η F είναι σύνθεση των g με $g(x) = 5x^3-7 = y$ και f με $f(y) = y^2$. Επειδή $f'(y) = 2y$ και $g'(x) = 15x^2$, θα έχουμε

$$[(5x^3-7)^2]' = 2(5x^3-7) \cdot 15x^2 = 30x^2(5x^3-7)$$

2. Για την παράγωγο της συνάρτησης $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ έχουμε (Πόρισμα 2)

$$(\sqrt{x^3-1})' = \frac{(x^3-1)'}{2\sqrt{x^3-1}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

3. Ας υποθέσουμε ότι ζητείται η παράγωγος της συνάρτησης F με $F(x) = \sigma\upsilon\nu^2 4x$. Η F είναι σύνθεση των συναρτήσεων f_1 με $f_1(x) = \sigma\upsilon\nu 4x = y$ και f_2 με $f_2(y) = y^2$, δηλαδή $F = f_2 \circ f_1$. Έτσι, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$F'(x) = (f_2 \circ f_1)'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 4x \cdot (\sigma\upsilon\nu 4x)'$$

Ομοίως έχουμε $(\sigma\upsilon\nu 4x)' = (-\eta\mu 4x)(4x)' = -4\eta\mu 4x$ και συνεπώς

$$F'(x) = -8\eta\mu 4x\,\sigma\upsilon\nu 4x = -4\eta\mu 8x$$

4. Επίσης έχουμε

$$(e^{\sqrt{x^2+1}})' = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot (\sqrt{x^2+1})' = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2xe^{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Τους κυριότερους κανόνες παραγώγισης καθώς και τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων που εξετάσαμε στα προηγούμενα περιλαμβάνει ο επόμενος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ[1]

f(x)	f′(x)	f(x)	f′(x)	Συνάρτηση	Παράγωγος
x	1	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$f+g$	$f'+g'$
c	0	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$f \cdot g$	$f'g+fg'$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\varepsilon\varphi x$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	λf	$\lambda f'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$\sqrt{g(x)}$	$\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	α^x	$\alpha^x \ln\alpha$	$f \circ g$	$(f' \circ g) \cdot g'$
		$\ln x$	$\frac{1}{x}$		
		$\log_\alpha x$	$\frac{1}{x\ln\alpha}$		

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x-e^x}{1+x\ln x}$**

Εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγώγισης και έχουμε

$$f'(x) = \frac{(x-e^x)' \cdot (1+x\ln x) - (x-e^x)(1+x\ln x)'}{(1+x\ln x)^2} = \frac{(1-e^x)(1+x\ln x) - (x-e^x)(x\ln x)'}{(1+x\ln x)^2}$$

$$= \frac{1+x\ln x - e^x - xe^x\ln x - x\ln x - x + e^x\ln x + e^x}{(1+x\ln x)^2} = \frac{(1-x)(1+e^x\ln x)}{(1+x\ln x)^2}$$

2. **Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}$**

(1) Δεν αναφέρονται οι ειδικότερες προϋποθέσεις που απαιτούνται, για να είναι παραγωγίσιμες οι συναρτήσεις.

'Εχουμε $f(x) = (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} = e^{(\eta\mu x)\ln(\sigma\upsilon\nu x)}$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(\eta\mu x)\ln(\sigma\upsilon\nu x)} \cdot [\eta\mu x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x)]' = (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} \cdot [(\eta\mu x)'\ln(\sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu x[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]'] \\ &= (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} \cdot [\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'] \\ &= (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} \cdot [\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu x] = (\sigma\upsilon\nu x)^{1+\eta\mu x} \cdot [\ln(\sigma\upsilon\nu x) - \varepsilon\varphi^2 x] \end{aligned}$$

3. **Να βρεθεί το σύνολο στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση f με:**

$$f(x) = x + |x^2 - x|$$

Επειδή το δυώνυμο $x^2-x = x(x-1)$ είναι μη αρνητικό στο $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ και αρνητικό στο $(0, 1)$, η f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ -x^2+2x, & \text{αν } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x$ και στο $(0, 1)$ με παράγωγο $f'(x) = -2x+2$.

Μένει να εξετάσουμε, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και το 1. 'Εχουμε:

$$f'_\alpha(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = 0 \text{ και } f'_\delta(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(-x+2) = 2$$

και επειδή $f'_\alpha(0) \neq f'_\delta(0)$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Ομοίως έχουμε:

$$f'_\delta(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2 \text{ και}$$

$$f'_\alpha(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+2x-1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+2x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}[-(x-1)] = 0 \neq f'_\delta(1)$$

και συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

'Αρα η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R}-\{0, 1\}$.

Ασκήσεις: 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Ακρότατα συνάρτησης

4.13 Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\Delta = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ με

$$f(x) = (x^2-1)^2+2$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο -1, αφού για κάθε $x \in \Delta$,

$$f(x) = (x^2-1)^2+2 \geqslant 2 = f(-1)$$

Εξάλλου η f παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{3}{2}$. Πράγματι, για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε

$$0 \leqslant |x| \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{9}{4} \Rightarrow -1 \leqslant x^2-1 \leqslant \frac{5}{4} \Rightarrow (x^2-1)^2 \leqslant \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)^2+2 \leqslant \frac{25}{16} + 2 \Rightarrow f(x) \leqslant f(-\frac{3}{2})$$

Τέλος παρατηρούμε ότι $f(0) = 3$, ενώ υπάρχει διάστημα Δ_0 τέτοιο ώστε ο περιορισμός της f στο $\Delta \cap \Delta_0$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο 0. Πράγματι έχουμε

$$f(x) \leqslant f(0) \Leftrightarrow (x^2-1)^2+2 \leqslant 3$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2-1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-2) \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

Συνεπώς για $\Delta_0 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ έχουμε

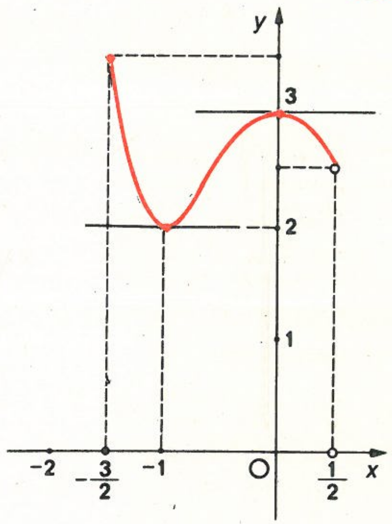
$$\Delta \cap \Delta_0 = (-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$$

και για κάθε $x \in (-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ είναι

$$f(x) \leqslant f(0)$$

Θα λέμε τότε ότι η f παρουσιάζει *τοπικό μέγιστο* στο σημείο 0.

7



Γενικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **'Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει ή έχει *τοπικό μέγιστο* (*τοπικό ελάχιστο*) σ' ένα σημείο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x-x_0| < \delta$ να είναι**

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad [f(x) \geqslant f(x_0)]$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το μέγιστο (ελάχιστο) μιας συνάρτησης, αν υπάρχει, είναι και τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο). Για διάκριση ονομάζεται **ολικό μέγιστο (ολικό ελάχιστο).**

Θα λέμε ακόμη ότι η f έχει σ' ένα σημείο **τοπικό ακρότατο,** όταν η f έχει στο σημείο αυτό τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

Ειδικότερα, έστω ότι η f ορίζεται σε **ανοικτό** διάστημα Δ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, π.χ. τοπικό μέγιστο, στο $x_0 \in \Delta$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, η γραφική παράσταση έχει εφαπτομένη στο σημείο M_0 με τετμημένη x_0. 'Ολα τα γειτονικά σημεία, εκατέρωθεν του M_0, είναι «κάτω» από την εφαπτομένη που διέρχεται από το M_0, το οποίο έχει τη μέγιστη τεταγμένη. Έτσι η εφαπτομένη πρέπει να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x που σημαίνει ότι $f'(x_0) = 0$.

Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f:**

- **ορίζεται σ' ένα *ανοικτό* διάστημα Δ**
- **παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$**
- **είναι παραγωγίσιμη στο x_0**

τότε $$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Τότε, αφού το Δ είναι ανοικτό διάστημα, θα υπάρχει διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ να είναι $f(x) \leqslant f(x_0)$

ή $$f(x) - f(x_0) \leqslant 0$$

Ειδικότερα, αν $x_0 < x < x_0+\delta$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$$

και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι (§ 4.5)

$$f'(x_0) = f'_\delta(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0,$$

δηλαδή $$f'(x_0) \leqslant 0 \qquad (1)$$

Αν όμως είναι $x_0-\delta < x < x_0$, θα έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

και συνεπώς

$$f'(x_0) = f'_\alpha(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

δηλαδή $$f'(x_0) \geqslant 0 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $f'(x_0) = 0$

Ανάλογη είναι η απόδειξη για την περίπτωση τοπικού ελαχίστου.

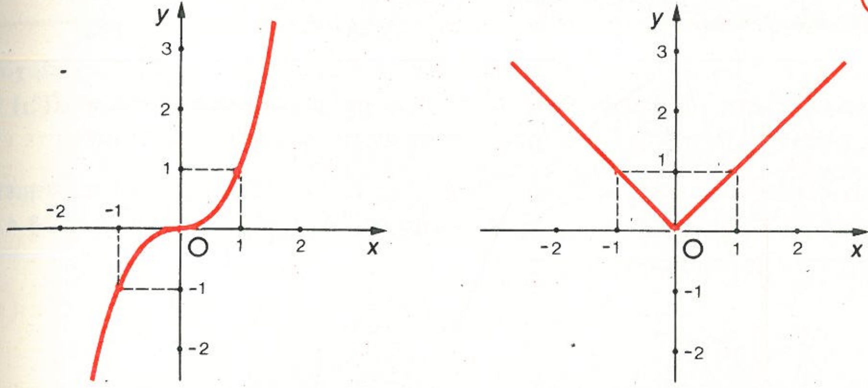
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η υπόθεση ότι το x_0 είναι σημείο **ανοικτού** διαστήματος είναι αναγ-

καία. Π.χ. η συνάρτηση $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x+1$, έχει μέγιστο στο $x_0 = 1$, γιατί για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $f(x) = 2x+1 \leqslant 2\cdot 1+1 = 3 = f(1)$, αλλά η παράγωγός της στο σημείο αυτό είναι $f'(1) = 2 \neq 0$.

2. Ο μηδενισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτου της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ (σχ. 8α) έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ που η τιμή της στο $x_0 = 0$ είναι $f'(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο σημείο αυτό, γιατί για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) = x^3 < 0$, ενώ για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = x^3 > 0$.

8



α β

3. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Π.χ. η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (§ 4.4, πρδ. 3). Όμως έχει ελάχιστο στο σημείο αυτό, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) = |x| \geqslant 0 = \varphi(0)$ (σχ. 8β).

Ασκήσεις: 39

Θεώρημα Rolle

4.14 Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η αναζήτηση ενός τοπικού ακροτάτου της f σ' ένα διάστημα Δ, αν εξαιρέσουμε τα άκρα του διαστήματος και τα σημεία στα οποία η f΄ δεν ορίζεται, θα πρέπει να γίνει μεταξύ των σημείων εκείνων στα οποία μηδενίζεται η παράγωγός της. Στα επόμενα μαθήματα θα φανεί η ολοένα και μεγαλύτερη σημασία της παραγώγου για τη μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ένα πρώτο βήμα αποτελεί το επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως

ΘΕΩΡΗΜΑ *Rolle*

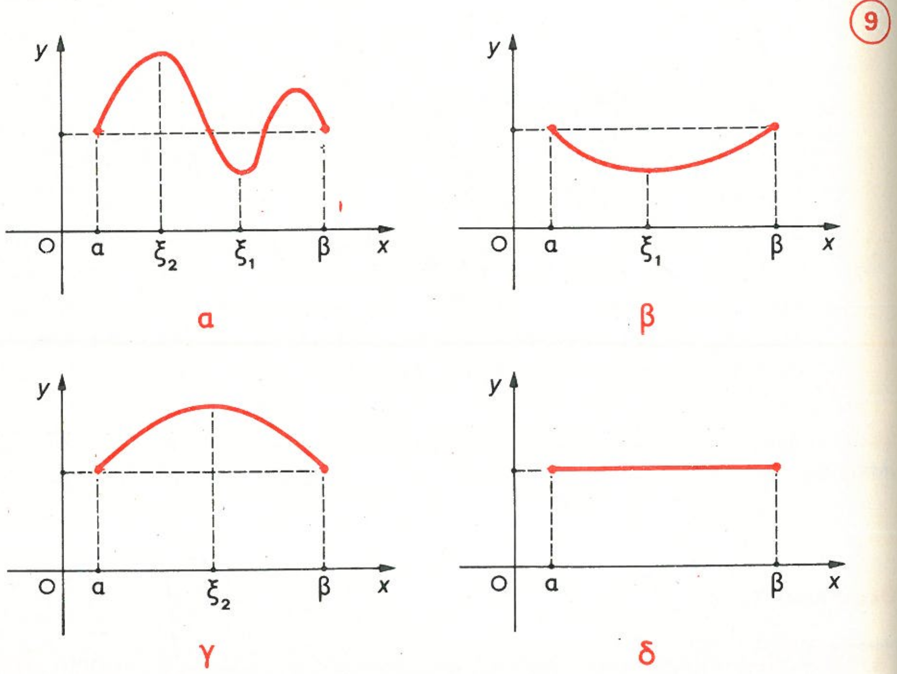
Έστω η συνάρτηση f για την οποία υποθέτουμε ότι:

- **είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β],**
- **είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)**
- $$f(\alpha) = f(\beta)$$

Τότε υπάρχει σημείο του (α, β) στο οποίο η f΄ μηδενίζεται.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β], θα υπάρχουν (§ 3.24) $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε το $f(\xi_1)$ να είναι η ελάχιστη και το $f(\xi_2)$ να είναι η μέγιστη τιμή της f στο [α, β]. Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Ένα τουλάχιστο από τα ξ_1, ξ_2 ανήκει στο (α, β). Έστω ξ αυτό το σημείο. Επειδή η f παρουσιάζει στο ξ ακρότατο, σύμφωνα με το θεώρημα της § 4.13 θα είναι $f'(\xi) = 0$ (σχ. 9α, β, γ)



- Τα ξ_1, ξ_2 δεν ανήκουν στο (α, β), οπότε είναι τα άκρα α, β του διαστήματος. Τότε, επειδή $f(\alpha) = f(\beta)$, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f συμπίπτουν και

συνεπώς η f θα είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή f(α) (σχ. 9δ). Έτσι όμως (§ 4.8. II) για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι

$$f'(x) = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [-ρ, ρ]. Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (-ρ, ρ) και

$$f'(x) = \frac{(\rho^2 - x^2)'}{2\sqrt{\rho^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

Είναι $f(\rho) = f(-\rho) = 0$

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (-\rho, \rho)$ με $f'(\xi) = 0$. Πράγματι, είναι $f'(0) = 0$.

2. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leqslant 0 \\ x^3, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Επειδή η f συμπίπτει για $x > 0$ με την x^3 και για $x < 0$ με την x^2, θα είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, για κάθε $x \neq 0$. Για το σημείο 0 έχουμε:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0$$

$$\text{και } \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^3 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^2 = 0$$

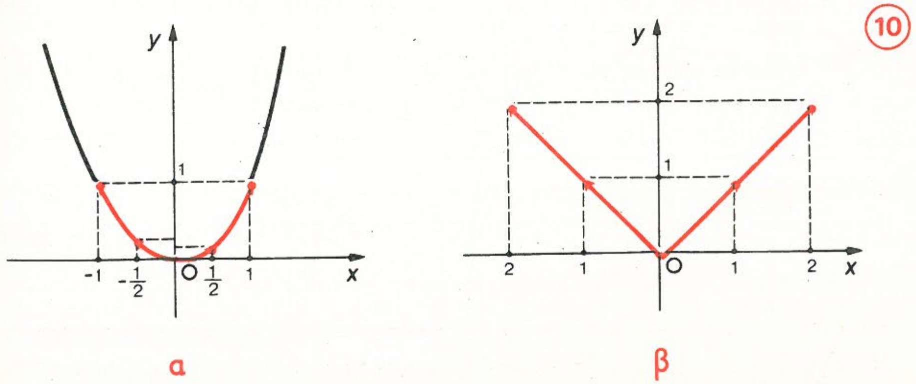
Άρα $f'(0) = 0$.

Εξάλλου, παρατηρούμε ότι είναι:

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 \quad \text{και} \quad f(1) = 1^3 = 1$$

δηλαδή $f(-1) = f(1)$

Επομένως, στο διάστημα [-1, 1] έχει εφαρμογή το θεώρημα του Rolle (σχ. 10α).



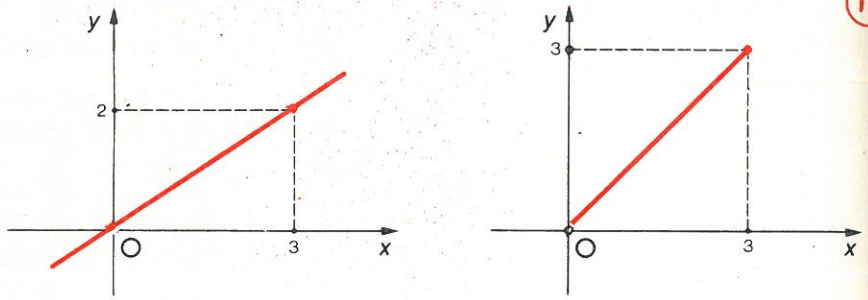
3. Για τη συνάρτηση φ με $\varphi(x) = |x|$ διαπιστώνουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[-2, 2]$
- $\varphi(-2) = \varphi(2) = 2$
- δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και συνεπώς ούτε στο $(-2, 2)$

Επομένως δεν έχει εφαρμογή το θεώρημα Rolle. Πράγματι, για κάθε $x \neq 0$ είναι $\varphi'(x) = 1$ ή $\varphi'(x) = -1$ (σχ. 10β).

4. Η συνάρτηση σ με $\sigma(x) = \frac{2}{3}x$ είναι συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), ενώ είναι $\sigma(\alpha) \neq \sigma(\beta)$. Συνεπώς και εδώ δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle (σχ. 11α).

11



α β

5. Η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3, & \text{αν } x = 0 \\ x, & \text{αν } 0 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ και είναι $\varphi(0) = 3 = \varphi(3)$, αλλά η φ δεν είναι συνεχής στο $[0, 3]$ (γιατί δεν είναι συνεχής στο 0). Επομένως και πάλι δεν εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle. Πράγματι, η παράγωγος της φ στο $(0, 3)$ είναι $\varphi'(x) = 1 \neq 0$ (σχ. 11β).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^{2\nu}+\alpha x+\beta = 0$ $(\nu \in \mathbb{N}^*)$ δεν έχει περισσότερες από δυο πραγματικές ρίζες.

Έστω ότι η $x^{2\nu}+\alpha x+\beta = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Έτσι, για τη συνάρτηση f με $f(x) = x^{2\nu}+\alpha x+\beta$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα έχουμε

$$f(\rho_1) = f(\rho_2)\ [= 0] \text{ και } f(\rho_2) = f(\rho_3)$$

Τότε, κατά το θεώρημα του Rolle, θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$. Αυτό σημαίνει, αφού $f'(x) = 2\nu x^{2\nu-1}+\alpha$, ότι η εξίσωση $2\nu x^{2\nu-1}+\alpha = 0$ θα έχει δυο διαφορετικές πραγματικές ρίζες ξ_1 και ξ_2. Η διώνυμη όμως αυτή εξίσωση είναι περιττού βαθμού και έχει μία μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$.

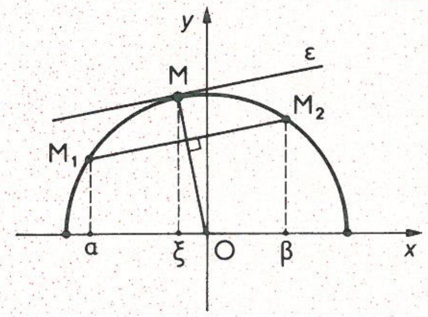
Ασκήσεις: 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47

Θεώρημα μέσης τιμής

4.15 Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι μια προϋπόθεση για να ισχύει το θεώρημα του Rolle είναι $f(\alpha) = f(\beta)$. Θα εξετάσουμε γενικά την περίπτωση που τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ μπορεί να είναι και διαφορετικά με ένα απλό γεωμετρικό παράδειγμα. Το ημικύκλιο $x^2+y^2 = \rho^2$, $y \geqslant 0$ (σχ. 12) είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

12

$$f(x) = \sqrt{\rho^2-x^2}$$



η οποία είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-\rho, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(-\rho, \rho)$. Αν $M_1(\alpha, f(\alpha))$ και $M_2(\beta, f(\beta))$, με $\alpha < \beta$, είναι δυο σημεία του ημικυκλίου, τότε η ευθεία M_1M_2 θα έχει συντελεστή διευθύνσεως

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Από τη γεωμετρία ξέρουμε, ότι η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο μέσο M του τόξου M_1M_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία M_1M_2. Αν ξ είναι η τετμημένη του M, θα είναι $\alpha < \xi < \beta$ και ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης θα είναι $f'(\xi)$. Έτσι θα έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Ειδικότερα, αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε $f'(\xi) = 0$, συμπέρασμα που συμφωνεί με το θεώρημα Rolle.

Γενικά θα αποδείξουμε το επόμενο θεμελιώδες θεώρημα, που αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Rolle, και είναι γνωστό ως

ΘΕΩΡΗΜΑ *μέσης τιμής*

Αν η συνάρτηση f είναι

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β),**

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

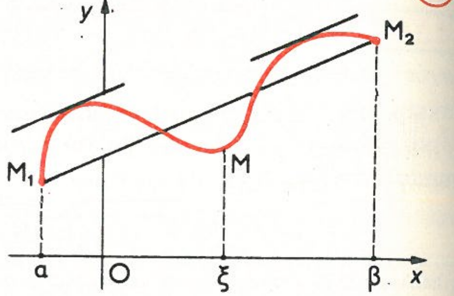
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (3)$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση F με[1]

(1) Η ορίζουσα παριστάνει το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου M_1MM_2 και φυσικά είναι μηδέν, όταν $M = M_1$ ή $M = M_2$.

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(\alpha) & \alpha & 1 \\ f(\beta) & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

13



για την οποία είναι $F(\alpha) = F(\beta)[=0]$.
Είναι όμως

$$F(x) = f(x)(\alpha-\beta)-x[f(\alpha)-f(\beta)]+c$$

με
$$c = \begin{vmatrix} f(\alpha) & \alpha \\ f(\beta) & \beta \end{vmatrix}$$

και είναι φανερό ότι, όπως και η f, είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο

$$F'(x) = f'(x)(\alpha-\beta) + f(\beta)-f(\alpha) \tag{4}$$

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$, ή λόγω της (4), $0 = f'(\xi)(\alpha-\beta) + f(\beta) - f(\alpha)$. Έτσι θα έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η ισότητα (3) γράφεται ισοδύναμα

$$\boxed{f(\beta) - f(\alpha) = (\beta-\alpha)\cdot f'(\xi)}$$

2. Το θεώρημα ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής. Αν θεωρήσουμε τα σημεία $M_1(\alpha, f(\alpha))$ και $M_2(\beta, f(\beta))$ της γραφικής παράστασης C της f, υπάρχει ξ μεταξύ α και β τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία M_1M_2 (σχ. 13).

Ασκήσεις: 48, 49, 50, 51, 52

Άμεσες συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

4.16 Πριν δούμε τις πολλές και χρήσιμες εφαρμογές του θεωρήματος της μέσης τιμής, θα αναφέρουμε μερικές άμεσες συνέπειές του. Συγκεκριμένα:

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε x∈Δ είναι $f'(x) = 0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.**

Απόδειξη. Έστω x_1, x_2 δυο *οποιαδήποτε* σημεία του Δ. Τότε η f ικανοποιεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ τις συνθήκες του θεωρήματος μέσης τιμής και συνεπώς θα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2-x_1)$$

Επειδή όμως $f'(x_0) = 0$, θα έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$. Δηλαδή η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ **Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:**

- **είναι παραγωγίσιμες στο Δ**
- **$f' = g'$**

Τότε υπάρχει σταθερή στο Δ συνάρτηση u, τέτοια ώστε

$$f = g+u$$

Πράγματι, έχουμε για κάθε x∈Δ:

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f'(x)-g'(x) = 0 \Rightarrow (f'-g')(x) = 0 \Rightarrow (f-g)'(x) = 0$$

Συνεπώς η f-g είναι μια σταθερή στο Δ συνάρτηση u. Άρα $f = g+u$.

Παράγουσα συνάρτηση

4.17 Επειδή η παράγωγος της x^3 είναι $3x^2$, θα έχουμε ότι

$$x^2 = \frac{1}{3}(x^3)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)'$$

Η συνάρτηση $\frac{x^3}{3}$ καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής $\frac{x^3}{3}+c$ (c σταθερό) έχει παράγωγο x^2 και χαρακτηρίζεται ως *«παράγουσα»* ή *«αρχική συνάρτηση»* της x^2.

Γενικά δίνεται ο επόμενος

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ. Ονομάζουμε *παράγουσα* (ή *αρχική*) *συνάρτηση* της f κάθε συνάρτηση F ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία**

$$F' = f$$

Αν F είναι παράγουσα της f και u μια σταθερή στο Δ συνάρτηση, τότε και η F+u είναι επίσης μια παράγουσα της f, γιατί $(F+u)' = F'+0 = f$.

Αντιστρόφως, κάθε παράγουσα της f, σύμφωνα με το πόρισμα της προηγούμενης παραγράφου είναι της μορφής F+u.

Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και F μια παράγουσά της. Το σύνολο των παραγουσών της f το αποτελούν οι συναρτήσεις F+u, όπου u μια οποιαδήποτε σταθερή στο Δ συνάρτηση.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια παράγουσα της συνάρτησης συνx είναι η ημx (γιατί είναι (ημx)΄ = συνx) και το σύνολο των παραγουσών της αποτελούν οι συναρτήσεις της μορφής ημx+c.

Από τον πίνακα των παραγώγων (τέλος § 4.12) προκύπτει αντίστοιχος πίνακας με τις παράγουσες μερικών βασικών συναρτήσεων. Ειδικά η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι μια παράγουσα της lnx στο $(0, +\infty)$. Αλλά είναι και παράγουσα της ln(-x) στο $(-\infty, 0)$, αφού

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$$

Άρα η $\frac{1}{x}$ είναι μια παράγουσα της $\ln|x|$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	c	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	e^x	e^x+c
1	$x+c$	ημx	-συνx+c	α^x	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	συνx	ημx+c	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+c$
		$\frac{1}{συν^2x}$	εφx+c	$\frac{1}{x\ln\alpha}$	$\log_\alpha x+c$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο ℝ έχει την ιδιότητα f΄ = f, αν και μόνο αν

$$f(x) = ce^x$$

Πράγματι, είναι φανερό ότι $(ce^x)' = ce^x$

Αντιστρόφως, έστω μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $f' = f$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση F με

$$F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

είναι σταθερή

Η F είναι παραγωγίσιμη και

$$F'(x) = \frac{f'(x)\cdot e^x - f(x)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{f(x)\cdot e^x - f(x)\cdot e^x}{(e^x)^2} = 0$$

Συνεπώς (§ 4.16) η F είναι μια σταθερή στο ℝ συνάρτηση. Αν c η τιμή της, θα έχουμε

$$\frac{f(x)}{e^x} = c \quad ή \quad f(x) = ce^x.$$

2. Να δειχτεί ότι, αν οι συναρτήσεις f, g είναι:

- **συνεχείς στο κλειστό διάστημα [α, β] και**
- **παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (α, β)**

τότε υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε

$$[f(\beta) - f(\alpha)]\, g'(\xi) = [g(\beta) - g(\alpha)]\, f'(\xi) \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση C με

$$C(x) = [f(\beta) - f(\alpha)]\, g(x) - [g(\beta) - g(\alpha)]\, f(x)$$

η οποία, είναι φανερό, ότι είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Μάλιστα είναι

$$C'(x) = [f(\beta) - f(\alpha)]\, g'(x) - [g(\beta) - g(\alpha)]\, f'(x) \qquad (2)$$

Ακόμη παρατηρούμε ότι είναι

$$C(\alpha) = f(\beta)\, g(\alpha) - g(\beta)\, f(\alpha) = C(\beta)$$

Συνεπώς κατά το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε $C'(\xi) = 0$. Τότε από τη (2) προκύπτει η (1)

Σημείωση

Η ισότητα (1), στην περίπτωση που είναι $g(\alpha) \neq g(\beta)$ και $g'(\xi) \neq 0$, παίρνει την επόμενη μορφή

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (3)$$

Στην ειδική περίπτωση που η g είναι η ταυτοτική συνάρτηση $g(x) = x$, τότε από την (3) προκύπτει το θεώρημα μέσης τιμής (§ 4.15).

3. Να αποδειχτεί ότι για κάθε x∈(0,1) είναι

$$1+x < e^x < 1+ex$$

Επειδή η e^x είναι παραγωγίσιμη στο [0, x] με παράγωγο e^x, θα υπάρχει ξ μεταξύ 0 και x τέτοιος ώστε

$$\frac{e^x - e^0}{x-0} = e^\xi \quad ή \quad \frac{e^x - 1}{x} = e^\xi \qquad (1)$$

Αλλά η e^x είναι γνησίως αύξουσα, και επειδή $0 < \xi < x < 1$ θα έχουμε

$$e^0 < e^\xi < e^1$$

και λόγω της (1)

$$1 < \frac{e^x-1}{x} < e$$

από την οποία προκύπτει η ζητουμένη.

Ασκήσεις: 53, 54, 55

Απροσδιόριστες μορφές

4.18 Στα προηγούμενα είδαμε ότι το όριο ορισμένων ρητών συναρτήσεων υπολογίζεται, παρόλο που δε μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας του ορίου πηλίκου. Π.χ. το όριο στο 1 της συνάρτησης $\frac{3x^2-3}{x^2-x}$ υπολογίζεται αν και $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-3) = 0$ (απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$). Πράγματι, για $x \neq 1$ είναι $\frac{3x^2-3}{x^2-x} = \frac{3(x+1)}{x}$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x+1)}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}3(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}x} = 6$$

Απροσδιόριστη μορφή παρουσιάζουν και μη ρητές συναρτήσεις, οι οποίες δεν απλοποιούνται όπως έγινε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Π.χ. επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x = 0$, το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\eta\mu x}$ οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Όμως και το όριο αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε, αν παρατηρήσουμε ότι π.χ. για κάθε $x\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$ είναι

$$\frac{e^x-1}{\eta\mu x} = \frac{\frac{e^x-e^0}{x-0}}{\frac{\eta\mu x-\eta\mu 0}{x-0}}$$

Τα όρια των όρων του δεύτερου κλάσματος είναι οι τιμές στο 0 των παραγώγων των συναρτήσεων f με $f(x) = e^x$ και g με $g(x) = \eta\mu x$ αντιστοίχως. Είναι δηλαδή οι αριθμοί

$$f'(0) = e^0 = 1 \qquad \text{και} \qquad g'(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\eta\mu x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1$$

Στα επόμενα θα δούμε και άλλες περιπτώσεις κατά τις οποίες το όριο του πηλίκου δυο συναρτήσεων, όταν παρουσιάζει απροσδιόριστη μορφή, βρίσκεται με τη βοήθεια του πηλίκου των παραγώγων τους.

Θεώρημα (κανόνας) του De l' Hospital

4.19 Σχετικά με το όριο του πηλίκου δυο συναρτήσεων σ' ένα σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού τους, αποδεικνύεται[1] το επόμενο θεώρημα, που είναι γνωστό ως *κανόνας του De l' Hospital.*

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες υποθέτουμε ότι:**

- **Σε μια περιοχή του x_0 είναι παραγωγίσιμες με $g'(x) \neq 0$.**
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- **Υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το θεώρημα ισχύει και για όρια των συναρτήσεων στο $+\infty$ ή $-\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ότι ζητείται το $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$

Οι συναρτήσεις f με $f(x) = \ln x$ και g με $g(x) = \sqrt{x-1}$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $(1, +\infty)$. Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x = 0 = \lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = 0$ και για κάθε $x > 1$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \neq 0$.

Εξάλλου είναι $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x}$ και συνεπώς

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x-1}}{x}=0$$

Άρα θα είναι και $\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}=0$

Κατά την εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος είναι ενδεχόμενο τα όρια στο x_0 και των f', g' να είναι 0. Τότε, αν οι συναρτήσεις f', g' ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, θα υπάρχει στο x_0 το όριο της $\frac{f'}{g'}$ και θα είναι $\lim_{x_0}\frac{f'}{g'}=\lim_{x_0}\frac{f''}{g''}$. Έτσι όμως θα έχουμε και

$$\lim_{x_0}\frac{f}{g}=\lim_{x_0}\frac{f''}{g''}$$

Είναι φανερό, ότι το ίδιο μπορεί να επαναληφθεί και για τις συναρτήσεις f'' και g'' κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Για να εξετάσουμε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x}{x\eta\mu x}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις f με $f(x)=\eta\mu x-x$ και g με $g(x)=x\eta\mu x$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα είναι $f(0)=g(0)=0$. Εξάλλου έχουμε $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-1$, $g'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$ και παρατηρούμε ότι είναι επίσης $f'(0)=g'(0)=0$. Οι συναρτήσεις f', g' είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι $f''(x)=-\eta\mu x$, $g''(x)=2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$. Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}=0,\ \text{θα έχουμε}\ \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x}{x\eta\mu x}=0$$

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση κατά την οποία οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες και στο x_0 με $g'(x_0)\neq 0$.

Τότε η προϋπόθεση $\lim_{x\to x_0}f(x)=0=\lim_{x\to x_0}g(x)$ γράφεται

$$f(x_0)=0=g(x_0)$$

Εξάλλου αν υποτεθεί, όπως συμβαίνει συνήθως, ότι οι f', g' είναι συνεχείς στο x_0, τότε θα είναι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Επομένως θα είναι

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3. Έστω ότι ζητείται το $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x^2}{x^3-x}$.

Οι συναρτήσεις f με $f(x)=\eta\mu x-x^2$ και g με $g(x)=x^3-x$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Ακόμη είναι $f(0)=g(0)=0$. Επίσης $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2x$, $g'(x)=3x^2-1$ και $g'(0)=-1\neq 0$. Άρα θα έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x^2}{x^3-x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{1}{-1}=-1$$

4. Για να εξετάσουμε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+(x-1)}{e^{x-1}-x^2}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις f με $f(x)=\ln x+(x-1)$ και g με $g(x)=e^{x-1}-x^2$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}^*_+$ (στο οποίο ανήκει το 1) και μάλιστα είναι:

$$f(1)=0,\quad g(1)=0$$

και

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1,\quad g'(x)=e^{x-1}-2x,\quad g'(1)=-1\neq 0$$

Άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+(x-1)}{e^{x-1}-x^2}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=-2$$

Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$

4.20 Όταν το $\lim_{x_0}\frac{f}{g}$ οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, δηλαδή όταν $\lim_{x_0}f=\pm\infty$, $\lim_{x_0}g=\pm\infty$, και υπάρχει το $\lim_{x_0}\frac{f'}{g'}$, αποδεικνύεται[1] ότι και πάλι έχουμε

$$\lim_{x_0}\frac{f}{g}=\lim_{x_0}\frac{f'}{g'}$$

ΠΑΡΑΓΕΙΓΜΑ

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις f με $f(x)=\ln x$ και την ταυτοτική $\iota(x)=x$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες σε κάθε διάστημα $(\alpha,+\infty)$ με $\alpha>0$ και μάλιστα είναι (§ 3.26, εφαρμ. 1)

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty=\lim_{x\to+\infty}x$$

Επειδή είναι $f'(x)=\frac{1}{x}$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\iota'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, θα είναι και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

Άλλες απροσδιόριστες μορφές, π.χ. $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$ κτλ. ανάγονται σε εφαρμογή των παραπάνω, όπως φαίνεται στα επόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\eta\mu x}\right) = 0$

Οι συναρτήσεις $\dfrac{1}{x}$ και $\dfrac{1}{\eta\mu x}$ είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $x \neq 0$ και είναι

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\eta\mu x} = -\infty$

Έτσι οδηγούμαστε στις απροσδιόριστες μορφές

$$(+\infty) - (+\infty) \text{ ή } (-\infty) - (-\infty)$$

Όμως και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\eta\mu x} = \dfrac{\eta\mu x - x}{x\eta\mu x}$ και επειδή (§ 4.19, παρδ. 2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x - x}{x\eta\mu x} = 0, \quad \text{θα είναι και} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x}\right) = 0.$$

2. Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x\cdot \ln x) = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $\eta\mu x\cdot\ln x$ γράφεται:

$$\eta\mu x\cdot\ln x = \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\eta\mu x}}$$

οπότε οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{-\infty}{+\infty}$. Επειδή

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)' = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}, \text{ θα είναι } \frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)'} = -\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}} = -\frac{\eta\mu^2 x}{x\sigma\upsilon\nu x},$$ που σημαίνει ότι έχουμε πάλι απροσδιόριστη μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Γι' αυτό εφαρμόζουμε πάλι το θεώρημα De l' Hospital. Έχουμε:

$$(\eta\mu^2 x)' = 2\eta\mu x(\eta\mu x)' = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x, \ (x\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu^2 x)' = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sigma\upsilon\nu x)' = 1$, θα είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{\eta\mu^2 x}{x\sigma\upsilon\nu x}\right) = 0$.

Άρα θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x\cdot\ln x) = 0$.

3. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}x = 0$, οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή 0^0, οπότε γράφουμε τη συνάρτηση

$$x^x = e^{x\ln x}$$

και εργαζόμαστε με τον εκθέτη $x\ln x$, τον οποίο, όπως στην προηγούμενη εφαρμογή, γράφουμε

$$x\ln x = \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}.$$

Επειδή (§ 3.26, εφαρμ. 1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$, εξετάζουμε τις συναρτήσεις $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $x \neq 0$ και είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Άρα θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x = 0$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to 0^+}x^x = \lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να δειχτεί ότι $\lim\dfrac{2^\nu}{\nu^2} = +\infty$ ($\nu\in\mathbb{N}^*$).

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2}$ $(x \neq 0)$ της οποίας περιορισμός στο $\mathbb{N}^*$ είναι η ακολουθία$\left(\dfrac{2^\nu}{\nu^2}\right)$

Η f είναι πηλίκο των f_1 με $f_1(x) = 2^x$ και f_2 με $f_2(x) = x^2$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε κάθε διάστημα $(\alpha, +\infty)$ με $\alpha > 0$ και μάλιστα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 = +\infty$.

Εξάλλου είναι $f_1'(x) = 2^x\ln 2$, $f_2'(x) = 2x$ και παρατηρούμε ότι είναι επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}(2^x\ln 2) = +\infty = \lim_{x\to+\infty}2x$$

Οι συναρτήσεις f_1', f_2' είναι παραγωγίσιμες σε μια περιοχή του $+\infty$, με παραγώγους $f_1''(x) = 2^x(\ln 2)^2$, $f_2''(x) = 2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1''(x)}{f_2''(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x(\ln 2)^2}{2} = +\infty$, θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Επομένως (§ 3.18, παρατ.) θα είναι και $\lim \left(\dfrac{2^\nu}{\nu^2}\right) = +\infty$.

Ασκήσεις: 56, 57, 58, 59, 60.

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονία συνάρτησης

4.21 Στην § 1.6 είδαμε ότι το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης f σ' ένα **διάστημα** Δ καθορίζεται από το πρόσημο του λόγου μεταβολής της. Π.χ. αν η f είναι αύξουσα στο Δ, τότε για κάθε $x_0, x \in \Delta$ θα είναι

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \qquad (1)$$

Αν όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ, τότε από την (1) προκύπτει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

και αυτό συμβαίνει για κάθε $x_0 \in \Delta$.

Αντιστρόφως, αν για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x) \geqslant 0$, τότε η f θα είναι αύξουσα στο Δ. Πράγματι, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, θα υπάρχει ξ μεταξύ x_1 και x_2, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (2)$$

και επειδή $f'(\xi) \geqslant 0$, θα είναι $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant 0$, που σημαίνει ότι η f είναι αύξουσα στο Δ.

Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουμε, όταν η f είναι στο Δ φθίνουσα. Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Τότε η f είναι:**

- **αύξουσα στο Δ, αν και μόνο αν για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x) \geqslant 0$**
- **φθίνουσα στο Δ, αν και μόνο αν για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x) \leqslant 0$**

Ειδικότερα αν για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x) > 0$, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, λόγω της (2), θα είναι επίσης και $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ομοίως βρίσκουμε ότι, αν για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

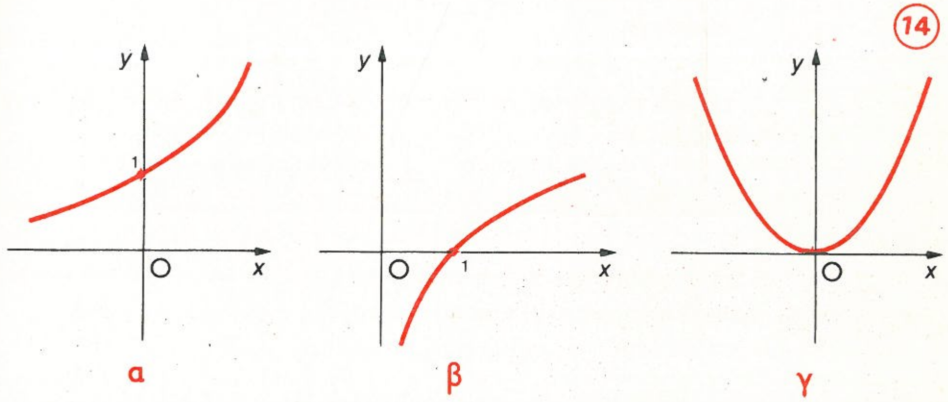
Έχουμε λοιπόν και το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι:**

- **$f'(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ**
- **$f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η εκθετική συνάρτηση f με $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί έχει παράγωγο $f'(x) = e^x$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x > 0$ (σχ. 14α).



2. Η λογαριθμική συνάρτηση g με

$$g(x) = \ln x,\ x > 0$$

είναι γνησίως αύξουσα (σχ. 14β), γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}^*_+$ είναι

$$g'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

3. Η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x) = x^2$$

είναι γνησίως αύξουσα, αν $x > 0$ και γνησίως φθίνουσα, αν $x < 0$ (σχ. 14γ). Πράγματι, η παράγωγός της $\varphi'(x) = 2x$ είναι:

$$\varphi'(x) < 0,\ \text{αν } x < 0 \quad \text{και} \quad \varphi'(x) > 0,\ \text{αν } x > 0$$

(Για $x = 0$ έχουμε ελάχιστο της φ, γιατί $0 \leqslant \varphi(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αντίστροφο του θεωρήματος 2 δεν αληθεύει. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο (-1, 1), ενώ είναι $f'(0) = 0$.

Ασκήσεις: 61, 62

Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης

4.22 Με βάση τα θεωρήματα της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να εντοπίσουμε τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης. Συγκεκριμένα έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα *ανοικτό* διάστημα[1] (α, β) και ότι στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι $f'(x_0) = 0$. Η f παρουσιάζει στο x_0**

1. **τοπικό μέγιστο, αν για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ και $x \in [x_0, \beta)$ είναι αντίστοιχα**

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \text{και} \qquad f'(x) \leqslant 0$$

2. **τοπικό ελάχιστο, αν για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ και $x \in [x_0, \beta)$ είναι αντίστοιχα**

$$f'(x) \leqslant 0 \qquad \text{και} \qquad f'(x) \geqslant 0$$

Απόδειξη

1. Αφού $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$, η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ και συνεπώς για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ θα είναι

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

Ομοίως, η f είναι φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$ και συνεπώς για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ θα είναι

$$f(x_0) \geqslant f(x)$$

Δηλαδή έχουμε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(x) \leqslant f(x_0)$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

2. Εργαζόμαστε ομοίως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x$ έχει παράγωγο f' με

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

(1) Δεν αποκλείονται οι περιπτώσεις $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$.

και, όπως φαίνεται αμέσως, είναι

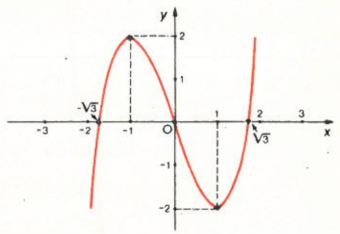
$$f'(-1) = 0 \qquad \text{και} \qquad f'(1) = 0$$

Συνεπώς στα σημεία -1 και 1 είναι ενδεχόμενο η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Το πρόσημο της f' και το είδος μονοτονίας της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	—	0	+	
f(x)		↗	2	↘	-2	↗	

Επειδή η f' μηδενίζεται στο −1 αλλάζοντας πρόσημο από + σε −, το $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$ είναι μέγιστο της συνάρτησης f.

Ομοίως βρίσκουμε ότι το $f(1) = -2$ είναι ελάχιστο της f. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο σχήμα 15.



15

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν η f' μηδενίζεται σ' ένα σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ ενώ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Delta - \{x_0\}$, τότε η f δεν είναι απλώς μονότονη στο Δ, αλλά **γνησίως** μονότονη. (Το x_0 μπορεί να είναι και άκρο του Δ). Έστω π.χ. $f'(x) > 0$ και $x_1 < x_2$. Τότε είναι $f(x_1) < f(x_2)$ γιατί αν $f(x_1) = f(x_2)$ η f θα ήταν σταθερή στο $[x_1, x_2]$ και συνεπώς $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, άτοπο.

2. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό (βλέπε § 4.13, παρατ. 3).

4.23 Ένα άλλο κριτήριο για την εύρεση των ακροτάτων[1] μιας συνάρτησης (αν υπάρχουν) αποτελεί και το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ ***Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι $f'(x_0) = 0$.***

1. ***Αν $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.***
2. ***Αν $f''(x_0) < 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.***

Απόδειξη

Έχουμε: $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ και επειδή $f'(x_0) = 0$

(1) Συνήθως το τοπικό ακρότατο αναφέρεται απλούστερα ως ακρότατο.

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x-x_0}$$

1. Έστω $f''(x_0) > 0$. Τότε από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει (§ 3.11, 6) ότι υπάρχει διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ με $x \neq x_0$ να είναι:

$$\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0$$

Έτσι για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0)$ θα έχουμε $f'(x) < 0$, ενώ για κάθε $x \in (x_0, x_0+\delta)$ θα έχουμε $f'(x) > 0$. Και επειδή $f'(x_0) = 0$, σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, το $f(x_0)$ θα είναι ελάχιστο της f.

2. Η περίπτωση αυτή εξετάζεται ομοίως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τη συνάρτηση f του παραδείγματος της § 4.22 έχουμε

$$f'(x) = 3x^2-3 \quad \text{και} \quad f''(x) = 6x$$

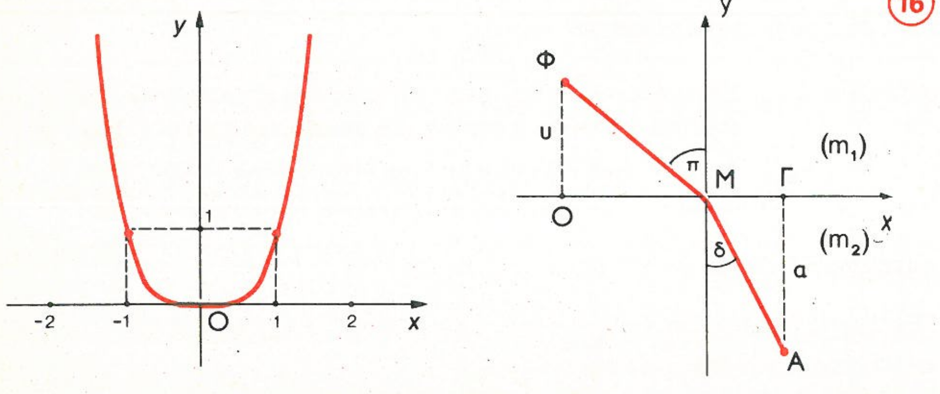
και βρήκαμε ότι πιθανές τιμές ακροτάτων της είναι οι $f(-1)$ και $f(1)$. Επειδή:

- $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$, το $f(-1) = 2$ είναι μέγιστο της f.
- $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, το $f(1) = -2$ είναι ελάχιστο της f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η συνθήκη $f''(x_0) \neq 0$ του θεωρήματος είναι ικανή για την ύπαρξη ακροτάτου της f στο x_0, όχι όμως και αναγκαία. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^4$ έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12x^2$ που η τιμή της στο 0 είναι $f''(0) = 0$. Εντούτοις η f έχει στο 0 ελάχιστο το $f(0) = 0$ (σχ. 16α), γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = x^4 \geqslant 0 = f(0)$.

16



α β

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Μια φωτεινή ακτίνα από το σημείο Φ φτάνει στο σημείο Α αφού διαθλαστεί στο σημείο Μ της διαχωριστικής επιφάνειας x΄x δυο υλικών μέσων (σχ. 16β). Να βρεθεί ο νόμος της διάθλασης του φωτός, δεδομένου ότι η διαδρομή της φωτεινής ακτίνας γίνεται στον ελάχιστο χρόνο.

Έστω v_1, v_2 οι ταχύτητες του φωτός στα υλικά μέσα (m_1) και (m_2) αντιστοίχως και $(ΦΟ) = υ$, $(ΑΓ) = α$ οι αποστάσεις των Φ, Α από τη x΄x. Αν $(ΟΜ) = x$, $(ΟΓ) = β$, τότε ορίζεται η συνάρτηση t με

$$t(x) = \frac{(ΦΜ)}{v_1} + \frac{(ΜΑ)}{v_2} = \frac{\sqrt{υ^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{α^2+(β-x)^2}}{v_2} \qquad (1)$$

που η τιμή της στο x είναι ο χρόνος διαδρομής του φωτός από το Φ στο Α. Για το ελάχιστο του χρόνου αυτού θα πρέπει $t'(x) = 0$ ή, λόγω της (1),

$$\frac{v_2 x}{\sqrt{υ^2+x^2}} = \frac{v_1(β-x)}{\sqrt{α^2+(β-x)^2}}$$ ή $v_2 ημπ = v_1 ημδ$ (π, δ οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης).

Επομένως θα είναι $\dfrac{ημπ}{ημδ} = \dfrac{v_1}{v_2}$ (σταθερό).

2. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f με

$$f(x) = (x-ε_1)^2+(x-ε_2)^2+\ldots+(x-ε_ν)^2$$

όπου $ε_1, ε_2, \ldots, ε_ν$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι

$$f'(x) = 2(x-ε_1)+2(x-ε_2)+\ldots+2(x-ε_ν) = 2νx-2(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)$$

Επειδή $f''(x) = 2ν > 0$, η f παρουσιάζει ελάχιστο όταν $f'(x) = 0$, δηλαδή στο σημείο

$$x_0 = \frac{ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν}{ν} \qquad (1)$$

Το ελάχιστο της f είναι

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (x_0-ε_1)^2+(x_0-ε_2)^2+\ldots+(x_0-ε_ν)^2 \\ &= νx_0^2-2x_0(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)+(ε_1^2+ε_2^2+\ldots+ε_ν^2) \\ &= x_0[νx_0-2(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)]+(ε_1^2+ε_2^2+\ldots+ε_ν^2) \\ &= \frac{ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν}{ν}[-(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)]+(ε_1^2+ε_2^2+\ldots+ε_ν^2) \qquad [\text{λόγω της (1)}] \\ &= (ε_1^2+ε_2^2+\ldots+ε_ν^2)-\frac{1}{ν}(ε_1+ε_2+\ldots+ε_ν)^2 \end{aligned}$$

Ασκήσεις: 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72

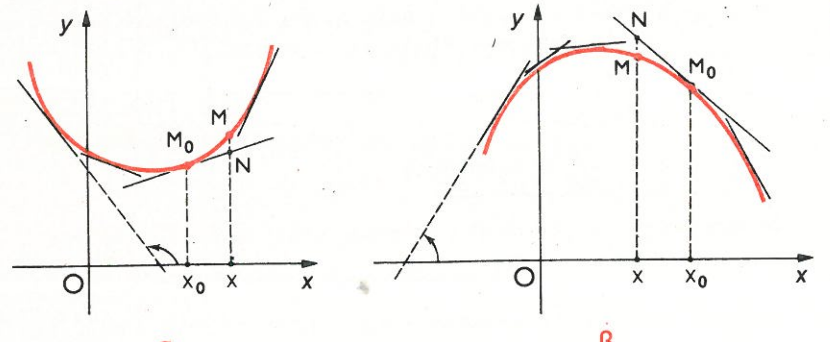
Κοίλα της γραφικής παράστασης

4.24 Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα

Δ, το πρόσημο της f'' παρέχει πρόσθετες πληροφορίες για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Πράγματι:

- Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \geqslant 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα 1 της § 4.21 η παράγωγος συνάρτηση f' είναι αύξουσα στο Δ και αντιστρόφως. Αυτό σημαίνει ότι, αν ειδικότερα $f''(x) > 0$, καθώς το x αυξάνει στο Δ ο αντίστοιχος συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης στο σημείο $M(x, f(x))$ αυξάνει επίσης (σχ. 17α). Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι (βλ. εφαρμ. σελ. 189) η γραφική παράσταση της f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη σ' οποιοδήποτε σημείο της.

17



- Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \leqslant 0$, με ανάλογους συλλογισμούς συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι «κάτω» από την εφαπτομένη σ' οποιοδήποτε σημείο της (σχ. 17β).

Συνοψίζουμε τα παραπάνω ως εξής:

1. Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \geqslant 0$, θα λέμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f **στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ.**
2. Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \leqslant 0$, θα λέμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f **στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για τη συνάρτηση f με $f(x) = ημx$ είναι $f'(x) = συνx$, $f''(x) = -ημx$.
   Στο διάστημα $[0, \pi]$ είναι $f''(x) \leqslant 0$ και στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ είναι $f''(x) \geqslant 0$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (σχ. 18α) στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, \pi]$ και άνω στο $[\pi, 2\pi]$.

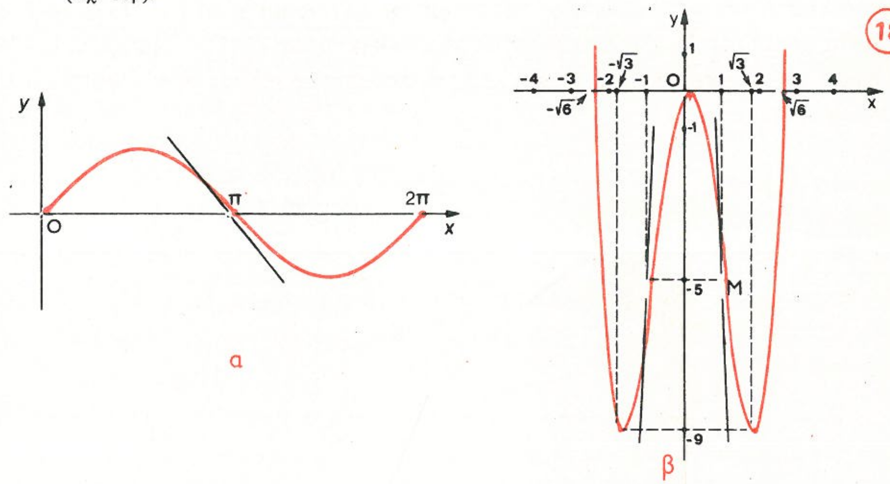
2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με
   $$f(x) = x^4 - 6x^2$$
   στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $[-1, 1]$ και άνω στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$. Πράγματι, έχουμε

$$f'(x) = 4x^3-12x, \quad f''(x) = 12x^2-12 = 12(x+1)(x-1)$$

και συνεπώς:

Για κάθε $x \in [-1, 1]$ είναι $f''(x) \leqslant 0$, ενώ για κάθε $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ είναι $f''(x) \geqslant 0$ (σχ. 18β).

18



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ότι υπάρχει η δεύτερη παράγωγος f'' μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$, την εφαπτομένη στο $M_0(x_0, f(x_0))$ και τα σημεία $N(x, y)$ της εφαπτομένης και $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f με κοινή τετμημένη $x \in \Delta$. Να αποδειχτεί ότι:

- **Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \geqslant 0$, τότε $f(x) \geqslant y$**
- **Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \leqslant 0$, τότε $f(x) \leqslant y$**

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M_0 (σχ. 17) έχει εξίσωση

$$y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Επομένως για κάθε $x \in \Delta$ με $x \neq x_0$ θα έχουμε

$$f(x)-y = f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \tag{1}$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι υπάρχει ξ μεταξύ x και x_0, τέτοιο ώστε

$f(x)-f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0)$ και έτσι η (1) γράφεται

$$f(x)-y = [f'(\xi)-f'(x_0)]\,(x-x_0) \tag{2}$$

Επίσης υπάρχει ξ_1 μεταξύ ξ και x_0, τέτοιο ώστε $f'(\xi)-f'(x_0) = f''(\xi_1)(\xi-x_0)$ και η (2) γίνεται

$$f(x)-y = f''(\xi_1)\,(\xi-x_0)(x-x_0) \tag{3}$$

Επειδή όμως το ξ βρίσκεται μεταξύ x και x_0, θα είναι πάντοτε

$$(\xi-x_0)(x-x_0) > 0 \tag{4}$$

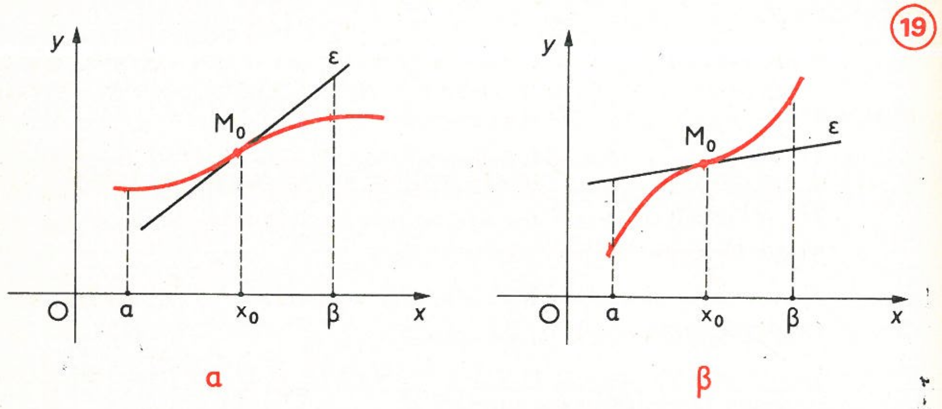
Διακρίνουμε τώρα τίς περιπτώσεις:

- **Για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \geqslant 0$.** Τότε θα είναι $f''(\xi_1) \geqslant 0$, οπότε από την (3), λόγω της (4), θα έχουμε $f(x) \geqslant y$.
- **Για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \leqslant 0$.** Με ανάλογη εργασία βρίσκουμε ότι $f(x) \leqslant y$.

Ασκήσεις: 73, 74, 75

Σημεία καμπής

4.25 Έστω ότι ορίζεται η δεύτερη παράγωγος f'' μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα (α, β) και μηδενίζεται στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ενώ σ' ένα από τα διαστήματα (α, x_0), (x_0, β) έχει τιμές θετικές και στο άλλο αρνητικές. Τότε η γραφική παράσταση της f



στρέφει τα κοίλα άνω στο $(\alpha, x_0]$ και κάτω στο $[x_0, \beta)$ (σχ. 19α)
ή στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(\alpha, x_0]$ και άνω στο $[x_0, \beta)$ (σχ. 19β)

Αυτό, και στις δυο περιπτώσεις, σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «εκατέρωθεν» της εφαπτομένης της στο σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$. Μ' άλλα λόγια η εφαπτομένη στο M_0 «διαπερνά» τη γραφική παράσταση της f. Γι αυτό, το σημείο M_0 λέγεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f. Λέμε ακόμη ότι η f παρουσιάζει **καμπή στο** x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

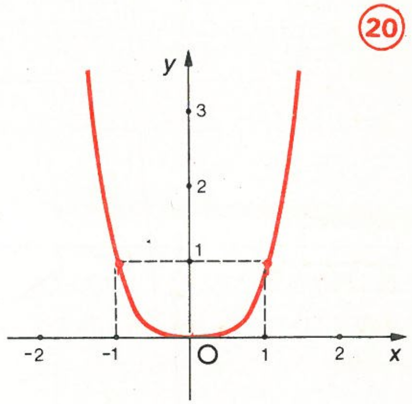
Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ (σχ. 18α) στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, \pi)$ και άνω στο $[\pi, 2\pi)$. Συνεπώς το σημείο της με τετμημένη $x_0 = \pi$ είναι σημείο καμπής.

Τα παραπάνω συνοψίζονται ως εξής

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β). Αν η f'' μηδενίζεται σ' ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, αλλάζοντας πρόσημο, τότε η f θα παρουσιάζει καμπή στο x_0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η συνθήκη $f''(x_0) = 0$ δεν είναι αρκετή για να είναι το x_0 σημείο καμπής της C. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^4$ (σχ. 20) έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12x^2$ και είναι $f''(0) = 0$. Όμως η f στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο (και όχι καμπή), γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geqslant 0$ (δεν αλλάζει πρόσημο).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = x^3$ παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 0$. Πράγματι, η φ έχει δεύτερη παράγωγο $\varphi''(x) = 6x$ και είναι $\varphi''(0) = 0$. Εξάλλου για κάθε $x < 0$ είναι $\varphi''(x) < 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi''(x) > 0$.

2. Η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 6x^2$ παρουσιάζει καμπή στα σημεία $x_0 = -1$ και $x_0 = 1$ (σχ. 18β). Πράγματι:

   Η f έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 12(x+1)(x-1)$.

   Επειδή $f''(-1) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$, $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, η f παρουσιάζει καμπή στο -1.

   Ομοίως επειδή $f''(1) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, η f παρουσιάζει καμπή και στο σημείο 1.

Ασκήσεις: 76

Μελέτη συνάρτησης

4.26 Από τα μαθήματα προηγούμενων τάξεων έχει αρχίσει να μας απασχολεί το θέμα της μελέτης μιας συνάρτησης. Αρχίζοντας από στοιχειώδεις συναρτήσεις, όπως π.χ. οι $\alpha x + \beta$, $\frac{1}{x}$, αx^2 κτλ. των οποίων η γενική μελέτη στηρίζεται στη μονοτονία, αρτιότητα κτλ., φτάσαμε σε πιο σύνθετες περιπτώσεις, για την πληρέστερη μελέτη των οποίων χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες του ορίου και της παραγώγου.

Ανακεφαλαιώνοντας τα διάφορα στάδια που περιλαμβάνει η συστηματική μελέτη μιας συνάρτησης και η κατασκευή της γραφικής της παράστασης θυμίζουμε τα ακόλουθα.

1. Η μελέτη μιας συνάρτησης f αρχίζει φυσικά με τον προσδιορισμό του **πεδίου ορισμού** της Α. Υπάρχει περίπτωση η μελέτη να περιοριστεί σ' ένα υποσύνολο του Α. Έτσι, αν η συνάρτηση f είναι:

   - περιοδική με περίοδο Τ, τότε αρκεί να τη μελετήσουμε σ' ένα διάστημα της μορφής [α, α+Τ)
   - άρτια ή περιττή, αρκεί να τη μελετήσουμε στο $\mathbb{R}_+ \cap A$. Η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y ή κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο.

2. Εντοπίζουμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής και ειδικότερα παραγωγίσιμη.
3. Το πεδίο ορισμού Α είναι γενικά διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Εξετάζουμε λοιπόν τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων που συνθέτουν το Α, ιδιαίτερα, όταν τα σημεία αυτά είναι σημεία ασυνέχειας ή το + ∞ ή το - ∞.
4. Υπολογίζουμε την παράγωγο f΄ της f και εξετάζουμε το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής. Έτσι προκύπτουν τα διάφορα διαστήματα μονοτονίας της f, καθώς και τα σημεία στα οποία η συνάρτηση ενδεχομένως παρουσιάζει ακρότατα.
5. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο f΄΄. Από τη μελέτη του προσήμου της ορίζονται τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω, καθώς και ενδεχόμενα σημεία καμπής.
6. Άλλα συμπληρωματικά στοιχεία της μελέτης είναι:

   - ο προσδιορισμός των ασυμπτώτων
   - τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες, δηλαδή υπολογίζουμε το f(0) και τις ρίζες της εξίσωσης f(x) = 0.

Με τα στοιχεία που θα συγκεντρώσουμε από την παραπάνω μελέτη καταρτίζουμε πίνακα ο οποίος μας βοηθάει στη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, όπως φαίνεται στις επόμενες εφαρμογές.

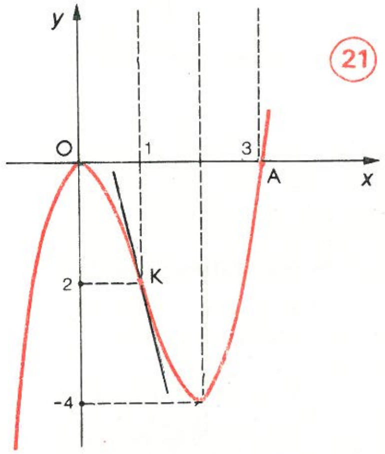
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-3x^2$**

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η εξίσωση $f(x) = x^3-3x^2 = 0$ έχει ρίζες $x_1 = 0$ και $x_2 = 3$ και συνεπώς η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Α(3, 0). Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = 3x^2-6x = 3x(x-2)$ και μηδενίζεται για x = 0 και x = 2. Συνεπώς είναι θετική στα διαστήματα (-∞, 0), (2, +∞) και αρνητική στο (0, 2). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα (-∞, 0), (2, +∞) και γνησίως φθίνουσα στο (0, 2). Η f έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6x-6 = 6(x-1)$. Η f΄΄ μηδενίζεται για x = 1, ενώ είναι θετική στο (1, +∞) και αρνητική στο (-∞, 1). Συνεπώς η f έχει τοπικό μέγιστο στο 0 το f(0) = 0 και τοπικό ελάχιστο στο 2 το f(2) = -4. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει καμπή στο σημείο Κ(1, -2), και στρέφει τα κοίλα άνω στο [1, +∞) και κάτω στο (-∞, 1].

Τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα ο οποίος μας διευκολύνει στη μελέτη και γραφική παράσταση της f (σχ. 21).

x	−∞		0		1		2		3		+∞
f΄		+	0	−		−	0	+		+	
f΄΄		−		−	0	+		+		+	
f	−∞	↗	0 μ	↘	−2 κ	↘	−4 ε	↗	0	↗	+∞



21

2. **Να μελετηθεί η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{2x+3}{4x-8}$.**

Η g έχει πεδίο ορισμού το Δ = (- ∞, 2) ∪ (2, + ∞). Η εξίσωση g(x) = 0 έχει ρίζα το $x = -\frac{3}{2}$. Επίσης είναι $g(0) = -\frac{3}{8}$. Συνεπώς η γραφική παράσταση της g διέρχεται από τα σημεία $A(-\frac{3}{2}, 0)$, $B(0, -\frac{3}{8})$.

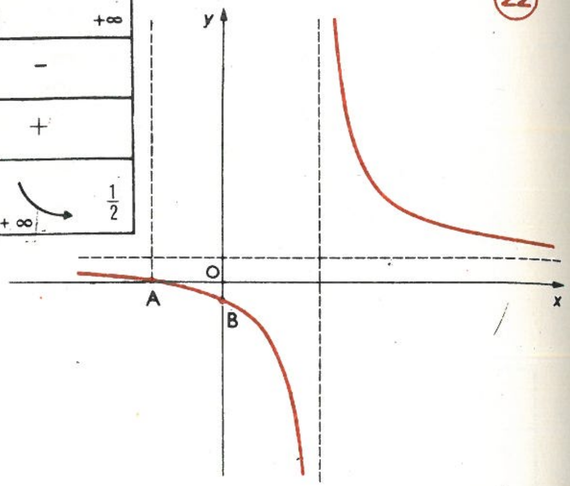
Είναι $g'(x) = \frac{-7}{4(x-2)^2}$ και συνεπώς $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα (- ∞, 2) και (2, + ∞). Επίσης είναι $g''(x) = \frac{7}{2(x-2)^3}$ και συνεπώς $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$ και $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2)$. Άρα η γραφική παράσταση της g στρέφει τα κοίλα άνω στο (2, + ∞) και κάτω στο (- ∞, 2).

Εξάλλου είναι $\lim_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to 2^-} g(x) = -\infty$ (σε μια περιοχή του 2 ο αριθμητής 2x+3 είναι θετικός). Άρα η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g (σχ. 22).

Τέλος είναι $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \lim_{x \to -\infty} g(x)$, που σημαίνει ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη (οριζόντια) της γραφικής παράστασης της g. Συνεπώς έχουμε

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f΄		−		−		−	
f΄΄		−		−		+	
f	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

22



3. Να μελετηθεί η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

Έχουμε $\Delta = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Επειδή $\varphi(0) = 0$, η γραφική παράσταση της φ θα διέρχεται από το σημείο O(0, 0)

Η φ είναι περιττή, γιατί για κάθε $x \in \Delta$ είναι $\varphi(-x) = \dfrac{(-x)(x^2+1)}{x^2-1} = -\varphi(x)$. Συνεπώς αρκεί να τη μελετήσουμε στο $\Delta' = \mathbb{R}_+ \cap \Delta = [0, 1) \cup (1, +\infty)$

Είναι $\varphi'(x) = \dfrac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$.

Το τριώνυμο x^4-4x^2-1 έχει πραγματικές ρίζες τις $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ και $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Άρα στο Δ΄ είναι: $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty)$ και $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2+\sqrt{5}})$. Συνεπώς η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα σε κάθένα από τα διαστήματα (0, 1) και $(1, \sqrt{2+\sqrt{5}})$.

Επίσης είναι $\varphi''(x) = \dfrac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

Η φ΄΄ έχει πραγματική ρίζα το 0. Έτσι θα είναι $\varphi''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $\varphi''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Συνεπώς η γραφική παράσταση της φ στρέφει τα κοίλα κάτω στο [0, 1) και άνω στο $(1, +\infty)$.

Επειδή $\varphi''(\sqrt{2+\sqrt{5}}) > 0$, η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Έχουμε ακόμη:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^+} \varphi(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^-} \varphi(x) = -\infty$. Άρα η γραφική παράσταση της φ στο Δ΄ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 1.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} [\varphi(x)-x] = 0$ και συνεπώς η γραφική παράσταση της φ έχει ασύμπτωτη την ευθεία y = x.

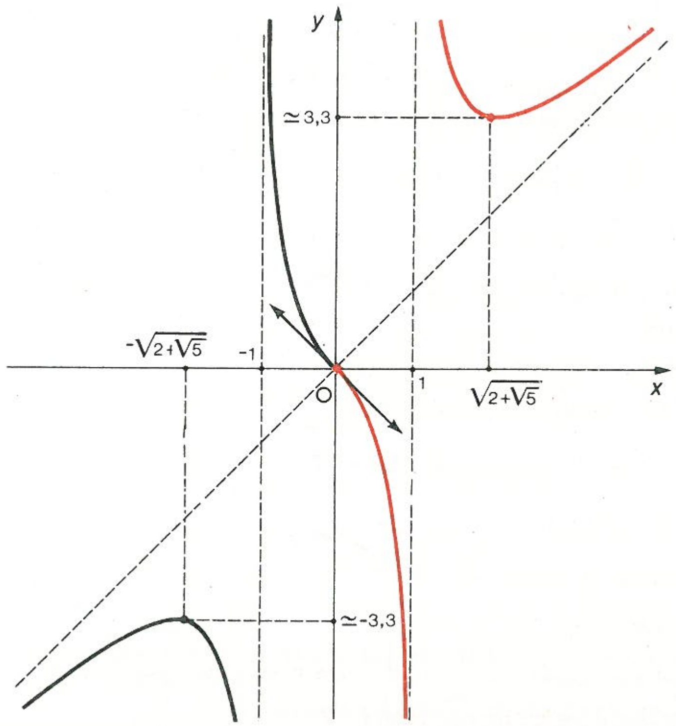
Επειδή η γραφική παράσταση της φ είναι συμμετρική ως προς το O και στρέφει τα κοίλα κάτω στο [0, 1), θα στρέφει τα κοίλα άνω στο (-1, 0]. Επιπλέον επειδή $\varphi''(0) = 0$, η φ παρουσιάζει καμπή στο 0.

Επίσης, επειδή η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $\sqrt{2+\sqrt{5}}$, θα παρουσιάζει μέγιστο στο $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$. Τέλος, αφού η γραφική παράσταση της φ έχει ασύμπτωτη την ευθεία x = 1, θα έχει ασύμπτωτη και την ευθεία x = -1.

Έτσι έχουμε την επόμενη γραφική παράσταση της f

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		-1		0		1		$\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$+\infty$
φ΄								−		−	0	+	
φ΄΄							0	−		+		+	
φ	$-\infty$	↗	μ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0 κ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	ε	↗	$+\infty$

23



4. Να μελετηθεί η συνάρτηση t με $t(x) = \frac{4}{3}$ συν^{3}x.

Επειδή η συνάρτηση t είναι άρτια και περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να περιορίσουμε τη μελέτη της στο διάστημα [0, π].

Έχουμε: $t'(x) = \frac{4}{3} \cdot 3$συν^{2}x(-ημx) = -4ημx συν^{2}x

Η t΄ έχει στο [0, π] ρίζες τις 0, $\frac{\pi}{2}$ και π.

Είναι: $t'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ και συνεπώς η t είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Επίσης έχουμε:

$t''(x) = -4[$συν^{3}x + 2ημx συνx (-ημx)$]$ = -12συνx $\left(\text{συν}x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\text{συν}x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Επειδή $0 < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, υπάρχει $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε συν$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Τότε η t΄΄ έχει ρίζες τις φ_0, $\frac{\pi}{2}$ και $\pi - \varphi_0$.

Για τον καθορισμό του προσήμου της t΄΄, καταρτίζουμε τον διπλανό πίνακα, από τον οποίο προκύπτει ότι:

$t''(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, \varphi_0) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \varphi_0\right)$

$t''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\varphi_0, \frac{\pi}{2}\right) \cup (\pi - \varphi_0, \pi)$

x	0		φ_0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\varphi_0$		π
συνx		+		+	0	—		—	
συνx$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		+	0	—		—		—	
συνx$+\sqrt{\frac{2}{3}}$		+		+		+	0	—	
t΄΄		—	0	+	0	—	0	+	

Συνεπώς η γραφική παράσταση της t στρέφει τα κοίλα κάτω στα διαστήματα $(0, \varphi_0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi - \varphi_0\right)$ και άνω στα διαστήματα $\left(\varphi_0, \frac{\pi}{2}\right)$, $(\pi - \varphi_0, \pi)$, οπότε η t παρουσιάζει καμπή στα σημεία φ_0, $\frac{\pi}{2}$ και $\pi - \varphi_0$.

Επειδή

- $t''(0) = -4 < 0$, η t παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0, το $t(0) = \frac{4}{3}$
- $t''(\pi) = 4 > 0$, η t παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο π, το $t(\pi) = -\frac{4}{3}$

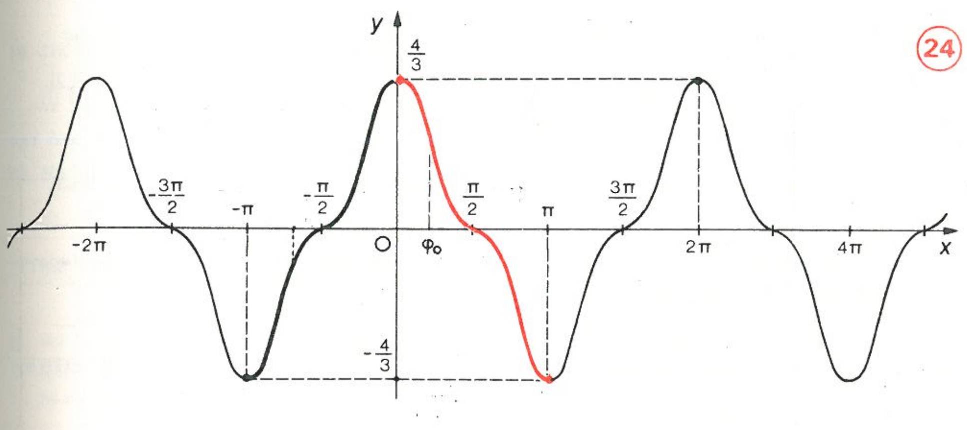
Επειδή η t είναι άρτια (οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y), θα παρουσιάζει καμπή και στα σημεία $-\varphi_0$, $-\frac{\pi}{2}$, $-(\pi - \varphi_0)$ και ελάχιστο στο σημείο -π.

Τέλος, αφού η t είναι και περιοδική με περίοδο 2π, θα παρουσιάζει γενικότερα

- *καμπή* στα σημεία $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ και $\kappa\pi \pm \varphi_0$ $(\kappa \in \mathbb{Z})$
- *μέγιστο* στα σημεία 2κπ
- *ελάχιστο* στα σημεία 2κπ + π

Έχουμε έτσι τον επόμενο πίνακα μεταβολών και τη γραφική παράσταση της t (σχ. 24)

x	-π		-(π-φ_0)		$-\frac{\pi}{2}$		$-\varphi_0$		0		φ_0		$\frac{\pi}{2}$		π-φ_0		π
t΄									0	—		—	0	—		—	0
t΄΄									-4	—	0	+	0	—	0	+	4
t	$-\frac{4}{3}$ ε	↗	κ	↗	0 κ	↗	κ	↗	$\frac{4}{3}$ μ	↘	κ	↘	0 κ	↘	κ	↘	$-\frac{4}{3}$ ε



24

Ασκήσεις: 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, τον παράγωγο αριθμό των συναρτήσεων:
(i) f_1 με $f_1(x) = x^2 - x - 2$ στο σημείο $x_0 = -1$, (ii) f_2 με $f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}$ στο σημείο $x_0 = 2$.

2. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση f με $f(x) = |x+5|$ στο σημείο $x_0 = -5$.

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x > 0 \\ x^2+2, & \text{αν } x \leqslant 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x\in\mathbb{R}^* \\ 0, & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x\neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ και είναι $f'(0)=0$.

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$. Είναι η f συνεχής στο $x_0=0$;

7. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|+2x$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

8. Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=2x+3x^2$.

9. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραμμής, που είναι η γραφική παράσταση της

(i) f με $f(x)=x^2-x-2$ στο σημείο της $(-1, 0)$, (ii) g με $g(x)=2+\sqrt{|x-2|}$ στο σημείο της $(2,2)$.

10. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τους άξονες Ox, Oy και από την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{1}{x}$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

11. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x)=4-|x-4|$ είναι συνεχής στο $x_0=4$ και όχι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Ποιο γενικό συμπέρασμα προκύπτει σχετικά;

12. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & \alpha\nu\ x\geqslant 0 \\ x^2-2x, & \alpha\nu\ x<0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

13. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

(i) f με $f(x)=x^3$ στο σημείο $x_0=3$, (ii) f με $f(x)=x^2$ στο σημείο $x_0=0$,

(iii) f με $f(x)=\sqrt{x}$ στο σημείο $x_0=\frac{1}{4}$, (iv) f με $f(x)=-\sqrt{x+1}$ στο σημείο $x_0=-1$.

14. Αν C είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ να βρείτε:

(i) Την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο $(1,1)$

(ii) Την εξίσωση της κάθετης στην εφαπτομένη της C στο σημείο της $(1,1)$.

15. Να βρείτε το «ευρύτερο» σύνολο Α στο οποίο παραγωγίζεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \alpha\nu\ x>1 \\ x^2 & \alpha\nu\ 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

και να το συγκρίνετε με το πεδίο ορισμού της f.

16. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι αριθμοί των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x)=3x^2-5x$ στο σημείο $x_0=-2$ (ii) $f(x)=e^x\ln x$ στο σημείο $x_0=1$

(iii) $f(x)=x^2+x-\frac{2}{x}+5$ στο σημείο $x_0=-7$ (iv) $f(x)=\frac{x^2+8x-1}{2x(1+x)}$ στο σημείο $x_0=1$.

17. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x)=\alpha_5x^5+\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ $(\alpha_5\neq 0)$.

Να δείξετε ότι: $f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\dots+\frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0)+\frac{x^5}{5!}f^{(5)}(0)$.

18. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με:

(i) $f(x)=x^3+x^2+c$, $(c\in\mathbb{R}^*)$ (ii) $f(x)=x^3(x+1)^2-x^5$ (iii) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}$

(iv) $f(x)=\frac{x^4(x+1)^2}{x^2+1}$ (v) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$ (vi) $f(x)=x\cdot e^x\cdot\ln x$

19. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x$ (ii) $f(x)=5\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-x$ (iii) $f(x)=\frac{\eta\mu x}{1+\varepsilon\varphi x}$

20. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x)=e^x(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$ (ii) $f(x)=x\ln x-x$

(iii) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\ln x$ (iv) $f(x)=\frac{e^x}{\eta\mu x}$.

21. Αν P(1, 2) και Q(3, 10) είναι δυο σημεία της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f με $f(x)=x^2+1$, τότε να βρεθεί σημείο $M(x_0, y_0)$ της C, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της στο σημείο M να είναι παράλληλη προς την PQ.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+2$ και g με $g(x)=\frac{x-1}{x}$. Να προσδιοριστούν τα α, β, έτσι ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$.

23. Να προσδιοριστεί το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y=\lambda x-3$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f με $f(x)=x^2+2x-2$ και κατόπιν να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής.

24. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}x^{k+1}$. Τότε να δείξετε ότι:

(i) $f'(x)=\sum_{k=0}^{\nu}(\kappa+1)\binom{\nu}{k}x^k=(1+x)^{\nu-1}[1+(\nu+1)x]$ (ii) $1+2\binom{\nu}{1}+\dots+(\nu+1)\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu-1}(\nu+2)$.

25. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους. Έστω ακόμη ότι είναι $g(x_0)\neq 0$ και $g'(x_0)\neq 0$. Αν για τη συνάρτηση F με $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

είναι $F'(x_0) = 0$, να αποδειχτεί ότι $F(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

26. Των συναρτήσεων

(i) f_1 με $f_1(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1}$

(ii) f_2 με $f_2(x) = \frac{1}{2}\,ημ^2x - \frac{1}{3}\,ημ^3x,\ x\in[0,2\pi]$

(iii) f_3 με $f_3(x) = x^2 \cdot e^{-x}-5$

να βρείτε, αν υπάρχει, την πρώτη παράγωγο και κατόπιν να προσδιορίσετε τα σημεία στα οποία κάθε μία από τις f'_1, f'_2, f'_3 έχει τιμή μηδέν.

27. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & αν\ -2 \leqslant x < 0 \\ 0, & αν\ x < -2 \end{cases}$$

$$g \text{ με } g(x) = \begin{cases} x+2-\sqrt{x+2}, & αν\ -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x+2, & αν\ x < -2 \end{cases}$$

Να εξετάσετε:

(i) Αν οι συναρτήσεις f, g, f+g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = -2$.

(ii) Αν αληθεύει η πρόταση: *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι παραγωγίσιμες στο x_0 οι συναρτήσεις f και g είναι: να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 η συνάρτηση f+g.*

28. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = (2x+5)^8$, (ii) $f(x) = (3x+1)^5+\frac{1}{(x^2+1)^5}$, (iii) $f(x) = \sqrt{x^3+5}$,

(iv) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, (v) $f(x) = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{1/2}$

29. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = 3\,συν\,(2x+5)$, (ii) $f(x) = ημ^2 3x$,

(iii) $f(x) = ημ\,(2x+3) + συν^5(2x^2)$, (iv) $f(x) = ημ(συν^2x)\,συν(ημ^2x)$

30. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = \ln(3x-1)$, (ii) $f(x) = 5e^{3x}$, (iii) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, (iv) $f(x) = e^{2x}\,(ημx-συνx)$

31. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1, & αν\ x\in(-\infty,0] \\ 1+\ln\frac{1+x}{1-x}, & αν\ x\in(0,1) \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$.

32. Έστω ότι η συνάρτηση g έχει δεύτερη παράγωγο και ότι ορίζεται η συνάρτηση f με $f(x) = g(e^{2x})$. Να βρείτε τη συνάρτηση f''.

33. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$ *(ημιέλλειψη)*. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{\pi}{4}$.

34. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ℝ. Να δείξετε ότι:

(i) Αν η f είναι άρτια, τότε η f΄ είναι περιττή.

(ii) Αν η f είναι περιοδική, τότε η f΄ είναι περιοδική.

35. Να βρεθεί το σύνολο Α στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 3-\sqrt{x-2}, & αν\ x\in[2,11) \\ -3+\sqrt{x-2}, & αν\ x\in[11,+\infty) \end{cases}$$

36. Να βρεθεί η παράγωγος f΄ της συνάρτησης f με $f(x) = (x^2+1)^x$.

37. Να δείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = ημx$ είναι η συνάρτηση $f^{(\nu)}$ με $f^{(\nu)}(x) = ημ\left(x+\frac{\nu\pi}{2}\right)$.

38. Να δείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = \ln x$ είναι η συνάρτηση $f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\frac{(\nu-1)!}{x^\nu}$

39. Να βρείτε τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{ημx-συνx}{2e^x}$ στο διάστημα **(0, 2π)**.

40. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση f με $f(x) = x^3+x^2-4x+1$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα [-1,2] και να βρείτε $x_0\in(-1,2)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

41. Να διαπιστώσετε ποιες από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle ισχύουν και ποιές δεν ισχύουν, για τις συναρτήσεις:

(i) f με $f(x) = \begin{cases} -\frac{x+1}{x}, & αν\ x\in[-1,0) \\ 0, & αν\ x = 0 \end{cases}$ στο διάστημα [-1, 0]

(ii) f με $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}$ στο διάστημα [-4,0]

(iii) f με $f(x) = (x+3)^2$ στο διάστημα [4,5]

(iv) f με $f(x) = x^5$ στο διάστημα [-1,1]

42. Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης να διαπιστώσετε ότι οι συνθήκες του θεωρήματος του Rolle είναι **ικανές** για να υπάρχει εσωτερικό[1] σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, άλλά όχι αναγκαίες.

(1) όχι άκρο διαστήματος

43. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = (2x-1)(x+3)(x-5)(x-7)$. Να βρεθεί πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $f'(x) = 0$.

44. Να αποδείξετε ότι, αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f μηδενίζεται για k διαφορετικές πραγματικές τιμές του x, τότε η f΄ θα μηδενίζεται για (k-1) τουλάχιστο τιμές του x.

45. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = x^5+4x^3+5x+27$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ρίζα πραγματική και τέσσερις μιγαδικές.

46. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3-3x-1$. Να αποδείξετε, χωρίς να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$, ότι αυτή έχει στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ μία μόνο ρίζα.

47. Η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, είναι συνεχής στό $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδειχτεί ότι:

(i) Για τη συνάρτηση F με $F(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, όπου $c \notin [\alpha, \beta]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$

(ii) Αν $c \notin [\alpha, \beta]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραφικής παράστασης της f διέρχεται από το σημείο (c, 0).

48. Έστω η συνάρτηση $f: [0,3] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3-x+1$. Να βρείτε $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(3)-f(0)}{3}$ και να διαπιστώσετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι παράλληλη προς τη χορδή που ορίζεται από τα σημεία της (0, 1) και (3, 25).

49. Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής να δείξετε ότι, αν $x_1 < x_2$, τότε:

$$e^{x_1} < \frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1} < e^{x_2}$$

50. Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής να δείξετε ότι αν $x > 0$, τότε

$$\ln x \leqslant x-1$$

51. Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής να δείξετε ότι αν $x > 0$, τότε

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

52. Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής να δείξετε ότι, αν $0 < x_1 < x_2$, τότε

$$1 - \frac{x_1}{x_2} < \ln\frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2}{x_1} - 1$$

53. Να υπολογιστούν οι παράγουσες των συναρτήσεων f με

(i) $f(x) = 3x^5$ (ii) $f(x) = \frac{\mu}{x^{\mu+1}}$ (iii) $f(x) = 3\,\text{συν}x$

(iv) $f(x) = \frac{2}{5}\,\text{ημ}x$ (v) $f(x) = \frac{3}{x}$ (vi) $f(x) = \frac{3}{5}e^x$

54. Να υπολογιστούν οι παράγουσες των συναρτήσεων f με

(i) $f(x) = 2x^3-5x^2+x+1$ (ii) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ (iii) $f(x) = 1+\text{συν}x$, (iv) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

(v) $f(x) = 2e^{2x+1}$ (vi) $f(x) = e^x+xe^x$ (vii) $f(x) = \text{συν}x-x\,\text{ημ}x$ (viii) $f(x) = \frac{x\,\text{συν}x-\text{ημ}x}{x^2}$

55. Να βρείτε την οικογένεια των καμπύλων των οποίων η εφαπτομένη σε κάθε σημείο τους έχει συντελεστή διευθύνσεως 2x και έπειτα την καμπύλη της οικογένειας η οποία διέρχεται από το σημείο $(\sqrt{2}, 0)$.

56. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-x^5}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{ημ}3x}{2x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}x}{\text{ημ}x+x\,\text{συν}x}$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\text{ημ}x}{x^3}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+\text{ημ}x-1}{\ln(1+x)}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\text{ημ}x}$ (vii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}$ (viii) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{7x^7-8x^5-x+2}{x^3-x^2-x+1}$ (ix) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$

57. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-5x^2+7}{2x^3-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x+1}$ (iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{10}}$

58. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\text{ημ}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

59. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x$ $(\alpha > 0)$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{εφ}x \cdot \ln x$

60. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\text{εφ}\,\frac{x}{2}\right)^{1/\ln x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

61. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

(i) f με $f(x) = \frac{x^2}{2} -x+6$ (ii) f με $f(x) = x^4-8x^2+17$

(iii) f με $f(x) = \ln x-x$ (iv) f με $f(x) = e^x-x$

62. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

(i) $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \text{ημ}x-x$ (ii) $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x-\ln(x+1)$.

63. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

(i) f με $f(x) = x^3+2x^2-x-2$ και (ii) f με $f(x) = x^4-5x^2+6$.

64. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

(i) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \text{ημ}x^2$ (ii) f με $f(x) = \sqrt{|x|}$ (iii) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

65. Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+\alpha x+ \frac{1}{x} + \frac{17}{4}$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να έχει ακρότατο στο $x_0 = -\frac{1}{2}$ και μετά για την τιμή αυτή του α να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f.

66. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{1-x}, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Να αποδειχτεί ότι:

(i) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

(ii) Είναι φθίνουσα στο διάστημα (0,1) (iii) $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

67. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = x^3-2x^2+1$ (ii) $f(x) = x-ημ2x$ (iii) $f(x) = x\ln x$ (iv) $f(x) = x^x$

68. Δίνεται ημικύκλιο ακτίνας ρ = 2 cm. Να εγγράψετε τραπέζιο που να έχει το μέγιστο εμβαδό.

69. Δίνεται σφαίρα ακτίνας R = 3 cm. Να εγγράψετε ορθό κύλινδρο που να έχει μέγιστο όγκο.

70. Έστω Α,Α΄ δύο σημεία της παραβολής $y^2 = 2px$ με κορυφή Ο συμμετρικά ως προς τον άξονά της. Στο τμήμα ΑΟΑ΄ της παραβολής να εγγράψετε ορθογώνιο, που η μία πλευρά να βρίσκεται επί της ΑΑ΄, και το οποίο να έχει μέγιστο εμβαδό ($p > 0$).

71. Το κόστος k(x) σε δραχ./km σωλήνα που τροφοδοτεί με νερό ένα απομακρυσμένο εργοστάσιο δίνεται από τη συνάρτηση k με $k(x) = \frac{1200}{x} + 4800x$, όπου x η διατομή του σωλήνα σε cm^2. Να βρείτε τη διατομή του σωλήνα για την οποία το κόστος είναι ελάχιστο και την ελάχιστη τιμή κόστους ανά km.

72. Σε βάθρο ύψους h έχει τοποθετηθεί άγαλμα ύψους α. Σε ποια οριζόντια απόσταση x πρέπει να τοποθετηθεί παρατηρητής ύψους $γ < h$ για να βλέπει το άγαλμα με τη μέγιστη γωνία.

73. Αν η συνάρτηση f: [α,β] → ℝ στρέφει τα κοίλα άνω, τότε $f(\frac{α+β}{2})$ $\frac{f(α)+f(β)}{2}$, ενώ αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω, τότε $f(\frac{α+β}{2})$ $\frac{f(α)+f(β)}{2}$

74. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-3x^2$ στρέφει τα κοίλα κάτω στό διάστημα $(-\infty, 1]$ και άνω στο διάστημα $[1, +\infty)$

75. Να εξετάσετε ως προς την κοιλότητα τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \frac{x^3-3x^2+10}{2}$ (ii) $f(x) = ημx - x - \frac{1}{2}$ (iii) $f(x) = \ln x - 3$

76. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της συνάρτησης:

(i) f με $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ (ii) g με $g(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}$

77. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x+1$

78. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = λx^2+2x+3$, ($λ \in ℝ$)

79. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2x+3}{4x+5}$

80. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, αν $x \geq 0$.

81. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \frac{2x^2-3x+2}{x^2+1}$ (ii) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-2}$

82. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{αx+β}{γx+δ}$, αν $γ \neq 0$ και $αδ-βγ \neq 0$.

83. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x(x+1)}{x-1}$

84. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

85. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x}$

86. Να μελετήσετε στο σύνολο $\left(-\frac{π}{3}, \frac{π}{3}\right) \cup \left(\frac{π}{3}, \frac{5π}{3}\right)$ τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{συν^2x}{συνx - \frac{1}{2}}$

87. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = xe^{-x}$

5 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί εξ ολοκλήρου νέα γνώση για το μαθητή της Γ΄ Λυκείου. Γι' αυτό η σύνδεση της έννοιας του ολοκληρώματος με την πραγματικότητα είναι διδακτικά επιβεβλημένη. Είναι όμως και ιστορικά βεβαιωμένη, όπως συμβαίνει με όλες τις βασικές μαθηματικές έννοιες. Πράγματι, είναι γνωστό ότι ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιώντας την ιδιοφυή «μέθοδο της εξάντλησης» με τα εκπληκτικά, για την εποχή, αποτελέσματα (υπολογισμός εμβαδού παραβολικού χωρίου κτλ.), άνοιξε το δρόμο που οδήγησε, πολύ αργότερα, στην έννοια του ολοκληρώματος.

Η άμεση, πλήρης και σε βάθος κατανόηση της έννοιας αυτής, στην οποία στηρίζεται το περιεχόμενο όλου του κεφαλαίου, αποτελεί φυσικά κύρια επιδίωξη της διδασκαλίας. Οι ιδιότητες που ακολουθούν μπορούν να αντιμετωπιστούν από το μαθητή, αφού είναι απλές εφαρμογές του ορισμού του ολοκληρώματος και των ιδιοτήτων του ορίου.

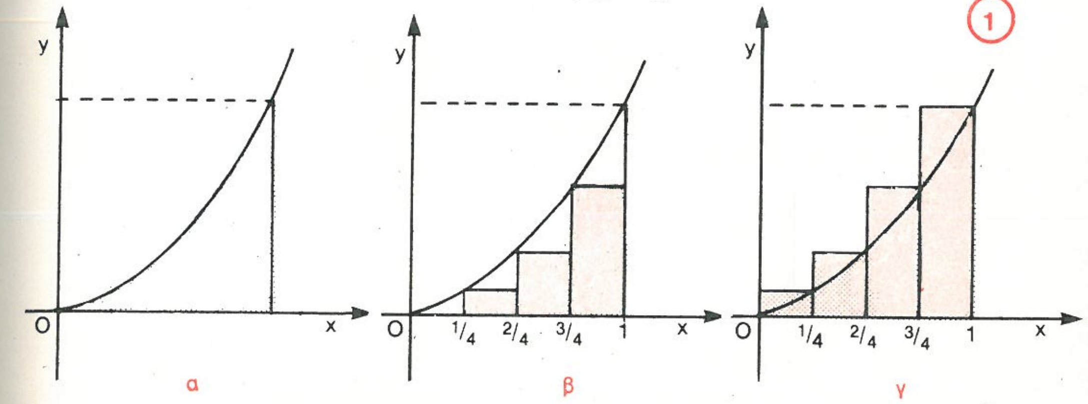
Εξάλλου ο μαθητής θα διαπιστώσει ακόμη μια φορά, ότι η εξέταση σ' ένα μαθηματικό θέμα της «αντίστροφης πορείας», δεν είναι μια στείρα μαθηματική περιέργεια ή συνήθεια, αλλά σε πολλές περιπτώσεις αποδίδει πλούσιους καρπούς. Θα διαπιστώσει δηλαδή εδώ τη μεγάλη σημασία, όχι μόνο της παραγώγισης, αλλά και του αντίστροφου προβλήματος που ήδη συνάντησε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι, συμπληρώνεται η ενημέρωσή του στις έννοιες οι οποίες θεμελιώνουν τους δύο βασικούς κλάδους της Ανάλυσης.

Το κεφάλαιο κλείνει με εφαρμογές του ολοκληρώματος ιδιαίτερα σε θέματα υπολογισμού εμβαδών και όγκων, σε περιπτώσεις γενικότερες από εκείνες που ήδη έχει συναντήσει ο μαθητής.

ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Εμβαδό παραβολικού χωρίου

5.1 Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^2$, που έχει γραφική παράσταση μια παραβολή C. Θα υπολογίσουμε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη C, τον άξονα x΄x και την ευθεία x = 1 (σχ. 1α).



Χωρίζουμε αρχικά το διάστημα [0,1] σε τέσσερα ίσα διαστήματα πλάτους $\frac{1}{4}$.

Είναι φανερό ότι το E είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα $\underline{S}_4$ των εμβαδών των ορθογωνίων του σχήματος 1β και μικρότερο από το άθροισμα $\overline{S}_4$ των εμβαδών των ορθογωνίων του σχήματος 1γ. Είναι όμως

$$\underline{S}_4 = \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{4^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2^2}{4^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3^2}{4^2} = \frac{1}{4^3}(1^2+2^2+3^2)$$

και

$$\overline{S}_4 = \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{4}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{4^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2^2}{4^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3^2}{4^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4^2}{4^2} = \frac{1}{4^3}(1^2+2^2+3^2+4^2)$$

Έτσι θα έχουμε

$$\frac{1}{4^3}(1^2+2^2+3^2) < E < \frac{1}{4^3}(1^2+2^2+3^2+4^2)$$

Αν χωρίσουμε τώρα το διάστημα [0,1] σε ν διαστήματα κοινού πλάτους $\frac{1}{\nu}$, με παρόμοια εργασία συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{\nu^3}(1^2+2^2+\dots+(\nu-1)^2) < E < \frac{1}{\nu^3}(1^2+2^2+\dots+\nu^2) \qquad (1)$$

Είναι όμως (βλέπε ΄Αλγεβρα Β΄ Λυκείου, κεφ. 4)

$$1^2+2^2+\dots+\nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

οπότε είναι και

$$1^2+2^2+\dots+(\nu-1)^2 = \frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}$$

΄Ετσι η (1) γίνεται

$$\frac{1}{\nu^3}\cdot\frac{\nu(\nu-1)(2\nu-1)}{6} < E < \frac{1}{\nu^3}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

΄Ομως για τις ακολουθίες με γενικούς όρους

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^3}\cdot\frac{\nu(\nu-1)(2\nu-1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(2-\frac{1}{\nu}\right) \qquad \text{και}$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{\nu^3}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(2+\frac{1}{\nu}\right)$$

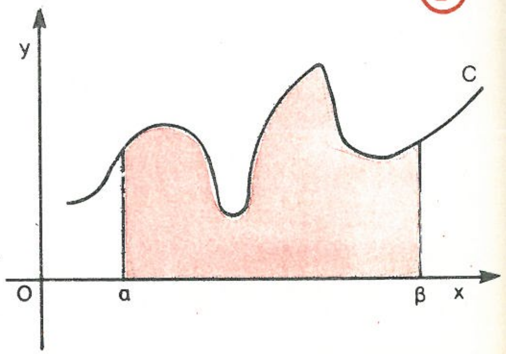
έχουμε $\lim\alpha_\nu = \lim\beta_\nu = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$

΄Αρα $$E = \frac{1}{3}$$

΄Εννοια του ολοκληρώματος

5.2 Θεωρούμε μια συνάρτηση f συνεχή και με τιμές θετικές σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Θα υπολογίσουμε το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (σχ. 2).

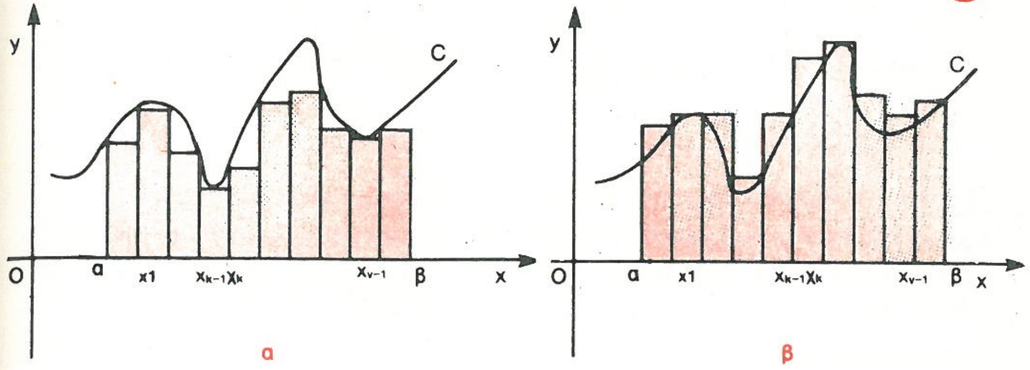
(2)



Διαιρούμε το $[\alpha,\beta]$ σε ν διαστήματα κοινού πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με τα σημεία $x_0 = \alpha, x_1, x_2, \dots, x_\nu = \beta$. ΄Εστω μ_k η ελάχιστη και M_k η μέγιστη τιμή της f στο κλειστό διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ για $k = 1, 2, \dots, \nu$.

Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων του σχήματος 3α (που έχουν ύψη τα $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\nu$) είναι

(3)



$$\underline{S}_\nu = \mu_1(x_1-x_0)+\mu_2(x_2-x_1)+\dots+\mu_\nu(x_\nu-x_{\nu-1}) = \frac{\beta-\alpha}{\nu}(\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\nu) = \frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\mu_k \qquad (2)$$

ενώ το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων του σχήματος 3β (που έχουν ύψη $M_1, M_2, \dots, M_\nu$) είναι

$$\overline{S}_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}(M_1+M_2+\dots+M_\nu) = \frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}M_k \qquad (3)$$

Είναι φανερό ότι

$$\underline{S}_\nu \leqslant E \leqslant \overline{S}_\nu$$

Αποδεικνύεται[1] ότι οι ακολουθίες με γενικούς όρους $\underline{S}_\nu$ και $\overline{S}_\nu$ έχουν το ίδιο όριο. Από την προηγούμενη διπλή ανισότητα συμπεραίνουμε ότι το εμβαδό που ζητάμε είναι το κοινό όριο των ακολουθιών αυτών.

Ας σχηματίσουμε ακόμη και το «ενδιάμεσο» άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\dots+f(\xi_\nu)(x_\nu-x_{\nu-1}) = \frac{\beta-\alpha}{\nu}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\dots+f(\xi_\nu)]$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_k)$$

όπου $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$ είναι οποιαδήποτε σημεία των διαστημάτων $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{\nu-1}, x_\nu]$ αντιστοίχως.

Επειδή για κάθε $k = 1, 2, \dots, \nu$ είναι

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

$$\mu_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$$

θα είναι

$$\underline{S}_\nu \leqslant S_\nu \leqslant \overline{S}_\nu \qquad (4)$$

Επομένως (§ 2.17) η ακολουθία με γενικό όρο S_ν έχει όριο το κοινό όριο των $(\underline{S}_\nu)$ και $(\overline{S}_\nu)$.

5.3 Ας θεωρήσουμε τώρα, γενικότερα, μια συνάρτηση f συνεχή στο [α, β] και μια οποιαδήποτε διαμέριση P_ν του [α, β] σε ν διαστήματα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ τα οποία μπορεί να **μην** έχουν το ίδιο πλάτος. Για την P_ν σχηματίζουμε πάλι ένα οποιοδήποτε άθροισμα

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\,(x_\kappa - x_{\kappa-1})$$

όπου ξ_κ είναι τυχόν σημείο του $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$.

Θέτουμε $\delta x_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}$ και ονομάζουμε d_ν το μεγαλύτερο από τα πλάτη των διαστημάτων της P_ν. Τότε:

Αν είναι $\lim d_\nu = 0$, αποδεικνύεται ότι όλες οι ακολουθίες (S_ν) είναι συγκλίνουσες και μάλιστα έχουν όριο το κοινό (όπως είδαμε στην § 5.2) όριο των ακολουθιών (S_ν) που αντιστοιχούν σε «ισοδιαμερίσεις».

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β], τότε η ακολουθία (S_ν) των αθροισμάτων $\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\,\delta x_k$, όταν $\lim d_\nu = 0$, είναι συγκλίνουσα και το όριό της είναι ανεξάρτητο από την εκλογή και των διαμερίσεων P_ν και των σημείων ξ_k.

Το κοινό όριο όλων των ακολουθιών (S_ν) ονομάζεται **ολοκλήρωμα** ή **άθροισμα από α ως β της συνάρτησης**[1] f και συμβολίζεται[2]

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

(1) Το ολοκλήρωμα ορίζεται και για γενικότερη κατηγορία συναρτήσεων (φραγμένες, κλιμακωτές κ.ά.) που χαρακτηρίζονται με τον όρο **ολοκληρώσιμες**.

(2) Το σύμβολο $\int$ προέρχεται από τ⊃ γράμμα S, αρχικό της λέξης Summa (= άθροισμα). Ο συμβολισμός $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι παραλλαγή του $\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\,\delta x_k$.

Γενικεύοντας ορίζουμε:

$$\boxed{\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0} \qquad \boxed{\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx} \qquad (5)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θεωρούμε συνήθως τη διαμέριση του [α, β] που ορίζει ν ίσα διαστήματα κοινού πλάτους $\frac{\beta - \alpha}{\nu}$ και για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$ επιλέγουμε ως ξ_κ το δεξιό άκρο $x_\kappa = \alpha + \kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ κάθε διαστήματος.

Έτσι παίρνουμε τον τύπο

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim\left[\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\alpha + \kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu})\right]} \qquad (6)$$

Με τη βοήθεια της (6) μπορούμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα, όπως φαίνεται και στο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε το $\int_1^4 (-x^2+1)dx$

Χωρίζουμε το [1, 4] σε ν ίσα υποδιαστήματα πλάτους $\frac{4-1}{\nu} = \frac{3}{\nu}$. Τότε:

$$\sum_{k=1}^{\nu}[-(1+k\frac{3}{\nu})^2+1] = \nu - \sum_{k=1}^{\nu}(1+k\frac{3}{\nu})^2 = \nu-(1+\frac{3}{\nu})^2-(1+2\frac{3}{\nu})^2 - \ldots - (1+\nu\frac{3}{\nu})^2$$

$$= \nu - 1 - \frac{9}{\nu^2} - \frac{6}{\nu} - 1 - 2^2\cdot\frac{9}{\nu^2} - 2\frac{6}{\nu} - \ldots - 1 - \nu^2\frac{9}{\nu^2} - \nu\frac{6}{\nu}$$

$$= -\frac{9}{\nu^2}(1^2+2^2+\ldots+\nu^2) - \frac{6}{\nu}(1+2+\ldots+\nu) = -\frac{9}{\nu^2}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - \frac{6}{\nu}\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$= -\frac{6\nu^2+9\nu+3+6\nu^2+6\nu}{2\nu} = -\frac{12\nu^2+15\nu+3}{2\nu}$$

Άρα $\int_1^4 (-x^2+1)dx = \lim \frac{3}{\nu}\left(-\frac{12\nu^2+15\nu+3}{2\nu}\right) = \lim\left(-\frac{36\nu^2+45\nu+9}{2\nu^2}\right) = -18$

5.4 Έστω μ, Μ η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [α, β] αντιστοίχως (υπάρχουν γιατί η f είναι συνεχής).
Επειδή για κάθε k = 1, 2, ..., ν είναι $\mu \leqslant \mu_k$, θα είναι

$$\mu(x_1-x_0)+\mu(x_2-x_1)+\ \dots\ +\mu(x_\nu-x_{\nu-1}) \leqslant \mu_1(x_1-x_0)+\mu_2(x_2-x_1)+\ \dots\ +\mu_\nu(x_\nu-x_{\nu-1})$$

δηλαδή

$$\mu \cdot \frac{\beta-\alpha}{\nu} \cdot \nu \leqslant \underline{S}_\nu$$

και συνεπώς

$$\mu(\beta-\alpha) \leqslant \underline{S}_\nu$$

Ομοίως, επειδή για κάθε k = 1, 2, ..., ν είναι $M \geqslant M_k$, βρίσκουμε ότι

$$\overline{S}_\nu \leqslant M(\beta-\alpha)$$

Τότε, λόγω της (3), θα έχουμε $\mu(\beta-\alpha) \leqslant S_\nu \leqslant M(\beta-\alpha)$. Άρα

$$\boxed{\mu(\beta-\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant M(\beta-\alpha)} \qquad (7)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι αν μια συνεχής συνάρτηση έχει θετικές τιμές στο [α, β], τότε (σχ. 2) το εμβαδό Ε του χωρίου των σημείων M(x,y) με

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$$
$$0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

που ορίζεται δηλαδή από τη γραφική παράσταση C της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β, θα είναι

$$\boxed{E = \int_\alpha^\beta f(x)dx}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδείξετε ότι για τη σταθερή συνάρτηση u με u(x) = c είναι**

$$\int_\alpha^\beta u(x)dx = c(\beta-\alpha)$$

Ας θεωρήσουμε τη διαμέριση του [α, β] που ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Τότε

$$\int_\alpha^\beta u(x)dx = \lim \left[d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} u(\xi_k)\right]$$

Αλλά για k = 1, 2, ..., ν είναι $u(\xi_k) = c$. Συνεπώς

$$\int_\alpha^\beta u(x)dx = \lim \left[d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} c\right] = \lim \frac{\beta-\alpha}{\nu}\nu c = c(\beta-\alpha)$$

2. **Να υπολογίσετε το $\int_\alpha^\beta e^x dx$**

Θεωρούμε τη διαμέριση του [α, β] η οποία ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$. Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (d_\nu e^{\alpha+kd_\nu}) = d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} (e^\alpha \cdot e^{kd_\nu}) = d_\nu\, e^\alpha \cdot \sum_{k=1}^{\nu} e^{kd_\nu}$$

$$= d_\nu e^\alpha (e^{d_\nu}+e^{2d_\nu} +\dots+ e^{\nu d_\nu}) = d_\nu e^\alpha e^{d_\nu}(1+e^{d_\nu} +\dots+ e^{(\nu-1)d_\nu})$$

Η παράσταση που βρίσκεται στην παρένθεση είναι άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο e^{d_ν}. Άρα

$$S_\nu = e^\alpha d_\nu e^{d_\nu} \frac{e^{\nu d_\nu}-1}{e^{d_\nu}-1} = e^\alpha e^{d_\nu}(e^{\nu d_\nu}-1) \cdot \frac{d_\nu}{e^{d_\nu}-1}$$

Αλλά $\nu d_\nu = \beta-\alpha$, $\lim d_\nu = \lim \dfrac{\beta-\alpha}{\nu} = 0$, οπότε $\lim e^{d_\nu} = 1$ και (§ 3.25, εφ. 2)

$$\lim \frac{e^{d_\nu}-1}{d_\nu} = 1 \quad ή \quad \lim \frac{d_\nu}{e^{d_\nu}-1} = 1$$

Άρα

$$\int_\alpha^\beta e^x dx = \lim S_\nu = e^\alpha(e^{\beta-\alpha}-1) \lim e^{d_\nu} \lim \frac{d_\nu}{e^{d_\nu}-1}$$

$$= e^\alpha e^{\beta-\alpha}-e^\alpha = e^\beta-e^\alpha$$

Ασκήσεις: 1, 2, 3

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Γραμμικότητα

5.5 Έστω δυο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο [α, β]. Τότε και η f+g είναι συνεχής στο [α, β]. Αν θεωρήσουμε λοιπόν τη διαμέριση του [α, β] η οποία ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$, τότε (§ 5.3) έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx &= \lim \{d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} [f(\xi_k) + g(\xi_k)]\} \\ &= \lim \{d_\nu [\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_\kappa) + \sum_{i=1}^{\nu} g(\xi_k)]\} \\ &= \lim \{d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\} + \lim \{ d_\nu \sum_{i=1}^{\nu} g(\xi_k)\} \\ &= \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx\end{aligned}$$

Επίσης, αν $\lambda\in\mathbb{R}$ η λf είναι συνεχής στο [α, β], οπότε έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lim [d_\nu \lambda \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)] = \lambda \lim [d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)] = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Αποδείξαμε λοιπόν τις ισότητες

$$\boxed{\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx} \qquad (1)$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx} \qquad (2)$$

Αν $\gamma\in[\alpha, \beta]$, ἀποδεικνύεται[1] ακόμη ότι αληθεύει η ισότητα (σχέση Chasles)

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx} \qquad (3)$$

(1) Η απόδειξη παραλείπεται

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει, με επαγωγή, ότι:

1. $\int_\alpha^\beta [\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x) +\ldots+ \lambda_k f_k(x)]dx =$

$$= \lambda_1 \int_\alpha^\beta f_1(x)dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta f_2(x)dx +\ldots+ \lambda_k \int_\alpha^\beta f_k(x)dx$$

2. Αν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ είναι *οποιαδήποτε* σημεία του [α, β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\gamma_1} f(x)dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x)dx +\ldots+ \int_{\gamma_k}^\beta f(x)dx$$

Ασκήσεις: 4, 5

Ολοκλήρωμα και διάταξη

5.6 Θεωρούμε μια συνάρτηση f συνεχή στο [α, β], και τη διαμέριση του [α, β] η οποία ορίζει ν διαστήματα πλάτους $d_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \geqslant 0$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k) \geqslant 0$$

Επομένως θα είναι και $d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k) \geqslant 0$, οπότε (§ 2.12)

$$\lim [d_\nu \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)] \geqslant 0 \quad \text{ή} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant 0$$

Αποδείξαμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \geqslant 0$, τότε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant 0$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού αποδεικνύεται και το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Έστω f, g δυο συναρτήσεις συνεχείς στο [α, β]. Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \leqslant g(x)$, τότε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση h με $h(x) = g(x)-f(x)$, θα είναι $h(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1, θα είναι

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx \geqslant 0 \text{ ή } \int_\alpha^\beta [g(x)-f(x)]dx \geqslant 0 \quad \text{ή} \quad \int_\alpha^\beta g(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant 0$$

Άρα

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

Απόλυτη τιμή

5.7 Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f συνεχή σ' ένα διάστημα [α, β] και τη διαμέριση του [α, β] η οποία ορίζει διαστήματα πλάτους $d_\nu = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$. Τότε θα έχουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim \left[d_\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi\kappa)\right]$$

Αλλά (§ 1.5) $\left|d_\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi\kappa)\right| = d_\nu \left|f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_\nu)\right|$

$$\leqslant d_\nu \Big[|f(\xi_1)| + |f(\xi_2)| + \ldots + |f(\xi_\nu)|\Big] = d_\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} |f(\xi_\kappa)|$$

Εξάλλου, επειδή η $|f|$ είναι και αυτή συνεχής στο [α, β], θα είναι

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|dx = \lim \left[d_\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} |f(\xi\kappa)|\right] \geqslant \lim \left|d_\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi\kappa)\right|$$

$$= \left|\lim \left[d_\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi\kappa)\right]\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|$$

Είναι λοιπόν

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

Ώστε: **Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], τότε**

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι $\dfrac{\pi}{100} \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(3+2\sigma\upsilon\nu t)^2} \leqslant \frac{\pi}{76}$

Επειδή γιά κάθε $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ είναι $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sigma\upsilon\nu t \leqslant 1$, θα έχουμε

$$3+\sqrt{2} \leqslant 3+2\sigma\upsilon\nu t \leqslant 5$$

$$\frac{1}{25} \leqslant \frac{1}{(3+2\sigma\upsilon\nu t)^2} \leqslant \frac{1}{(3+\sqrt{2})^2} < \frac{1}{19}$$

οπότε (§ 5.6)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{25}dt \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(3+2\sigma\upsilon\nu t)^2} \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{1}{19}dt$$

Άρα

$$\frac{\pi}{100} \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{(3+2\sigma\upsilon\nu t)^2} \leqslant \frac{\pi}{76}$$

Ασκήσεις: 6

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ

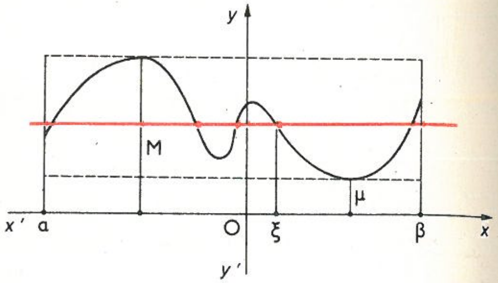
Θεώρημα μέσης τιμής

5.8 Είναι γνωστό (§ 5.4) ότι, αν μ και Μ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f, που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], τότε

$$\mu(\beta-\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant M(\beta-\alpha) \tag{1}$$

Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \geqslant 0$, τα γινόμενα $\mu(\beta-\alpha)$ και $M(\beta-\alpha)$ δίνουν τα εμβαδά των ορθογωνίων που έχουν κοινή βάση $\beta-\alpha$ και ύψη μ και M αντιστοίχως (σχ. 4).

4



Από την (1) προκύπτει ότι το εμβαδό που δίνεται από το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ περιέχεται μεταξύ των εμβαδών των δυο ορθογωνίων. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει λ μεταξύ των μ και M, τέτοιος ώστε[1]

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lambda(\beta-\alpha) \qquad (2)$$

Πράγματι, θα αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου αριθμού και μάλιστα χωρίς τον περιορισμό $f(x) \geqslant 0$. Από την (1) προκύπτει η

$$\mu \leqslant \frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha} \leqslant M$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των μ και M. Επομένως υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιος ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha} \quad \text{ή} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Αποδείξαμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιος ώστε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως *«θεώρημα μέσης τιμής»* του ολοκληρωτικού λογισμού

(1) Τα παραπάνω δεν αποτελούν απόδειξη, γιατί στηρίζονται στην ενορατική αντίληψη της έννοιας του εμβαδού.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το ξ δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό (σχ. 4)
2. Το θεώρημα ισχύει και όταν $\alpha \geqslant \beta$. Πράγματι, τότε είναι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx = -f(\xi)(\alpha-\beta) = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

Συνάρτηση οριζόμενη από ολοκλήρωμα

5.9 Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, και ένα σημείο $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

Τότε σε κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την τιμή του $\int_\gamma^x f(t)dt$.

Έτσι ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$ μια συνάρτηση F με

$$F(x) = \int_\gamma^x f(t)dt$$

Θα αναζητήσουμε, αν υπάρχει, την παράγωγο της F. Έστω ένα σημείο x_0 του $[\alpha, \beta]$.

* Σχηματίζουμε το λόγο μεταβολής της F μεταξύ x_0 και $(x_0+h) \in [\alpha, \beta]$ και έχουμε

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_\gamma^{x_0+h} f(t)dt - \int_\gamma^{x_0} f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_\gamma^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_\gamma^{x_0} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχει ξ μεταξύ x_0 και x_0+h τέτοιος ώστε

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(\xi)(x_0+h-x_0) = h\,f(\xi)$$

Άρα $$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\cdot hf(\xi) = f(\xi) \qquad (1)$$

Για κάθε $h \in [\alpha-x_0, \beta-x_0]$ εκλέγουμε ένα αντίστοιχο ξ (μπορεί να υπάρχουν περισσότερα). Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση φ με $\varphi(h) = \xi$. Τότε, επειδή

$$x_0 < \varphi(h) < x_0+h \quad (\text{ή } x_0+h < \varphi(h) < x_0) \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}(x_0+h) = x_0$$

θα είναι (§ 3.11)

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = x_0 \qquad (2)$$

Συνεπώς, σύμφωνα με όσα είπαμε στην § 3.19, από την (1) έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\varphi(h)) = f(x_0)$$

ή

$$F'(x_0) = f(x_0) \qquad (3)$$

Επειδή η (3) ισχύει για κάθε $x_0 \in [\alpha, \beta)$, έχουμε γενικά

$$F' = f$$

δηλαδή η F είναι μια παράγουσα της f.

Έχουμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε η συνάρτηση F με $F(x) = \int_\gamma^x f(t)dt$, ($\gamma \in [\alpha, \beta]$), είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $F'(x) = f(x)$.**

Αν επαναλάβουμε την ίδια εργασία με ένα άλλο σημείο $\gamma \in [\alpha, \beta]$, ορίζουμε μια άλλη παράγουσα της f.

Ασκήσεις: 7, 8, 9, 10

Σχέση ολοκληρώματος και παράγουσας

5.10 Οι παράγουσες της συνάρτησης f μας διευκολύνουν στον υπολογισμό του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε**

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$$

Απόδειξη. Έστω F μια παράγουσα της f. Η συνάρτηση $\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι επίσης παράγουσα της f, οπότε (§ 4.17) θα είναι

$$\int_\alpha^x f(t)dt = F(x)+c \qquad (1)$$

Η ισότητα αυτή για $x = \alpha$ γίνεται (§ 5.3)

$$0 = \int_\alpha^\alpha f(t)dt = F(\alpha)+c \quad \text{άρα} \quad c = -F(\alpha)$$

Επομένως από την (1) προκύπτει ότι

$$\int_\alpha^x f(t)dt = F(x)-F(\alpha)$$

η οποία για $x = \beta$ γίνεται

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta)-F(\alpha) \qquad (2)$$

Τη διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ τη συμβολίζουμε $[F(x)]_\alpha^\beta$, οπότε η (2) γράφεται και

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = [F(x)]_\alpha^\beta$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή της παράγουσας F. Πράγματι, για κάθε άλλη παράγουσα F_1 είναι $F_1(x) = F(x)+c$, οπότε

$$F_1(\beta)-F_1(\alpha) = [F(\beta)+c] - [F(\alpha)+c] = F(\beta) - F(\alpha)$$

5.11 Το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Στον υπολογισμό αυτό θα μας βοηθήσει και ο πίνακας της § 4.17, που δίνει τις παράγουσες ορισμένων βασικών συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\int_2^4 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 6$

2. $\int_0^{\pi} ημx dx = [-συνx]_0^{\pi} = 1+1 = 2$

3. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^9 = 2\cdot 3 - 2\cdot 1 = 4$

4. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{συν^2x} = [εφx]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1-(-1) = 2$

5. $\int_{-1}^{1} 3x^5dx = 3\int_{-1}^{1} x^5dx = 3\left[\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{1} = 3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = 0$

6. $\int_{-1}^{1} 3x^6dx = 3\int_{-1}^{1} x^6dx = 3\left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1} = 3\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{6}{7}$

7. $\int_{-2}^{0} (3x^2-5x+2)dx = 3\int_{-2}^{0} x^2dx - 5\int_{-2}^{0} xdx + 2\int_{-2}^{0} dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + 2[x]_{-2}^{0}$

$$= 3\cdot\frac{8}{3} + 5\cdot 2 + 2\cdot 2 = 22$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να υπολογιστεί τό ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^{2} (|x|+|x-1|)dx$**

Έχουμε:

$$|x|+|x-1| = \begin{cases} x+x-1 = 2x-1, & αν\ x \geqslant 1 \\ x-x+1 = 1, & αν\ 0 \leqslant x < 1 \\ -x-x+1 = -2x+1, & αν\ x < 0 \end{cases}$$

οπότε το ολοκλήρωμα I γράφεται:

$$I = \int_{-2}^{0}(|x|+|x-1|)dx + \int_{0}^{1}(|x|+|x-1|)dx + \int_{1}^{2}(|x|+|x-1|)dx$$

$$= \int_{-2}^{0}(-2x+1)dx + \int_{0}^{1}dx + \int_{1}^{2}(2x-1)dx$$

$$= [-x^2+x]_{-2}^{0} + [x]_0^1 + [x^2-x]_1^2$$

$$= 9$$

2. **Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο**

$$α_ν = \frac{ν}{ν^2} + \frac{ν}{(ν+1)^2} + \ldots + \frac{ν}{(2ν-1)^2}$$

Ο γενικός όρος γράφεται

$$α_ν = \frac{1}{ν}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1+\frac{1}{ν})^2} + \ldots + \frac{1}{(1+\frac{ν-1}{ν})^2}\right]$$

Παρατηρούμε ότι οι

$$1,\ 1+\frac{1}{ν},\ \ldots,\ 1+\frac{ν-1}{ν}$$

είναι τα αριστερά άκρα ν διαστημάτων πλάτους $d_ν = \frac{1}{ν}$ στα οποία έχει χωριστεί το διάστημα [1, 2].

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

θα είναι
$$α_ν = \sum_{k=1}^{ν} d_ν f(ξ_k) \quad με\ ξ_k = 1+\frac{k-1}{ν}$$

και επομένως
$$\lim α_ν = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

3. **Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η δύναμη που απαιτείται για την επιμήκυνση ενός ελατηρίου είναι ανάλογη της επιμήκυνσης x, δηλαδή**

$$F(x) = λx$$

Να υπολογιστεί το παραγόμενο έργο όταν η συνολική επιμήκυνση είναι β.

Θεωρούμε τη διαμέριση του [0, β] σε ν διαστήματα κοινού πλάτους $\frac{β}{ν}$ με τα σημεία $x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{κ-1},\ x_κ,\ \ldots,\ x_ν = β$.

Κατά την επιμήκυνση του ελατηρίου από το $x_{κ-1}$ στο $x_κ$, η δύναμη αυξάνεται από

$$F(x_{κ-1}) = λx_{κ-1} \ σε\ F(x_κ) = λx_κ.$$

Έτσι, αν $W_κ$ είναι το αντίστοιχο έργο, θα έχουμε

$$\frac{β}{ν}F(x_{κ-1}) \leqslant W_κ \leqslant \frac{β}{ν}F(x_κ) \qquad (1)$$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $ξ_κ \in [x_{κ-1}, x_κ]$ τέτοιος ώστε

$$W_κ = \frac{β}{ν}F(ξ_κ)$$

Αλλά το ζητούμενο έργο είναι

$$W = \sum_{κ=1}^{ν} W_κ = \sum_{κ=1}^{ν} \frac{β}{ν}F(ξ_κ),\ για\ κάθε\ ν \in \mathbb{N}^*$$

Άρα

$$W = \lim \sum_{κ=1}^{ν} \frac{β}{ν}F(ξ_κ) = \int_0^β F(x)dx = \int_0^β λxdx = \frac{λβ^2}{2}.$$

Ασκήσεις: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

5.12 Το θεώρημα για την παραγώγιση γινομένου (§ 4.10) οδηγεί στη μέθοδο που εκθέτουμε παρακάτω για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ενός γινομένου συνεχών συναρτήσεων f και g.

Υποθέτουμε ότι είναι γνωστή μια παράγουσα F της f και ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο [α, β]. Τότε έχουμε:

$$(Fg)' = F'g + Fg'$$

Αν υποθέσουμε ακόμη ότι η g΄ είναι συνεχής στο [α, β], τότε **ορίζονται** τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων που εμφανίζονται στην παραπάνω ισότητα και είναι:

$$\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)dx + \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx = [F(x)g(x)]_\alpha^\beta$$

Δηλαδή

$$\boxed{\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx} \qquad (1)$$

Έτσι με την (1) μπορούμε να ανάγουμε τον υπολογισμό του $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$, δηλαδή του $\int_\alpha^\beta F'(x)g(x)dx$, στον υπολογισμό του $\int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx$, που πιθανόν να είναι απλούστερος, με τις προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στο [α, β]
- Η F είναι μια παράγουσα της f
- Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο συνεχή στο [α, β].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_0^\pi x\eta\mu x dx$.

Η συνάρτηση ημx είναι συνεχής στο [0, π] και μια παράγουσά της είναι η -συνx. Επίσης η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο [(x)΄ = 1] συνεχή στο [0, π]. Έτσι έχουμε

$$\int_0^\pi x\eta\mu x dx = \int_0^\pi (-\sigma\upsilon\nu x)'x dx = [(-\sigma\upsilon\nu x)x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sigma\upsilon\nu x)\cdot(x)'dx$$

$$= [-x\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x dx = [-x\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + [\eta\mu x]_0^\pi = \pi$$

2. Ομοίως έχουμε:

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 (e^x)'x dx = [e^x\cdot x]_0^1 - \int_0^1 e^x(x)'dx = e - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - [e^x]_0^1 = e-(e-1) = 1$$

3. Επίσης έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\eta\mu x)'e^x dx = [e^x\eta\mu x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu x(e^x)'dx$$

$$= 0 - \int_{-\pi}^{\pi} e^x\eta\mu x dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx = [e^x\sigma\upsilon\nu x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x dx$$

$$= e^\pi(-1) - e^{-\pi}(-1) - \int_{-\pi}^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x dx = e^{-\pi}-e^\pi - \int_{-\pi}^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x dx$$

Δηλαδή είναι $2\int_{-\pi}^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x dx = e^{-\pi}-e^\pi$ και συνεπώς

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x\sigma\upsilon\nu x dx = \frac{e^{-\pi}-e^\pi}{2}$$

Ασκήσεις: 23, 24, 25, 26

Αλλαγή μεταβλητής

5.13 Το θεώρημα για την παραγώγιση σύνθεσης συναρτήσεων (§ 4.12) παρέχει μια νέα μέθοδο ολοκλήρωσης.

Θεωρούμε μια συνάρτηση g παραγωγίσιμη, άρα και συνεχή, στο διάστημα [α, β].

'Εστω ακόμη f μια συνεχής συνάρτηση στο g([α, β]) και F μια παράγουσα της f. Τότε (§ 4.12) έχουμε

$$\begin{aligned}[F(g(x))]' &= F'(g(x))\cdot g'(x)\\ &= f(g(x))\cdot g'(x)\end{aligned}$$

Αν επιπλέον και η g΄ είναι συνεχής στο [α, β], τότε ορίζεται το ολοκλήρωμα της $(f\circ g)\cdot g'$ και από την προηγούμενη ισότητα έχουμε

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx = [F(g(x))]_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

και επειδή η F είναι παράγουσα της f,

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(y)dy} \qquad (2)$$

'Ετσι με τη (2) μπορούμε να ανάγουμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος από α ως β μιας συνάρτησης της μορφής $(f\circ g)\cdot g'$ στον υπολογισμό ολοκληρώματος της f από g(α) ως g(β).

Αντιστρόφως, με την αντικατάσταση $y = g(x)$, αφού προσδιοριστούν τα α και β ώστε $\gamma = g(\alpha)$ και $\delta = g(\beta)$, το $\int_\gamma^\delta f(y)dy$ μπορεί να αναχθεί, λόγω της (2), στο $\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx$.

Ειδική περίπτωση: $\int_\alpha^\beta f(\lambda x+\mu)dx$

Θέτουμε $g(x) = \lambda x+\mu$, οπότε $g'(x) = \lambda$, και συνεπώς

$$\int_\alpha^\beta \lambda\cdot f(\lambda x+\mu)dx = \int_{\lambda\alpha+\mu}^{\lambda\beta+\mu} f(y)dy$$

'Αρα
$$\int_\alpha^\beta f(\lambda x+\mu)dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\alpha+\mu}^{\lambda\beta+\mu} f(y)dy$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1 'Εχουμε $\int_0^{\pi/3} \sigma\upsilon\nu 2x\, e^{\eta\mu 2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} e^{\eta\mu 2x}(\eta\mu 2x)'\,dx$

Θέτουμε $y = g(x) = \eta\mu 2x$, οπότε βρίσκουμε $g(0) = \eta\mu(2\cdot 0) = 0$ και $g(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

'Ετσι θα είναι:

$$\int_0^{\pi/3} \sigma\upsilon\nu 2x\, e^{\eta\mu 2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2} e^y dy = \frac{1}{2}[e^y]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}/2} - 1)$$

2. Ομοίως είναι $\int_0^{\pi/3} \varepsilon\varphi x dx = \int_0^{\pi/3}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx = -\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x)'\,dx$

Θέτουμε $y = g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε $g(0) = 1$ και $g(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ και έτσι έχουμε

$$\int_0^{\pi/3}\varepsilon\varphi x dx = -\int_1^{1/2}\frac{1}{y}dy = -[\ln y]_1^{1/2} = -(\ln\frac{1}{2} - 0) = -(-\ln 2) = \ln 2$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^\lambda \frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$

'Εχουμε $I = \int_1^\lambda e^{-\frac{1}{x}}dx + \int_1^\lambda \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$

Αλλά
$$\begin{aligned}\int_1^\lambda e^{-\frac{1}{x}}dx &= \int_1^\lambda (x)'e^{-\frac{1}{x}}dx = [xe^{-\frac{1}{x}}]_1^\lambda - \int_1^\lambda xe^{-\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x})\,dx\\ &= [xe^{-\frac{1}{x}}]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx\end{aligned}$$

'Αρα $\quad I = \int_1^\lambda e^{-\frac{1}{x}}dx + \int_1^\lambda\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx = [xe^{-\frac{1}{x}}]_1^\lambda = \lambda e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-1}$

2. Αν f είναι μια περιοδική συνάρτηση f με περίοδο T, να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_\alpha^{\alpha+T} f(y)dy$ **είναι ανεξάρτητο του α.**

Είναι:
$$I = \int_\alpha^T f(y)dy + \int_T^{\alpha+T} f(y)dy$$

Αν θέσουμε $y = x+T$, για $y = T$ βρίσκουμε $x = 0$ και για $y = \alpha+T$ βρίσκουμε $x = \alpha$.

Τότε: $$\int_T^{\alpha+T} f(y)dy = \int_0^\alpha f(x+T)(x+T)'dx$$

$$= \int_0^\alpha f(x+T)dx$$

$$= \int_0^\alpha f(x)dx \qquad \text{[επειδή η f είναι περιοδική]}$$

Άρα $$I = \int_\alpha^T f(y)dy + \int_0^\alpha f(y)dy = \int_0^T f(y)dy$$

δηλαδή ανεξάρτητο του α.

Ασκήσεις: 27, 28 29, 30

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Εμβαδό οριζόμενο από συνάρτηση

5.14 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **f(x) ⩾ 0,** για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Στην περίπτωση αυτή το χωρίο που μας ενδιαφέρει είναι το σύνολο των σημείων M(x, y) με

$$\begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση της § 5.4 το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

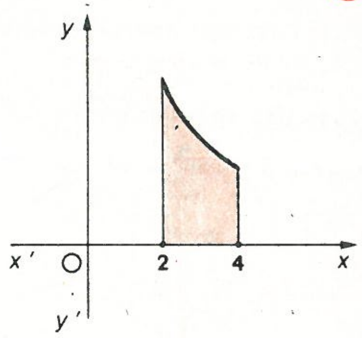
Το εμβαδό του χωρίου (σχ. 5) που ορίζεται από τις

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

είναι:

$$E = \int_2^4 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln \frac{4}{2} = \ln 2$$

5



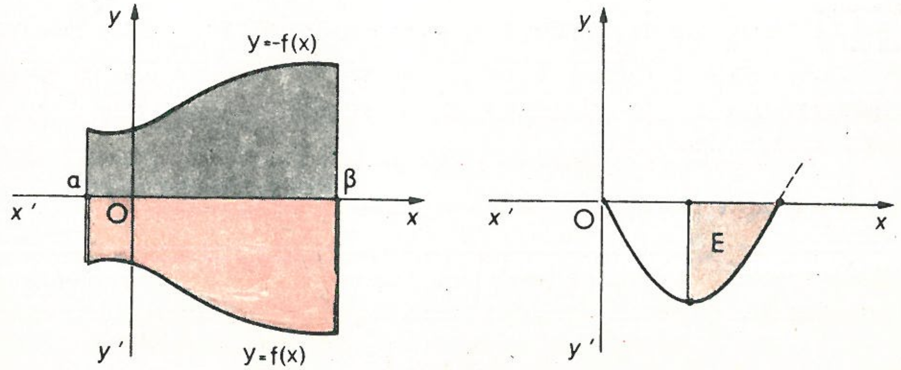
- **f(x) ⩽ 0,** για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Επειδή τα χωρία

$$\begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 0 \leqslant y \leqslant -f(x) \end{cases}$$

έχουν το ίδιο εμβαδό (σχ. 6α), αρκεί να εργαστούμε με τη συνάρτηση -f για την οποία είναι $-f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

6



α β

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το επίπεδο χωρίο (σχ. 6β) που ορίζεται από τα σημεία Μ (x, y) με

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi\\ -\eta\mu x\leqslant y\leqslant 0\end{cases}$$

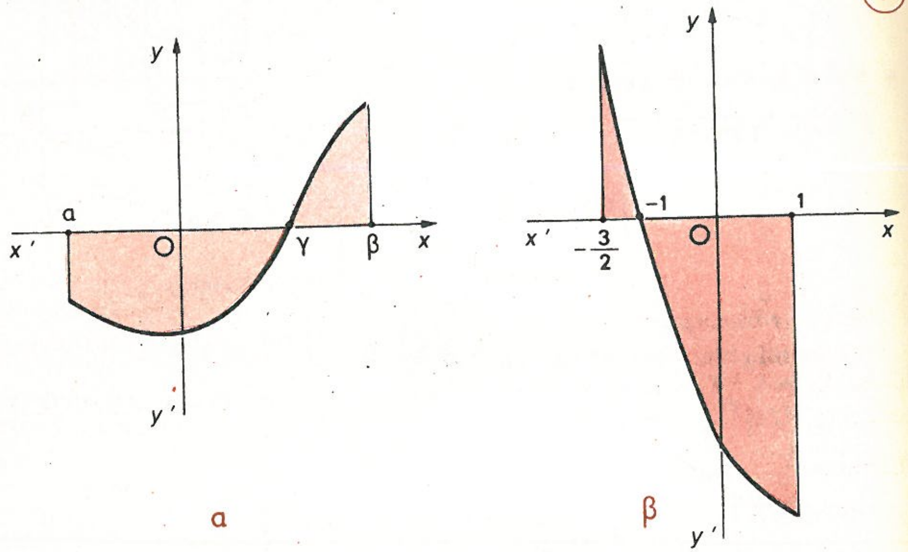
έχει εμβαδό

$$E=\int_{\pi/2}^{\pi}\eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{\pi/2}^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1$$

- **Η f δεν έχει σταθερό πρόσημο**

Χωρίζουμε το [α, β], αν είναι δυνατό, σε υποδιαστήματα στα οποία η f έχει το ίδιο πρόσημο και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα εμβαδά (σχ. 7α).

7



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = x^2-2x-3$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = -\frac{3}{2}$ και $x = 1$ (σχ. 7β). Επειδή για $x\in[-\frac{3}{2}, -1]$ είναι $f(x)\geqslant 0$ και για $x\in[-1, 1]$ είναι $f(x)\leqslant 0$, έχουμε

$$E=\int_{-3/2}^{-1}(x^2-2x-3)dx-\int_{-1}^{1}(x^2-2x-3)dx=[\frac{x^3}{3}-x^2-3x]_{-3/2}^{-1}-[\frac{x^3}{3}-x^2-3x]_{-1}^{1}$$

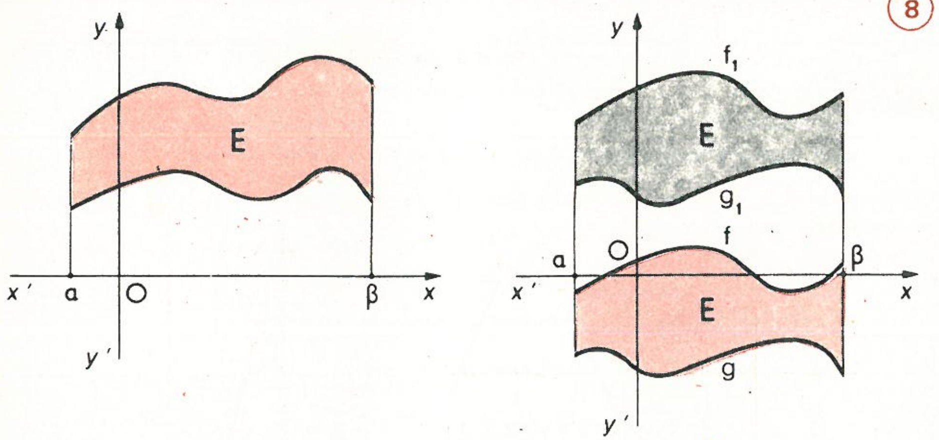
$$=(-\frac{1}{3}-1+3)-(-\frac{27}{24}-\frac{9}{4}+\frac{9}{2})-(\frac{1}{3}-1-3)+(-\frac{1}{3}-1+3)=\frac{47}{8}$$

Χωρίο που ορίζεται από δυο συναρτήσεις

5.15 Έστω δυο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο [α, β], τέτοιες ώστε για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ να είναι $g(x)\leqslant f(x)$. Θα υπολογίσουμε το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Θα εξετάσουμε χωριστά την περίπτωση που για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ είναι $f(x)\geqslant 0$ και $g(x)\geqslant 0$. Τότε (σχ. 8α) θα είναι

8



α β

$$E = E_1 - E_2$$

όπου E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των χωρίων που ορίζουν οι γραφικές παραστάσεις των f, g με τον άξονα x΄x.

Επομένως θα έχουμε

$$E=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση, όπως π.χ. στην περίπτωση του σχήματος 8β, θεωρούμε τις συναρτήσεις g_1 και f_1 με

$$g_1(x) = g(x)+k \quad \text{και} \quad f_1(x) = f(x)+k$$

όπου k είναι ο αντίθετος ενός κάτω φράγματος της g.

Τότε, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ είναι $f_1(x)\geqslant 0$ και $g_1(x)\geqslant 0$. Και επειδή τα χωρία που ορίζονται από τις f_1, g_1 και f, g έχουν το ίδιο εμβαδό, έχουμε

$$E=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)+k-(g(x)+k)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$$

Γενικά λοιπόν

Αν για δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο [α, β], είναι $g(x) \leqslant f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ έχει εμβαδό

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου (σχ. 9α) που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2$.

Βρίσκουμε πρώτα τις τετμημένες των σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων. Είναι

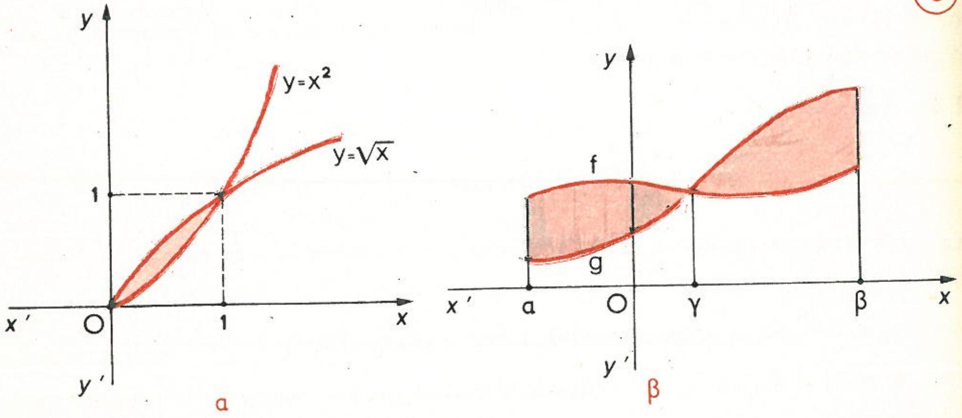
$$\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x(x^3-1) = 0$$

Άρα τα κοινά σημεία έχουν τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Επομένως το εμβαδό E του ζητούμενου χωρίου είναι.

$$E = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

9



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν οι τιμές των συναρτήσεων f και g δεν έχουν την ίδια διάταξη σ' όλο το [α, β], αλλά το [α, β] μπορεί να χωριστεί σε υποδιαστήματα σε καθένα από τα οποία, για κάθε x να είναι

$$f(x) \leqslant g(x) \quad ή \quad g(x) \leqslant f(x)$$

τότε υπολογίζουμε τα επιμέρους εμβαδά.

Έτσι π.χ. το σχήμα 9β είναι

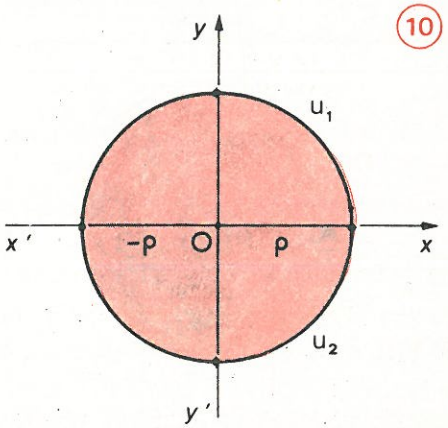
$$E = \int_{\alpha}^{\gamma} [f(x)-g(x)]dx + \int_{\gamma}^{\beta} [g(x)-f(x)]dx$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να υπολογίσετε το εμβαδό κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ.**

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ. Ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση

10



$$x^2+y^2 = \rho^2$$

Τα δυο ημικύκλια κ_1 και κ_2 (σχ. 10) είναι αντίστοιχα γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και -f με

$$f(x) = \sqrt{\rho^2-x^2}$$

και $\quad (-f)(x) = -\sqrt{\rho^2-x^2}, \quad x \in [-\rho, \rho]$

Επομένως το εμβαδό του κυκλικού δίσκου θα είναι

$$E = 2\int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2-x^2}dx$$

Αν θέσουμε $x = \rho\eta\mu t$, τότε για $x = -\rho$ βρίσκουμε $t = -\frac{\pi}{2}$ και για $x = \rho$ βρίσκουμε $t = \frac{\pi}{2}$.

Έτσι, θα έχουμε (§ 5.12)

$$E = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\rho^2-\rho^2\eta\mu^2 t}\,(\rho\eta\mu t)' dt = 2\rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 t dt$$

$$= 2\rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{2} dt = \rho^2 \left[t + \frac{\eta\mu 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\rho^2$$

2. **Να υπολογίσετε το εμβαδό έλλειψης με άξονες 2α και 2β.**

Αν η έλλειψη έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων (σχ. 11) η εξίσωσή της είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Οι δυο «ημιελλείψεις» c_1 και c_2 είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και

-f με $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$ και

$(-f)(x) = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}, \quad x\in[-\alpha, \alpha].$

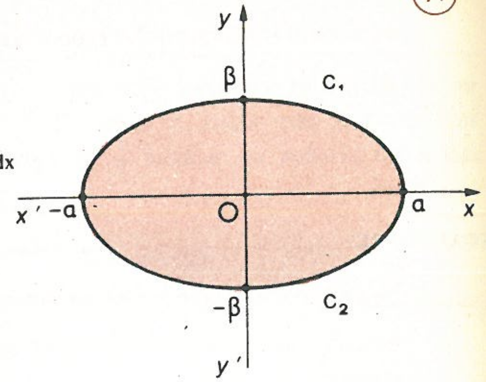
Συνεπώς το εμβαδό Ε της έλλειψης είναι

$$E = 2\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx = 2\frac{\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx$$

Αλλά (Εφαρμ. 1) $\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx = \frac{\pi\alpha^2}{2}$

Άρα $E = 2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\pi\alpha^2}{2} = \pi\alpha\beta$

(11)

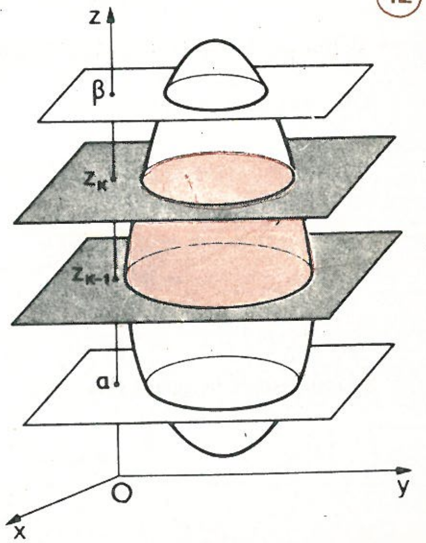


Ασκήσεις: 31, 32, 33, 34, 35, 36

Όγκος στερεού

5.16 Έστω ένα γεωμετρικό στερεό Σ. Θεωρούμε ένα σύστημα αναφοράς Oxyz (σχ. 12) και υποθέτουμε ότι η τομή του Σ με το επίπεδο z = t έχει εμβαδό E(t), όπου E είναι μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β].

(12)



Διαμερίζουμε τώρα το [α, β] με τα σημεία

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, t_{\nu-1}, t_\nu = \beta$$

οπότε ορίζονται ν διαστήματα πλάτους

$$d_\nu = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$$

Επειδή η Ε είναι συνεχής στο [α, β], θα έχει σε κάθε διάστημα $[t_{k-1}, t_k]$, k = 1, 2, ..., ν, ελάχιστη και μέγιστη τιμή μ_k και M_k αντιστοίχως. Αν λοιπόν V_K είναι ο όγκος του μέρους του Σ που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων $z = t_{k-1}$ και $z = t_k$, θα είναι

$$d_\nu\mu_k \leqslant V_k \leqslant d_\nu M_k$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον όγκο V του στερεού μεταξύ των επιπέδων z = α και z = β.

Πράγματι, αν σχηματίσουμε τα αθροίσματα

$$\underline{S}_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} d_\nu\mu_k \quad \text{και} \quad \overline{S}_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} d_\nu M_k$$

είναι

$$\underline{S}_\nu \leqslant V \leqslant \overline{S}_\nu$$

και επειδή (§ 5.3), τα $\underline{S}_\nu$ και $\overline{S}_\nu$ έχουν κοινό όριο το $\int_\alpha^\beta E(t)dt$ θα είναι

$$\boxed{V = \int_\alpha^\beta E(t)dt} \qquad (1)$$

Εφαρμογή: Όγκος κυλίνδρου και κώνου

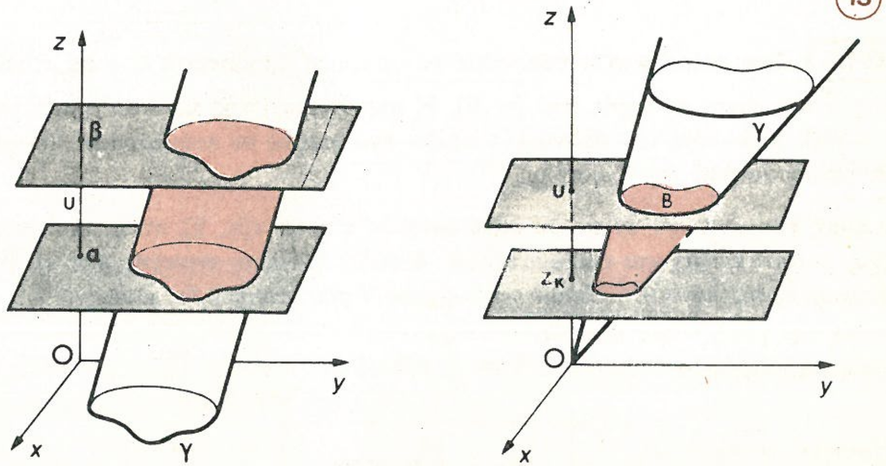
5.17 Με τη βοήθεια της ισότητας (1) θα υπολογίσουμε τους όγκους ορισμένων γνωστών στερεών.

1. Ας θεωρήσουμε μια κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό μια κλειστή γραμμή γ (σχ. 13α). Οι τομές της με τα επίπεδα z = α και z = β είναι ίσες. Αν το εμβαδό τους είναι Β, τότε το στερεό που έχει βάσεις τις τομές αυτές έχει όγκο

$$V = \int_\alpha^\beta B dt = B\int_\alpha^\beta dt = B[t]_\alpha^\beta = B\,(\beta-\alpha)$$

Αν θέσουμε β-α = υ, έχουμε τελικά

(13)



α β

$$\boxed{V = B \cdot \upsilon} \qquad (2)$$

Ο τύπος αυτός δίνει τον όγκο κυλίνδρου, πρίσματος κτλ. όταν η οδηγός της κυλινδρικής επιφάνειας είναι αντίστοιχα κύκλος, πολύγωνο κτλ.

2. Έστω τώρα μια κωνική επιφάνεια με οδηγό μια κλειστή γραμμή γ (σχ. 13β). Η τομή της με το επίπεδο $z = \upsilon$ έχει εμβαδό B. Στη Γεωμετρία αποδεικνύεται ότι αν B_t είναι το εμβαδό της τομής της επιφάνειας με το επίπεδο $z = t$, τότε

$$\frac{B_t}{B} = \frac{t^2}{\upsilon^2} \quad ή \quad B_t = B\,\frac{t^2}{\upsilon^2}$$

Επομένως ο όγκος του στερεού που έχει βάση τη B είναι

$$V = \int_0^{\upsilon} B\,\frac{t^2}{\upsilon^2}\,dt = \frac{B}{\upsilon^2}\int_0^{\upsilon} t^2 dt = \frac{B}{\upsilon^2}\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^{\upsilon} = \frac{B}{\upsilon^2}\cdot\frac{\upsilon^3}{3}$$

ή τελικά

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\,B \cdot \upsilon} \qquad (3)$$

Όταν η οδηγός της κωνικής επιφάνειας είναι κύκλος, πολύγωνο κτλ, ο τύπος (3) μας δίνει αντίστοιχα τον όγκο κώνου, πυραμίδας κτλ.

Όγκος στερεών εκ περιστροφής

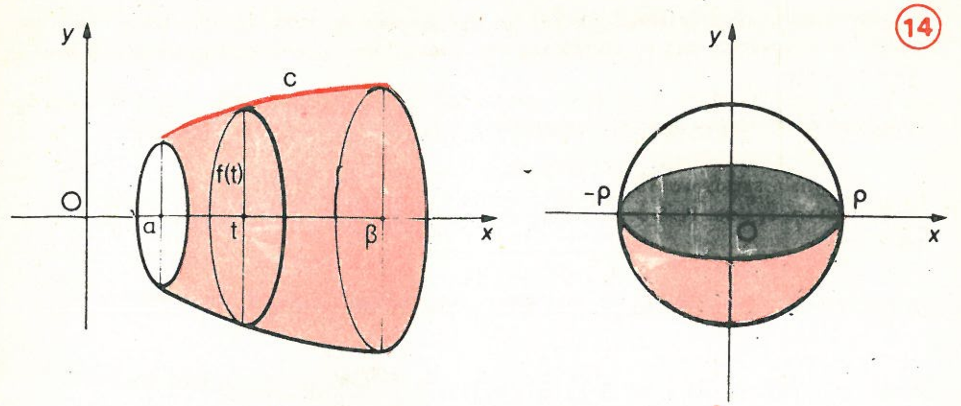
5.18 Στο επίπεδο xOy θεωρούμε τη γραφική παράσταση C μιας συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο [α, β]. Η περιστροφή της C, που έχει εξίσωση $y = f(x)$, γύρω από τον άξονα x΄x ορίζει ένα **στερεό εκ περιστροφής** (σχ. 14α). Θα υπολογίσουμε τον όγκο του.

Η τομή του στερεού αυτού με κάθε επίπεδο $x = t$, $t \in [\alpha, \beta]$, είναι κυκλικός δίσκος με ακτίνα f(t) και εμβαδό $\pi(f(t))^2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β], θα είναι συνεχής και η πf^2. Επομένως ο όγκος V του στερεού θα είναι

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi[f(x)]^2 dx$$

ή

$$\boxed{V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2\, dx}$$



α β

Εφαρμογή: Όγκος σφαίρας

5.19 Στο επίπεδο xOy θεωρούμε ένα ημικύκλιο κέντρου O και ακτίνας ρ, του οποίου η διάμετρος βρίσκεται στον άξονα x΄x. Όταν το ημικύκλιο στρέφεται γύρω από τον x΄x, παράγεται σφαίρα με κέντρο O και ακτίνα ρ. Επειδή το ημικύκλιο είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}, \quad x \in [-\rho, \rho],$$

ο όγκος της σφαίρας θα είναι

$$V = \pi \int_{-\rho}^{\rho} (\sqrt{\rho^2 - x^2})^2\, dx = \pi \int_{-\rho}^{\rho} (\rho^2 - x^2)dx = \pi\rho^2[x]_{-\rho}^{\rho} - \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\rho}^{\rho}$$

$$= \pi\rho^3 + \pi\rho^3 - \frac{\pi\rho^3}{3} - \frac{\pi\rho^3}{3} = \frac{4}{3}\,\pi\rho^3$$

Ώστε: $$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi\rho^3}$$

Ασκήσεις: 37, 38

Μια εφαρμογή στη Φυσική

5.20 Είναι γνωστό (βλ. Φυσική Γ΄ Λυκείου ΟΕΔΒ, 1983) ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας g σ' ένα σημείο, το οποίο απέχει από το κέντρο της γης r, είναι

$$g = \frac{GM}{r^2} \qquad \left(\begin{array}{l} G\text{: παγκόσμια σταθερά,} \\ M\text{: μάζα της γης} \end{array}\right)$$

1. Η **διαφορά δυναμικής ενέργειας E(B)-E(A)** που έχει μια μάζα m μεταξύ δύο σημείων A και B, των οποίων οι αποστάσεις από το κέντρο της γης είναι r_A και r_B αντιστοίχως, μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Θεωρούμε ν-1 ενδιάμεσα σημεία P_k με αποστάσεις r_k, $k = 1, 2, \ldots, \nu-1$, τέτοιες ώστε

$$r_0 = r_A < r_1 < \ldots < r_{k-1} < r_k < \ldots < r_{\nu-1} < r_\nu = r_r$$

Αν g_k είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στο σημείο P_k, τότε για τη διαφορά δυναμικής ενέργειας μεταξύ P_{k-1} και P_k έχουμε

$$mg_k(r_k - r_{k-1}) \leqslant E(P_k) - E(P_{k-1}) \leqslant mg_{k-1}(r_k - r_{k-1})$$

Άρα
$$E(B) - E(A) = \lim m \sum_{k=1}^{\nu} g_k(r_k - r_{k-1}) = m \int_{r_A}^{r_B} \frac{GM}{r^2}\, dr = mGM \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$
$$= mGM \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

2. Η **ταχύτητα διαφυγής** υ_δ είναι η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να βληθεί ένα σώμα από ένα σημείο A της επιφάνειας της γης ώστε να μην επιστρέψει στη γη (δηλ. να μηδενιστεί η ταχύτητά του σε άπειρη απόσταση). Αν θεωρήσουμε την κινητική ενέργεια $E_k(A)$ ως $E_k(B)$ στις θέσεις A, B, τότε

$$E(B) - E(A) = E_k(A) - E_k(B)$$

$$mGM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 \qquad \text{(R: ακτίνα της γης)}$$

Επομένως αν $\upsilon_A = \upsilon_\delta$ και το B το θεωρήσουμε απομακρυσμένο στο άπειρο, θα έχουμε

$$\frac{GM}{R} = \frac{1}{2}\upsilon_\delta^2$$

ή
$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11,2 \text{ km/sec}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχτεί ότι $40 \leqslant \int_{100}^{104} \sqrt{x}\, dx < 41$.

2. Να αποδειχτεί ότι, αν $0 < \alpha < \beta$ τότε
$$\frac{\beta-\alpha}{\beta} \leqslant \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} \leqslant \frac{\beta-\alpha}{\alpha}$$

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta kx dx$ $(\alpha < \beta)$.

4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1} dx + \int_1^0 \frac{dx}{x^2+1} = 1$.

5. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ το οποίο περιέχει τους αριθμούς α, β, γ, δ τότε:

(i) $\int_\gamma^\delta f(x)dx + \int_\delta^\beta f(x)\, dx + \int_\beta^\gamma f(x)\, dx = 0$

(ii) $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \int_\gamma^\delta f(x)\, dx + \int_\alpha^\gamma f(x)dx \int_\delta^\beta f(x)\, dx + \int_\alpha^\delta f(x)\, dx \int_\beta^\gamma f(x)\, dx = 0$

6. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\int_0^1 x^2\, \eta\mu x\, dx \leqslant \frac{1}{3}$, (ii) $1 \leqslant \int_0^1 2^x dx \leqslant 2$.

7. Αν f είναι μια μη μηδενική συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geqslant 0$, να αποδειχτεί ότι:

(i) Υπάρχει διάστημα $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ στο οποίο να είναι $f(x) > 0$

(ii) $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx > 0$.

8. Αν L είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}_+^*$ και $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ να αποδειχτεί ότι

(i) $L(1) = 0$, (ii) Η L είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_+^*$.

9. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ το οποίο περιέχει τους αριθμούς 0, α, β. Αν F_1 και F_2 είναι δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το Δ και

$$F_1(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, \qquad F_2(x) = \int_\beta^x f(t)\, dt$$

να αποδειχτεί ότι η F_1-F_2 είναι συνάρτηση σταθερή.

10. Έστω η συνάρτηση F με

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t dt$$

Να υπολογιστεί η παράγωγος $F'(x)$ της F στο σημείο x, θεωρώντας την F ως σύνθεση των συναρτήσεων g με $g(x) = 1+x^2$ και h με $h(x) = \int_1^x \ln t dt$.

11. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_1^3 (2x^2-5x+1)\, dx$, (ii) $\int_1^2 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right) dx$, (iii) $\int_1^3 \frac{2x^2-5x+3}{x^2}\, dx$

(iv) $\int_0^{-2} x(2x^2-1)^3 dx$, (v) $\int_1^3 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}\, dx$, (vi) $\int_1^2 \frac{(2x-1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$.

12. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/2}(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)dx$, (ii) $\int_1^2 4\,(3x^2+1)\,(x^3+x+1)^3dx$, (iii) $\int_0^{\pi/2}\eta\mu^2x\;\sigma\upsilon\nu x dx$,

(iv) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2x}\,dx$, (v) $\int_0^t(\alpha x^{\mu}+\beta)^{\nu}x^{\mu-1}dx$, (vi) $\int_0^2\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}\,dx$

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/2}(3\;\eta\mu 2x+5\sigma\upsilon\nu 3x)\,dx$, (ii) $\int_0^1 e^{5x-1}\,dx$,

(iii) $\int_0^x\frac{dt}{t+1}$ (iv) $\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}dx$

14. (i) Να υπολογιστούν δυο πραγματικοί αριθμοί α και β τέτοιοι ώστε

$$\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-2}=\frac{1}{x^2-3x+2}$$

(ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_3^5\frac{dx}{x^2-3x+2}$

15. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2x\;dx$, (ii) $\int_0^{\pi/4}\eta\mu^4x\;dx$.

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x\eta\mu 3x\;dx$, (ii) $\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2x\;\eta\mu 2x\;dx$.

17. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi^2x\;dx$, (ii) $\int_0^{\pi/4}\frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2x}\;dx$.

18. Δίνεται η ακολουθία $I_\nu=\int_0^1 t^\nu\;\eta\mu(\pi\,t)\;dt\;(\nu\in\mathbb{N}^*)$. Να αποδειχτεί ότι:

(i) Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι $0<I_\nu<\int_0^1 t^\nu\;dt$, (ii) $\lim I_\nu=0$.

19. Να βρεθεί πραγματικός αριθμός $\gamma\in[0,\,1]$ τέτοιος ώστε

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\gamma-\frac{1}{2}$$

20. Θεωρούμε τα ολοκληρώματα

$$I=\int_0^{\pi/4}\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^4x\;dx\;\;\text{και}\;\;J=\int_0^{\pi/4}\sigma\upsilon\nu^2x\eta\mu^4x\;dx$$

Να υπολογιστούν: I+J, I-J, I και J.

21. (i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(x)=\int_0^x(1+t)^\nu\;dt\quad\nu\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

(ii) Να βρείτε μια άλλη έκφραση του I(x) χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του $(1+x)^\nu$ με το τύπο του διωνύμου.

(iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$1+\frac{1}{2}\binom{\nu}{1}+\frac{1}{3}\binom{\nu}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu+1}\binom{\nu}{\nu}$$

22. Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας (S_ν) με γενικό όρο

(i) $S_\nu=\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{2\nu}$

(ii) $S_\nu=\frac{\pi}{\nu}\;[\eta\mu\frac{\pi}{\nu}+\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}+\ldots+\eta\mu\frac{(\nu-1)\pi}{\nu}]$

23. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^{\pi/2}x\;\sigma\upsilon\nu x\;dx$, (ii) $\int_0^{\pi/2}x\sigma\upsilon\nu^2x\;dx$,

(iii) $\int_0^1 xe^{-2x}dx$, (iv) $\int_1^2 x^2\ln x dx$

24. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2}e^x\;\eta\mu x dx$.

25. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=1-\ln x$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_\alpha^\beta\ln x dx\quad(0<\alpha<\beta)$, (ii) $\int_1^{e^2}|f(x)|\,dx$.

26. Αν $I_\nu=\int_0^1 x^\nu e^x\,dx\;(\nu\in\mathbb{N})$, να βρεθεί η σχέση που συνδέει το $I_{\nu-1}$ και το I_ν. Να υπολογιστεί το I_4.

27. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$, (ii) $\int_0^{\pi/2}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2xdx$,

(iii) $\int_2^3\frac{dt}{t\;(\ln t)^2}$, (iv) $\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\;dx$.

28. Αν $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ και $x\in\mathbb{R}_+^*$ να αποδειχτεί ότι

$$\int_\alpha^{x\alpha}\frac{dt}{t}=\int_1^x\frac{dt}{t}$$

29. Αν L είναι μια συνάρτηση με $L(x)=\int_1^x\frac{1}{t}\;dt$ και πεδίο ορισμού $\mathbb{R}_+^*$, να αποδειχτεί ότι

(i) $L(xy) = L(x) + L(y)$

(ii) $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$

(iii) $L(\frac{x}{y}) = L(x) - L(y)$

30. Αν f είναι μία συνάρτηση συνεχής και άρτια στο $[-\alpha, \alpha]$ $(\alpha > 0)$, να αποδειχτεί ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)dt$$

31. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις

(i) $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^2} \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 9 \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$

32. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 3$, $x = 6$.

33. Να υπολογιστεί το εμβαδό E_λ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = \lambda$ $(\lambda > 0)$. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E_\lambda$ και $\lim\limits_{\lambda\to0^+} E_\lambda$.

34. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \text{συν}x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2\pi$.

35. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3\alpha$.

36. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $x+y-2 = 0$ και $y^2 = x$.

37. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όταν αυτή περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$.

38. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από τη περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $y = x^2$ και $x^2+y^2 = 2$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο της επαγωγής.

2. Επειδή $\alpha \geqslant 2$, υπάρχει $A \geqslant 1$ τέτοιο ώστε $\alpha = A+1$ κτλ.

3. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της επαγωγής.

4. $\sup A_1 = 2 \quad \sup A_2 = 1$, $\inf A_2 = 0$, $\inf A_3 = 0$.

5. Παρατηρείστε ότι: $[x] \leqslant x < [x]+1$ και $[y] \leqslant y < [y] + 1$

6. (i) Η f είναι ο περιορισμός της g στο $A_1 = \mathbb{R} - \{1\}$
(ii) Η f είναι ο περιορισμός της g στο $A_1 = \{x \in \mathbb{R}: x \geqslant 1\}$

7. Τα σύνολα τιμών είναι: (i) $[-\frac{1}{4}, +\infty)$ (ii) $\left[\frac{2-\sqrt{6}}{4}, \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$

(iii) $\left[-\frac{4\sqrt{7}}{7}, \frac{4\sqrt{7}}{7}\right]$ (iv) $\mathbb{R} - \{1, 6\}$

8. Είναι $f([1,2)) \cup f([2, 4)) = [1, 6)$

9. (i) περιττή (ii) άρτια (iii) δεν είναι περιττή.

10. Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.
Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2)$, ενώ στο $[2, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

11. Στο $A_1 = (1, 2)$ υπάρχει μέγιστο κάτω φράγμα το 2 και ελάχιστο άνω φράγμα το 8. Στο A_2 ελάχιστο άνω φράγμα είναι το 8 και μέγιστο κάτω φράγμα το 2. Στο $\mathbb{R}$ μέγιστο κάτω φράγμα είναι το 0, ενώ δεν υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα.

12. Είναι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$: (i) $\alpha_\nu < 2$, (ii) $0 \leqslant \beta_\nu < 1$, (iii) $|\gamma_\nu| < 2$, (iv) $|\delta_\nu| < 3$.

13. Είναι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_\nu < 1$ και $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$.

14. $f+g: [-1, 2] \to \mathbb{R}$ με $(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & \text{αν } x \in [-1, 0] \\ 2x + 4, & \text{αν } x \in (0, 2] \end{cases}$

15. $fg: [0, 2] \to \mathbb{R}$ με $(fg)(x) = \sqrt{x(x-2)}$

$\frac{f}{g}: (0, 2] \to \mathbb{R}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{x} - 1}$

16. Να εφαρμόσετε τους ορισμούς.

17. $f^{-1}(x) = \frac{3 - 4x}{x - 2}$

18. Είναι: $f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}(x - \beta)$, $\varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{αν } x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{|x|}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$, $h^{-1}(x) = x^2 - 10x + 27$

19. Να ξεκινήσετε από το δεύτερο μέλος.

20. (i) $x < 0$ (ii) Δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

21. (i) $x \in (-4, 2) \cup (3, 4)$ (ii) $x \in (\frac{2}{3}, +\infty) - \{1\}$

22. (i) άρτια, (ii) άρτια

23. $f^{-1}(x) = \log_\alpha \left(\frac{x}{1 - x}\right)$

24. Η $g \circ f$ ορίζεται στο $A' = \mathbb{R} - \{-1\}$ και είναι $(g \circ f)(x) = 2(x + 1)$

25. Η $f \circ g$ ορίζεται στο $A' = \{x \in \mathbb{R}: -11 \leqslant x \leqslant 3\}$ και είναι $(f \circ g)(x) = \sqrt{-x^2 - 14x - 33}$

26. Να εφαρμόσετε τους αντίστοιχους ορισμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1. Εργαστείτε όπως στα παραδείγματα της § 2.2.

2. Οπως στην Άσκηση 1.

3. Οπως στην Άσκηση 1.

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι: (i) $\left|\frac{(-1)^\nu}{\nu^2+3\nu+15}\right| < \frac{1}{\nu^2}$, (ii) $\left|\frac{c+\sqrt{\nu}}{\nu^3}\right| < \frac{1}{\nu^{5/2}}$.
Κατόπιν να εφαρμόσετε το θεώρημα της § 2.4.

5. (i) Είναι $\sqrt[\nu]{\alpha}-1 = \frac{(\sqrt[\nu]{\alpha}-1)(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}} + \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}} + \dots + 1)}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}} + \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}} + \dots + 1}$; (ii) Εφαρμόστε το θεώρημα της § 2.4.

6. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμ. 1 της § 2.6.

7. (i) Εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 1 της § 2.6.
(ii) Να λάβετε υπόψη ότι $\frac{\nu}{(-2)^\nu(\nu^2+1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu \frac{\nu}{\nu^2+1}$ κτλ.

8. Να λάβετε υπόψη σας την εφαρμογή 3 της § 2.6.

9. (i) Είναι: $\nu > \frac{2}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\nu} < \frac{1-\alpha}{2}$ κτλ.
(ii) Να λάβετε υπόψη σας ότι $\lim \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^\nu = 0$.

10. (i) Αρκεί να δείξετε ότι: $\lim \left(\frac{\nu^2}{\nu^2-1} - 1\right) = 0$, (ii) Παρατηρείστε ότι $5 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^\nu - 1\right] + 5 = 5\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$.

11. Εφαρμόστε το κριτήριο της § 2.9 με $\nu_1 = 2k$, $\nu_2 = 2k+1$, $(k \in \mathbb{N}^*)$.

12. Εργαστείτε όπως στο παράδειγμα της § 2.10.

13. $\nu_0 = 4$.

14. (i) Όπως στο πρδ. της § 2.13 $(\lim \alpha_\nu = \frac{1}{2})$
(ii) Όπως στην εφαρμ. 2 της § 2.15 $(\lim \alpha_\nu = \frac{2}{3})$.
(iii) $\lim \alpha_\nu = 1$.

15. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της § 2.15. Θα βρείτε:
(i) $\lim \alpha_\nu = 0$, (ii) $\lim \alpha_\nu = \frac{5}{4}$.

16. (i) $\lim \alpha_\nu = \frac{2}{3}$, (ii) $\lim \alpha_\nu = 0$.

17. Να θεωρήσετε τις ακολουθίες (β_ν) με $\beta_\nu = \mu$ και (γ_ν) με $\gamma_\nu = M$ κτλ.

18. Εργαστείτε όπως στις εφαρμογές της § 2.17 (i) $\lim \alpha_\nu = 1$, (ii) $\lim \alpha_\nu = \frac{5}{6}$.

19. Αποδείξτε ότι: $\mu \leqslant \sqrt[\nu]{1^\nu + \dots + \mu^\nu} \leqslant \mu \sqrt[\nu]{\mu}$ κτλ. $(\lim \alpha_\nu = \mu)$.

20. Αποδείξτε ότι για το γενικό όρο α_ν ισχύει: $\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+\nu}} \leqslant \alpha_\nu \leqslant \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+1}}$ κλπ. $(\lim \alpha_\nu = 1)$.

21. Εργαστείτε όπως στην § 2.18. $\lim \alpha_\nu = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

22. Όπως στην άσκ. 21 $(\lim \alpha_\nu = 2)$.

23. Ομοίως. $\lim \alpha_\nu = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

24. Αν $[x] = \nu \in \mathbb{N}^*$, τότε από την $[x] \leqslant x \leqslant [x]+1$ έπεται ότι $\nu \leqslant x < \nu+1$ κτλ.

25. Είναι $\left(1+\frac{2}{\nu}\right)^\nu = \frac{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{1+\frac{1}{\nu+1}} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ κτλ.

26. (i) e, (ii) $\sqrt{e}$.

27. Να λάβετε υπόψη σας:

(i) Το παράδ. 1 της § 2.20 και την παρατ. 5 της § 2.20.
(ii) Την παρατ. 5 της § 2.20 και την εφαρμ. 1 της § 2.21.

28. Εφαρμόστε τους ορισμούς της § 2.20.

29. Αν υποθέσετε ότι είναι φραγμένη άνω, καταλήγετε σε άτοπο.

30. (ii) Η (α_ν) έχει όριο το $+\infty$ αλλά δεν είναι αύξουσα.

31. (i) $-\infty$, (ii) $+\infty$, (iii) $+\infty$.

32. (i) Είναι $\lim (3\nu^2-\nu+1) = +\infty$ κτλ.

(ii), (iii) Να λάβετε υπόψη σας το πόρισμα 1 της § 2.22.

33. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: $\alpha = 1$, $\alpha > 1$.

34. (i) -2, (ii) $+\infty$, (iii) 0.

35. $+\infty$.

36. Είναι $\alpha_\nu = \frac{\nu}{2^\nu} + \frac{\nu!}{\nu^\nu}$. Για τις $\left(\frac{\nu}{2^\nu}\right)$ και $\left(\frac{\nu!}{\nu^\nu}\right)$ να λάβετε υπόψη την εφαρμογή 3 της § 2.21. Θα βρείτε $\lim \alpha_\nu = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. Να λάβετε υπόψη τον ορισμό και τα παραδείγματα της § 3.2.

2. Ομοίως, όπως στην άσκηση 1.

3. Να λάβετε υπόψη τον ορισμό και τα παραδείγματα της § 3.3.

4. Ομοίως, όπως στην άσκηση 3.

5. Έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$.

6. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της § 3.3.

7. Να λάβετε υπόψη τις § 3.4 και 3.5

(i) $+\infty$, (ii) 1, (iii) $-\infty$, (iv) 1.

8. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

9. (i) $-\frac{1}{2}$, (ii) $-\infty$.

10. (i) $-\infty$, (ii) $+\infty$, (iii) $+\infty$.

11. (i) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, (ii) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$, (iii) $-\frac{1}{2}$, (iv) δεν υπάρχει, (v) 2

12. (i) 0, (ii) -1, (iii) $\frac{1}{2}$

13. Όριο είναι

(i) το $-\infty$, αν $0 \leqslant \mu < 1$
το $+\infty$, αν $\mu < 0$ ή $\mu > 1$
το 0, αν $\mu = 1$

(ii) to $+\infty$, αν $0 \leqslant \mu < 1$
το $-\infty$, αν $\mu < 0$ ή $\mu > 1$
το 0, αν $\mu = 1$

14. (i) $y = x$, (ii) $y = 2x+3$, (iii) $y = x-1$ και $y = -x+1$.

15. Να λάβετε υπόψη τον ορισμό και τα παραδείγματα της § 3.8.

16. Να λάβετε υπόψη τον ορισμό της § 3.9.

17. Ομοίως, όπως στην άσκηση 17.

18. Να λάβετε υπόψη την § 3.11 και τα παραδείγματά της.

19. Αρκεί να εκλέξετε τα σημεία $x_1 = \frac{1}{2\nu\pi}$ και $x_2 = \frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}$ κτλ.

20. (i) $\frac{8}{9}$, (ii) 6, (iii) 1, (iv) $\frac{1}{12}$, (v) 1.

21. (i) -1, (ii) $-\frac{1}{4}$

22. (i) 12, (ii) $\frac{1}{4}$, (iii) $\frac{1}{3}$, (iv) $\frac{1}{2}$

23. $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$, (ii) $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 4$, (iii) $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 4$.

24. (i) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$,

(ii) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$,

(iii) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 0$.

25. Σύμφωνα με το θεώρημα 2 της § 3.12 και την § 3.13, είναι (i) $+\infty$, (ii) $-\infty$, (iii) $+\infty$ (iv) $+\infty$

26. Όριο είναι

(i) το $+\infty$, αν $\mu > -1$
το $-\infty$, αν $\mu < -1$
το 1, αν $\mu = -1$

(ii) το $+\infty$, αν $\mu < 1$
το $-\infty$, αν $\mu > 1$
το -1, αν $\mu = 1$

27. (i) Ασυνεχής στο $x_0 = 1$, (ii) Συνεχής στο $x_0 = 0$, (iii) Συνεχής στο $x_0 = 2$,

(iv) Ασυνεχής στο $x_0 = 0$, (v) Ασυνεχής στο $x_0 = -5$.

28. (i) Συνεχής στο $\mathbb{R}$, (ii) Συνεχή στο $\mathbb{R}$, (iii) Συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

29. (i) Συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-2\}$, (ii) Συνεχής στο $\mathbb{R}-\{4\}$, (iii) Συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-1\}$.

30. Η f είναι συνεχής όταν $\alpha = -2$.

31. Η f είναι συνεχής όταν $\beta = 1$ και α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

32. (i) 1, (ii) 1

33. (i) Συνεχής στο $\mathbb{R}$. (ii) Συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

34. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha = -1$ και $\beta = 1$.

35. $\lambda = \frac{\sqrt{2}-3}{7}$

36. (i) $\frac{5}{2}$, (ii) $\frac{\alpha}{\beta}$, (iii) $\frac{\alpha}{\beta}$, (iv) $\frac{1}{2}$, (v) -1.

37. Να πάρετε τις ακολουθίες $x_\nu = \frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}$ και $x'_\nu = \frac{1}{2\nu\pi+\pi+\frac{\pi}{2}}$

38. (i) Συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, (ii) Ομοίως, όπως η (i).

39. Παρατηρήστε ότι η $\sqrt[[x]]{x}$ ορίζεται στο διάστημα $[1, +\infty)$ και είναι $\sqrt[[x]]{[x]} < \sqrt[[x]]{x} < \sqrt[[x]]{[x]+1}$.

40. (i) Συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \neq 0$ και ασυνεχής στο $x_0 = 0$

(ii) Συνεχής στο $\mathbb{R}$

(iii) Συνεχής σε κάθε $x_0 \neq 0$ και ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

41. Εφαρμόστε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο,

42. Είναι $f(0)\cdot f(1) < 0$ κτλ.

43. Να σχηματίσετε τη συνεχή συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - g(x)$ και να εξετάσετε το πρόσημο του γινομένου $h(0)\cdot h(1)$.

44. (i) e, (ii) 1.

45. Παρατηρείστε ότι $\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{(e^{x/2\alpha})^{2\alpha}}{(x^{1/2})^{2\alpha}} > \frac{\left(\frac{x}{2\alpha}\right)^{2\alpha}}{(x^{1/2})^{2\alpha}}$ κτλ.

46. (i) Να λάβετε υπόψη ότι για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x < x$ και $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln (x^{1/2})^2}{x}$ κτλ.

(ii) Όπως η περίπτωση (i), (iii) 1, (iv) 2/3.

47. (i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$, (ii) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

48. (i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$, (ii) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. Εργαστείτε όπως στα πρβ. της § 4.4 (i) -3, (ii) $-\frac{4}{25}$

2. Να βρείτε τα $\lim_{x\to -5^+} \lambda(x)$, $\lim_{x\to -5} \lambda(x)$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -5$.

3. Ομοίως, όπως στην άσκηση 2. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \lambda(x)$.

5. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \lambda(x)$.

6. Είναι $\lim_{x \to 0} \lambda(x) = +\infty$.

7. Είναι $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \\ 3, & \text{αν } x \in (0, -\infty) \end{cases}$

8. Είναι $f'(x) = 6x + 2$ και $f''(x) = 6$.

9. (i) $y = -3(x+1)$, (ii) $x = 2$.

10. Η εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(2x_0, 0)$ και $B\left(0, \frac{2}{x_0}\right)$.

$E_{AOB} = 2$.

11. Είναι $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$ αλλά $\lim_{x \to 4^+} \lambda(x) \neq \lim_{x \to 4^-} \lambda(x)$.

12. Ομοίως, όπως στην άσκηση 11.

13. (i) $y - 27 = 27(x-3)$, (ii) $y = 0$, (iii) $y = x + \frac{1}{4}$, (iv) $x = -1$

14. (i) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, (ii) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

15. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A' = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

16. (i) $f'(-2) = -17$, (ii) $f'(1) = e$, (iii) $f'(-7) = -\frac{635}{49}$, (iv) $f'(1) = -\frac{1}{2}$

17. Να βρείτε τις $f'(0), f''(0), \ldots, f^{(5)}(0)$ κτλ.

18. (i) $f'(x) = 3x^2 + 2x$, (ii) $f'(x) = 8x^3 + 3x^2$, (iii) $f'(x) = \frac{-8x}{(x+1)^2(x-1)^2}$

(iv) $f'(x) = \frac{2x^3(x+1)(2x^3+x^2+3x+2)}{(x^2+1)^2}$, (v) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$, (vi) $f'(x) = e^x\ln x + xe^x\ln x + \frac{e^x}{x}$

19. (i) $f'(x) = -(2\eta\mu x + 2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x)$ (ii) $f'(x) = 5\sigma\upsilon\nu 2x - 1$ (iii) $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x(1+\varepsilon\varphi x)^2}$

20. (i) $f'(x) = 2e^x\eta\mu x$, (ii) $f'(x) = \ln x$, (iii) $f'(x) = -\eta\mu x\ln x + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$, (iv) $f'(x) = \frac{e^x}{\eta\mu^2 x}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$

21. Είν[illegible] το σημείο είναι το (2,5).

22. Είναι $\alpha = 3$ και $\beta = -5$.

23. Είναι $\lambda = 4$ και $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ή $\lambda = 0$ και $(x_0, y_0) = (-1, -3)$.

24. (i) Από το διώνυμο του Newton βρίσκετε τη σχέση $x(x+1)^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} x^{k+1}$ κτλ.

(ii) Προκύπτει από την (i).

25. Να βρείτε την F' στο x_0 αφού λάβετε υπόψη ότι $F'(x_0) = 0$.

26. (i) $x \in \{-\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2+\sqrt{5}}\}$, (ii) $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$, (iii) $x \in \{0, 2\}$.

27. Να βρείτε τις παραγώγους στο $x_0 = -2$ των $f+g$, f, g.

28. (i) $f'(x) = 16(2x+5)^7$, (ii) $f'(x) = 15(3x+1)^4 - \frac{10x}{(x^2+1)^6}$, (iii) $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$

(iv) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ (v) $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\sqrt{1-x}}$

29. (i) $f'(x) = -6\eta\mu(2x+5)$, (ii) $f'(x) = 3\eta\mu 6x$, (iii) $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu(2x+3) - 20x\sigma\upsilon\nu^4(2x^2)\,\eta\mu(2x^2)$
(iv) $f'(x) = -\eta\mu 2x\,[\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu 2x)]$

30. (i) $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$, (ii) $f'(x) = 15e^{3x}$, (iii) $f'(x) = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$, (iv) $f'(x) = e^{2x}(3\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$.

31. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

32. $f''(x) = 4e^{2x}[g'(e^{2x}) + e^{2x}g''(e^{2x})]$

33. $y = x + \sqrt{29}$.

34. (i) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι ($-x \in \mathbb{R}$ και) $f'(-x) = -f'(x)$
(ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $T \in \mathbb{R}^*$ τέτοιος ώστε, ($(x+T) \in \mathbb{R}$ και) $f'(x) = f'(x+T)$.

35. Είναι $A = (2, 11) \cup (11, +\infty)$.

36. $f'(x) = (x^2+1)^x \left[\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right]$

37. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της επαγωγής.

38. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της επαγωγής.

39. Τα πιθανά ακρότατα της f είναι στα σημεία $\frac{\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2}$

40. $x_0 = \frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

41. (i) Δεν είναι συνεχής στο $[-1, 0]$, (ii) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-4, 0)$.
(iii) Είναι $f(4) \neq f(5)$, (iv) Είναι $f(-1) \neq f(1)$ ενώ υπάρχει $x \in [-1, 1]$ με $f'(x) = 0$.

42. Η περίπτωση (iv) της 40 με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δίνουν την απάντηση.

43. Εφαρμόστε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$, $[5, 7]$ κτλ.

44. Εφαρμόστε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\rho_i, \rho_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots (k-1)$, αν ρ_i, ρ_{i+1} είναι «διαδοχικές» ρίζες της $f(x) = 0$.

45. Να λάβετε υπόψη την § 3.10 και το θεώρημα Rolle.

46. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

47. (i) Να δείξετε ότι ισχύει το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση F.

(ii) Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης επαληθεύεται για $x = c$ και $y = 0$.

48. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής.

49. Ομοίως, όπως η άσκηση 48.

50. Να εφαρμόσετε το θεώρημα της μέσης τιμής στις περιπτώσεις $x > 1$ και $0 < x < 1$.

51. Να εφαρμόσετε το θεώρημα της μέσης τιμής στο διάστημα $[0, x]$.

52. Εφαρμόστε το θεώρημα της μέσης τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με $x_2 > x_1 > 0$.

53. (i) $\frac{x^6}{2} + c$, (ii) $-\frac{1}{x^{\mu}} + c$, (iii) $3\eta\mu x + c$, (iv) $-\frac{2}{5}\sigma\upsilon\nu x + c$, (v) $3\ln|x| + c$ (vi) $\frac{3}{5}e^x + c$

54. (i) $\frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$, (ii) $\frac{x^2}{2} - \ln|x| + c$ (iii) $x + \eta\mu x + c$

(iv) $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - 2\sqrt{x} + c$, (v) $e^{2x+1} + c$, (vi) $xe^x + c$, (vii) $x\sigma\upsilon\nu x + c$, (viii) $\frac{\eta\mu x}{x} + c$

55. $y = x^2 - 2$.

56. (i) $\frac{2}{5}$, (ii) $\frac{3}{2}$, (iii) 0, (iv) $\frac{1}{6}$, (v) 2, (vi) 2, (vii) 1, (viii) $+\infty$, (ix) $\frac{1}{2}$.

57. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) 0, (iii) 1, (iv) $+\infty$.

58. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$

59. (i) 0, (ii) 0.

60. (i) e, (ii) e.

61. (i) Στο $(-\infty, 1)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ στο $(1, +\infty)$ γνησίως αύξουσα.

(ii) Στο $(-2, 0)$ και στο $(2, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο $(-\infty, -2)$ και στο $(0, 2)$ γνησίως φθίνουσα.

(iii) Στο $(0, 1)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο $(1, +\infty)$ γνησίως φθίνουσα.

(iv) Στο $(0, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο $(-\infty, 0)$ γνησίως φθίνουσα.

62. (i) Στο $[0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(ii) Στο $(0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0)$.

63. (i) Τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)$, τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)$

(ii) Τοπικά ελάχιστα τα $f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{1}{4}$ και τοπικό μέγιστο το $f(0) = 6$.

64. (i) Τοπικά μέγιστα τα $f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$ και τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

(ii) Τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

(iii) Μέγιστη τιμή το $f(e) = \frac{1}{e}$

65. Για $\alpha = 5$ έχουμε τα τοπικά ελάχιστα $f(-1-\sqrt{2}) = \frac{13-16\sqrt{3}}{4}$, $f(-1+\sqrt{2}) = \frac{13+16\sqrt{3}}{4}$ και το τοπικό μέγιστο $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

66. Να λάβετε υπόψη ότι $\ln x \leqslant x - 1$.

67. (i) $f(0) = 1$ τοπικό μέγιστο, $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{27}$ τοπικό ελάχιστο.

(ii) $f\left(\kappa\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ τοπικό ελάχιστο

$f\left(\kappa\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ τοπικό μέγιστο.

(iii) $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ τοπικό ελάχιστο.

(iv) $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$ τοπικό ελάχιστο.

68. Το εμβαδό εκφράζεται ως συνάρτηση του ύψους $x \in (0, 2)$. Μέγιστο εμβαδό για $x = \sqrt{3}$cm.

69. Να εκφράσετε τον όγκο ως συνάρτηση του ύψους y. Μέγιστος όγκος για $y = 2\sqrt{3}$cm.

70. Εργαστείτε όπως στις προηγούμενες ασκήσεις.

71. Ελάχιστο κόστος $K\left(\frac{1}{2}\right) = 4800$ δρχ./km.

72. Η ζητούμενη απόσταση είναι $\sqrt{(h-\gamma)(\alpha+h-\gamma)}$.

73. Είναι: $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geqslant f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geqslant 0$.

Να εφαρμόσετε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$.

74. Να βρείτε το πρόσημο της f'' στα διαστήματα που αναφέρονται.

75. (i) Στρέφει τα κοίλα άνω στο $[1, +\infty)$ και τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 1]$.

(ii) Στρέφει τα κοίλα άνω στο $[2\kappa\pi + \pi, 2\kappa\pi + 2\pi]$ και τα κοίλα κάτω στο $[2\kappa\pi, 2\kappa\pi + \pi]$.

(iii) Στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0, +\infty)$.

76. Σημεία καμπής είναι: (i) το $x_0 = 0$, (ii) τα $x_0 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_0' = \sqrt{\frac{2}{3}}$

77. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή της § 4.26.

78. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: $\lambda > 0$, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ και να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 1 § 4.26.

79. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της § 4.26.

80. Εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

81. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της § 4.26.

82. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της § 4.26 και να διακρίνετε τις περιπτώσεις:

$$\alpha\delta-\beta\gamma > 0, \quad \alpha\delta-\beta\gamma < 0$$

83. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 3 της § 4.26.

84. Ομοίως.

85. Ομοίως.

85. Ομοίως.

86. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 4 της § 4.26.

87. Εργαστείτε ομοίως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

1. Εφαρμόστε τη σχέση 7 της § 5.4.

2. Όμοια με την άσκηση 1.

3. Εργαστείτε όπως στο παράδ. της § 5.4.

4. Βλ. § 5.5 και εφαρμογή 1 της § 5.4.

5. Βλ. § 5.5.

6. Βλ. § 5.6 και εφαρμογή 1 της § 5.4.

7. (i) Αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει διάστημα $(\gamma, \delta) \subseteq [\alpha, \beta]$ που περιέχεται το x_0, στο οποίο είναι:

$$f(x) > 0$$

(ii) Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής.

8. Βλ. § 5.9.

9. Βλ. § 5.9.

10. Βλ. § 5.9.

11. (i) $-\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{13}{8}$, (iii) $6-5\ln 3$, (iv) 150, (v) $-4\sqrt{3}$, (vi) $\frac{27\sqrt[3]{4}-6}{10}$.

12. (i) $\frac{\pi}{2}$, (ii) 14560, (iii) $\frac{1}{3}$, (iv) $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{4}$, (v) $\frac{1}{\alpha\mu(\nu+1)}[(\alpha t^{\mu}+\beta)^{\nu+1}-\beta^{\nu+1}]$, (vi) $2\sqrt{5}-\sqrt{2}$)

13. (i) $\frac{4}{3}$, (ii) $\frac{1}{5}\left(\frac{e^5-1}{e}\right)$, (iii) $\ln|x+1|$, (iv) $-2\left[\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}-1\right] = 2-\sqrt[4]{8}$.

14. (i) $\alpha = -1$, $\beta = 1$ (ii) $\ln\frac{3}{2}$

15. (i) Είναι $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$. Βρίσκουμε $\frac{\pi}{4}$

(ii) Να εκφραστεί το $\eta\mu^4 x$ με το συν2x. Βρίσκουμε $\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}$

16. (i) Να εκφράσετε το γινόμενο συνxημ3x ως άθροισμα ημιτόνων. Βρίσκουμε $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{2}$

17. (i) Είναι $\varepsilon\varphi^2 x = 1+\varepsilon\varphi^2 x-1$. Βρίσκουμε $1-\frac{\pi}{4}$, (ii) $\frac{1}{2}$.

18. Για κάθε $t\in[0, 1]$ είναι $0 \leq t^{\nu}\eta\mu(\pi t) < t^{\nu}$ κτλ.

19. $\gamma = \frac{1}{2}$.

20. $I+J = \frac{\pi}{32}$, $I-J = \frac{1}{24}$, $I = \frac{\pi}{64}+\frac{1}{48}$, $J = \frac{\pi}{64}-\frac{1}{48}$.

21. (i) $\frac{1}{\nu+1}[(1+x)^{\nu+1}-1]$, (ii) $x+\frac{1}{2}\binom{\nu}{1}x^2+\frac{1}{3}\binom{\nu}{2}x^3+\dots+\frac{1}{\nu+1}\binom{\nu}{\nu}x^{\nu+1}$, (iii) $\frac{1}{\nu+1}(2^{\nu+1}-1)$.

22. Εργαστείτε όπως στην εφαρ. της § 5.11. Θα βρείτε: (i) $\lim S_\nu = \ln 3$ και (ii) $\lim S_\nu = 2$.

23. (i) $\frac{\pi}{2}-1$, (ii) $\frac{\pi^2-4}{16}$, (iii) $\frac{1}{4}(1-3e^{-2})$, (iv) $\frac{1}{3}\left(8\ln 2-\frac{7}{3}\right)$

24. $I = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$.

25. (i) $\beta\ln\beta - \alpha\ln\alpha - (\beta-\alpha)$, (ii) Είναι $\int_1^{e^2} |f(x)|dx = \int_1^{e} (1-\ln x)dx + \int_e^{e^2} (\ln x-1)dx$.

Βρίσκουμε $2(e-1)$.

26. $I_\nu = e-\nu I_{\nu-1}$. Βρίσκουμε $I_4 = 3(3e-8)$.

27. (i) Θέτουμε $g(x) = 1+4x^2$. Βρίσκουμε $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

(ii) Θέτουμε $g(x) =$ συνx και βρίσκουμε $\frac{1}{3}$.

(iii) $-\frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 2}$

(iv) Θέτουμε $x =$ ημt. Βρίσκουμε $\frac{\pi}{2}$

28. Θέτουμε $g(t) = \frac{t}{\alpha}$ κτλ.

29. Να εφαρμόσετε την ιδιότητα Chasles και να λάβετε υπόψη την άσκηση 28.

30. Θέτουμε $g(t) = -t$ κτλ.

31. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) 2.

32. $19{,}5 + 2\ln 2$.

33. Διακρίνετε τις περιπτώσεις $\lambda \geqslant 1$, $0 < \lambda \leqslant 1$.

34. 4.

35. $8\alpha^2\sqrt{3}$.

36. Από τη λύση του συστήματος $\begin{cases} -x+y = 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ βρίσκουμε $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Τελικά βρίσκουμε ότι το εμβαδό του χωρίου είναι $\frac{9}{2}$.

37. $V = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta^2$.

38. $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ Βρίσκουμε $V = \frac{44\pi}{15}$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ