ΟΕ
ΔΒ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

μαθηματικά

α΄ λυκείου

άλγεβρα

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ
ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ

$f'(x) =$

$\sqrt[3]{(x+2)^2} = (x+2)^{\frac{2}{3}} =$

$\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (x+2)'$

$\frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3(x+2)^{\frac{1}{3}}} =$

$\frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}$

$|x-x_0| \lessgtr \rho$

$x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\rho = \frac{\beta-\alpha}{2}$

Κοκκ. Βασ.

4 28476

Κοτσάφο (9341893)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

26
55
130
156
1690

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

Για τη συγγραφή αυτού του βιβλίου συγκροτήθηκε με υπουργική απόφαση ομάδα εργασίας, που την αποτέλεσαν οι:

Ν. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗΣ . . . . *Σύμβουλος Β' ΚΕΜΕ*
Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ . . . . *Εισηγητής ΚΕΜΕ*
Ν. ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ . . . . *Καθηγητής Μ. Ε.*
Δ. Α. ΠΑΠΑΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ . . . . *Καθηγητής Μ. Ε.*
Α. ΠΑΠΑΜΙΚΡΟΥΛΗΣ . . . . *Καθηγητής Μ. Ε.*

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το νέο αναλυτικό πρόγραμμα Μαθηματικών, που ήδη εφαρμόζεται σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου, επεκτείνεται από το σχολικό έτος 1979-80 στην Α' Λυκείου. Ένα διδακτικό βιβλίο για την τάξη αυτή πρέπει, συνεπώς, να είναι εναρμονισμένο με τα βιβλία της νέας γυμνασιακής ύλης, να διαθέτει την αυτοτέλεια που απαιτεί η τάξη αφετηρίας ενός νέου κύκλου σπουδών, όπως είναι το Λύκειο, και να διασφαλίζει την απαραίτητη υποδομή για την απρόσκοπτη εφαρμογή του προγράμματος των επόμενων τάξεων.

Γι' αυτό, κατά τη συγγραφή αυτού του βιβλίου, οδηγό αποτέλεσαν δύο από τις ειδικότερες επιδιώξεις της διδασκαλίας Μαθηματικών στο Λύκειο, όπως διατυπώνονται στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα: α) «να εμπεδώσει και να διευρύνει σε θεωρητικότερο επίπεδο γνώσεις που απέκτησαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο» και β) «να μυήσει και να εξοικειώσει το μαθητή στη διαδικασία της μαθηματικής αποδείξεως και να του αναπτύξει μαθηματική σκέψη».

Η τελευταία αυτή επιδίωξη, μεταξύ άλλων, οριοθετεί και την ύλη της Λογικής που περιέχεται στο κεφ. 1. Πρόκειται για το θεωρητικό υπόβαθρο που χρειάζεται ο μαθητής για να συνθέτει, να αναλύει και να ελέγχει συλλογισμούς, δηλαδή να συνειδητοποιεί κάθε φορά το «πώς συλλογίζεται». Στα επόμενα κεφάλαια συνεχώς δίνονται ευκαιρίες για αναφορά σε έννοιες και μεθόδους που περιέχονται στο κεφ. 1. Η διδασκαλία, λοιπόν, αυτού του κεφαλαίου δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά πρέπει να ανταποκρίνεται στην ιδιομορφία του. Αρκεί στην αρχή μια γενική, σύντομη και «πρακτική» ενημέρωση των μαθητών για το περιεχόμενό του, κυρίως με τα παραδείγματα και τις εφαρμογές του· η πλήρης αφομοίωση εννοιών και μεθόδων και η εξοικείωση με το συμβολισμό θα γίνει βαθμιαία κατά τη διδασκαλία των επομένων.

Εξάλλου κάθε κεφάλαιο αρχίζει με σύντομο εισαγωγικό σημείωμα στο οποίο επισημαίνονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του και που απευθύνεται κυρίως στο διδάσκοντα. Το κεφάλαιο κλείνει με τις **Απαντήσεις και Υποδείξεις για τη λύση των Ασκήσεων** *που περιέχει. Ελάχιστες από τις υποδείξεις αυτές είναι απαραίτητες στο μαθητή που, έχοντας τη φιλοδοξία να λύνει μόνος του χωρίς βοήθεια τις ασκήσεις, έχει μεθοδικά μελετήσει και κατανοήσει την αντίστοιχη θεωρητική ύλη.*

Τέλος, το βιβλίο κλείνει με Παράρτημα που περιέχει πλήρεις **Λύσεις των Ασκήσεων.** *Είναι αυτονόητη η σύσταση να μην καταφεύγει ο μαθητής σ' αυτό παρά μόνο για σύγκριση με τη λύση που ο ίδιος έκανε και πάντως αφού έχει εξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας και αφού έλαβε υπόψη την αντίστοιχη υπόδειξη.*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΣΗΜΑΣΙΑ
$\mathbb{N}$	το σύνολο $\{0,1,2,3,\ldots\}$ των φυσικών αριθμών
$\mathbb{Z}$	το σύνολο $\{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ των ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Q}$	το σύνολο των ρητών αριθμών
$\mathbb{R}$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$	τα παραπάνω σύνολα χωρίς το 0
$\mathbb{R}^*_+, \ \mathbb{R}^*_-$	το σύνολο των θετικών, το σύνολο των αρνητικών πραγματικών αριθμών
$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$	το σύνολο των θετικών, το σύνολο των αρνητικών αριθμών και το 0 (θετικών, αρνητικών με ευρεία σημασία)
$\in, \notin$	ανήκει, δεν ανήκει
$\Rightarrow$	συνεπάγεται
$\Leftrightarrow$	ισοδυναμεί
$\wedge$	και (σύζευξη)
$\vee$	ή (διάζευξη)
$\underline{\vee}$	ή...ή (αποκλειστική διάζευξη)
$\forall$	καθολικός ποσοδείκτης (για κάθε)
$\exists$	υπαρξιακός ποσοδείκτης (υπάρχει)
$\bar{p}, \overline{p(x)}$	άρνηση των p, p(x)
$<, >$	μικρότερο, μεγαλύτερο
$\leq, \geq$	μικρότερο ή ίσο, μεγαλύτερο ή ίσο
$\cap, \cup$	τομή, ένωση
$\subset, \subseteq$	γνήσιο υποσύνολο, υποσύνολο
$A \times B$	καρτεσιανό γινόμενο των A,B
$x\sigma y$	το (x,y) ικανοποιεί τη σχέση σ ή το x σχετίζεται με το y
$\sigma = (A,B,G)$	διμελής σχέση σ, A σύνολο αφετηρίας, B σύνολο αφίξεως, G γράφημα
σ^{-1}	η αντίστροφη σχέση της σ
G^{-1}	το αντίστροφο γράφημα του G
$f(x)$	εικόνα του x ή τιμή της f στο x
F_A	το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο A
$\frac{1}{f}$	η συμμετρική ως προς τον πολλαπλασιασμό συνάρτηση της f.

1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η Λογική επί μακρούς αιώνες έμεινε στο σημείο σχεδόν που την είχε αφήσει ο ιδρυτής της, ο μεγάλος Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.). Σημαντική πρόοδος στην επιστήμη αυτή σημειώθηκε από το 19ο αιώνα, όταν τα μαθηματικά εισέβαλαν και σ' αυτό τον τομέα της γνώσεως.

Η παρουσίαση ορισμένων βασικών εννοιών της μαθηματικής Λογικής θα συμβάλει, ώστε ο μαθητής του Λυκείου να κατανοεί τη λογική δομή των φράσεων που χρησιμοποιεί και έτσι να ακριβολογεί κατά τη διατύπωση των σκέψεών του, να κάνει σωστή και επωφελή χρήση του συμβολισμού και να συνειδητοποιεί τα στάδια μιας αποδεικτικής πορείας για να καταλήγει σε λογικά συμπεράσματα συστηματοποιημένα και απρόσβλητα. Σ' αυτό κυρίως αποβλέπει το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προτάσεις

1.1 Το πρώτο πράγμα που χρειάζεται κανείς για μια σωστή συνεννόηση είναι να γνωρίζει τη σημασία των λέξεων που χρησιμοποιεί. Αυτό είναι εντελώς απαραίτητο στα μαθηματικά, όπου εκτός από το κοινό λεξιλόγιο χρησιμοποιούμε ιδιαίτερη **ορολογία** και **συμβολισμό** (π.χ. τους *όρους* σύνολο, πολυώνυμο, ομοιοθεσία, τα *σύμβολα* $=$, $\in$, $>$ κτλ.). Παρανόηση της σημασίας ενός όρου ή συμβόλου οδηγεί σε σφάλματα. Π.χ. ένα τετράπλευρο με ίσες πλευρές είναι **τετράγωνο**; $\varnothing = \{\varnothing\}$;

Κατά την ανάπτυξη ενός μαθηματικού θέματος διατυπώνουμε «λογικές προτάσεις» χρησιμοποιώντας λέξεις και σύμβολα. Με τον όρο **λογική πρόταση** ή απλά **πρόταση** θα εννοούμε κάθε φράση που με βάση το νοηματικό της περιεχόμενο μπορεί να χαρακτηριστεί ή ως **αληθής (α)** ή ως **ψευδής (ψ)**. Ένας τέτοιος χαρακτηρισμός μιας προτάσεως λέγεται **τιμή αλήθειας** ή απλά **τιμή** της προτάσεως. Προτάσεις π.χ. είναι οι εξής:

— Κάθε ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο (αληθής)

— Ο αριθμός 18 είναι πολλαπλάσιο του 6 και του 5 (ψευδής).

Από τις προτάσεις που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά βασικές είναι και οι:

- προτάσεις που εκφράζουν ισότητα, όπως π.χ. η $\alpha = \beta$, που σημαίνει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα α και β **συμπίπτουν**, δηλαδή ότι α και β είναι ονόματα του ίδιου αντικειμένου.
- προτάσεις όπως η $\alpha \in A$, που είναι η συμβολική γραφή της «α είναι στοιχείο του συνόλου Α».

Αληθείς προτάσεις

1.2 Αν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου έχουν μήκη 3 cm και 4 cm, η υποτείνουσα θα έχει μήκος 5 cm, επειδή $5^2 = 3^2 + 4^2$ (πυθαγόρειο θεώρημα). Επίσης είναι $13^2 = 5^2 + 12^2$. Η φράση λοιπόν:
« Υπάρχουν τρεις φυσικοί αριθμοί α, β, $\gamma \neq 0$ τέτοιοι, ώστε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$» είναι πρόταση αληθής.

Αν αντί $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ γράψουμε $\alpha^k = \beta^k + \gamma^k$, η αντίστοιχη φράση για κάθε $k \geqslant 3$ είναι φυσικά και αυτή πρόταση. Αληθής ή ψευδής; Από τότε που διατύπωσε το πρόβλημα ο Γάλλος μαθηματικός Fermat (1601 – 1665), δε δόθηκε ως σήμερα απάντηση σ' αυτό το ερώτημα.

Η προσπάθεια για να διαπιστωθεί αν μια πρόταση αληθεύει ή όχι είναι το κύριο χαρακτηριστικό της μαθηματικής εργασίας. Η αλήθεια μιας προτάσεως μπορεί να προκύψει:

- άμεσα από έναν **ορισμό**, που είναι πρόταση με την οποία καθορίζεται η σημασία ενός νέου όρου. Π.χ. «*Ρόμβος* είναι κάθε τετράπλευρο με ίσες πλευρές»
- ως *λογικό συμπέρασμα* από άλλες αληθείς προτάσεις, οπότε λέγεται **θεώρημα.**

Οι αληθείς προτάσεις από τις οποίες προκύπτει λογικά ένα θεώρημα μπορεί να είναι και αυτές θεωρήματα τα οποία έχουν προκύψει από άλλες αληθείς προτάσεις και αυτές από άλλες κ.ο.κ. Έτσι θα πρέπει ορισμένες αρχικές προτάσεις να τις δεχτούμε ως αληθείς. Αυτές οι προτάσεις στη μαθηματική γλώσσα λέγονται **αξιώματα.**

Απλές και σύνθετες προτάσεις

1.3 Η πρόταση «ο αριθμός α είναι περιττός» είναι μια **απλή** πρόταση, με την έννοια ότι κανένα τμήμα της δεν αρκεί για να σχηματιστεί μια άλλη πρόταση. Δε συμβαίνει το ίδιο με την πρόταση

(1) «ο αριθμός α δεν είναι περιττός»,

γιατί παραλείποντας τη λέξη «δεν» έχουμε την προηγούμενη πρόταση με εντελώς διαφορετικό νόημα.

Κάθε πρόταση που δεν είναι απλή θα τη λέμε **σύνθετη.** Εκτός από την (1) σύνθετες είναι και οι προτάσεις:

(2) «το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και (το ΑΒΓ είναι) ισοσκελές»

(3) «ο αριθμός α είναι άρτιος ή (ο α είναι) περιττός»

(4) «αν Α είναι πατέρας του Β, τότε Β είναι παιδί του Α»,

σε καθεμιά από τις οποίες διακρίνουμε δύο προτάσεις συνδεδεμένες με τις λέξεις «και» στη (2), «ή» στην (3), «αν... τότε» στην (4).

Γενικά, μετασχηματίζοντας μια πρόταση με χρησιμοποίηση του «δεν» ή συνδέοντας δύο οποιεσδήποτε (1) προτάσεις με τις λέξεις «και», «ή», «αν... τότε», δημιουργούμε νέες προτάσεις. Αυτές τις διαδικασίες παραγωγής νέων προτάσεων τις λέμε **λογικές πράξεις.**

Διαδοχικές εφαρμογές περισσότερων λογικών πράξεων οδηγούν σε συνθετότερες προτάσεις, όπως η ακόλουθη:

(1) Θεωρητικά δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για το ποιες προτάσεις συνθέτουμε. Έτσι σύνθετες προτάσεις είναι και οι «5 = 3 και η Ρώμη είναι πρωτεύουσα της Ιταλίας», ή ακόμη η «αν 0 = 1, τότε ο Όλυμπος είναι βουνό», που σχηματίζονται από προτάσεις, οι οποίες δε σχετίζονται νοηματικά μεταξύ τους. Θα αποφύγουμε να αναφερόμαστε σε τέτοιες προτάσεις.

(5) «αν το τετράπλευρο τ είναι παραλληλόγραμμο **και** οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του *ή* τέμνονται καθέτως, τότε το τ είναι ρόμβος».

1.4 Για να διερευνήσουμε τη «δομή» μιάς σύνθετης προτάσεως, χρησιμοποιούμε γράμματα για τις προτάσεις από τις οποίες σχηματίζεται αδιαφορώντας για το νοηματικό περιεχόμενό τους. Έτσι:

- Η (1), που προέρχεται από μετασχηματισμό μιάς προτάσεως p (ο α είναι περιττός) με χρήση του «δεν», μπορεί να γραφτεί «**όχι** p».
- Οι (2), (3), (4) γράφονται αντίστοιχα: «p **και** q», «p **ή** q» και «**αν** p **τότε** q».
- Η (5) γράφεται όπως και η (4): Αν p, τότε q.

Αλλά εδώ η πρόταση

p: «το τετράπλευρο τ είναι παραλληλόγραμμο **και** οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του *ή* τέμνονται καθέτως» είναι σύνθετη και έχει μορφή «p_1 και p_2». Εξάλλου η πρόταση:

p_2: «οι διαγώνιοι του τ διχοτομούν τις γωνίες του **ή** τέμνονται καθέτως» είναι σύνθετη και έχει τη μορφή «p'_2 ή p''_2».

Συνεπώς η (5) τελικά γράφεται:

$$\textbf{Αν } p_1 \textbf{ και } (p'_2 \textbf{ ή } p''_2), \textbf{ τότε } q$$

Ασκήσεις 1, 2, 3, 4.

Προτασιακοί τύποι (π.τ.)

1.5 Με την πρόταση «ο 7 είναι άρτιος» αποδίδουμε (λανθασμένα) μια ιδιότητα στον 7. Αυτή την ιδιότητα μπορούμε να την αποδώσουμε και σε κάθε άλλο φυσικό αριθμό. Όλες οι προτάσεις που θα προκύψουν έχουν κοινή μορφή και καθεμιά μπορεί να «αντιπροσωπευθεί» από τη φράση «ο x είναι άρτιος», αρκεί το σύμβολο x να σημαίνει κάθε φορά ένα συγκεκριμένο φυσικό αριθμό.

Γενικά, έστω Ω ένα σύνολο και p (x) μια φράση που περιέχει το σύμβολο x και που μετατρέπεται σε πρόταση κάθε φορά που το x αντικαθίσταται με ένα συγκεκριμένο στοιχείο του Ω. Τότε η p (x) λέγεται **προτασιακός τύπος** (π.τ.) μιάς **μεταβλητής** x (ορισμένος) **στο Ω** ή με **σύνολο αναφοράς το Ω.**

Θα συμβολίζουμε p(α) την πρόταση που προκύπτει από τον p(x), όταν θέσουμε όπου x το $α \in Ω$. Θα λέμε ότι οι προτάσεις p(α) **παράγονται** από τον π.τ. p(x), όταν το x **διατρέχει** το Ω. Θα λέμε ακόμα ότι ένα $α \in Ω$ **επαληθεύει** τον p(x), αν η p(α) είναι πρόταση αληθής.

Το σύνολο των $α \in Ω$ που επαληθεύουν ένα π.τ. p(x) ονομάζεται **σύνολο**

αλήθειας του $p(x)$ και γράφεται $\{x{\in}\Omega : p(x)\}$ ή απλά (1) $\{x : p(x)\}$. Π.χ. σύνολο αλήθειας του π.τ.:

- «ο x είναι άρτιος», $x{\in}\mathbb{N}$ είναι το $\{0,2,4,\dots\}$
- «$x \in A$» με $A \subseteq \Omega$ είναι το A δηλ. $\{x\colon x{\in}A\} = A$
- «$x^2 = 4$», $x{\in}\mathbb{R}$ είναι το $\{2, -2\}$.

1.6 Μπορούμε να σχηματίσουμε π.τ. $p(x,y)$ με δύο μεταβλητές $x \in A$ και $y \in B$, όπως π.χ. «ο x είναι μικρότερος του y» ($A = B = \mathbb{R}$). Η σύγχρονη αντικατάσταση του x με $\alpha \in A$ και του y με $\beta \in B$ μετατρέπει τον $p(x,y)$ σε πρόταση $p(\alpha,\beta)$. Έτσι ο $p(x,y)$ μπορεί να θεωρηθεί ως π.τ. με μεταβλητή το ζεύγος (x,y) και σύνολο αναφοράς $A{\times}B$.

Αν ένα ζεύγος (α,β) επαληθεύει τον $p(x,y)$, λέμε ότι το $\alpha \in A$ **σχετίζεται** με το $\beta \in B$. Επειδή τα ζεύγη των σχετιζόμενων στοιχείων είναι ορισμένα, συνηθίζουμε να λέμε ότι ένας π.τ. δύο μεταβλητών $x \in A$ και $y \in B$ *ορίζει μία διμελή σχέση από το A στο B.* Οι πιο ενδιαφέροντες π.τ. έχουν τη μορφή $x\,\sigma\,y$, όπου σ είναι κάθε φορά ένα ειδικό σύμβολο, που **εκφράζει** τη διμελή σχέση. Π.χ. $x = y$, $x < y$, $x \parallel y$. Το σύνολο αλήθειας του π.τ. $x\,\sigma\,y$ λέγεται και **γράφημα** της σ.

Ομοίως οι π.τ. με περισσότερες μεταβλητές μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι π.τ. με μία μεταβλητή. Π.χ. ο π.τ. $x^2+y^2= z^2$ μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ως μεταβλητή τη (διατεταγμένη) τριάδα (x, y, z).

Σημείωση

Ειδικότερα οι π.τ. που εκφράζουν ισότητα, παράγουν δηλ. προτάσεις της μορφής $\alpha = \beta$, λέγονται **εξισώσεις**, ενώ εκείνοι που εκφράζουν ανισότητα ($>$, $<$) λέγονται **ανισώσεις**.
Συνήθως όλες οι μεταβλητές, που λέγονται **άγνωστοι**, μιάς εξισώσεως (ή ανισώσεως) διατρέχουν το ίδιο σύνολο Ω και, όταν βρίσκουμε το σύνολο αλήθειας που είναι **το σύνολο λύσεων** της εξισώσεως, θα λέμε ότι **λύνουμε την εξίσωση στο Ω.**

Είναι φανερό ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε και σε π. τύπους τις λογικές πράξεις που περιγράψαμε στην § 1.3 και να δημιουργήσουμε νέους σύνθετους π. τ., όπως π.χ. «**όχι** $p(x)$», «$p(x)$ **και** $q(x)$» κτλ.

Στα επόμενα θα καθορίσουμε την ακριβή σημασία των λέξεων «δεν (όχι)», «και», «ή», «αν... τότε» — και μερικών άλλων — όταν χρησιμοποιούνται ως **σύμβολα λογικών πράξεων** για το σχηματισμό νέων σύνθετων προτάσεων ή π. τύπων.

Ασκήσεις 5, 6, 7.

(1) Στα επόμενα θα εννοούμε ότι η μεταβλητή διατρέχει το Ω, κάθε φορά που δεν αναφέρεται ρητά άλλο σύνολο αναφοράς.

ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Άρνηση

1.7 Με την πρόταση «ο α *δεν* είναι περιττός» εκφράζουμε ότι ο α **δεν έχει** την ιδιότητα που θα του αποδίδαμε με την πρόταση «ο α είναι περιττός». Έτσι οι δύο αυτές προτάσεις έχουν πάντοτε διαφορετικές τιμές αλήθειας, είναι, όπως λέμε, **ετερότιμες**.

Γενικά, αν p είναι μια οποιαδήποτε πρόταση, η πρόταση «όχι p», συμβολικά $\sim p$ ή και $\overline{p}$, ονομάζεται **άρνηση** της p και είναι:

- αληθής, αν η p είναι ψευδής,
- ψευδής, αν η p είναι αληθής,

p	$\overline{p}$
α	ψ
ψ	α

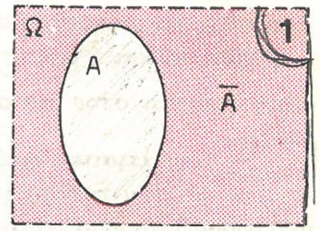
όπως φαίνεται στον απέναντι πίνακα που λέγεται **πίνακας αλήθειας της** $\overline{p}$.

Σημείωση

Συνήθως, όταν μια πρόταση εκφράζει μια σχέση με το σύμβολο σ, για την άρνησή της χρησιμοποιούμε το $\not\sigma$.
Έτσι γράφουμε π.χ. $\alpha \neq \beta$, αντί για $\overline{\alpha = \beta}$ και
$\alpha \notin A$, αντί για $\overline{\alpha \in A}$.

1.8 **Άρνηση π.τ.** Έστω $p(x)$ ένας π.τ. (π.χ. ο x είναι περιττός). Ο π.τ. «όχι $p(x)$» (ο x δεν είναι περιττός), συμβολικά $\overline{p}(x)$, ονομάζεται **άρνηση** του $p(x)$.

Έστω A το σύνολο αλήθειας του $p(x)$. Τα στοιχεία του Ω που επαληθεύουν τον $\overline{p}(x)$ είναι εκείνα ακριβώς που δεν επαληθεύουν τον $p(x)$, δηλαδή δεν ανήκουν στο A. Άρα σύνολο αλήθειας του $\overline{p}(x)$ είναι το $\overline{A}$, συμπληρωματικό του A ως προς Ω.



Σύζευξη

1.9 Όταν λέμε «το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο *και* ισοσκελές», εννοούμε ότι **και οι δύο** προτάσεις από τις οποίες σχηματίζεται — «το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο», «το ΑΒΓ είναι ισοσκελές» — είναι αληθείς.

Γενικά, αν p,q είναι δύο οποιεσδήποτε προτάσεις, η πρόταση «p και q», συμβολικά $p \wedge q$, ονομάζεται **σύζευξη** των p,q και χαρακτηρίζεται ως:

- αληθής, αν και οι δύο προτάσεις p,q είναι αληθείς,
- ψευδής, σε κάθε άλλη περίπτωση,

όπως δείχνει ο απέναντι *πίνακας αλήθειας* της $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

1.10 **Σύζευξη π.τ.** Ο π.τ. «$p(x)$ και $q(x)$», ο οποίος συμβολίζεται $\mathbf{p(x) \wedge q(x)}$, ονομάζεται **σύζευξη** των $p(x)$, $q(x)$.

Τα στοιχεία του Ω που επαληθεύουν τον $p(x) \wedge q(x)$ είναι εκείνα ακριβώς που επαληθεύουν **και τους δύο** π.τ. $p(x)$, $q(x)$. Αν λοιπόν Α και Β είναι τα σύνολα αλήθειας των $p(x)$ και $q(x)$ αντιστοίχως, τότε το σύνολο αλήθειας του $p(x) \wedge q(x)$ αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των Α,Β, είναι δηλαδή η τομή τους $A \cap B$.

Σημείωση

Όταν οι π.τ. είναι εξισώσεις ή ανισώσεις, χρησιμοποιούμε αντί του όρου *«σύζευξη»* τον όρο *«σύστημα»*.

Διάζευξη

1.11 Είναι γνωστό ότι κάθε απόφοιτος Γυμνασίου δικαιούται να δώσει εξετάσεις «στο Γενικό *ή* Τεχνικό Λύκειο» που σημαίνει *ή μόνο* στο Γενικό *ή μόνο* στο Τεχνικό *ή και στα δύο*. Με αυτή τη σημασία χρησιμοποιείται στα μαθηματικά η λέξη «ή», όταν συνδέει δύο προτάσεις. Έτσι π.χ., όταν λέμε ότι αληθεύει η πρόταση «$\alpha = 0$ ή $\beta = 0$», εννοούμε ότι αληθεύει μια τουλάχιστον από τις προτάσεις «$\alpha = 0$», «$\beta = 0$».

Γενικά, αν p, q είναι δύο οποιεσδήποτε προτάσεις, η πρόταση «p ή q», συμβολικά $\mathbf{p \vee q}$, ονομάζεται **διάζευξη** των p, q και χαρακτηρίζεται ως:

- αληθής, αν μια τουλάχιστον από τις p,q είναι αληθής,
- ψευδής, αν και η p και η q είναι ψευδείς,

p	q	p ∨ q
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

όπως φαίνεται στον αντίστοιχο *πίνακα αλήθειας*.

1.12 **Αποκλειστική διάζευξη.** Με τις προτάσεις p, q μπορούμε να σχηματίσουμε και την πρόταση «ή μόνο p ή μόνο q», απλούστερα «ή p ή q», που ονομάζεται **αποκλειστική διάζευξη** των p και q και συμβολίζεται $\mathbf{p \underline{\vee} q}$.
Η πρόταση αυτή χαρακτηρίζεται ως:

- αληθής, όταν οι προτάσεις p, q είναι ετερότιμες,
- ψευδής, όταν οι προτάσεις p, q είναι ομότιμες.

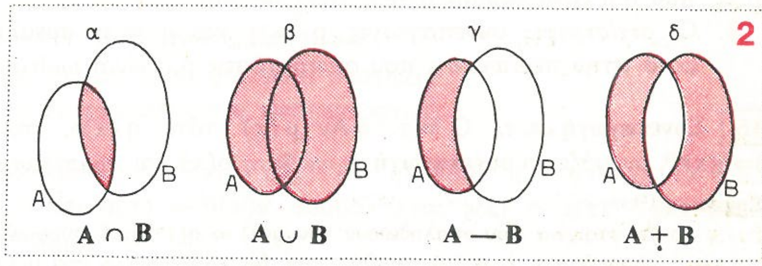
Άσκηση. Να γίνει ο πίνακας αλήθειας της αποκλειστικής διαζεύξεως «ή p ή q».

1.13 **Διάζευξη π.τ.** Ο π.τ. «$p(x)$ ή $q(x)$», συμβολικά $\mathbf{p(x) \vee q(x)}$, ονομάζεται **διάζευξη** των $p(x)$, $q(x)$. Τα στοιχεία του Ω που επαληθεύουν τον $p(x) \vee q(x)$ είναι εκείνα ακριβώς που επαληθεύουν έναν τουλάχιστον από τους π.τ. $p(x)$, $q(x)$, δηλαδή εκείνα που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα αλήθειάς τους Α,Β. Άρα σύνολο αλήθειας του $p(x) \vee q(x)$ είναι η ένωση $A \cup B$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Πράξεις συνόλων. Έστω Α και Β υποσύνολα του Ω. Αξιοσημείωτοι π.τ. είναι οι εξής:

- «$x \in A$ και $x \in B$» με σύνολο αλήθειας την **τομή** $A \cap B$ (σχ. 2α)
- «$x \in A$ ή $x \in B$» » » » την **ένωση** $A \cup B$ (σχ. 2β)
- «$x \in A$ και $x \notin B$» » » » τη **διαφορά** $A - B$ (σχ. 2γ)
- «ή $x \in A$ ή $x \in B$» » » » τη **συμμετροδιαφορά** $A \dotplus B$ (σχ. 2δ).



Συνεπαγωγή

1.14 Έστω ν ένας φυσικός αριθμός. Από την ανισότητα $\nu > 10$ μπορούμε, αυξάνοντας το α' μέλος κατά 1, να καταλήξουμε «λογικά» στη $\nu + 1 > 10$. Για να εκφράσουμε ότι η πρόταση $\nu > 10$ έχει ως λογική συνέπεια τη $\nu+1 > 10$, λέμε, *«αν* $\nu > 10$, *τότε* $\nu+1 > 10$», ή «η $\nu > 10$ *συνεπάγεται* τη $\nu+1 > 10$» και γράφουμε:

$$\nu > 10 \Rightarrow \nu+1 > 10. \qquad (1)$$

Προτάσεις όπως η (1) στα μαθηματικά χαρακτηρίζονται ως αληθείς, **ανεξάρτητα από το ν**, γιατί ο χαρακτηρισμός «αληθής» αναφέρεται στη μετάβαση (ότι έγινε δηλαδή σωστά) από την *«υπόθεση»* $\nu > 10$ στο *«συμπέρασμα»* $\nu + 1 > 10$. Πάντως, όποιος και αν είναι ο ν, αποκλείεται η περίπτωση να έχουμε σύγχρονως υπόθεση αληθή και συμπέρασμα ψευδές, ενώ όλες οι άλλες περιπτώσεις μπορούν να παρουσιαστούν. Πράγματι:

για $\nu = 11$ έχουμε $11 > 10$ (α) $\Rightarrow$ $12 > 10$ (α)
» $\nu = 10$ » $10 > 10$ (ψ) $\Rightarrow$ $11 > 10$ (α)
» $\nu = 9$ » $9 > 10$ (ψ) $\Rightarrow$ $10 > 10$ (ψ).

Γενικά, αν p, q είναι δύο οποιεσδήποτε προτάσεις, η πρόταση «αν p, τότε q» συμβολικά «$\mathbf{p \Rightarrow q}$»(1), ονομάζεται **συνεπαγωγή** με *υπόθεση* p και *συμπέρασμα* q και χαρακτηρίζεται ως:

(1) Διαβάζεται: «p συνεπάγεται q».

- ψευδής, αν η p είναι αληθής και η q ψευδής,
- αληθής, σε κάθε άλλη περίπτωση,

όπως δείχνει και ο αντίστοιχος πίνακας αλήθειας.

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Από το διπλανό πίνακα αλήθειας συμπεραίνουμε ότι:

1. Η $p \Rightarrow q$ είναι αληθής στις περιπτώσεις που η p είναι ψευδής ή η q είναι αληθής.
2. Οι *αντίστροφες* συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$ **συναληθεύουν** μόνο στην περίπτωση που οι προτάσεις p,q είναι *ομότιμες*.

1.15 **Συνεπαγωγή π.τ.** Ο π.τ. « Αν p(x) τότε q(x)», συμβολικά $\mathbf{p(x) \Rightarrow q(x)}$(1), ονομάζεται **συνεπαγωγή** με *υπόθεση* p(x) και *συμπέρασμα* q(x).

★ **Σημείωση** (2)

Τα στοιχεία που επαληθεύουν τον $p(x) \Rightarrow q(x)$ είναι, σύμφωνα με την παρατήρηση 1, εκείνα ακριβώς που δεν επαληθεύουν τον p(x) ή επαληθεύουν τον q(x), δηλαδή ανήκουν στο $\overline{A}$, συμπληρωματικό του συνόλου αλήθειας του p(x), ή στο B, σύνολο αλήθειας του q(x). Άρα σύνολο αλήθειας της συνεπαγωγής $p(x) \Rightarrow q(x)$ είναι το σύνολο $\overline{A} \cup B$.

Ισοδυναμία

1.16 Έστω α ένας φυσικός αριθμός. Όταν ο α δεν είναι μονοψήφιος, οι προτάσεις «$\alpha > 9$» και «$\alpha+1 > 10$» είναι και οι δύο αληθείς. Όταν ο α είναι μονοψήφιος, οι παραπάνω προτάσεις είναι και οι δύο ψευδείς. Δηλαδή οι προτάσεις αυτές είναι πάντοτε *ομότιμες*. Άρα σύμφωνα με την παρατ. 2 της § 1.14 οι αντίστροφες συνεπαγωγές

$$\alpha > 9 \Rightarrow \alpha+1 > 10$$
$$\alpha+1 > 10 \Rightarrow \alpha > 9$$

αληθεύουν ανεξάρτητα από τον α. Επομένως αληθεύει και η σύζευξή τους «$\alpha > 9 \Rightarrow \alpha+1 > 10$ και $\alpha+1 > 10 \Rightarrow \alpha > 9$», που γράφεται απλούστερα $\alpha > 9 \Leftrightarrow \alpha+1 > 10$.

Με αυτή τη σημασία χρησιμοποιείται στα μαθηματικά το σύμβολο $\Leftrightarrow$ όταν συνδέει δύο προτάσεις· δηλαδή ως σύζευξη δύο αντίστροφων συνεπαγωγών. Συγκεκριμένα:

Αν p,q είναι δύο οποιεσδήποτε προτάσεις, η πρόταση «$p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$» συμβολίζεται $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ και διαβάζεται «p **αν και μόνο αν** q» ή «p **ισοδυναμεί** με q» ή «η p συνεπάγεται την q και **αντιστρόφως**».

(1) Η συνεπαγωγή αυτή εκφράζεται και ως εξής: «**αρκεί** p(x) για να είναι q(x)» ή «p(x) είναι **ικανή** συνθήκη για την q(x)» καθώς και «για να είναι p(x), **πρέπει** q(x)» ή «q(x) είναι **αναγκαία** συνθήκη για την p(x)».

(2) Οι ενότητες με αστερίσκο μπορούν να μη διδάσκονται.

Η $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ ονομάζεται **ισοδυναμία** των p, q και, όπως προκύπτει από τον

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	α

πίνακα αλήθειάς της, χαρακτηρίζεται ως:

- αληθής, αν οι προτάσεις p,q είναι ομότιμες,
- ψευδής, αν οι προτάσεις p,q είναι ετερότιμες.

1.17 **Ισοδυναμία π.τ.** Έστω p(x) και q(x) δύο π.τ. στο Ω. Ο π.τ. «$p(x) \Rightarrow q(x)$ και $q(x) \Rightarrow p(x)$» συμβολίζεται $\mathbf{p(x) \Leftrightarrow q(x)}$ (1) και ονομάζεται **ισοδυναμία** των p(x), q(x).

★ **Σημείωση**

Αν A,B είναι τα σύνολα αλήθειας των p(x), q(x), τότε (§1.15 Σημ.) σύνολο αλήθειας του $p(x) \Rightarrow q(x)$ είναι το $\overline{A} \cup B$, σύνολο αλήθειας του $q(x) \Rightarrow p(x)$ είναι το $\overline{B} \cup A$. Άρα σύνολο αλήθειας του $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ είναι (§ 1.10) το $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

Γενίκευση συζεύξεως και διαζεύξεως

1.18 Με ν προτάσεις $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ σχηματίζεται η πρόταση «p_1 και p_2 και... και p_ν», συμβολικά $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_\nu$, που ονομάζεται σύζευξή τους και χαρακτηρίζεται ως:

- αληθής, αν **όλες** οι $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ είναι αληθείς,
- ψευδής, αν **μια τουλάχιστον** από τις $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ είναι ψευδής.

Ομοίως με τις παραπάνω προτάσεις σχηματίζεται και η διάζευξή τους «p_1 ή p_2 ή ... ή p_ν», συμβολικά $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_\nu$, που χαρακτηρίζεται ως:

- αληθής, αν **μία τουλάχιστον** από τις $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ είναι αληθής,
- ψευδής, αν **όλες** οι $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ είναι ψευδείς.

Σημείωση

Ανάλογα ορίζεται η αποκλειστική διάζευξη «ή p_1 ή p_2 ή... ή p_ν» καθώς και η σύζευξη και η διάζευξη ν π. τύπων.

Ασκήσεις 8,9,10.

(1) Εκφράζεται (βλ. υποσημ. 1 § 1.15) και ως εξής: «για να είναι p(x), πρέπει και αρκεί q(x)» ή «p(x) είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την q(x)».

Καθολικός ποσοδείκτης

1.19 Η πρόταση «το γινόμενο κάθε πραγματικού αριθμού επί 0 ισούται με 0» είναι μια αληθής πρόταση, απλή κατά την έννοια της § 1.3. Όμως έχει πλούσιο νοηματικό περιεχόμενο· σημαίνει ότι αληθεύουν οι προτάσεις π.χ. $1 \cdot 0 = 0$, $\sqrt{2} \cdot 0 = 0$, $-0{,}75 \cdot 0 = 0$ και γενικά όλες όσες παράγονται από τον π.τ. $x \cdot 0 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$). Η αρχική πρόταση λοιπόν μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $x \cdot 0 = 0$», που γράφεται συμβολικά

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot 0 = 0.$$

Ο π.τ. $x \cdot 0 = 0$ λέγεται καθολικά αληθής.

Γενικά, θα λέμε ότι ένας π.τ. είναι **καθολικά αληθής**, ή απλούστερα **αληθεύει** ή **ισχύει** (στο Ω), όταν το σύνολο αλήθειάς του συμπίπτει με το σύνολο αναφοράς του.

Το σύμβολο $\forall$, που ονομάζεται **καθολικός ποσοδείκτης**, χρησιμοποιείται στα μαθηματικά για να δηλώνει αν ένας π.τ. είναι καθολικά αληθής ή όχι. Συγκεκριμένα:

Έστω $p(x)$ ένας π.τ. στο Ω με σύνολο αλήθειας A. Η πρόταση «για κάθε $x \in \Omega$, ισχύει (αληθεύει, είναι, έχουμε) $p(x)$», που συμβολίζεται

$$\forall x \in \Omega, \quad p(x) \quad \text{ή απλούστερα} \quad \forall x, \ p(x)$$

χαρακτηρίζεται:

- αληθής, αν ο $p(x)$ είναι καθολικά αληθής, που σημαίνει $A = \Omega$, δηλαδή όλες οι προτάσεις που παράγονται από τον $p(x)$ είναι αληθείς,
- ψευδής, αν $A \neq \Omega$, δηλαδή αν έστω και μία από τις παραπάνω προτάσεις είναι ψευδής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η πρόταση $\forall x, \ x = x$ είναι αληθής (Ω: οποιοδήποτε σύνολο)
2. » $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 - 1 = 0$ είναι ψευδής, αφού π.χ. $2^2 - 1 = 0$ είναι ψευδής.
3. » $\forall x \in \{-1, 1\}, \ x^2 - 1 = 0$ είναι αληθής
4. » $\forall x \in \mathbb{R}, \ 2x \neq x + 1$ είναι ψευδής
5. » $\forall x$, x είναι ισόπλευρο είναι ψευδής (Ω: σύνολο των τριγώνων).

Σημείωση

Είναι φανερό ότι, αν το σύνολο αναφοράς Ω του π.τ. $p(x)$ αποτελείται από ν στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε η πρόταση $\forall x, p(x)$ είναι ισοδύναμη με τη σύζευξη $p(\alpha_1) \wedge p(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge p(\alpha_\nu)$. Συνεπώς ο καθολικός ποσοδείκτης $\forall$ μπορεί να θεωρείται ως ένα σύμβολο γενικευμένης συζεύξεως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Επειδή ένας π.τ. $p(x,y)$ δύο μεταβλητών $x \in A$ και $y \in B$ μπορεί να θεωρηθεί ως π.τ. **μιας** μεταβλητής, του ζεύγους (x,y) με σύνολο αναφοράς το $A \times B$ (§ 1.6), μπορούμε να σχηματίζουμε προτάσεις της μορφής $\forall (x,y) \in A \times B$, $p(x,y)$ ή απλούστερα $\forall (x,y)$, $p(x,y)$, που γράφεται και $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $p(x,y)$. Όταν $A = B = \Omega$, γράφουμε απλούστερα
$$\forall x, y \in \Omega, \ p(x,y) \ \text{ή} \ \forall x, \ \forall y, \ p(x,y).$$
Π.χ. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x + y = y + x$ (αληθής)
$\forall x, \ \forall y, \quad x + 2y = 5$ (ψευδής)
2. Χαρακτηριστικό παράδειγμα π. τύπων που είναι καθολικά αληθείς είναι οι γνωστές μας ταυτότητες στην Άλγεβρα. Όταν λέμε π.χ. ότι οι $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ *είναι ταυτότητες στο* $\mathbb{R}$, εννοούμε ότι αληθεύουν οι προτάσεις: $\forall x, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ και $\forall x, \forall y, (x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.
3. Πολλές φορές η φραστική διατύπωση μιάς προτάσεως κρύβει την παρουσία του ποσοδείκτη $\forall$. Τότε μια αναδιατύπωση είναι απαραίτητη για να αποδώσει το ακριβές περιεχόμενό της. Π.χ. στην Επιπεδομετρία η πρόταση «δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία ε είναι παράλληλες» αναδιατυπώνεται ως εξής:
$$\forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \text{ αν } \varepsilon_1 \text{ και } \varepsilon_2 \text{ είναι κάθετες στην } \varepsilon, \text{ τότε } \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2.$$

Συνεπαγωγές καθολικά αληθείς. Ισοδύναμοι π.τ.

1.20 Όπως το προηγούμενο παράδειγμα πολλά θεωρήματα στα μαθηματικά έχουν τη μορφή $\forall x$, $p(x) \Rightarrow q(x)$. Αν ισχύει (στο Ω) και η *αντίστροφη* συνεπαγωγή $q(x) \Rightarrow p(x)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, δηλ. αληθεύει η πρόταση $\forall x$, $p(x) \Leftrightarrow q(x)$. Στην περίπτωση αυτή οι π.τ. $p(x)$ και $q(x)$ λέγονται **ισοδύναμοι**. Π.χ.

- Ισχύει η συνεπαγωγή: «αν x είναι πολλαπλάσιο του 9, τότε x είναι πολλαπλάσιο του 3», αλλά όχι και η αντίστροφή της ($x \in \mathbb{N}$).
- Οι π.τ. «x είναι ισοσκελές» και «δύο γωνίες του x είναι ίσες» είναι ισοδύναμοι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τα σύνολα αλήθειας δύο ισοδύναμων π.τ. είναι ίσα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Είδη διμελών σχέσεων. Ένας π.τ. $p(x,y)$ δύο μεταβλητών $x \in \Omega$ και $y \in \Omega$ ορίζει μια **διμελή σχέση** σ στο Ω και γράφεται $x \sigma y$. Η σχέση σ λέγεται:

- **ανακλαστική**, όταν $\forall x$, $x \sigma x$
- **συμμετρική**, όταν ισχύει η συνεπαγωγή $x \sigma y \Rightarrow y \sigma x$
- **αντισυμμετρική**, » » » $(x \sigma y \text{ και } y \sigma x) \Rightarrow x = y$
- **μεταβατική**, » » » $(x \sigma y \text{ και } y \sigma z) \Rightarrow x \sigma z$.

Όπως ήδη γνωρίζουμε, μια σχέση ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** (π.χ. ισότητα, παραλληλία ευθειών, ομοιότητα τριγώνων), ενώ μια σχέση ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική λέγεται **σχέση διατάξεως** (π.χ. σχέση $\leq$ στο $\mathbb{R}$, διαιρετότητα στο $\mathbb{N}$).

Υπαρξιακός ποσοδείκτης

1.21 Πολλές φορές, πριν αρχίσουμε τις προσπάθειες για τη λύση ενός προβλήματος, είναι σκόπιμο να θέτουμε το ερώτημα αν **υπάρχει** τέτοια λύση. Έτσι π.χ. είναι άσκοπο να προσπαθήσουμε να βρούμε ρίζες της εξισώσεως $3x^8+5x^2+1=0$ στο $\mathbb{R}$. Οι ισότητες που προκύπτουν απ' αυτή για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχουν α' μέλος θετικό ≥ 1 και συνεπώς είναι όλες ψευδείς. Ο π.τ. $3x^8+5x^2+1=0$ που έχει σύνολο αλήθειας το $\varnothing$ είναι **καθολικά ψευδής.** Αντίθετα η εξίσωση $x+5=0$ **δεν είναι** καθολικά ψευδής. Αυτό διατυπώνεται με την πρόταση «υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $x+5=0$» που γράφεται συμβολικά

$$\exists\, x \in \mathbb{R},\ x+5=0.$$

Το σύμβολο $\exists$, που ονομάζεται **υπαρξιακός ποσοδείκτης,** χρησιμοποιείται για να εκφράσει αν ένας π.τ. είναι καθολικά ψευδής ή όχι. Συγκεκριμένα:

Έστω $p(x)$ ένας π.τ. στο Ω με σύνολο αλήθειας A. Η πρόταση «υπάρχει (ένα τουλάχιστο) $x \in \Omega$ τέτοιο, ώστε (να ισχύει, να είναι) $p(x)$», που συμβολίζεται:

$$\exists\, x \in \Omega,\ p(x) \quad \text{ή απλούστερα} \quad \exists\, x,\ p(x)$$

χαρακτηρίζεται:

- ψευδής, αν ο $p(x)$ είναι καθολικά ψευδής, που σημαίνει $A=\varnothing$, δηλαδή αν όλες οι προτάσεις που παράγονται από τον $p(x)$ είναι ψευδείς,
- αληθής, αν $A \neq \varnothing$, δηλαδή αν έστω και μία από τις παραπάνω προτάσεις είναι αληθής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η πρόταση $\exists\, x \in \mathbb{Z},\ 2x=-5$ είναι ψευδής
2. » $\exists\, x \in \mathbb{Q},\ 2x=-5$ είναι αληθής
3. » $\exists\, x\ ,\ x \neq x$ είναι ψευδής (Ω: οποιοδήποτε σύνολο)
4. » $\exists\, x \in \mathbb{N},\ 2x > 3x-2$ είναι αληθής
5. » $\exists\, x$, x είναι τραπέζιο είναι αληθής (Ω: σύνολο των τετραπλεύρων.)

Σημείωση

Είναι φανερό ότι, αν το σύνολο αναφοράς Ω του π.τ. $p(x)$ αποτελείται από ν στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε η πρόταση $\exists\, x,\ p(x)$ είναι ισοδύναμη με τη διάζευξη $p(\alpha_1) \vee p(\alpha_2) \vee \ldots \vee p(\alpha_\nu)$. Συνεπώς ο υπαρξιακός ποσοδείκτης μπορεί να θεωρείται ως ένα σύμβολο γενικευμένης διαζεύξεως.

Αρνήσεις

1.22 Τις αρνήσεις των προτάσεων $\forall x,\ p(x)$ και $\exists x,\ p(x)$ θα τις συμβολίζουμε $\overline{\forall} x,\ p(x)$ και $\overline{\exists} x,\ p(x)$ αντιστοίχως. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αληθεύουν οι ισοδυναμίες:

$$\overline{\forall} x,\ p(x) \Leftrightarrow \exists x,\ \overline{p}(x) \tag{1}$$

$$\overline{\exists} x,\ p(x) \Leftrightarrow \forall x,\ \overline{p}(x). \tag{2}$$

Πράγματι τα δύο μέλη της (1) είναι προτάσεις ομότιμες, επειδή:

- Αν η $\overline{\forall} x,\ p(x)$ είναι αληθής, τότε η $\forall x,\ p(x)$ είναι ψευδής. Άρα (§ 1.5) υπάρχει x τέτοιο, ώστε $p(x)$ είναι ψευδής, δηλαδή επαληθεύει τον $\overline{p}(x)$. Επομένως η $\exists x,\ \overline{p}(x)$ αληθεύει.
- Αν η $\overline{\forall} x,\ p(x)$ είναι ψευδής, τότε η $\forall x,\ p(x)$ είναι αληθής. Άρα κανένα x δεν επαληθεύει τον $\overline{p}(x)$ και συνεπώς η $\exists x,\ \overline{p}(x)$ είναι ψευδής.

Ομοίως αποδεικνύεται και η ισοδυναμία (2).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν ένας π.τ. $p(x)$ δεν είναι καθολικά αληθής, δηλ. όταν αληθεύει η $\overline{\forall} x,\ p(x)$, αυτό δε σημαίνει ότι είναι καθολικά ψευδής, δηλ. ότι $\forall x,\ \overline{p}(x)$, αλλά απλώς ότι $\exists x,\ \overline{p}(x)$.

Ασκήσεις 11,12,13,14.

ΛΟΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Έννοια του λογικού τύπου (λ.τ.)

1.23 Στην αλγεβρική παράσταση $\dfrac{x+yz}{z}$ είναι σημειωμένη μια σειρά πράξεων ανάμεσα σε αριθμούς που παριστάνονται με γράμματα. Ανάλογη κατάσταση έχουμε στη Λογική.

Όταν, για να συμβολίσουμε μια πρόταση ή έναν π.τ., χρησιμοποιούμε γράμματα p, q, r, ... που παριστάνουν προτάσεις **ή και π.τ.,** σημειώνοντας ανάμεσά τους μια καθορισμένη σειρά λογικών πράξεων ($^-$, $\wedge$, $\vee$, ...), τότε έχουμε μια **λογική παράσταση** ή, αλλιώς, ένα **λογικό τύπο** (λ.τ.). Τα γράμματα λέγονται **μεταβλητές** του λ.τ.

Έτσι, λ.τ. είναι π.χ. τα γράμματα p, q, r, ..., οι αρνήσεις $\overline{p}$, $\overline{(\overline{p})}$ ή $\overline{\overline{p}}$..., οι $p \vee q$, $p \wedge q$, $(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{q} \vee r)$, $[(p \Rightarrow r) \wedge (\overline{q} \vee r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ κτλ.

Οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται, όπως και στην Άλγεβρα, για να καθορίσουν με σαφήνεια τη σειρά των πράξεων.
Όταν οι μεταβλητές ενός λ.τ. αντικατασταθούν με προτάσεις, ο λ.τ. μετατρέπεται σε πρόταση, της οποίας η τιμή αλήθειας εξαρτάται φυσικά από τις τιμές των μεταβλητών του.
Αν επισημάνουμε ποιες λογικές πράξεις και **με ποια σειρά** είναι σημειωμένες σ' ένα λ.τ., μπορούμε να εμφανίσουμε με πίνακα αλήθειας τις τιμές του (α ή ψ) για κάθε συνδυασμό τιμών των μεταβλητών του, όπως κάνουμε στους επόμενους πίνακες.
Στον πίνακα I εμφανίζονται οι τιμές διάφορων λ. τύπων μιας μεταβλητής.

ΠΙΝΑΚΑΣ I

p 1	$p \Leftrightarrow p$ 2	$\bar{p}$ 3	$\bar{\bar{p}}$ 4	$p \underline{\vee} \bar{p}$ 5	$p \wedge \bar{p}$ 6	$p \Leftrightarrow \bar{\bar{p}}$ 7
α	α	ψ	α	α	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	ψ	α

Η στήλη 2 συμπληρώθηκε κατά την § 1.16. Η στήλη 3 παρεμβάλλεται, γιατί είναι απαραίτητη για τη συμπλήρωση των επόμενων στηλών.
Η 4 συμπληρώθηκε από την 3, η 5 καθώς και η 6 από τις 1 και 3 και τέλος η 7 από τις 1 και 4.
Στον πίνακα II εμφανίζονται οι τιμές λ.τύπων με δύο μεταβλητές.

ΠΙΝΑΚΑΣ II

p 1	q 2	$p\vee q$ 3	$\overline{p\vee q}$ 4	$p\wedge q$ 5	$\overline{p\wedge q}$ 6	$p\Rightarrow q$ 7	$\overline{p\Rightarrow q}$ 8	$\bar{p}$ 9	$\bar{q}$ 10	$\bar{p}\wedge\bar{q}$ 11	$\bar{p}\vee\bar{q}$ 12	$\bar{p}\vee q$ 13	$\bar{q}\Rightarrow\bar{p}$ 14
α	α	α	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α
α	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ	α	α	ψ	α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α	ψ	α	α	ψ	α	α	α	α	α	α

Στις στήλες 1 και 2 έχουμε τους τέσσερις συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών p, q. Στον πίνακα έχουν παρεμβληθεί οι στήλες 3,5,7 για τη συμπλήρωση αντιστοίχως των 4,6,8 καθώς και οι στήλες 9,10 για τη συμπλήρωση των υπόλοιπων στηλών.
Τέλος ο πίνακας III είναι ένα παράδειγμα πίνακα αλήθειας του λ.τ. τριών μεταβλητών: $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$.

ΠΙΝΑΚΑΣ III

p 1	q 2	r 3	$p\Rightarrow r$ 4	$q\Rightarrow r$ 5	$(p\Rightarrow r) \wedge (q\Rightarrow r)$ 6	$p \vee q$ 7	$(p\vee q)\Rightarrow r$ 8	$[(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)]$ $\Rightarrow[(p\vee q)\Rightarrow r]$ 9
α	α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α
α	ψ	α	α	α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	ψ	α	α
ψ	ψ	ψ	α	α	α	ψ	α	α

Ταυτολογίες

1.24 Από τους πίνακες της προηγούμενης παραγράφου διαπιστώνουμε ότι ορισμένοι λ.τ. έχουν σταθερή τιμή αλήθειας ανεξάρτητα από τις τιμές των μεταβλητών τους. Ένας λ.τ. που για κάθε συνδυασμό τιμών των μεταβλητών του έχει

τιμή : ↗ **α** ονομάζεται **ταυτολογία**
↘ **ψ** » **αντίφαση.**

Ταυτολογίες είναι οι λ.τ. που εμφανίζονται στις στήλες 2, 5, 7 του πίνακα I (π.χ. ο $p \underline{\vee} \bar{p}$) και στη στήλη 9 του πίνακα III. Αντιφάσεις είναι οι αρνήσεις των προηγούμενων λ.τ. καθώς και ο τύπος $p \wedge \bar{p}$ (στήλη 6 του πίνακα I). Επίσης είναι φανερό ότι η άρνηση μιάς αντιφάσεως είναι ταυτολογία, όπως π.χ. ο $\overline{p \wedge \bar{p}}$.

1.25 **Ισοδύναμοι λ.τ.** Οι λ.τ. $p \Rightarrow q$ και $\bar{p} \vee q$, όπως προκύπτει από τις στήλες 7 και 13 του πίνακα II, για κάθε συνδυασμό τιμών των μεταβλητών τους έχουν ίδια τιμή αλήθειας. Δύο λ.τ. με αυτή την ιδιότητα λέγονται **ισοδύναμοι.** Ισοδύναμοι λ.τ. είναι και οι:

- p και $\bar{\bar{p}}$ Πίνακας I, στ. 1 και 4
- $p \Rightarrow q$ και $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ » II, » 7 » 14
- $\overline{p \vee q}$ και $\bar{p} \wedge \bar{q}$ » II, » 4 » 11
- $\overline{p \wedge q}$ και $\bar{p} \vee \bar{q}$ » II, » 6 » 12

Αν δύο λ.τ. T_1 και T_2 είναι ισοδύναμοι, τότε ο λ.τ. $T_1 \Leftrightarrow T_2$ είναι ταυτολογία. Έτσι από τα προηγούμενα ζεύγη ισοδύναμων λ.τ. έχουμε αντίστοιχες ταυτολογίες, π.χ. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ κτλ.

Νόμοι λογικής

1.26 Αν σε μια ταυτολογία Τ αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με (οποιεσδήποτε) προτάσεις, τότε η Τ μετατρέπεται σε πρόταση αληθή. Αν πάλι αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με π. τύπους, η Τ μετατρέπεται σε π.τ. $T(x)$ που είναι καθολικά αληθής (αφού για κάθε $x \in \Omega$ γίνεται αληθής πρόταση). Συνεπώς αληθεύει η πρόταση $\forall x, T(x)$. Έτσι π.χ. από την ταυτολογία $p \underline{\vee} \bar{p}$, δηλαδή «ή p ή $\bar{p}$», παράγονται αληθείς προτάσεις, όπως η «ο αριθμός 853 ή διαιρείται με το 11 ή δε διαιρείται με το 11» αλλά και γενικές προτάσεις όπως οι: «$\forall x$, ή x είναι ισοσκελές, ή x δεν είναι ισοσκελές», «$\forall x, \forall y$, ή $x = y$ ή $x \neq y$» κτλ.

Επειδή οι ταυτολογίες εκφράζουν αληθείς προτάσεις ανεξάρτητα από τις μεταβλητές τους, αποτελούν νόμους της Λογικής, που μερικοί είναι γνωστοί με ιδιαίτερες ονομασίες. Π.χ.

1. **Νόμος της ταυτότητας** $\quad p \Leftrightarrow p$
2. » » **διπλής αρνήσεως** $\quad p \Leftrightarrow \bar{\bar{p}}$
3. » » **αποκλείσεως τρίτου** $\quad p \underline{\vee} \bar{p}$
4. » » **αντιφάσεως** $\quad \overline{p \wedge \bar{p}}$
5. » » **αντιθετοαντιστροφής** $\quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
6. **Νόμοι de Morgan**

$$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \quad \text{και γενικά} \quad \overline{p \vee q \vee \ldots \vee r} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \ldots \wedge \bar{r}$$

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \quad » \quad » \quad \overline{p \wedge q \wedge \ldots \wedge r} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \vee \ldots \vee \bar{r}$$

Δύο βασικοί κανόνες

1.27 Για την παραγωγή αληθών προτάσεων, εκτός από τις ταυτολογίες, χρησιμοποιούμε συχνά τους επόμενους δύο απλούς κανόνες:

α) Κανόνας αποσπάσεως (Κ. Απ.). Όταν αληθεύουν μια συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ και η πρόταση p, τότε ασφαλώς αληθεύει και η q (§ 1.14).
Ειδικότερα, αν αληθεύουν οι προτάσεις $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ και $p(\alpha)$, τότε, επειδή αληθεύει η $p(\alpha) \Rightarrow q(\alpha)$, θα αληθεύει και η $q(\alpha)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Από τις προτάσεις «Οι γωνίες της βάσεως ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες», δηλ. «$\forall x$, (x είναι ισοσκελές) $\Rightarrow$ (οι γωνίες της βάσεως του x είναι ίσες)» και «Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ» συμπεραίνουμε ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

β) Κανόνας αντικαταστάσεως (Κ. Αντ.). Αν σε ένα λ.τ. Ρ αντικαταστήσουμε ένα τμήμα του που είναι λ.τ. με ισοδύναμο λ.τ., προκύπτει λ.τ. ισοδύναμος του Ρ. Είναι φανερό γιατί η τιμή αλήθειας του Ρ δεν επηρεάζεται από την αντικατάσταση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι οι λ.τ. $\overline{p \Rightarrow q}$ και $p \wedge \bar{q}$ είναι ισοδύναμοι.

Πράγματι, επειδή $p \Rightarrow q$ είναι ισοδύναμος του $\bar{p} \vee q$ (§1.25), ο $\overline{p \Rightarrow q}$ θα είναι ισοδύναμος του $\overline{\bar{p} \vee q}$,
επομένως και του $\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}$ (Νόμος de Morgan)
άρα και του $p \wedge \bar{q}$ (Νόμος διπλής αρνήσεως).

Ασκήσεις 15,16,17,18,19.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ

Η απόδειξη γενικά

1.28 Η διαπίστωση ότι μια πρόταση είναι αληθής, δηλαδή ότι είναι θεώρημα, γίνεται με τη βοήθεια ορισμών, αξιωμάτων ή και άλλων θεωρημάτων με βάση τους νόμους της Λογικής.

Ήδη έχουμε συναντήσει μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις, κατά τις οποίες, στηριζόμενοι σε απλούς αλλά ασφαλείς «λογικούς κανόνες», από ορισμένες αληθείς προτάσεις διατυπώσαμε νέες αληθείς προτάσεις. Τέτοιες περιπτώσεις είναι η παραγωγή προτάσεων ή π.τ. που αληθεύουν π.χ. από ταυτολογίες (§ 1.24) ή με εφαρμογή του κανόνα αποσπάσεως (Κ. Απ.), του κανόνα αντικαταστάσεως (Κ. Αντ.), των βασικών ιδιοτήτων της ισότητας κτλ. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε γνωστό ότι αληθεύουν οι προτάσεις:

(1) Οι γωνίες της βάσεως κάθε ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες
(2) Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν έχει ίσες γωνίες.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε μια σειρά αληθών προτάσεων ως εξής:

(3) $\forall x$, (x είναι ισοσκελές) $\Rightarrow$ (οι γωνίες της βάσεως του x είναι ίσες) — [αναδιατύπωση της (1)]

(4) Το ΑΒΓ είναι ισοσκελές $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$ ή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ή $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}$ — [παράγεται από την (3)]

(5) $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ και $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma} \neq \widehat{A} \Rightarrow$ το ΑΒΓ δεν είναι ισοσκελές — [νόμος αντιθετοαντιστροφής και de Morgan]

(6) Το ΑΒΓ δεν είναι ισοσκελές $\Leftrightarrow$ το ΑΒΓ είναι σκαληνό — [ορισμός σκαληνού τριγώνου]

(7) $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ και $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma} \neq \widehat{A}$ [από την (5) και (6) με τον
$\Rightarrow$ το ΑΒΓ είναι σκαληνό Κ. Αντ.]

(8) $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ και $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma} \neq \widehat{A}$ [αναδιατύπωση της (2)]

(9) Το ΑΒΓ είναι σκαληνό [από τις (7) και (8) με τον Κ. Απ.]

Η σειρά των 9 παραπάνω προτάσεων αποτελεί την *απόδειξη* ότι αληθεύει η (9). Γενικά η **απόδειξη** μιάς προτάσεως p συνίσταται στην αναγραφή μιάς σειράς αληθών προτάσεων που καταλήγει στην αποδεικτέα πρόταση p. Θα δούμε στα επόμενα μερικές απλές μεθόδους που εφαρμόζουμε για την απόδειξη των μαθηματικών θεωρημάτων.

Ευθεία απόδειξη

1.29 Έστω ότι έχουμε να αποδείξουμε μια πρόταση της μορφής $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$, δηλαδή ότι *ισχύει* η συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι όσα x επαληθεύουν τον π.τ. p(x) επαληθεύουν και τον q(x). Αρχίζουμε λοιπόν με την υπόθεση **ότι p(x) είναι μια αληθής πρόταση** και κατασκευάζουμε μια απόδειξη της q(x).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχθεί ότι: «Το τετράγωνο κάθε περιττού φυσικού αριθμού είναι περιττός», που αναδιατυπώνεται ώς εξής:
$\forall x \in \mathbb{N}$, (x περιττός) $\Rightarrow$ (x^2 περιττός).

Απόδειξη

(1) x περιττός [υπόθεση]
(2) Υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $x = 2\nu+1$ [ορισμός περιττού]
(3) $x^2 = (2\nu+1)^2 = 4\nu^2+4\nu+1 = 2(2\nu^2+2\nu)+1$ [γνωστά από την Άλγεβρα]
(4) x^2 περιττός [ορισμός περιττού]

Σημείωση

Είναι σύνηθες, ιδιαίτερα στη Γεωμετρία, για την απόδειξη της q(x) να βρίσκουμε π.τ. r(x), s(x), . . . , t(x) τέτοιους, ώστε να ισχύουν οι συνεπαγωγές $p(x) \Rightarrow r(x)$, $r(x) \Rightarrow s(x)$, $s(x) \Rightarrow \ldots t(x) \Rightarrow q(x)$, οπότε με διαδοχική εφαρμογή του Κ. Απ. από την υπόθεση p(x) έχουμε την r(x), στη συνέχεια την s(x)... τήν t(x) και τέλος την q(x). Γράφουμε μια τέτοια απόδειξη ως εξής: $p(x) \Rightarrow r(x) \Rightarrow s(x) \ldots \Rightarrow t(x) \Rightarrow q(x)$ ή

$$\begin{aligned} p(x) &\Rightarrow r(x) \\ &\Rightarrow s(x) \\ &\ \ \cdots\cdots \\ &\Rightarrow t(x) \\ &\Rightarrow q(x). \end{aligned}$$

Απαγωγή σε άτοπο

1.30 Η απόδειξη με τη μέθοδο της «απαγωγής», όπως την έλεγαν οι αρχαίοι Έλληνες, σε άτοπο, συνίσταται στα ακόλουθα:

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι αληθεύει η p. Αν δεν αληθεύει η p, θα αληθεύει η άρνησή της $\overline{p}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι αληθεύει η $\overline{p}$ και συνδυάζουμε αυτή την υπόθεση με άλλες αληθείς προτάσεις σε μια σωστή αποδεικτική διαδικασία, που καταλήγει όμως σε αντίφαση (άτοπο). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η υπόθεσή μας ($\overline{p}$ αληθεύει) δεν ευσταθεί. Άρα αληθεύει η p.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Υποθέτουμε γνωστό ότι στο $\mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:
(1) $1 \neq 0$
(2) Αν $x \neq 0$, τότε ή x θετικός ή $-x$ θετικός ($-x$ είναι αντίθετος του x)
(3) $1 \cdot x = x$
(4) $(-x) \cdot (-y) = xy$
(5) Το γινόμενο δύο θετικών είναι θετικό

Με τις 5 αυτές προτάσεις μπορούμε να αποδείξουμε ότι: **«ο 1 είναι θετικός».** Συνεχίζουμε με την άρνηση της αποδεικτέας.

(6) «ο 1 δεν είναι θετικός» [υπόθεση ότι $\overline{p}$ αληθής]
(7) ή 1 θετικός ή -1 θετικός [από τις (1) και (2) με Κ. Απ.]
(8) ο -1 θετικός [αποκλειστ. διάζευξη (§ 1.12)]
(9) $(-1) \cdot (-1)$ θετικός [από την (5) και (8)]
(10) $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1$ [από την (4)]
$= 1$ [από την (3)]
(11) 1 είναι θετικός [από τις (9) και (10)]
(12) «1 είναι θετικός» και «1 δεν είναι θετικός» [σύζευξη των (6) και (11)]
που είναι **αντίφαση.**

1.31 **Απόδειξη συνεπαγωγής.** Έστω ότι έχουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει μια συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$, δηλαδή ότι αληθεύει η πρόταση

$$\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x). \qquad (\alpha)$$

Υποθέτουμε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, ότι αληθεύει η άρνησή της που είναι (§ 1.22) $\exists x,\ \overline{p(x) \Rightarrow q(x)}$. Επειδή όμως (§1.27 Εφ.) ο λ.τ. $\overline{p \Rightarrow q}$ είναι ισοδύναμος με $p \wedge \overline{q}$, η υπόθεσή μας ισοδυναμεί με

$$\exists x,\ p(x) \wedge \overline{q}(x). \qquad (\beta)$$

Αρκεί λοιπόν, υποθέτοντας ότι αληθεύει η (β), δηλαδή ότι υπάρχει x που επαληθεύει τον p(x) και συγχρόνως δεν επαληθεύει τον q(x), να καταλήξουμε σε αντίφαση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχθεί ότι «Δύο ευθείες του επιπέδου κάθετες στην ίδια ευθεία ε είναι παράλληλες».

Απόδειξη

Η πρόταση έχει τη μορφή $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$, όπου x είναι ζεύγος ευθειών.
(1) Υπάρχει ζεύγος ευθειών $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ε **και** δεν είναι παράλληλες [αληθεύει η (β)]

(2) Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες στην ε
(3) Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δεν είναι παράλληλες [ορισμός συζεύξεως]
(4) Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται σε σημείο Ο [ισοδύναμη της (3)]
(5) Από το Ο άγονται δύο κάθετες στην ε [από τη σύζευξη των (2) και (4)]
(6) Από το Ο άγεται μία μόνο κάθετος στην ε [γνωστό θεώρημα]
(7) Η σύζευξη των (5) και (6) που αποτελεί **αντίφαση.**

Αντιθετοαντιστροφή

1.32 Επειδή οι λ.τ. $p \Rightarrow q$ και $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ είναι ισοδύναμοι, όταν έχουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει μια συνεπαγωγή, αποδεικνύουμε — αν αυτό είναι ευκολότερο — ότι ισχύει η αντιθετοαντίστροφή της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχθεί ότι: «Σε κάθε τρίγωνο απέναντι σε άνισες γωνίες βρίσκονται άνισες πλευρές».

Απόδειξη

Η πρόταση αυτή αναδιατυπώνεται ως εξής: Ισχύει η συνεπαγωγή:
« Αν δύο γωνίες του τριγώνου x είναι άνισες, τότε οι δύο (απέναντι) πλευρές του x είναι άνισες».
Η αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή είναι:
« Αν δύο πλευρές του x είναι ίσες, τότε οι δύο απέναντι γωνίες του x είναι ίσες», η οποία ισχύει, γιατί είναι μια άλλη διατύπωση του γνωστού θεωρήματος του ισοσκελούς τριγώνου.

Διάκριση περιπτώσεων

1.33 Για να αποδείξουμε μία πρόταση r, **όταν είναι γνωστό** ένα θεώρημα της μορφής «p ή q», αρκεί να αποδείξουμε τις δύο συνεπαγωγές $p \Rightarrow r$ και $q \Rightarrow r$. Η μέθοδος στηρίζεται στο ότι ο λ.τ.

$$(p \Rightarrow r \text{ και } q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \text{ ή } q) \Rightarrow r)$$

είναι ταυτολογία (§ 1.23 και 1.24).

Έτσι η απόδειξη της r είναι η ακόλουθη:

(1) η παραπάνω ταυτολογία
(2) $p \Rightarrow r$ και $q \Rightarrow r$ [το αποδεικνύουμε]
(3) $(p \text{ ή } q) \Rightarrow r$ [από τις (1) και (2) με τον Κ. Απ.]
(4) p ή q [γνωστό θεώρημα]
(5) r [από τις (3), (4) με τον Κ. Απ.]

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι στο $\mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει: $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ (αντιθετοαντιστροφή).
Σύμφωνα με όσα είπαμε για την ευθεία απόδειξη (§ 1.29) υποθέτουμε (1) $x \neq 0$ και θα κατασκευάσουμε απόδειξη της $x^2 \neq 0$. Έχουμε:

(2) Αν $x \neq 0$, τότε (x θετικός ή −x θετικός) [υποτίθεται γνωστό θεώρημα]
(3) x θετικός ή −x θετικός [από τις (1) και (2) με τον Κ. Απ.]

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε τις συνεπαγωγές:
(α) x θετικός $\Rightarrow x^2 \neq 0$ και (β) −x θετικός $\Rightarrow x^2 \neq 0$

Απόδειξη της (α)

x θετικός [υπόθεση]
(4) Το γινόμενο δύο θετικών είναι θετικός [υποτίθεται γνωστό]
(5) $x^2 = x \cdot x$ θετικός $\neq 0$

Απόδειξη της (β)

− x θετικός [υπόθεση]
(4) Το γινόμενο δύο θετικών είναι θετικός [υποτίθεται γνωστό]
(5) $x^2 = (-x)(-x)$ θετικός $\neq 0$ [υποτίθεται γνωστό ότι $(-x)(-y) = xy$]

Ασκήσεις 20, 21, 22, 23, 24.

Επαγωγή

1.34 Υπάρχουν π.τ. με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$ ή και γενικότερα το $\{\nu \in \mathbb{N} : \nu \geq \lambda\}$ που είναι καθολικά αληθείς, όπως π.χ. «$\nu + 1 > \nu$», «το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου με ν πλευρές ($\nu \geq 3$) είναι $(2\nu - 4)$ ορθές» κ.ά.

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας π.τ. $p(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι καθολικά αληθής, δηλαδή την πρόταση $\forall \nu, p(\nu)$.

Αν συμβολίσουμε απλούστερα p_ν τον π.τ. $p(\nu)$, έχουμε να αποδείξουμε **όλες** τις προτάσεις

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_\kappa, \ldots$$

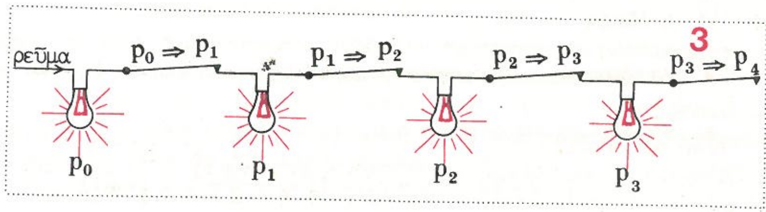
Αποδεικνύουμε **πρώτα** την p_0. Τότε μπορούμε να αποδείξουμε τις επόμενες με επανειλημμένη εφαρμογή του Κ. Απ. ως εξής:

Αποδεικνύουμε την $p_0 \Rightarrow p_1$, οπότε με τον Κ. Απ. προκύπτει η p_1
Στη συνέχεια την $p_1 \Rightarrow p_2$, » » » » » » p_2
» » » $p_2 \Rightarrow p_3$, » » » » » » p_3
. . . .
» » » $p_\kappa \Rightarrow p_{\kappa+1}$, » » » » » » $p_{\kappa+1}$

κ.ο.κ.

Σημείωση

Μια εποπτική ερμηνεία αυτής της τεχνικής δίνεται στο σχήμα 3. Οι λαμπτήρες (προτάσεις) $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ανάβουν (αληθεύουν), όταν ο πρώτος p_0



3

ανάβει (αληθεύει) και όλοι οι ενδιάμεσοι «διακόπτες» (συνεπαγωγές) $p_0 \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2, \ldots$ κλείνουν το κύκλωμα (είναι αληθείς).

Αλλά οι παραπάνω συνεπαγωγές $p_0 \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2, \ldots, p_\kappa \Rightarrow p_{\kappa+1}, \ldots$ είναι όλες οι προτάσεις που παράγει ο π.τ. $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$. Έχουμε λοιπόν να αποδείξουμε την πρόταση $\forall\nu$, $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$. Η πρόταση αυτή, σύμφωνα με την § 1.29, αποδεικνύεται, αν, **υποθέτοντας ότι αληθεύει η πρόταση p_ν,** κατασκευάσουμε μια απόδειξη της $\mathbf{p_{\nu+1}}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι $2^\nu > \nu$.

Απόδειξη

- Η αποδεικτέα ανισότητα ισχύει για $\nu = 0$, γιατί $2^0 = 1 > 0$.
- Υποθέτοντας ότι αληθεύει η $2^\nu > \nu$, θα αποδείξουμε την $2^{\nu+1} > \nu+1$. Πράγματι είναι $2^{\nu+1} = 2 \cdot 2^\nu = 2^\nu + 2^\nu$ και, επειδή $2^\nu > \nu$ (υπόθεση) και $2^\nu \geq 1$ (φανερό), θα έχουμε $2^{\nu+1} > \nu+1$, δηλαδή αληθεύει η $p_{\nu+1}$.

Γενικότερα μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να αποδείξουμε ότι ισχύει ένας π.τ. p_ν για κάθε $\nu \geq \lambda$. Αρκεί, αντί για την p_0, να αποδείξουμε αρχικά ότι αληθεύει η p_λ και κατόπιν η συνεπαγωγή $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$ $(\nu \geq \lambda)$.

Η παραπάνω μέθοδος για την απόδειξη ότι ένας π.τ. p_ν ισχύει στο $\mathbb{N}$, ή γενικότερα για κάθε φυσικό $\nu \geq \lambda$, ονομάζεται **επαγωγή** και συνοψίζεται ως εξής:

- Αποδεικνύουμε την πρόταση p_λ.
- Υποθέτοντας ότι αληθεύει η p_ν, κατασκευάζουμε απόδειξη της $p_{\nu+1}$ $(\nu \geq \lambda)$.

★ **1.35 Παραλλαγές της μεθόδου.** Αντί της συνεπαγωγής $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$ (για $\nu \geq \lambda$) θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την $p_{\nu-1} \Rightarrow p_\nu$ (για $\nu > \lambda$). Αυτό σημαίνει ότι, υποθέτοντας ότι ισχύει η $p_{\nu-1}$, αποδεικνύουμε την p_ν. Μία ακόμη ενδιαφέρουσα παραλλαγή της μεθόδου είναι η απόδειξη της p_ν με υπόθεση ότι αληθεύει όχι μόνο η $p_{\nu-1}$ αλλά όλες οι προηγούμενες p_κ $(\lambda \leq \kappa < \nu)$. Μια εφαρμογή αυτής της μεθόδου θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο (§ 2.6).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \geq 2$, είναι $1+2+3+\ldots+\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.**

Απόδειξη

- Αποδεικνύουμε ότι η ισότητα ισχύει για $\nu = 2$, δηλαδή $1+2 = \dfrac{2(2+1)}{2}$
- Υποθέτουμε ότι αληθεύει η p_ν: $1+2+3+\ldots+\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$. Τότε

$$1+2+3+\ldots+\nu+(\nu+1) = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + (\nu+1)$$

$$= \frac{\nu(\nu+1)+2(\nu+1)}{2}$$

$$= \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}.$$ Άρα αποδείχτηκε η $p_{\nu+1}$.

2. **Να αποδειχθεί ότι «ο αριθμός των σημείων τομής ν $(\nu \geq 2)$ ευθειών ενός επιπέδου, οι οποίες ανά δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δε διέρχονται από το ίδιο σημείο, είναι $\dfrac{\nu^2-\nu}{2}$».**

Απόδειξη

- Αποδεικνύουμε την πρόταση για $\nu = 2$, δηλαδή ότι ο αριθμός των σημείων τομής 2 μη παράλληλων ευθειών ενός επιπέδου είναι $\dfrac{2^2-2}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1$ (αληθής).
- Θεωρούμε $\nu+1$ ευθείες του επιπέδου τέτοιες, ώστε ανά δύο να μην είναι παράλληλες και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Υποθέτοντας ότι οι ν από αυτές τέμνονται σε $\dfrac{\nu^2-\nu}{2}$ σημεία, θα αποδείξουμε ότι όλες τέμνονται σε $\dfrac{(\nu+1)^2-(\nu+1)}{2}$ σημεία. Δηλαδή σε $\dfrac{\nu^2+2\nu+1-\nu-1}{2} = \dfrac{\nu^2+\nu}{2}$ σημεία.

Πράγματι, μια ευθεία ε από τις $\nu+1$ τέμνει τις υπόλοιπες ν ευθείες σε ν σημεία, που είναι διαφορετικά από τα $\dfrac{\nu^2-\nu}{2}$ σημεία στα οποία τέμνονται οι ν υπόλοιπες ευθείες. Έτσι ο αριθμός των σημείων τομής των $\nu+1$ ευθειών είναι : $\nu + \dfrac{\nu^2-\nu}{2} = \dfrac{2\nu+\nu^2-\nu}{2} = \dfrac{\nu^2+\nu}{2}$.

Ασκήσεις 25,26,27,28,29,30,31,32.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω φράσεις είναι λογικές προτάσεις.
   α) Ο αριθμός 6 είναι πρώτος. β) Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.
   γ) Πού θα πάτε αύριο; δ) Η Κέρκυρα είναι νησί.
2. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απλές και ποιες σύνθετες.
   α) Ο αριθμός 10 δεν είναι πρώτος.
   β) Ο αριθμός 24 είναι σύνθετος.
   γ) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, τότε είναι και ισογώνιο.
   δ) Ο 12 και ο 18 είναι πολλαπλάσια του 3.
3. Να βρείτε τη δομή των επόμενων σύνθετων προτάσεων αντικαθιστώντας με γράμματα όλες τις απλές προτάσεις από τις οποίες σχηματίζονται.
   α) Αν ο α είναι ρητός και ο β ακέραιος αριθμός, τότε ο α+β είναι ρητός αριθμός.
   β) Αν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες ή διχοτομούν τις γωνίες του, τότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
   γ) Αν $\alpha\beta \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

δ) Αν ο α είναι πολλαπλάσιο του 5 και το άθροισμα $\alpha+\beta$ είναι πολλαπλάσιο του 5, τότε και ο β είναι πολλαπλάσιο του 5 (α,β φυσικοί αριθμοί).

ε) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δεν είναι ρόμβος, τότε οι διαγώνιές του δεν είναι κάθετες ή δε διχοτομούν τις γωνίες του.

στ) Αν δύο δεδομένοι αριθμοί α και β ειναι άρτιοι ή περιττοί, τότε το άθροισμά τους είναι άρτιος αριθμός.

4. Ποιες από τις προτάσεις της ασκ. 3 έχουν την ίδια δομή.

5. Στον π. τ. «ο x είναι πολλαπλάσιο του 3 και του 4», με $x \in \{1,2,3,\ldots,24\}$, να βρείτε το σύνολο αλήθειάς του Α.

6. Να βρείτε το γράφημα της σχέσεως που ορίζεται από τον π.τ. «ο x είναι μεγαλύτερος του y» με $x \in \{1,3,5,7\}$ και $y \in \{2,4,6\}$.

7. Να λυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις:

α) $x+5=2$ στο $\mathbb{N}$, στο $\mathbb{Z}$

β) $2x=-5$ στο $\mathbb{Z}$, στο $\mathbb{Q}$

γ) $x^2=2$ στο $\mathbb{Q}$, στο $\mathbb{R}$

δ) $x^2=-4$ στο $\mathbb{R}$.

8. Δίνονται στο $\Omega=\{1,2,3,\ldots,20\}$ οι προτασιακοί τύποι:

$p(x)$: ο x είναι πολλαπλάσιο του 2

$q(x)$: ο x είναι πολλαπλάσιο του 5.

Να βρείτε το σύνολο αλήθειας των π.τ.

$\overline{p}(x)$, $\overline{q}(x)$, $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$.

9. Έστω k και λ φυσικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $k=\lambda+1$. Με τις προτάσεις $k=\lambda+1$ και $k=\lambda$ να σχηματίσετε όλες τις δυνατές συνεπαγωγές και ισοδυναμίες και να βρείτε τις τιμές τους (α ή ψ).

10. Να γίνει ο πίνακας αλήθειας των $p \wedge q \wedge r$ και $p \vee q \vee r$.

11. Αναδιατυπώστε τις ακόλουθες προτάσεις με χρησιμοποίηση κατάλληλων ποσοδεικτών:

α) Μερικοί ακέραιοι είναι πρώτοι.

β) Κάθε τετράπλευρο είναι ρόμβος.

γ) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο ίσες διαμέσους, τότε είναι ισοσκελές.

δ) Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4, αν και μόνο αν λήγει σε 0.

12. Διατυπώστε σε κανονική γλωσσική μορφή τις ακόλουθες προτάσεις:

α) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad x^2>0$

β) $\exists x \in \mathbb{R},\quad x^2<0$.

γ) $\forall x$, (οι διαγώνιες του x διχοτομούν τις γωνίες του) $\Rightarrow$ (x είναι ρόμβος) [Ω: σύνολο των παραλληλογράμμων].

δ) $\forall x$, (x είναι ισόπλευρο) $\Leftrightarrow$ (x είναι ισογώνιο) [Ω: σύνολο των τριγώνων].

13. Διατυπώστε προτάσεις ισοδύναμες με τις αρνήσεις των προτάσεων α,β των ασκ. 12 και 11.

14. Έστω $p(x)$ και $q(x)$ δύο π.τ. στο Ω με σύνολα αλήθειας Α και Β αντιστοίχως. Να αποδειχθεί ότι, αν $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$, τότε $A \subseteq B$ και αντιστρόφως.

15. Να αποδείξετε ότι είναι ταυτολογίες οι λ.τ.

α) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

β) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

16. Επίσης οι λ.τ.

α) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

β) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

γ) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

δ) $(p \wedge q) \Rightarrow q$

ε) $p \Rightarrow (p \vee q)$

στ) $[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$

ζ) $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

η) $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$.

17. Επίσης οι λ.τ.

α) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

β) $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$

γ) $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$

δ) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ε) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

18. Να αποδειχθεί ότι οι λ.τ. $\overline{p \Leftrightarrow q}$ και $(p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p})$ είναι ισοδύναμοι.

19. Διατυπώστε προτάσεις ισοδύναμες με τις αρνήσεις των προτάσεων γ,δ των ασκήσεων 12 και 11.

20. Να αποδείξετε ότι, αν ο φυσικός αριθμός x είναι άρτιος, τότε και ο x^2 είναι άρτιος.

21. Να αποδείξετε ότι, αν ο x^2 είναι άρτιος ($x \in \mathbb{N}$), τότε και ο x είναι άρτιος.

22. Να αποδείξετε ότι, αν ο x^2 είναι περιττός ($x \in \mathbb{N}$), τότε και ο x είναι περιττός.

23. Να αποδείξετε ότι, αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει άνισες διαγωνίους, τότε το ΑΒΓΔ δεν είναι ορθογώνιο.

24. Να αποδείξετε ότι, αν ο α είναι άρρητος και ο ρ είναι ρητός, τότε οι αριθμοί: i) $\alpha+\rho$, ii) $\alpha-\rho$, iii) $\alpha\rho$, με $\rho \neq 0$ iv) $\alpha:\rho, (\rho \neq 0)$ v) $\rho-\alpha$ είναι άρρητοι.

25. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \geq 2$ είναι $1+3+5+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2$.

26. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ο αριθμός $\nu^3+2\nu$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

27. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \geq 2$ είναι

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

28. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \geq 2$ είναι

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1}.$$

29. Να αποδειχθεί ότι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι $3^\nu \geq 1+2\nu$.

30. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \geq 2$ και $\alpha \neq 1$ είναι

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}=\frac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1}.$$

31. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου με ν ($\nu \geq 3$) πλευρές είναι $(2\nu-4)$ ορθές.

32. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν ($\nu \geq 3$) πλευρές είναι $\dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Οι α,β,δ.

2. Απλή η β. Σύνθετες οι α,γ,δ.

3. **α)** Αν (p και q), τότε r. **β)** Αν (p_1 ή p_2), τότε q.
γ) Αν όχι p, τότε (όχι q ή όχι r). **δ)** Αν (p και q), τότε r.
ε) Αν όχι p, τότε (όχι q_1 ή όχι q_2). **στ)** Αν (p_1 και p_2) ή (q_1 και q_2), τότε r.

4. α και δ, γ και ε.

5. $A = \{12,24\}$.

6. $G = \{(3,2),(5,2),(5,4),(7,2),(7,4),(7,6)\}$.

7. Σύνολα λύσεων είναι αντιστοίχως:
της **α** στο $\mathbb{N}$ το $\varnothing$, στο $\mathbb{Z}$ το $\{-3\}$
της **β** στο $\mathbb{Z}$ το $\varnothing$, στο $\mathbb{Q}$ το $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$
της **γ** στο $\mathbb{Q}$ το $\varnothing$, στο $\mathbb{R}$ το $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ και της δ στο $\mathbb{R}$ το $\varnothing$.

8. Να βρείτε πρώτα τα σύνολα αλήθειας των p(x), q(x) και να εφαρμόσετε τις § 1.8, 1.10, 1.13.

9. Να παρατηρήσετε ότι η $k = \lambda + 1$ είναι αληθής, ενώ η $k = \lambda$ είναι ψευδής.

10. Επειδή από κάθε συνδυασμό τιμών των p, q προκύπτουν δύο συνδυασμοί τιμών των p,q,r, θα έχουμε τελικά 8 περιπτώσεις: (α,α,α), (α,α,ψ), (α,ψ,α), (α,ψ,ψ), (ψ,α,α), (ψ,α,ψ), (ψ,ψ,α), (ψ,ψ,ψ).

11. Στην α χρησιμοποιήστε τον $\exists$ και στις υπόλοιπες τον $\forall$.

12. Το τετράγωνο ενός πραγματικού μη μηδενικού αριθμού είναι θετικός κτλ.

13. Εφαρμόστε την § 1.22.

14. **α)** Αποδείξτε ότι κάθε $x \in A$ επαληθεύει την q(x).
β) Να διακρίνετε τις περιπτώσεις $x \in A$ και $x \notin A$.

15. **α)** Κατασκευάστε πίνακα αλήθειας που να περιέχει τις στήλες $p, p \wedge p, (p \wedge p) \Rightarrow p$.
β) Ομοίως.

16. **α)** Κατασκευάστε πίνακα αλήθειας που να περιέχει τις στήλες $p \vee q$, $q \vee p$ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$.
Για τις **β,γ,δ,ε,στ,ζ,η** κατασκευάστε πίνακες αλήθειας με τις ανάλογες στήλες.

17. Ομοίως.

18. Επειδή $p \Leftrightarrow q$ είναι $(p \Rightarrow q)$ και $(q \Rightarrow p)$, εφαρμόστε το Νόμο του De Morgan και την εφαρμογή της § 1.27.

19. Για τις γ των ασκ. 12 και 11 εφαρμόστε την § 1.22 και την εφαρμογή της § 1.27.
Για τις δ των ασκ. 12 και 11 εφαρμόστε την § 1.22 και την άσκ. 18.

20. Κάθε άρτιος φυσικός είναι της μορφής 2ν $(\nu \in \mathbb{N})$.

21. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής και το παράδ. § 1.29.

22. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής και την άσκηση 20.

23. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής και την ιδιότητα ότι οι διαγώνιοι ορθογωνίου είναι ίσες.

24. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

25. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 1 της § 1.35.

26. Λάβετε υπόψη ότι $(\nu+1)^3 + 2(\nu+1) = \nu^3 + 2\nu + 3(\nu^2+\nu+1)$.

27. Όπως η εφαρμογή 1 της § 1.35.

28. Ομοίως.

29. Λάβετε υπόψη ότι $3 \cdot 3^\nu = 3^\nu + 2 \cdot 3^\nu$ και ότι $3^\nu \geqq 1$.

30. Όπως η εφαρμογή 1 § 1.35.

31. Το πολύγωνο με $\nu+1$ πλευρές χωρίστε το σε ένα τρίγωνο και ένα ν-γωνο.

32. Λάβετε υπόψη την υπόδειξη της ασκ. 31 και ότι μία πλευρά του ν-γώνου γίνεται διαγώνιος του πολυγώνου με $\nu+1$ πλευρές.

2 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟ ΣΩΜΑ

Οι ιδιότητες των πράξεων με πραγματικούς αριθμούς δεν είναι άγνωστες στο μαθητή που αποφοίτησε από το Γυμνάσιο. Τις περισσότερες τις έχει ήδη χρησιμοποιήσει, άλλες συνειδητά άλλες όχι, στο λογισμό με τον οποίο έχει ασχοληθεί.

Η επανάληψή τους εδώ δεν έχει μόνο χαρακτήρα υπομνήσεως. Επιδιώκεται κυρίως να διαπιστώσει ο μαθητής ότι ορισμένες από τις ιδιότητες αυτές που δεχόμαστε ως αξιώματα αρκούν για να αποδειχθούν όλες οι άλλες, να επισημάνει την αλληλεξάρτησή τους και να συνειδητοποιήσει την παρουσία τους σε κάθε βήμα μιας λογιστικής πορείας.

Παράλληλα του δίνεται η ευκαιρία μαζί με τη διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας να ασκηθεί στη μαθηματική απόδειξη και να εφαρμόσει ό,τι έμαθε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η επιλογή των αξιωμάτων έγινε έτσι, ώστε να έχουμε το πρώτο παράδειγμα συνόλου με δομή αντιμεταθετικού σώματος. Γενικά η παρουσίαση των ενοτήτων αποτελεί απαραίτητη υποδομή για μελλοντικές γενικεύσεις.

$$\boxed{x = \alpha \quad \text{καί} \quad y = \beta \;\Rightarrow\; x+y = \alpha+\beta} \qquad (2)$$

Οι προηγούμενες προτάσεις (1) και (2) είναι οι γνωστοί μας «κανόνες»:

- **Αν στα μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ισότητα**
- **Αν προσθέσουμε ισότητες κατά μέλη, προκύπτει ισότητα**

Πολλαπλασιασμός

2.3 Η δεύτερη βασική πράξη στο $\mathbb{R}$ είναι ο **πολλαπλασιασμός.** Με την πράξη αυτή σε κάθε ζεύγος (x,y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχίζεται ένας **μοναδικός** πραγματικός αριθμός, **το γινόμενό τους xy.** Όπως και στην περίπτωση της προσθέσεως, συμπεραίνουμε ότι στο $\mathbb{R}$ ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$$\boxed{y = z \;\Rightarrow\; xy = xz} \qquad (3)$$

$$\boxed{x = \alpha \quad \text{και} \quad y = \beta \;\Rightarrow\; xy = \alpha\beta} \qquad (4)$$

οι οποίες αντιστοιχούν στους γνωστούς μας «κανόνες»:

- **Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ισότητα**
- **Αν πολλαπλασιάσουμε ισότητες κατά μέλη, προκύπτει ισότητα**

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

Αντιμεταθετικότητα

2.4 Η πρόσθεση στο $\mathbb{R}$ ειναι **αντιμεταθετική.** Αυτή τη γνωστή μας ιδιότητα δηλώνει το επόμενο αξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ Ι

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y είναι:**
> $$x+y = y+x$$

Προσεταιριστικότητα

2.5 Η πρόσθεση στο $\mathbb{R}$ είναι **προσεταιριστική.** Δηλαδή δεχόμαστε ότι

ΑΞΙΩΜΑ ΙΙ

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, z είναι:**
> $$(x+y)+z = x+(y+z)$$

Γενίκευση αθροίσματος

2.6 Ορίζουμε ως άθροισμα $x_1+x_2+x_3$ των αριθμών x_1,x_2,x_3 το $(x_1+x_2)+x_3$. Οπότε σύμφωνα με το αξίωμα ΙΙ θα είναι:

$$x_1+x_2+x_3 = (x_1+x_2)+x_3 = x_1+(x_2+x_3).$$

Γενικότερα, για κάθε $\nu \geq 3$ ορίζουμε ως άθροισμα $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ των αριθμών $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ το άθροισμα $(x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1})+x_\nu$. Δηλαδή είναι:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_\nu = [\ldots[\,[(x_1+x_2)+x_3]+x_4]+\ldots+x_{\nu-1}]+x_\nu$$

Αλλά με τους ίδιους προσθετέους και χωρίς να αλλάζουμε τη διάταξή τους θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε και άλλα αθροίσματα, όπως π.χ. το

$$x_1+[x_2+(x_3+x_4)]+x_5+\ldots+(x_{\nu-1}+x_\nu).$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο, όλα αυτά τα αθροίσματα συμπίπτουν. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται τό εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

> **Κάθε άθροισμα που μπορεί να σχηματιστεί με τους προσθετέους $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ ($\nu \geq 3$) που λαμβάνονται με αυτή τη διάταξη, ισούται με**
> $$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_\nu$$

★ **Απόδειξη.** Η πρόταση αληθεύει για $\nu = 3$ (Αξ. ΙΙ). Για να αποδείξουμε ότι ισχύει γενικά, αρκεί, υποθέτοντας ότι ισχύει για κάθε $k < \nu$, να αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k=\nu$ (§1.35). Πράγματι ένα οποιοδήποτε άθροισμα με τους $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ καταλήγει τελικά σε άθροισμα δύο προσθετέων $\alpha+\beta$, όπου ο α σχηματίζεται από ορισμένους προσθετέους $x_1,x_2,\ldots,x_\lambda$ και ο β από τους υπόλοιπους $x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2},\ldots,x_\nu$. Επειδή το πλήθος των προσθετέων τόσο του α όσο και του β δεν υπερβαίνει το $\nu-1$, θα έχουμε σύμφωνα με την υπόθεση που κάναμε

$$\alpha = x_1+x_2+\ldots+x_\lambda \qquad \text{και}$$
$$\beta = x_{\lambda+1}+x_{\lambda+2}+\ldots+x_\nu$$
$$= (x_{\lambda+1}+\ldots+x_{\nu-1})+x_\nu = \beta'+x_\nu \quad ^{(1)}$$

(1) Οι ειδικές περιπτώσεις $\alpha = x_1$, και $\beta=x_\nu$, οπότε $\beta'=0$, δε βλάπτουν τη γενικότητα της αποδείξεως.

Άρα $\alpha+\beta = \alpha+[\beta'+x_\nu] = (\alpha+\beta')+x_\nu$ [προσεταιριστικότητα]

$= (x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1})+x_\nu$ [σύμφωνα με την υπόθεσή μας]

$= x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1}+x_\nu$ [ορισμός αθροίσματος]

Επίσης ισχύει το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

> **Το άθροισμα $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ είναι ανεξάρτητο από τη διάταξη των προσθετέων του**

✶ **Απόδειξη.** Μπορούμε να αντιμεταθέσουμε δύο διαδοχικούς προσθετέους. Πράγματι σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_\lambda+x_{\lambda+1}+\ldots+x_\nu &= x_1+x_2+\ldots+(x_\lambda+x_{\lambda+1})+\ldots+x_\nu \\ &= x_1+x_2+\ldots+(x_{\lambda+1}+x_\lambda)+\ldots+x_\nu \\ &= x_1+x_2+\ldots+x_{\lambda+1}+x_\lambda+\ldots+x_\nu. \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι [1] οποιαδήποτε αναδιάταξη των προσθετέων ενός αθροίσματος προκύπτει από αντιμεταθέσεις διαδοχικών προσθετέων.

Από τα προηγούμενα δύο θεωρήματα προκύπτει ότι

ΠΟΡΙΣΜΑ

> **Κάθε άθροισμα που μπορεί να σχηματιστεί με τους αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, με οποιαδήποτε διάταξη και αν ληφθούν, μια φορά ο καθένας, ισούται με $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$**

Ουδέτερο στοιχείο

2.7 Ο αριθμός 0 χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα, που τη δεχόμαστε ως αξίωμα

ΑΞΙΩΜΑ III

> **Για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι $x+0 = x$**

Από την αντιμεταθετικότητα της προσθέσεως προκύπτει ότι

$$x+0 = 0+x = x$$

Ο αριθμός 0 λοιπόν, επειδή, όταν προστίθεται με οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, δεν τον μεταβάλλει, λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** ως προς την πρόσθεση. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι άλλος αριθμός δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Γιατί, αν και ο αριθμός θ ήταν ουδέτερο στοιχείο, τότε θα είχαμε:

(1) $0+\theta = \theta$ [επειδή ο 0 είναι ουδέτερο στοιχείο]

(2) $0+\theta = 0$ [επειδή ο θ είναι ουδέτερο στοιχείο]

(1) Η απόδειξη αυτή υπερβαίνει τις δυνατότητες της τάξεως.

Το άθροισμα όμως $0+\theta$ είναι μοναδικό. Συνεπώς από τις (1) και (2) προκύπτει $\theta = 0$. Άρα

ΠΟΡΙΣΜΑ

> **Ο αριθμός 0 είναι το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση**

Ύπαρξη αντιθέτου

2.8 Οι πραγματικοί αριθμοί παρουσιάζουν μια «συμμετρία» ως προς το μηδέν, η οποία περιγράφεται ως εξής:

ΑΞΙΩΜΑ IV (1)

> **Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει πραγματικός αριθμός x′ τέτοιος, ώστε $x+x' = 0$**

Επειδή η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική, θα είναι και $x'+x = 0$. Οι αριθμοί x και x′ που έχουν άθροισμα μηδέν λέγονται **αντίθετοι.**

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

> **Για κάθε πραγματικό αριθμό υπάρχει ένας μόνο αντίθετός του**

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι αντίθετος του πραγματικού αριθμού x εκτός από τον x′ είναι και ο x″. Δηλαδή έχουμε $x+x' = 0$ και $x+x'' = 0$. Άρα:

$x' = x'+0$ [ο 0 ουδέτερο στοιχείο]

$= x'+(x+x'')$ [ο x″ αντίθετος του x, $x+x''=0$]

$= (x'+x)+x''$ [προσεταιριστικότητα]

$= 0+x''$ [ο x′ αντίθετος του x, $x+x'=0$]

$= x''$

Δηλαδή ο x′ και ο x″ συμπίπτουν.

Ο μοναδικός αντίθετος του x συμβολίζεται **−x**. Άρα

$$x+(-x) = 0 \qquad (1)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η εξίσωση $x+\alpha=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα τον αριθμό $-\alpha$.
2. Από την ισότητα $0+0 = 0$ προκύπτει ότι αντίθετος του 0 είναι ο 0.
3. Το σύμβολο $-(-x)$ παριστάνει τον αντίθετο του $-x$. Αλλά μοναδικός αντίθετος του $-x$, όπως δείχνει η (1), είναι ο x. Δηλαδή $-(-x) = x$. Ώστε έχουμε:

(1) Συμβολικά διατυπώνεται $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' = 0$ ή απλούστερα $\forall x, \exists x', x + x' = 0$. Παρατηρήστε ότι οι ποσοδείκτες $\forall$, $\exists$ δεν είναι αντιμεταθέσ

> **Ο αντίθετος του αντιθέτου ενός αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχθεί ότι ο αντίθετος ενός αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των αντιθέτων των προσθετέων του. Δηλαδή**

$$-(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)=(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)+[(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu)]=0.$ Είναι:

$(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)+[(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu)]=$

$=x_1+x_2+\ldots+x_\nu+(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu)$ [Θεώρ. 1]

$=[x_1+(-x_1)]+[x_2+(-x_2)]+\ldots+[x_\nu+(-x_\nu)]$ [§ 2.6 Πόρ.]

$=0+0+\ldots+0$

$=0.$

2. **Αν $x=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)$ και $y=\beta+\gamma+(-\alpha)$, να αποδειχθεί ότι οι x και y είναι αντίθετοι αριθμοί.**

Πρέπει να δείξουμε ότι $x+y=0$. Είναι:

$x+y=[\alpha+(-\beta)+(-\gamma)]+[\beta+\gamma+(-\alpha)]$

$=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\beta+\gamma+(-\alpha)$

$=[\alpha+(-\alpha)]+[\beta+(-\beta)]+[\gamma+(-\gamma)]$

$=0+0+0$

$=0.$

Ασκήσεις 1,2,3,4.

Νόμος της διαγραφής στην πρόσθεση

2.9 Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι, αν διαγράψουμε από τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο προσθετέο, προκύπτει και πάλι ισότητα. Αυτή την ιδιότητα την εκφράζουμε ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, x, y ισχύει η συνεπαγωγή**
> $$\alpha+x=\alpha+y \;\Rightarrow\; x=y$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\alpha+x=\alpha+y$. Έχουμε:

$\alpha+x=\alpha+y$ [υπόθεση]

$(-\alpha)+(\alpha+x)=(-\alpha)+(\alpha+y)$ [προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $-\alpha$]

$[(-\alpha)+\alpha]+x=[(-\alpha)+\alpha]+y$ [προσεταιριστικότητα]

$0+x=0+y$ [άθροισμα αντιθέτων]

$x=y$ [ο 0 ουδέτερο στοιχείο]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδή, όπως γνωρίζουμε (§ 2.2), ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή $x=y \Rightarrow \alpha+x=\alpha+y$, θα ισχύει στο $\mathbb{R}$ η ισοδυναμία

$$\boxed{\alpha+x=\alpha+y \;\Leftrightarrow\; x=y}$$

Στην παραπάνω ισοδυναμία στηρίζεται και ο γνωστός «κανόνας»:

> **Αν από τα δύο μέλη μιας εξισώσεως στο $\mathbb{R}$ διαγράψουμε τον ίδιο προσθετέο ή στα μέλη της προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, προκύπτει εξίσωση ισοδύναμη**

Η αφαίρεση στο $\mathbb{R}$

2.10 Ο ορισμός της αφαιρέσεως στο $\mathbb{R}$ στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5

> **Αν δοθούν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β, υπάρχει ένας μόνο πραγματικός αριθμός x τέτοιος, ώστε να είναι**
> $$\beta+x=\alpha$$

Απόδειξη. Η εξίσωση $\beta+x=\alpha$ είναι ισοδύναμη με τις επόμενες:

$(-\beta)+(\beta+x)=(-\beta)+\alpha$ [προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον $-\beta$]

$[(-\beta)+\beta]+x=(-\beta)+\alpha$ [προσεταιριστικότητα]

$0+x=(-\beta)+\alpha$ [άθροισμα αντιθέτων]

$x=\alpha+(-\beta)$ [ουδέτερο στοιχείο και αντιμεταθετικότητα]

Μοναδική ρίζα της τελευταίας εξισώσεως, άρα και της αρχικής $\beta+x=\alpha$, είναι ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha+(-\beta)}$ που γράφεται απλούστερα $\boldsymbol{\alpha-\beta}$ και ονομάζεται **διαφορά του β από τον α**. Έχουμε λοιπόν την ισοδυναμία

$$\beta+x=\alpha \;\Leftrightarrow\; x=\alpha-\beta \qquad (1)$$

Επομένως η διαφορά $\alpha-\beta$ είναι ο μοναδικός αριθμός που, όταν προστεθεί στο β, δίνει άθροισμα α, δηλαδή

$$\beta+(\alpha-\beta)=\alpha$$

Η πράξη, με την οποία σε κάθε ζεύγος αριθμών (α,β) αντιστοιχίζεται η διαφορά τους $\alpha-\beta$, λέγεται **αφαίρεση.**

Η απλούστερη γραφή $\alpha-\beta$ αντί της $\alpha+(-\beta)$ υιοθετείται και για το άθροισμα με περισσότερους προσθετέους. Έτσι π.χ. το άθροισμα $\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\delta$ γράφεται $\alpha-\beta-\gamma+\delta$ και σημαίνει $[(\alpha-\beta)-\gamma]+\delta$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην ισοδυναμία (1) στηρίζεται ο γνωστός «κανόνας» της μεταφοράς ενός όρου εξισώσεως από το ένα μέλος της στο άλλο, αφού προηγουμένως αλλαχθεί το πρόσημό του.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχθεί ότι $\alpha - 0 = \alpha$, $0 - \alpha = -\alpha$, $\alpha - \alpha = 0$.**

Από την ισοδυναμία (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} 0+\alpha = \alpha &\Leftrightarrow \alpha = \alpha - 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = \alpha - \alpha \\ &\Leftrightarrow 0 - \alpha = -\alpha \end{aligned}$$

2. **Να αποδειχθεί ότι $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) = \alpha - \beta$.**

Αν $x = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} x = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) &\Leftrightarrow x + (\beta+\gamma) = \alpha+\gamma \\ &\Leftrightarrow x+\beta+\gamma = \alpha+\gamma \\ &\Leftrightarrow x+\beta = \alpha \\ &\Leftrightarrow x = \alpha-\beta \end{aligned}$$

3. **Να αποδειχθεί ότι $-(x-y-z+\varphi) = -x+y+z-\varphi$.**

Είναι: $-(x-y-z+\varphi) = -[x+(-y)+(-z)+\varphi]$
$= -x+[-(-y)]+[-(-z)]+(-\varphi)$ [§ 2.8. Εφ. 1]
$= -x+y+z-\varphi$

4. **Να βρεθεί το άθροισμα $A = (\alpha-\beta+\gamma)-(\alpha-\beta-\kappa)+(-\kappa+\lambda)$.**

Είναι $A = \alpha-\beta+\gamma-\alpha+\beta+k-k+\lambda$
$= (\alpha-\alpha)+(-\beta+\beta)+(k-k)+\gamma+\lambda$
$= 0+0+0+\gamma+\lambda$
$= \gamma+\lambda$

Ασκήσεις 5,6.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

Αντιμεταθετικότητα

2.11 Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{R}$ είναι **αντιμεταθετικός.** Αυτή τη γνωστή μας ιδιότητα δηλώνει το επόμενο αξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ V

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y είναι:**
> $$xy = yx$$

Προσεταιριστικότητα

2.12 Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{R}$ είναι **προσεταιριστικός.** Δηλαδή δεχόμαστε ότι

ΑΞΙΩΜΑ VI

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, z ειναι:**
> $$(xy)z = x(yz)$$

Γενίκευση γινομένου

2.13 Ορίζουμε ως γινόμενο $x_1x_2x_3$ των αριθμών x_1,x_2,x_3 το $(x_1x_2)x_3$, οπότε, σύμφωνα με το αξίωμα VI, θα είναι

$$x_1x_2x_3 = (x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3).$$

Γενικότερα, για κάθε $\nu \geq 3$ ορίζουμε ως γινόμενο $x_1x_2x_3\ldots x_\nu$ των αριθμών $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ το γινόμενο $(x_1x_2\ldots x_{\nu-1})x_\nu$. Δηλαδή είναι :

$$x_1x_2x_3\ldots x_\nu = [\ldots[[(x_1x_2)x_3]x_4]x_5\ldots x_{\nu-1}]x_\nu$$

Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία, όπως και στην πρόσθεση (§ 2.6), αποδεικνύεται ότι

ΘΕΩΡΗΜΑ 6

> **Κάθε γινόμενο που μπορεί να σχηματιστεί με τους αριθμούς $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$, με οποιαδήποτε διάταξη και αν ληφθούν, μια φορά ο καθένας, ισούται με $x_1x_2x_3\ldots x_\nu$**

Δυνάμεις

2.14 Αν α είναι πραγματικός αριθμός και ν είναι **φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός,** ορίζουμε ότι

$$\alpha^\nu = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \nu = 1 \\ \alpha^{\nu-1}\alpha = \underbrace{\alpha\,\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{\nu}, & \text{αν } \nu > 1 \end{cases}$$

Το σύμβολο α^ν ονομάζεται **δύναμη** με **βάση** το α και **εκθέτη** το ν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Είναι φανερό (§ 2.3) ότι ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^2=\beta^2$ και γενικά για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ (αποδεικνύεται επαγωγικά) η

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$$

Για τις δυνάμεις με εκθέτη φυσικό αριθμό διάφορο του μηδενός αποδεικνύεται ότι

ΘΕΩΡΗΜΑ 7

Αν α,β είναι πραγματικοί αριθμοί και κ, λ φυσικοί αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν, ισχύουν:

$$\alpha^{\kappa}\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$$
$$(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$$
$$(\alpha\,\beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa}\beta^{\kappa}$$

Το θεώρημα αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της δυνάμεως και του θεωρ. 6.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθεί το γινόμενο** $A = (-3x^2yz^3)\left(-\frac{2}{5}xy^5\right)(15x^5y^7z)$.

Είναι $A = -3x^2yz^3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)xy^5\cdot 15x^5y^7z$

$= [(-3)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 15]\cdot(x^2xx^5)(yy^5y^7)(z^3z)$

$= 18x^8y^{13}z^4.$

2. **Να βρεθεί η τιμή της παραστάσεως** $B = (-2\alpha^2\beta\gamma^3)^3$ **γιά** $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

Είναι $B = (-2)^3(\alpha^2)^3\beta^3(\gamma^3)^3$

$= -8\alpha^6\beta^3\gamma^9$. Οπότε για $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=1$ θα έχουμε

$B = -8(-1)^6 2^3 1^9$

$= -8\cdot 1\cdot 8\cdot 1$

$= -64.$

Άσκηση 7.

Επιμεριστικότητα

2.15 Το επόμενο αξίωμα συνδέει τον πολλαπλασιασμό με την πρόσθεση:

ΑΞΙΩΜΑ VII

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, z είναι

$$x\,(y+z) = xy+xz$$

Επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετική πράξη, θα είναι:

$$(y+z)x = x(y+z) = xy+xz = yx+zx.$$

Έχουμε λοιπόν $x(y+z) = xy+xz$ και $(y+z)x = yx+zx$, πράγμα που σημαίνει ότι ο πολλαπλασιασμός είναι **επιμεριστικός** ως προς την πρόσθεση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8

Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού επί το μηδέν είναι ίσο με το μηδέν. Δηλαδή

$$\forall x,\quad x\cdot 0 = 0$$

Απόδειξη. Είναι:

$y+0 = y$ [ο 0 ουδέτερο στοιχείο]

$x(y+0) = xy$ [πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί x]

$xy+x0 = xy$ [επιμεριστικότητα]

$x0 = 0$ [νόμος της διαγραφής στην πρόσθεση]

Ουδέτερο στοιχείο

2.16 Ο αριθμός 1 χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα που τη δεχόμαστε ως αξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ VIII

Για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι

$$1\,x = x$$

Από την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού προκύπτει ότι είναι

$$1\,x = x\,1 = x.$$

Ο αριθμός 1 λοιπόν, επειδή, όταν πολλαπλασιαστεί με οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, δεν τον μεταβάλλει, λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι άλλος αριθμός δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Γιατί, αν και ο αριθμός ε ήταν ουδέτερο στοιχείο, τότε θα είχαμε:

(1) $1\varepsilon = \varepsilon$ [επειδή ο 1 είναι ουδέτερο στοιχείο]

(2) $1\varepsilon = 1$ [επειδή ο ε είναι ουδέτερο στοιχείο]

Το γινόμενο όμως 1ε είναι μοναδικό. Συνεπώς από τις (1) καί (2) προκύπτει $\varepsilon = 1$. Άρα

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ο αριθμός 1 είναι το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό

ΘΕΩΡΗΜΑ 9

Αν ένας πραγματικός αριθμός πολλαπλασιαστεί επί −1, δίνει τον αντίθετό του. Δηλαδή

$$\forall x,\quad (-1)\,x = -x$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο $(-1)x$ είναι αντίθετος του x. Δηλαδή $(-1)x+x=0$. Είναι:

$$\begin{aligned}(-1)x+x &= (-1)x+1\,x && [\text{γιατί } 1\,x = x \text{ Αξ. VIII}]\\ &= [(-1)+1]x && [\text{επιμεριστικότητα}]\\ &= 0x && [\text{άθροισμα αντιθέτων}]\\ &= 0 && [\text{Θεώρ. 8}]\end{aligned}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y είναι:

1. $(-x)\,y = -xy$
2. $(-x)(-y) = xy$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχθεί ότι $(\alpha-\beta)\,\gamma = \alpha\gamma-\beta\gamma$.

Είναι: $$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\gamma &= [\alpha+(-\beta)]\gamma\\ &= \alpha\gamma+(-\beta)\gamma\\ &= \alpha\gamma+(-\beta\gamma)\\ &= \alpha\gamma-\beta\gamma.\end{aligned}$$

2. Να αποδειχθεί ότι $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$.

Είναι: $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) &= \alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)\\ &= \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta.\end{aligned}$$

3. Να βρεθεί το γινόμενο $A = (2x^2+3xy)(5xy-3x^2)$.

Είναι: $$\begin{aligned}A &= 2x^2\,5xy+2x^2(-3x^2)+3xy\,5xy+3xy\,(-3x^2)\\ &= 2.5x^2xy+2(-3)\,x^2x^2+3.5\,xxyy+3(-3)xx^2y\\ &= 10x^3y-6x^4+15x^2y^2-9x^3y\\ &= (10-9)x^3y-6x^4+15x^2y^2\\ &= x^3y-6x^4+15x^2y^2.\end{aligned}$$

4. Να αποδειχθούν οι ισότητες:

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha.$

Είναι: $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\\ &= \alpha\alpha+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta\beta\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2\\ &= \alpha^2+(1+1)\alpha\beta+\beta^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= [\alpha+(-\beta)]^2\\ &= \alpha^2+2\alpha(-\beta)+(-\beta)^2\\ &= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) &= \alpha\alpha+\alpha(-\beta)+\beta\alpha+\beta(-\beta)\\ &= \alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^2 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^2\\ &= (\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2\\ &= \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta+(2\gamma)(\alpha+\beta)+\gamma^2\\ &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\gamma\alpha+2\gamma\beta\\ &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha.\end{aligned}$$

5. Να αποδειχθεί ότι είναι:

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

Είναι: $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)\\ &= (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)\\ &= \alpha^2\alpha+\alpha^2\beta+2\alpha\beta\alpha+2\alpha\beta\beta+\beta^2\alpha+\beta^2\beta\\ &= \alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+(1+2)\alpha^2\beta+(2+1)\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^3 &= [\alpha+(-\beta)]^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2(-\beta)+3\alpha(-\beta)^2+(-\beta)^3\\ &= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha\alpha^2-\alpha\alpha\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\beta\,\alpha\beta+\beta\,\beta^2\\ &= \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+\beta^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) &= [\alpha+(-\beta)][\alpha^2-\alpha(-\beta)+(-\beta)^2]\\ &= \alpha^3+(-\beta)^3 = \alpha^3-\beta^3.\end{aligned}$$

Ασκήσεις 8,9,10,11.

Ύπαρξη αντιστρόφου

2.17 Συμπληρώνουμε τις βασικές (1) ιδιότητες του $\mathbb{R}$ με το επόμενο

ΑΞΙΩΜΑ IX (2)

Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \neq 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός x' τέτοιος, ώστε
$$xx' = 1$$

Επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός, θα είναι και
$$xx' = x'x = 1$$

Οι αριθμοί x και x΄ που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο περιορισμός $x \neq 0$ είναι απαραίτητος, γιατί αντίστροφος του 0 δεν υπάρχει, αφού $\forall\, x,\ x\cdot 0 = 0 \neq 1$.

(1) Εννοούμε αυτές που διατυπώνονται με τα αξιώματα I–IX και που, όπως θα μάθουμε, εκφράζονται συνοπτικά με την πρόταση «το $\mathbb{R}$ είναι αντιμεταθετικό σώμα».
(2) Συμβολικά $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \exists\, x' \in \mathbb{R},\ xx'=1$ $(\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10

> **Για κάθε πραγματικό αριθμό διαφορετικό από το μηδέν υπάρχει ένας μόνο αντίστροφός του**

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι αντίστροφος του πραγματικού αριθμού x $(x \neq 0)$ είναι εκτός από το x' και ο x''. Δηλαδή είναι $xx' = 1$ και $xx'' = 1$. Άρα

$$\begin{aligned} x' &= x'\,1 && [\text{ο } 1 \text{ ουδέτερο στοιχείο}] \\ &= x'(xx'') && [\text{γιατί } xx'' = 1] \\ &= (x'\,x)\,x'' && [\text{προσεταιριστικότητα}] \\ &= 1\,x'' && [\text{γιατί } x'x = 1] \\ &= x'' && [\text{ο } 1 \text{ ουδέτερο στοιχείο}] \end{aligned}$$

Δηλαδή οι x' και x'' συμπίπτουν.

Ο μοναδικός αντίστροφος του x $(x \neq 0)$ συμβολίζεται $\frac{1}{x}$. Έχουμε λοιπόν

$$x\,\frac{1}{x} = 1 \qquad (1)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η εξίσωση $\alpha x = 1$, όταν $\alpha \neq 0$, έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα το $\frac{1}{\alpha}$.
2. Από την ισότητα $1 \cdot 1 = 1$ προκύπτει ότι ο αντίστροφος του 1 είναι ο 1.
3. Επειδή $x\,\frac{1}{x} = 1 \neq 0$, είναι καί $\frac{1}{x} \neq 0$.
4. Το σύμβολο $\dfrac{1}{\frac{1}{x}}$ παριστάνει τον αντίστροφο του $\frac{1}{x}$. Αλλά μοναδικός αντίστροφος του $\frac{1}{x}$, όπως δείχνει η (1), είναι ο x.

   Δηλαδή είναι $\dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Ώστε:

> **Ο αντίστροφος του αντιστρόφου ενός αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχθεί ότι: Ο αντίστροφος ενός γινομένου ισούται με το γινόμενο των αντιστρόφων των παραγόντων του. Δηλαδή**

$$\frac{1}{x_1x_2\ldots x_\nu} = \frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_\nu}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(x_1x_2\ldots x_\nu)\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_\nu}\right) = 1. \quad \text{Είναι:}$$

$$(x_1x_2\ldots x_\nu)\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\,\cdots\,\frac{1}{x_\nu}\right) = x_1x_2\ldots x_\nu\,\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_\nu}$$

$$= \left(x_1\,\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2\,\frac{1}{x_2}\right)\,\ldots\,\left(x_\nu\,\frac{1}{x_\nu}\right) = 1.1\ldots1 = 1.$$

2. **Να αποδειχθεί ότι είναι** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = (x+y)\,\frac{1}{xy}$ $\qquad (xy \neq 0)$.

Είναι

$$\begin{aligned} (x+y)\frac{1}{xy} &= x\,\frac{1}{xy} + y\,\frac{1}{xy} && [\text{επιμεριστικότητα}] \\ &= x\left(\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\right) + y\left(\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\right) && [\text{προηγούμενη εφαρμογή}] \\ &= \left(x\,\frac{1}{x}\right)\frac{1}{y} + \left(y\,\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x} && [\text{προσεταιριστικότητα}] \\ &= 1\,\frac{1}{y} + 1\,\frac{1}{x} && [\text{γινόμενο αντιστρόφων}] \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 11

> **Αν το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι μηδέν, τότε ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι μηδέν. Δηλαδή**
> $\forall x, \forall y,\ xy = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ ή $y = 0$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $xy = 0$. Επειδή είναι ή $x = 0$ ή $x \neq 0$, αρκεί να αποδείξουμε την «$x = 0$ ή $y = 0$» για $x \neq 0$, αφού για $x = 0$ αυτή αληθεύει. Πράγματι, αν $x \neq 0$, τότε ορίζεται ο $\frac{1}{x}$ και θα είναι

$$\frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}\cdot 0 \quad \left[\text{πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της } xy = 0 \text{ επί } \frac{1}{x}\right]$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x}\,x\right)y &= 0 && [\text{προσεταιριστικότητα}] \\ 1\,y &= 0 && [\text{γινόμενο αντιστρόφων}] \\ y &= 0 && [\text{ο } 1 \text{ ουδέτερο στοιχείο}] \end{aligned}$$

Οπότε αληθεύει και η «$x = 0$ ή $y = 0$».

Το αντίστροφο του θεωρήματος προκύπτει από το θεώρ. 8. Άρα έχουμε

$$xy = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\text{ ή }\; y = 0$$

Γενικότερα ισχύει: $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$ ή $\alpha_2 = 0$ ή…ή $\alpha_\nu = 0$

ΠΟΡΙΣΜΑ $\quad \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_\nu \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \neq 0$ και $\alpha_2 \neq 0$ και… και $\alpha_\nu \neq 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση $x^2-1=0$.

Είναι $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)=0$
$\Leftrightarrow x+1=0$ ή $x-1=0$
$\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

Ασκήσεις 12,13,14,15,16.

Νόμος της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό

2.18 Η ιδιότητα της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό εκφράζεται ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 12

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,x,y με $\alpha \neq 0$ ισχύει

$$\alpha x = \alpha y \Rightarrow x = y$$

Απόδειξη

Είναι: $\alpha x = \alpha y$ [υπόθεση]

$\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}(\alpha y)$ [πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί $\frac{1}{\alpha}$]

$\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)x = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)y$ [προσεταιριστικότητα]

$1\,x = 1\,y$ [γινόμενο αντιστρόφων]

$x = y$ [ο 1 ουδέτερο στοιχείο]

Επειδή όμως γνωρίζουμε ότι ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή για $\alpha \neq 0$, θα έχουμε την ισοδυναμία:

$$\boxed{\alpha x = \alpha y \Leftrightarrow x = y}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Με εφαρμογή των νόμων διαγραφής νά λυθεί η εξίσωση $3x+5=11$.

$3x+5=11 \Leftrightarrow 3x+5=6+5$
$\Leftrightarrow 3x=6$ [ν. διαγραφής στην πρόσθεση]
$\Leftrightarrow 3x=3.2$
$\Leftrightarrow x=2$ [ν. διαγραφής στον πολλαπλασιασμό]

Διαίρεση

2.19 Ο ορισμός της διαιρέσεως στο $\mathbb{R}$ στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 13

Αν δοθούν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β με $\beta \neq 0$, υπάρχει ένας μόνο πραγματικός αριθμός x τέτοιος, ώστε να είναι:

$$\beta x = \alpha$$

Απόδειξη. Έχουμε

$\beta x = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\beta}(\beta x) = \frac{1}{\beta}\alpha$ [πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί $\frac{1}{\beta}$]

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\beta}\beta\right)x = \frac{1}{\beta}\alpha$ [προσεταιριστικότητα]

$\Leftrightarrow 1\,x = \frac{1}{\beta}\alpha$ [γινόμενο αντιστρόφων]

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\beta}\alpha$ [ο 1 ουδέτερο στοιχείο]

Μοναδική ρίζα της τελευταίας εξισώσεως, άρα και της αρχικής $\beta x = \alpha$, είναι ο αριθμός $\frac{1}{\beta}\alpha$ που γράφεται απλούστερα $\frac{\alpha}{\beta}$ ή $\alpha : \beta$ και ονομάζεται **πηλίκο** του α διά β. Έχουμε λοιπόν για $\beta \neq 0$ την ισοδυναμία

$$\beta x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta} \qquad (1)$$

Επομένως το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ο μοναδικός αριθμός που, όταν πολλαπλασιαστεί με το β, δίνει γινόμενο α. Δηλαδή είναι

$$\beta\frac{\alpha}{\beta} = \alpha$$

Η πράξη με την οποία σε κάθε ζεύγος αριθμών (α,β) με $\beta \neq 0$ αντιστοιχίζεται το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται **διαίρεση.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχθεί ότι $\frac{\alpha}{1} = \alpha$, $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$ $(\alpha \neq 0)$.**

Από την ισοδυναμία $\beta x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$ έχουμε

$1\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha}{1}$ και (αν $\alpha \neq 0$)

$\Leftrightarrow 1 = \frac{\alpha}{\alpha}$.

2. **Να αποδειχθεί ότι, αν $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq 0$, είναι**

$$(1)\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \quad \text{και} \quad (2)\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}.$$

(1) Αν $x = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}$, θα έχουμε τις ισοδυναμίες

$$x = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \Leftrightarrow (\beta\gamma)x = \alpha\gamma$$
$$\Leftrightarrow (\beta x)\gamma = \alpha\gamma$$
$$\Leftrightarrow \beta x = \alpha$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}. \quad \text{Άρα } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}.$$

(2) Σύμφωνα με την (1) είναι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \frac{1}{\gamma}}{\beta \frac{1}{\gamma}} = \frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}.$$

3. **Αν $y \neq 0$, είναι** $-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$.

Είναι $-\frac{x}{y} = (-1)\ \frac{x}{y} = (-1)\left(x\ \frac{1}{y}\right) = [(-1)\ x]\ \frac{1}{y} = (-x)\frac{1}{y}$

$$= \frac{-x}{y} = \frac{(-1)\,(-x)}{(-1)y} = \frac{x}{-y}.$$

4. **Όταν προσθέτουμε ομώνυμα κλάσματα, σχηματίζουμε ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή τον ίδιο.**

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το άθροισμα $\frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ $(z \neq 0)$.

Είναι $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{1}{z}\ x + \frac{1}{z}\ y$

$$= \frac{1}{z}\ (x+y) = \frac{x+y}{z}.$$

5. **Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο κλάσματα, σχηματίζουμε ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.**

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το γινόμενο $\frac{x}{y}\ \frac{z}{\varphi}$ $(y\varphi \neq 0)$. Είναι

$$\frac{x}{y}\ \frac{z}{\varphi} = \left(\frac{1}{y}\,x\right)\left(\frac{1}{\varphi}\,z\right) = \frac{1}{y}\ x\ \frac{1}{\varphi}\ z \ (\text{Θεωρ. } 6)$$
$$= \left(\frac{1}{y}\ \frac{1}{\varphi}\right)(xz) = \frac{1}{y\varphi}\ (xz)\ (\S\ 2.17\ \text{Εφαρ. } 1) = \frac{xz}{y\varphi}.$$

Παρατηρήστε ότι οι αριθμοί $\frac{x}{y}$ και $\frac{y}{x}$ είναι αντίστροφοι.

6. **Αν α,β είναι πραγματικοί αριθμοί, όπου $\beta \neq 0$ και ν είναι φυσικός αριθμός ≥ 1, θα είναι** $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του πηλίκου είναι $\alpha = \frac{\alpha}{\beta}\,\beta$. Έτσι έχουμε

$$\alpha^{\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\,\beta\right)^{\nu} \qquad [\S\ 2\cdot14\ \text{παρατ.}]$$
$$\alpha^{\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}\beta^{\nu} \qquad [\text{ύψωση γινομένου σε δύναμη}]$$
$$\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}. \qquad [\text{ορισμός πηλίκου}]$$

7. **Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\delta \neq 0$, να δειχθεί ότι**
$$(\alpha - \beta + \gamma):\delta = (\alpha:\delta) - (\beta:\delta) + (\gamma:\delta).$$

Είναι $(\alpha-\beta+\gamma) : \delta = (\alpha-\beta+\gamma)\ \frac{1}{\delta}$

$$= \alpha\frac{1}{\delta} - \beta\frac{1}{\delta} + \gamma\frac{1}{\delta}$$
$$= (\alpha : \delta) - (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$$

Ασκήσεις 17,18,19,20,21.

Δύναμη με εκθέτη ακέραιο

2.20 Ας προσπαθήσουμε να βρούμε το πηλίκο $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = x$, όπου $\alpha \neq 0$ και κ,λ φυσικοί διάφοροι του μηδενός.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\kappa > \lambda$. Αφού $\kappa > \lambda$, θα υπάρχει φυσικός $\nu \neq 0$ τέτοιος, ώστε $\kappa = \lambda + \nu$ ή $\kappa - \lambda = \nu$. Οπότε θα έχουμε:

$$x = \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} \Leftrightarrow x\,\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa} \Leftrightarrow x\alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda+\nu} \Leftrightarrow x\alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda}\,\alpha^{\nu} \Leftrightarrow x = \alpha^{\nu} = \alpha^{\kappa-\lambda}.$$

Έχουμε λοιπόν για $\kappa > \lambda$, $\quad \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$ **(1)**

Τι συμβαίνει τώρα, όταν $\kappa = \lambda$ ή $\kappa < \lambda$; Ας δούμε τις δύο αυτές περιπτώσεις χωριστά.

- Έστω $\kappa = \lambda$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του πηλίκου είναι $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\kappa}} = 1$. (2)

Αλλά, αν θέλουμε να ισχύει και στην περίπτωση αυτή η (1), θα έχουμε

$$\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\kappa}} = \alpha^{\kappa-\kappa} = \alpha^{0}. \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι, για να ισχύει η (1) και όταν $\kappa = \lambda$, θα πρέπει να είναι $\quad \boldsymbol{\alpha^{0} = 1}$

- Έστω $\kappa < \lambda$

Τότε θα υπάρχει φυσικός αριθμός $\nu \neq 0$ τέτοιος, ώστε $\lambda = \kappa + \nu$ ή $\lambda - \kappa = \nu$.

Άρα $x = \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} \Leftrightarrow x\alpha^\lambda = \alpha^\kappa \Leftrightarrow x\alpha^{\kappa+\nu} = \alpha^\kappa \Leftrightarrow x\alpha^\kappa \alpha^\nu = \alpha^\kappa \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha^\nu}$

Δηλαδή $$\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \frac{1}{\alpha^\nu}. \qquad (4)$$

Αν όμως υποθέσουμε ότι η (1) ισχύει και στην περίπτωση αυτή, θα είναι

$$\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda} = \alpha^{-\nu} \qquad (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι, για να ισχύει η (1) και όταν $\kappa < \lambda$, πρέπει να είναι $$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$$

Μετά από την προηγούμενη ανάλυση επεκτείνουμε τον ορισμό δυνάμεως με βάση $\alpha \neq 0$ ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ είναι :**
1. $\alpha^0 = 1$
2. $\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τον τρόπο με τον οποίο ορίσαμε το σύμβολο $\alpha^{-\nu}$, όταν ν φυσικός, προκύπτει ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς κ και λ και για $\alpha \neq 0$ ισχύει

$$\alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$$

Στο επόμενο θεώρημα συνοψίζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων πραγματικού αριθμού με εκθέτη ακέραιο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 14

Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και κ, λ είναι ακέραιοι, με την προϋπόθεση ότι όλα τα παρουσιαζόμενα σύμβολα έχουν νόημα, ισχύουν οι ισότητες
1. $\alpha^\kappa \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$
2. $\alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$
3. $(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa\lambda}$
4. $(\alpha\beta)^\kappa = \alpha^\kappa \beta^\kappa$
5. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa = \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}$

Απόδειξη

1. Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις :

α) $\kappa > 0 \quad \lambda > 0$. Έχει αποδειχθεί

β) $\kappa > 0 \quad \lambda < 0$. Είναι $\alpha^\kappa \alpha^\lambda = \alpha^\kappa \frac{1}{\alpha^{-\lambda}} = \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^{-\lambda}} = \alpha^{\kappa-(-\lambda)} = \alpha^{\kappa+\lambda}$

γ) $\kappa < 0$ και $\lambda < 0$. Είναι $\alpha^\kappa \alpha^\lambda = \frac{1}{\alpha^{-\kappa}} \frac{1}{\alpha^{-\lambda}} = \frac{1}{\alpha^{-\kappa-\lambda}} = \frac{1}{\alpha^{-(\kappa+\lambda)}} = \alpha^{\kappa+\lambda}$

δ) $\kappa = 0$ και $\lambda \neq 0$. Είναι $\alpha^0\alpha^\lambda = 1\ \alpha^\lambda = \alpha^\lambda = \alpha^{\lambda+0}$

ε) $\kappa = \lambda = 0$. Είναι προφανής.

Ομοίως αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να εκτελεστούν οι πράξεις

α) $\frac{-3x^2yz^{-2}}{4x^5yz}$, **β)** $(-3x^2y + 6x^4y^3 - 9xy^7) : 8x^2y^4$

α) Είναι $\frac{-3x^2yz^{-2}}{4x^5yz} = (-3x^2yz^{-2}) \frac{1}{4x^5yz}$

$= (-3x^2yz^{-2}) \cdot \left(\frac{1}{4} \frac{1}{x^5} \frac{1}{y} \frac{1}{z}\right) = (-3)x^2yz^{-2} \frac{1}{4} \frac{1}{x^5} \frac{1}{y} \frac{1}{z}$

$= \left[(-3) \frac{1}{4}\right] (x^2x^{-5})(yy^{-1})(z^{-2}z^{-1}) =$

$= \frac{-3}{4} x^{2-5}y^{1-1}z^{-2-1} = \frac{-3}{4} x^{-3}y^0z^{-3} = \frac{-3}{4} \frac{1}{x^3}\ 1\ \frac{1}{z^3} = \frac{-3}{4x^3z^3}.$

β) Είναι $(-3x^2y + 6x^4y^3 - 9xy^7) : 8x^2y^4 =$

$= \frac{-3x^2y}{8x^2y^4} + \frac{6x^4y^3}{8x^2y^4} - \frac{9xy^7}{8x^2y^4} = \frac{-3}{8y^3} + \frac{3x^2}{4y} - \frac{9y^3}{8x}.$

Ασκήσεις 22,23.

Λύση της εξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$

2.21 Η εξίσωση αυτή γράφεται $\alpha x = -\beta$ (1). Επομένως, αν $\alpha \neq 0$, σύμφωνα με το θεώρ. 13, η εξίσωση (1) θα έχει μια μοναδική ρίζα, την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$. Αν όμως $\alpha = 0$, η (1) γίνεται $0 \cdot x = -\beta$. Τότε, αν $\beta \neq 0$, δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που να την επαληθεύει, ενώ αν $\beta = 0$, επειδή θα είναι $0 \cdot x = 0$, επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας λύσεων της $\alpha x+\beta=0$	
$\alpha \neq 0$	η εξίσωση έχει μια μοναδική ρίζα, τη $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$
$\alpha=0$ και $\beta \neq 0$	η εξίσωση δεν έχει καμιά ρίζα (είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$)
$\alpha=0$ και $\beta=0$	η εξίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό (είναι ταυτότητα στο $\mathbb{R}$)

Αν οι συντελεστές α και β της $\alpha x+\beta=0$ είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, τότε αμέσως μπορούμε να βρούμε ποια από τις τρεις περιπτώσεις του προηγούμενου πίνακα ισχύει. Αν όμως οι συντελεστές α,β της $\alpha x+\beta=0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων, τότε, ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν τα γράμματα αυτά, μπορούμε πάλι να βρούμε σε ποια από τις τρεις περιπτώσεις του πίνακα αναγόμαστε.
Στη δεύτερη περίπτωση τα γράμματα, από τα οποία εξαρτώνται οι συντελεστές α,β της $\alpha x+\beta=0$, λέγονται **παράμετροι** και η εξίσωση **παραμετρική**, όπως π.χ. η εξίσωση $(\lambda-1)x+\lambda^2-1=0$.

Έτσι στη λύση μιας παραμετρικής εξισώσεως πρέπει να προσδιορίσουμε τα σύνολα των τιμών των παραμέτρων, για τα οποία η εξίσωση:

- έχει μιά ρίζα
- δεν έχει καμιά ρίζα (είναι αδύνατη)
- αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό (είναι ταυτότητα).

Στην πρώτη από τις περιπτώσεις αυτές βρίσκουμε και τη ρίζα της εξισώσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{x}{3}-\dfrac{2x+1}{2}=\dfrac{2x-3}{6}-x$.

Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{2}=\frac{2x-3}{6}-x \Leftrightarrow 6\left(\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{2}\right)=6\left(\frac{2x-3}{6}-x\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x-3(2x+1)=2x-3-6x$$
$$\Leftrightarrow 2x-6x-3=2x-3-6x$$
$$\Leftrightarrow 2x-6x-2x+6x=-3+3$$
$$\Leftrightarrow 0x=0.$$

Η τελευταία εξίσωση, άρα και η αρχική, αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό, αφού $\alpha=\beta=0$.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda-x)-3x=5(\lambda-x)-6$.

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση ως εξής:

$$\lambda(\lambda-x)-3x=5(\lambda-x)-6 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda x-3x=5\lambda-5x-6$$
$$\Leftrightarrow -\lambda x-3x+5x=5\lambda-6-\lambda^2$$
$$\Leftrightarrow (2-\lambda)x=-\lambda^2+5\lambda-6$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-2)x=(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) $\lambda-2\neq 0$, δηλ. $\lambda\neq 2$. Τότε η τελευταία εξίσωση, επομένως και η αρχική, έχει μια μοναδική λύση, τη $x=\lambda-3$.

β) $\lambda-2=0$, δηλ. $\lambda=2$. Τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x=0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Ασκήσεις 24, 25.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων $(2x+3)(3y-1)=0$ καί $2x-3y+1=0$.

Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$(2x+3)(3y-1)=0 \text{ και } 2x-3y+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x+3=0 \text{ ή } 3y-1=0) \text{ και } 2x-3y+1=0$$
$$\Leftrightarrow (2x+3=0 \text{ και } 2x-3y+1=0) \text{ ή } (3y-1=0 \text{ και } 2x-3y+1=0)$$
$$\Leftrightarrow\left(x=-\frac{3}{2} \text{ και } y=\frac{-2}{3}\right) \text{ ή } \left(y=\frac{1}{3} \text{ και } x=0\right).$$

2. Αν α,β,x,y είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=(\alpha y-\beta x)^2$.

Είναι: $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=$
$=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+2\alpha\beta xy)$
$=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2x^2-\beta^2y^2-2\alpha\beta xy$
$=\alpha^2y^2+\beta^2x^2-2\alpha\beta xy$
$=(\alpha y-\beta x)^2$.

3. Αν α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha).$$

4. Αν α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma\neq 0$ και $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$, να αποδειχθεί ότι $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Έχουμε: $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)=\alpha\beta\gamma\cdot 0$
$\Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$. Άρα
$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2.0$
$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Ασκήσεις για επανάληψη 26,27,28,29,30.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι
$[-(-x)]+[-(-y)]+[-(x+y)]=0.$

2. Να δειχθεί ότι $x+[-[-(-x)]]=0.$

3. Αν $x+y+z$ είναι ο αντίθετος του $(-x)+(-y)+\omega$, να δειχθεί ότι $z=-\omega$.

4. Αν $x=(\alpha+\beta)+[(-\gamma)+(-\delta)]$ και $y=[(-\alpha)+\gamma]+[(-\beta)+\delta]$, να δείξετε ότι οι x, y είναι αντίθετοι.

5. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες
α) $(x+y)-z=(x-z)+y$
β) $(x-y)-z=x-(y+z)=(x-z)-y.$

6. Να αποδειχθούν οι παρακάτω συνεπαγωγές
α) $x \neq y \Rightarrow x-z \neq y-z$
β) $x=y$ **καί** $z=\varphi \Rightarrow x-z=y-\varphi.$

7. Να βρεθούν τα εξαγόμενα
$$A=\left(-\frac{6}{7}\alpha^2\beta\gamma^5\right)(2\alpha^4\beta^3\gamma^4)\left(-\frac{5}{6}\alpha\beta^2\gamma^5\right)$$
$$B=(-3x^2yz^7)(4x^4y^3z)(-xy^5)$$
$$\Gamma=[(-2xy^2z^3)^3]^4.$$

8. Να αποδειχθούν οι ισότητες
α) $(x^2+3x)(x^2+6x+9)=x(x+3)^3$
β) $(x^2+y^2+xy)^2=x^2y^2+(x+y)^2(x^2+y^2).$

9. Να αποδειχθεί ότι
$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma.$

10. Να γίνουν οι πράξεις
α) $(x-1)^2(x+1)^2$ **β)** $(-7x+1)^2-(7x-3)^2$
γ) $(x^2-2\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2$ **δ)** $(2\alpha\beta+\gamma)^2-(\gamma-\delta)^2$
ε) $(\alpha x+\beta y)^2-(\alpha x-\beta y)^2.$

11. Να αποδειχθούν οι ισότητες
α) $(3x-2)[4x-3+2(x-1)+x+1]=(3x-2)(7x-4)$
β) $x^6-8=(x^2-2)(x^4+2x^2+4).$

12. Να αποδειχθεί η ισότητα
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{xy}=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2y^2}\quad (xy\neq 0).$$

13. Να αποδειχθεί ότι
α) $\frac{1}{x}(x+x^2)+\frac{1}{y}(y+y^2)+\frac{1}{z}(z+z^2)+(-x)+(-y)+(-z)=3 \quad (xyz\neq 0)$
β) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow xy+yz+zx=0 \quad (xyz\neq 0).$

14. Αν $(x+y)(x+z)=0$, να δειχθεί ότι ο x είναι αντίθετος του y ή του z.

15. Να βρεθεί αριθμός ο οποίος είναι ίσος με τον αντίστροφό του.

16. Να λυθούν οι εξισώσεις
α) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ **β)** $x^3-4x=0$ **γ)** $x^3-2x^2+x=0$
δ) $x^4-16=0$ **ε)** $(x-1)^2-(3-2x)^2=0.$

17. Να αποδειχθούν οι ισότητες
α) $(x+y):z=(x:z)+(y:z) \quad (z\neq 0)$
β) $(x-y):z=(x:z)-(y:z) \quad (z\neq 0)$
γ) $(x\ y):z=(x:z)\ y=x\ (y:z) \quad (z\neq 0)$
δ) $(x:y):z=x:(y\ z)=(x:z):y \quad (yz\neq 0).$

18. Να αποδειχθούν οι ισότητες
α) $(xy):x=y \quad (x\neq 0)$
β) $(x:y)\ y=x \quad (y\neq 0)$
γ) $x:(y\ z)=(x:y):z \quad (yz\neq 0).$

19. Να αποδειχθούν οι ισοδυναμίες
α) $x=y \Leftrightarrow x:z=y:z \quad (z\neq 0)$
β) $x\neq y \Leftrightarrow x:z\neq y:z \quad (z\neq 0).$

20. Να αποδειχθούν οι ισότητες
α) $\frac{x}{y}-\frac{z}{\varphi}=\frac{x\varphi-yz}{y\varphi} \quad (y\varphi\neq 0)$
β) $\frac{x}{y}:\frac{z}{\varphi}=\frac{x\varphi}{yz}. \quad (y\varphi z\neq 0).$

21. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισοδυναμίες
α) $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow x\varphi=yz \quad (x\varphi\neq 0)$
β) $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \frac{x}{z}=\frac{y}{\varphi} \quad (y\varphi z\neq 0)$
γ) $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{\varphi}{z} \quad (xyz\varphi\neq 0)$
δ) $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \frac{x+y}{y}=\frac{z+\varphi}{\varphi} \quad (y\varphi\neq 0)$
ε) $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{x+z}{y+\varphi} \quad (y\varphi(y+\varphi)\neq 0)$
στ) $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi}=\frac{\omega}{\rho} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{x+z+\omega}{y+\varphi+\rho} \quad (y\varphi\rho(y+\varphi+\rho)\neq 0).$

22. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις
α) $5y^{-2}x^3z^0$ **β)** $\frac{2x^3y^{-2}}{3x^{-2}y^3}$ **γ)** $\frac{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}{(\gamma\delta)^{-1}}$ **δ)** $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ **ε)** $\frac{1+x^{-1}+x^{-2}}{1-x^{-3}}.$

23. Να εκτελεστούν οι πράξεις
α) $\left(-\frac{3}{4}x^2y^{-5}z^5\right)^{-3}$ **β)** $\frac{-7xy^5z^3}{8x^4y^5z^2}$
γ) $\left(-\frac{2}{3}xy^3+4x^4y^2z-5x^3z^5\right):\frac{5}{4}x^4y^3z^4.$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις
α) $(3x+5)^2-(9x^2-25)+6x+10=0$
β) $3x(2x-1)+1-4x^2-(2x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$
γ) $\frac{x+2}{3}-\frac{2x+1}{2}=\frac{2x-3}{6}-x$
δ) $(x-7)^2-2x+1=x^2-3$
ε) $x+4-\frac{x+3}{3}=\frac{2x+3}{3}.$

25. Να λυθούν οι παραμετρικές εξισώσεις

α) $(\lambda^2-9)x = \lambda^2+3\lambda$

β) $3(\lambda+1)x+4 = 2x+5(\lambda+1)$

γ) $(\lambda^2-1)x = \lambda\,(\lambda+1)\,(\lambda+2)$

δ) $(\lambda+2)x+4(2\lambda+1) = \lambda^2+4(x-1)$.

26. Να λυθούν οι παραμετρικές εξισώσεις

α) $\lambda\,(x-1) = x+2\mu-7$

β) $\lambda(3x+\lambda)+7-2\lambda = \lambda^2+3(1+\mu x)$

γ) $(\lambda-\mu)x = \lambda^2-(\lambda+\mu)x$.

27. Αφού αποδειχθεί η συνεπαγωγή $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

α) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

β) $\alpha^3(\beta-\gamma)^3+\beta^3(\gamma-\alpha)^3+\gamma^3(\alpha-\beta)^3$.

28. Αν $A = 2x+3y$, $B = x-2y$ και $\Gamma = 3x-5y$, να βρεθεί το $A^2+B^2-\Gamma^2$ και το $AB+B\Gamma+\Gamma A$.

29. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ πραγματικοί αριθμοί με $\beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$, να αποδειχθεί η συνεπαγωγή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2.$$

30. Να λυθούν τα συστήματα

α) $x^2-3y = 6$, $y^2 = 1$ στο $\mathbb{Q}$

β) $x+y = -13$, $(y-3)\,(y-5) = 0$ στο $\mathbb{R}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Είναι γνωστό ότι $-(-x) = x$ και $-(x+y) = (-x)+(-y)$.

2. Στην εσωτερική αγγύλη έχουμε x.

3. Επειδή είναι αντίθετοι, θα είναι $(x+y+z)+[(-x)+(-y)+\omega] = 0$ κτλ.

4. Αρκεί να δείξουμε ότι $x+y = 0$.

5. Αρχίζουμε από το πρώτο μέλος, γράφουμε αντί $(x+y)-z = (x+y)+(-z)$ κτλ.

6. Για την **α** υποθέτουμε ότι για $x \neq y$ ισχύει $x-z = y-z$ (απαγωγή σε άτοπο). Για την **β** παρατηρούμε $-z = -\varphi$.

7. Είναι $A = \frac{10}{7}\alpha^7\beta^6\gamma^{14}$ $B = 12x^7y^9z^8$ και $\Gamma = 4096x^{12}y^{24}z^{36}$.

8. **α)** Κάνουμε τις πράξεις στο πρώτο μέλος και καταλήγουμε στο δεύτερο. **β)** Ξεκινούμε από το δεύτερο μέλος και φτάνουμε στο πρώτο.

9. Γράφουμε $(x+\alpha)\,(x+\beta)\,(x+\gamma) = (x+\alpha)\,[(x+\beta)\,(x+\gamma)]$, κάνουμε τις πράξεις στην αγγύλη κτλ.

10. **α)** x^4-2x^2+1 **β)** $4(7x-2)$ **γ)** $x^4-4\alpha x^2+5\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ **δ)** $(2\alpha\beta+2\gamma-\delta)\,(2\alpha\beta+\delta)$ και **ε)** $4\alpha\beta xy$.

11. **α)** απλή, **β)** χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)\,(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

12. Ξεκινάμε από το πρώτο μέλος και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

13. **α)** εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα κτλ., **β)** πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με xyz κτλ.

14. Από τήν $(x+y)\,(x+z) = 0$ προκύπτει $x+y = 0$ ή $x+z = 0$, οπότε ...

15. Αν x είναι ο αριθμός $(x \neq 0)$, θα είναι $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x\ x = x\ \frac{1}{x}$ κτλ. Βρίσκουμε $x = \pm 1$.

16. Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος και εφαρμόζουμε το θεώρ. 11. Είναι: **α)** $x = 1,2,3$ **β)** $x = 0, -2, 2$ **γ)** $x = 0,1$ **δ)** $x = -2,2$ και **ε)** $x = 2, \frac{4}{3}$.

17. Μετασχηματίζουμε τα πηλίκα σε γινόμενα.

18. Είναι **α)** $(x\ y) : x = (x\ y)\ \frac{1}{x} = xy\ \frac{1}{x} =$ κτλ. Ομοίως και οι άλλες.

19. **α)** $x = y \Leftrightarrow x\ \frac{1}{z} = y\ \frac{1}{z} \Leftrightarrow \dots$ **β)** Μέθοδος αντιθετοαντιστροφής.

20. **α)** $\frac{x}{y} - \frac{z}{\varphi} = \frac{x\varphi}{y\varphi} - \frac{zy}{y\varphi} =$ κτλ.

β) $\frac{x}{y} : \frac{z}{\varphi} = \frac{x}{y}\ \frac{1}{\frac{z}{\varphi}} =$ κτλ.

21. α) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $y\varphi$, β) εφαρμόζουμε την α, γ) εφαρμόζουμε την α, δ) προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον 1, ε) θέτουμε $\frac{x}{y} = \frac{z}{\varphi} = \lambda$ κτλ. στ) Όμοια με την ε.

22. α) $\frac{5x^3}{y^2}$ β) $\frac{2x^5}{3y^5}$ γ) $\frac{(\alpha+\beta)\gamma\delta}{\alpha\beta}$ δ) $\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$ ε) $\frac{x}{x-1}$

23. α) $-\frac{64y^{15}}{27x^6z^{15}}$ β) $\frac{-7z}{8x^3}$ γ) $\frac{-8}{15x^3z^4} + \frac{16}{5yz^3} - \frac{4z}{xy^3}$

24. α) $x = -\frac{5}{3}$ β) $x = \frac{1}{2}$ γ) αδύνατη δ) $x = \frac{53}{16}$ ε) αδύνατη.

25. α) Για $\lambda \neq \pm 3$ έχει μια ρίζα, για $\lambda = -3$ είναι ταυτότητα και για $\lambda = 3$ είναι αδύνατη.
β) Για $\lambda \neq -\frac{1}{3}$ έχει μια ρίζα και για $\lambda = -\frac{1}{3}$ είναι αδύνατη.
γ) Για $\lambda \neq \pm 1$ έχει μια ρίζα για $\lambda = -1$ είναι ταυτότητα και για $\lambda = 1$ είναι αδύνατη.
δ) Για $\lambda \neq 2$ έχει μια ρίζα και για $\lambda = 2$ είναι αδύνατη.

26. α) Για $\lambda \neq 1$ έχει μια ρίζα, για $\lambda = 1$, $\mu = 3$ είναι ταυτότητα και για $\lambda = 1$, $\mu \neq 3$ είναι αδύνατη.
β) Για $\lambda \neq \mu$ έχει μια ρίζα, για $\lambda = \mu = 2$ είναι ταυτότητα και για $\lambda = \mu \neq 2$ είναι αδύνατη.
γ) Για $\lambda \neq 0$ έχει μια ρίζα, για $\lambda = 0$ είναι ταυτότητα.

27. Είναι $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = -\gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)^3 = -\gamma^3$ κτλ. α) $3(x-y)(y-z)(z-x)$ και β) $3\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

28. $A^2+B^2-\Gamma^2 = -4x^2-12y^2+38xy$ καί $AB+B\Gamma+\Gamma A = 11x^2-11y^2-13xy$.

29. Εφαρμόζουμε την άσκηση 21(ε).

30. α) Αντικαθιστούμε το y από τη πρώτη στη δεύτερη. Βρίσκουμε ($x=3$ **και** $y=1$) **ή** ($x=-3$ **και** $y=1$). β) Είναι ($x=-16$ **και** $y=3$) **ή** ($x=-18$ **και** $y=5$).

3 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΩΜΑ

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί συνέχεια και συμπλήρωση του προηγούμενου. Με την εισαγωγή της διατάξεως, που είναι ο βασικός του άξονας, συμπληρώνεται η δομή του συνόλου $\mathbb{R}$ ως διατεταγμένου σώματος.

Η επιλογή και ο τρόπος παρουσιάσεως της ύλης διέπονται από τις ίδιες αρχές και αποβλέπουν βασικά στους ίδιους στόχους με εκείνους του κεφαλαίου 2.

Επιδιώκεται δηλαδή και εδώ να εξοικειωθεί ο μαθητής με τον τρόπο που αναπτύσσεται ένα μαθηματικό θέμα (ρόλος των αξιωμάτων, των νόμων της λογικής κτλ.) και να ασκηθεί στη μαθηματική απόδειξη.

Εξάλλου η κανονική αφομοίωση της ύλης αυτής θα συμβάλει στο να συμπληρώσει ο μαθητής τις γνώσεις του πάνω στις βάσεις του αλγεβρικού λογισμού και ιδιαίτερα στα σημεία εκείνα που η παρουσία λαθών ή παρανοήσεων είναι συνήθης.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

Γενικά

3.1 Δύο οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί x και y μπορούν να συγκριθούν συνδεόμενοι με το σύμβολο της **διατάξεως** $\leq$ (μικρότερο ή ίσο). Δηλαδή ισχύει πάντοτε $\mathbf{x \leq y}$ **ή** $\mathbf{y \leq x}$.
Αυτή τη γνωστή μας σχέση διατάξεως μπορούμε να την ορίσουμε και να τη μελετήσουμε, αν ξεκινήσουμε από μερικές γνωστές μας ιδιότητες που θα δεχθούμε ως αξιώματα, όπως κάναμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις πράξεις.

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

3.2 Είδαμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει ένας μοναδικός αντίθετός του, ο $-x$. Είναι $x=-x$ μόνο όταν $x=0$. Άρα, αν $\mathbb{R}^*$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών **χωρίς το 0**, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^*$ μπορούν να σχηματίσουν δυάδες $\{x,-x\}$ αντίθετων μη μηδενικών αριθμών. Θα δεχθούμε ότι σε κάθε δυάδα ένας μόνο από τους αντίθετους x, $-x$ χαρακτηρίζεται ως **θετικός πραγματικός αριθμός.**
Το σύνολο των θετικών αριθμών θα το συμβολίζουμε $\mathbb{R}^*_+$.
Πιο συγκεκριμένα θα δεχθούμε τα παρακάτω αξιώματα:

ΑΞΙΩΜΑ X

Υπάρχει ένα υποσύνολο $\mathbb{R}^*_+$ του $\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει :
ή $x=0$ ή $x \in \mathbb{R}^*_+$ ή $-x \in \mathbb{R}^*_+$

ΑΞΙΩΜΑ XI

Το $\mathbb{R}^*_+$ είναι «κλειστό» ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Δηλαδή ισχύουν οι συνεπαγωγές :
1. $x \in \mathbb{R}^*_+$ **και** $y \in \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^*_+$
2. $x \in \mathbb{R}^*_+$ **και** $y \in \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow x\,y \in \mathbb{R}^*_+$

Από το αξίωμα X προκύπτει ότι κάθε πραγματικός αριθμός $x \neq 0$ είναι:
- **ή** θετικός (αν $x \in \mathbb{R}^*_+$)
- **ή** αντίθετος θετικού (αν $-x \in \mathbb{R}^*_+$), οπότε λέγεται **αρνητικός.**

Το σύνολο των αρνητικών θα το συμβολίζουμε[1] $\mathbb{R}^*_-$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε αμέσως ότι και το $\mathbb{R}^*_-$ είναι «κλειστό» ως προς την πρόσθεση, δηλαδή το άθροισμα δύο αρνητικών είναι αρνητικός. Πράγματι, αν x και y είναι αρνητικοί αριθμοί, τότε οι $-x$ και $-y$ θα είναι θετικοί. Οπότε το $(-x)+(-y)$ ή $-(x+y)$ είναι θετικός αριθμός. Άρα ο $x+y$ θα είναι αρνητικός.

Ανισότητες

3.3 Μπορούμε τώρα να ορίσουμε στο $\mathbb{R}$ τις γνωστές μας διμελείς σχέσεις «$>$» ή «$<$», τις οποίες ονομάζουμε **ανισότητες.**

Αν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, θα λέμε ότι:

- **«Ο x είναι μεγαλύτερος του y»** και θα γράφουμε $x > y$, όταν η διαφορά $x-y$ είναι θετικός αριθμός, και
- **«Ο x είναι μικρότερος του y»** και θα γράφουμε $x < y$, όταν $y > x$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό ισχύουν στο $\mathbb{R}$ οι ισοδυναμίες:

$$(1)\quad \begin{array}{l} x > y \Leftrightarrow x-y \ \text{θετικός} \\ x < y \Leftrightarrow y > x \Leftrightarrow y-x \ \text{θετικός} \Leftrightarrow x-y \ \text{αρνητικός} \end{array}$$

Ειδικότερα για $y = 0$ έχουμε

$$\begin{array}{l} x > 0 \Leftrightarrow x-0 = x \ \text{θετικός} \\ x < 0 \Leftrightarrow x-0 = x \ \text{αρνητικός} \end{array}$$

Δηλαδή οι θετικοί χαρακτηρίζονται από το ότι είναι μεγαλύτεροι του 0, ενώ οι αρνητικοί από το ότι είναι μικρότεροι του 0.

Επομένως οι ισοδυναμίες (1) γράφονται:

$$\begin{array}{l} x > y \Leftrightarrow x-y > 0 \\ x < y \Leftrightarrow x-y < 0 \end{array}$$

Νόμος της τριχοτομίας

3.4 Αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει:**
> **ή $x = y$ ή $x > y$ ή $x < y$**

(1) Επίσης θα συμβολίζουμε:
$\mathbb{R}_+$: Το σύνολο των θετικών και του 0.
$\mathbb{R}_-$: Το σύνολο των αρνητικών και του 0.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το αξίωμα X για τον αριθμό $x-y$ θα έχουμε:

ή $x-y = 0$, δηλαδή $x = y$
ή $x-y > 0$, δηλαδή $x > y$
ή $-(x-y) > 0$, οπότε $x-y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό και ως **«νόμος της τριχοτομίας».**

ΠΟΡΙΣΜΑ

> **Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:**
> **ή $x = 0$ ή $x > 0$ ή $x < 0$**

Αποδεικνύεται, αν θέσουμε στο παραπάνω θεώρημα $y = 0$.

Κανόνας των προσήμων

3.5 Για το πρόσημο του γινομένου αποδεικνύεται τώρα ο γνωστός κανόνας:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

> **1. Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός**
> **2. Το γινόμενο δυο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός**

Απόδειξη

1. Αν $x > 0$ και $y > 0$, συμπεραίνουμε (Αξ. XI) ότι $xy > 0$.
   Αν $x < 0$ και $y < 0$, τότε $-x > 0$ και $-y > 0$, οπότε $(-x)(-y) > 0$. Άρα (§ 2.16 Πόρ.) $xy > 0$.
2. Αν π.χ. $x > 0$ και $y < 0$, τότε $x > 0$ και $-y > 0$, οπότε $x(-y) > 0$, η (§ 2.16 Πόρ.) $-xy > 0$. Άρα $xy < 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. $xy > 0 \Rightarrow x, y$ **ομόσημοι**
   $xy < 0 \Rightarrow x, y$ **ετερόσημοι**
   (Αποδεικνύονται με τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής).
2. $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 0$
   ($\alpha^2 = \alpha\,\alpha > 0$ ως γινόμενο ομοσήμων).
3. $1 > 0$
   (Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα για $\alpha = 1$).
4. $\alpha > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 0$, $\alpha < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < 0$
   (Για $\alpha \neq 0$ είναι $\alpha\,\frac{1}{\alpha} = 1 > 0$. Άρα, (Πορ. 1), οι α, $\frac{1}{\alpha}$ είναι ομόσημοι).

5. $xy > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} > 0, \quad xy < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} < 0$

(Θεώρ. 2 και Πόρ. 4)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Άν α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, να αποδειχθεί ότι $\alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha\beta$.**
Αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά $(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta$ είναι θετικός αριθμός. Πράγματι $(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 > 0$ σύμφωνα με το Πόρ. 2.

2. **Άν $x > 1$, να αποδειχθεί ότι $x^3 > x^2 - x + 1$.**
Αρκεί να δείξουμε ότι $x^3-(x^2-x+1) > 0$. Είναι
$$\begin{aligned} x^3-(x^2-x+1) &= x^3-x^2+x-1 \\ &= x^2(x-1)+(x-1) \\ &= (x-1)(x^2+1) > 0 \end{aligned}$$
γιατί $x-1 > 0$ ($x > 1$ υπόθεση) και $x^2+1 > 0$ (άθροισμα θετικών).

Ασκήσεις 1,2,3.

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

Μεταβατικότητα

3.6 Οι ανισότητες είναι **σχέσεις μεταβατικές.** Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε την ιδιότητα αυτή για τη σχέση «>».

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει η συνεπαγωγή**
$$x > y \text{ καί } y > z \Rightarrow x > z$$

Απόδειξη. Είναι

$x > y$ καί $y > z$	$\Rightarrow x-y > 0$ καί $y-z > 0$	[ορισμός]
	$\Rightarrow^{(1)} (x-y)+(y-z) > 0$	[άθροισμα θετικών, Αξ. XI]
	$\Rightarrow (x-y+y)-z > 0$	[προσεταιριστικότητα]
	$\Rightarrow x-z > 0$	[άθροισμα αντιθέτων]
	$\Rightarrow x > z$	[ορισμός]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η μεταβατικότητα της σχέσεως «<» αποδεικνύεται κατά τον ίδιο τρόπο.

(1) Οι λοιπές συνεπαγωγές ισχύουν και αντιστρόφως.

ΠΟΡΙΣΜΑ **Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό**

(Εφαρμόζοντας το θεώρ. 3 για $y=0$ έχουμε: $x > 0$ και $0 > z \Rightarrow x > z$).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Άν x,y είναι θετικοί και α,β αρνητικοί αριθμοί, τότε είναι:
α) $x-\alpha+y-\beta > 0$ καί β) $(x-\alpha)(y-\beta) > 0$.
Επειδή κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό, θα έχουμε $x > \alpha$ και $y > \beta$ ή $x-\alpha > 0$ και $y-\beta > 0$. Επομένως και το άθροισμά τους και το γινόμενό τους είναι θετικοί αριθμοί (Αξ. XI).

Η φυσική διάταξη στο $\mathbb{R}$

3.7 Όπως είναι γνωστό, σημειώνουμε $x \leq y$ αντί για τη διάζευξη ($x = y$ **ή** $x < y$). Επίσης $x \geq y$ σημαίνει ($x = y$ **ή** $x > y$). Επειδή όμως και η ισότητα είναι μεταβατική, συμπεραίνουμε ότι το θεώρημα 3 ισχύει και αν αντί για τη σχέση «>» πάρουμε τη σχέση «≥» ή την «≤». Δηλαδή και η σχέση «≤» ή η «≥» είναι **μεταβατική.** Ακόμη, επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x = x$, θα αληθεύει η διάζευξη «$x = x$ **ή** $x < x$», δηλαδή η $x \leq x$. Άρα η σχέση «≤» είναι και **ανακλαστική.** Τέλος η σχέση «≤» είναι και **αντισυμμετρική**, δηλαδή για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει η συνεπαγωγή
$$x \leq y \text{ και } y \leq x \Rightarrow x = y.$$
Πράγματι, έστω (§ 1.31) ότι ($x \leq y$ **και** $y \leq x$) **και** $x \neq y$. Τότε
$$(x \leq y \text{ και } y \leq x) \text{ και } x \neq y \Leftrightarrow \begin{cases} (x \leq y \text{ και } x \neq y) \text{ και} \\ (y \leq x \text{ και } x \neq y) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x < y) \text{ και } (y < x)$$
που είναι άτοπο (Θεώρ. 1).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, αφού η σχέση «≤» είναι **ανακλαστική, αντισυμμετρική** και **μεταβατική,** θα είναι μια **σχέση διατάξεως.** Επειδή μάλιστα ισχύει και ο νόμος της τριχοτομίας, θα είναι μια σχέση **ολικής διατάξεως.** Η σχέση διατάξεως «≤» ονομάζεται **φυσική** διάταξη στο $\mathbb{R}$.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Γενικά

3.8 Με τον όρο «διάταξη» θα εννοούμε τη φυσική διάταξη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή την «≤» ή την «≥». Τα θεωρήματα που ακολουθούν περιέχουν ανισότητες, αλλά ισχύουν και στη περίπτωση που οι ανισότητες αντικατασταθούν με ισότητες.

Επομένως, αποδεικνύοντας τα θεωρήματα με τις ανισότητες, ($>$ ή $<$), αποδεικνύουμε ταυτόχρονα και τα αντίστοιχα θεωρήματα των διατάξεων ($\geq$ ή $\leq$) (όπως έγινε π.χ. με την απόδειξη της μεταβατικότητας της διατάξεως § 3.7).

Διάταξη και πρόσθεση

3.9 Τους γνωστούς κανόνες για την πρόσθεση ενός αριθμού και στα δύο μέλη μιας ανισότητας καθώς και για την πρόσθεση ομόστροφων ανισοτήτων κατά μέλη διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ως εξής :

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x,y,z,α,β ισχύουν:**
>
> **1.** $x > y \Leftrightarrow x+z > y+z$
>
> **2.** $x > y$ **και** $\alpha > \beta \Rightarrow x+\alpha > y+\beta$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&1.\ x+z > y+z && \Leftrightarrow (x+z)-(y+z) > 0 && \text{[ορισμός]}\\
& && \Leftrightarrow x+z-y-z > 0 && \text{[αντίθετος αθροίσματος]}\\
& && \Leftrightarrow x-y > 0 && \text{[άθροισμα αντιθέτων]}\\
& && \Leftrightarrow x > y && \text{[ορισμός]}\\
&2.\ x > y \text{ και } \alpha > \beta && \Rightarrow x-y > 0 \text{ καί } \alpha-\beta > 0 && \text{[ορισμός]}\\
& && \Rightarrow x-y+\alpha-\beta > 0 && \text{[άθροισμα θετικών, Αξ. XI]}\\
& && \Rightarrow (x+\alpha)-(y+\beta) > 0 && \text{[αντίθετος αθροίσματος]}\\
& && \Rightarrow x+\alpha > y+\beta && \text{[ορισμός]}
\end{aligned}$$

Η συνεπαγωγή, $x > y$ και $\alpha > \beta \Rightarrow x+\alpha > y+\beta$, γενικεύεται για οσεσδήποτε ομόστροφες ανισότητες. Δηλαδή αποδεικνύεται επαγωγικά ότι ισχύει :

$$\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ και } \ldots\ \alpha_\nu > \beta_\nu \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu > \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu$$

Διάταξη και πολλαπλασιασμός

3.10 Τους γνωστούς κανόνες για τον πολλαπλασιασμό των μελών μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,x,y ισχύει:**
>
> **1.** $x > y$ **και** $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha x > \alpha y$
>
> **2.** $x > y$ **και** $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha x < \alpha y$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&1.\ x > y \text{ καί } \alpha > 0 && \Rightarrow x-y > 0 \text{ καί } \alpha > 0 && \text{[ορισμός]}\\
& && \Rightarrow \alpha(x-y) > 0 && \text{[γινόμενο θετικών, Αξ. XI]}\\
& && \Rightarrow \alpha x - \alpha y > 0 && \text{[επιμεριστικότητα]}\\
& && \Rightarrow \alpha x > \alpha y && \text{[ορισμός]}\\
&2.\ x > y \text{ και } \alpha < 0 && \Rightarrow x - y > 0 \text{ καί } \alpha < 0 && \text{[ορισμός]}\\
& && \Rightarrow \alpha(x-y) < 0 && \text{[γινόμενο ετεροσήμων]}\\
& && \Rightarrow \alpha x - \alpha y < 0 && \text{[επιμεριστικότητα]}\\
& && \Rightarrow \alpha x < \alpha y && \text{[ορισμός]}
\end{aligned}$$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. **Αν αλλάξουμε τα πρόσημα των όρων μιας ανισότητας, προκύπτει ετερόστροφη ανισότητα** (Θεώρ. 5 για $\alpha = -1$).
2. **Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό α ($\alpha \neq 0$), προκύπτει ανισότητα ομόστροφη, αν ο α είναι θετικός, και ετερόστροφη, αν ο α είναι αρνητικός** $\left(\text{Θεώρ. 5, αν αντικαταστήσουμε το } \alpha \text{ με } \dfrac{1}{\alpha}\right)$.
3. **Για $\alpha > 0$ ισχύει $x > y \Leftrightarrow \alpha x > \alpha y$**
   Για $\alpha < 0$ ισχύει $x > y \Leftrightarrow \alpha x < \alpha y$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6

> **Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α,β,x,y ισχύει:**
>
> $x > \alpha$ **και** $y > \beta \Rightarrow xy > \alpha\beta$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned}
&x > \alpha \text{ και } y > 0 \Rightarrow xy > \alpha y \quad \text{[Θεώρ. 5]} && (1)\\
&y > \beta \text{ και } \alpha > 0 \Rightarrow \alpha y > \alpha\beta && (2)
\end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $xy > \alpha\beta$ (μεταβατική ιδιότητα).

Αποδεικνύεται με τη μέθοδο της επαγωγής ότι, αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί, ισχύει:

$$\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ καί } \ldots \text{ και } \alpha_\nu > \beta_\nu \Rightarrow \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu > \beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu$$

Διάταξη και δυνάμεις

3.11 Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στη διάταξη δυνάμεων πραγματικών αριθμών με εκθέτες ακέραιους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7

Αν x και y είναι θετικοί αριθμοί και ν ακέραιος $\neq 0$, ισχύουν:
1. Αν $\nu > 0$, τότε $x > y \Leftrightarrow x^\nu > y^\nu$
2. Αν $\nu < 0$, τότε $x > y \Leftrightarrow x^\nu < y^\nu$
3. $x = y \Leftrightarrow x^\nu = y^\nu$

Απόδειξη

1. Από τη γενίκευση του θεωρήματος 6 για $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = x$ και $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu = y$ έχουμε:

$$x\,x\ldots x > y\,y\ldots y, \text{ δηλαδή } x > y \Rightarrow x^\nu > y^\nu.$$

2. Αν $\nu < 0$, θα είναι $-\nu > 0$, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο: $x^{-\nu} > y^{-\nu}$ δηλ. $\frac{1}{x^\nu} > \frac{1}{y^\nu}$. Επειδή όμως $x^\nu y^\nu > 0$, θα είναι:

$$x^\nu y^\nu \frac{1}{x^\nu} > x^\nu y^\nu \frac{1}{y^\nu} \text{ ή } x^\nu < y^\nu.$$

3. Η $x = y \Rightarrow x^\nu = y^\nu$ προκύπτει από την παρατήρηση της § 2.14. Οι αντίστροφες συνεπαγωγές αποδεικνύονται με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο (§ 1.30)

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Αν $\nu > 0$, τότε
$$x > 1 \Rightarrow x^\nu > 1$$
$$0 < x < 1 \Rightarrow x^\nu < 1$$

2. Αν $\nu < 0$, τότε
$$x > 1 \Rightarrow x^\nu < 1$$
$$0 < x < 1 \Rightarrow x^\nu > 1$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές:

α) $xy > 0$ **καί** $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

β) $xy < 0$ **και** $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

α) Επειδή $xy > 0$, η $x < y$ γίνεται $\frac{x}{xy} < \frac{y}{xy}$ ή $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

β) Επειδή $xy < 0$, η $x < y$ γίνεται $\frac{x}{xy} > \frac{y}{xy}$ ή $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

2. Επίσης οι συνεπαγωγές:

α) $\alpha > \beta$ **και** $\gamma < \delta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$

β) α, β **θετικοί και** $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$

γ) α, β **αρνητικοί και** $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$

α) $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta \Rightarrow \alpha > \beta$ και $-\gamma > -\delta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$

β) $\alpha > \beta$ και $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha\alpha > \beta\beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$

γ) $\alpha > \beta \Rightarrow -\alpha < -\beta \Rightarrow (-\alpha)^2 < (-\beta)^2 \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$.

3. Αν α, β, x θετικοί και $\alpha < \beta$, τότε είναι $\frac{\alpha + x}{\beta + x} > \frac{\alpha}{\beta}$.

Επειδή $\beta(\beta + x)$ είναι θετικός αριθμός, θά έχουμε

$$\frac{\alpha+x}{\beta+x} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta(\beta+x)\frac{\alpha+x}{\beta+x} > \beta(\beta+x)\frac{\alpha}{\beta}.$$
$$\Leftrightarrow \beta(\alpha+x) > (\beta+x)\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta + \beta x > \alpha\beta + \alpha x$$
$$\Leftrightarrow \beta x > \alpha x$$
$$\Leftrightarrow \beta > \alpha \text{ που ισχύει.}$$

4. Για κάθε $\alpha > 0$ να αποδειχθεί ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

Είναι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \geq 2\alpha$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα ισχύει, όταν $\alpha = 1$.

5. Αν κ, λ είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

α) $x > 1$ **καί** $\kappa > \lambda \Rightarrow x^\kappa > x^\lambda$

β) $0 < x < 1$ **καί** $\kappa > \lambda \Rightarrow x^\kappa < x^\lambda$

α) Επειδή $k > \lambda$, αν θέσουμε $k = \lambda + \nu$, θα πρέπει να δείξουμε ότι $x^{\lambda+\nu} > x^\lambda$ ή $x^\lambda x^\nu - x^\lambda > 0$ ή $x^\lambda(x^\nu - 1) > 0$. Η ανισότητα αυτή ισχύει, επειδή x^λ είναι θετικός ($x > 0$) και $x^\nu - 1$ θετικός (§ 3.11 Πόρ.).

β) Αποδεικνύεται όπως και η (α).

6. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει
$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Αν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, τότε $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ [αντιθετοαντιστροφή]

Γενικότερα ισχύει:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0.$$

7. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ νά αποδειχθεί ότι
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

Είναι:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \geq 0.$$

Η τελευταία ισχύει, άρα ισχύει και η πρώτη.

8. Για τους θετικούς αριθμούς x και y είναι:
$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$$

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (x+y)\frac{x+y}{xy} \geq 4$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4xy \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ που είναι προφανής.}$$

Ασκήσεις 4,5,6,7,8.

Λύση των ανισώσεων $\alpha x+\beta \gtrless 0$

3.12 Για να λύσουμε την ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$ **(1)**
προσπαθούμε να τη μετασχηματίσουμε σε άλλη ισοδύναμή της απλούστερης μορφής, χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των ανισοτήτων. Έτσι, αν στα μέλη της (1) προσθέσουμε τον αντίθετο του β, θα έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\alpha x+\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x+\beta-\beta > 0-\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha x > -\beta \qquad (2)$$

Η τελευταία ισοδυναμία εκφράζει το γνωστό μας κανόνα μεταφοράς ενός όρου από το ένα μέλος μιας ανισότητας στο άλλο.

Για να λύσουμε λοιπόν την (1), αρκεί να λύσουμε τη (2).

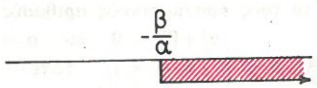
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\alpha > 0$, οπότε και $\frac{1}{\alpha} > 0$. Επομένως θα έχουμε (§ 3.10 Πορ. 3)

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha x) > \frac{1}{\alpha}(-\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad x > -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Δηλαδή η (2), άρα και η (1), αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του $-\frac{\beta}{\alpha}$.

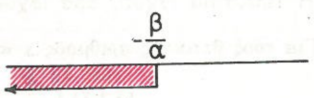


- $\alpha < 0$, οπότε και $\frac{1}{\alpha} < 0$. Επομένως θα έχουμε (§ 3.10 Πορ. 3)

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha x) < \frac{1}{\alpha}(-\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Δηλαδή η (2), άρα και η (1), αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό μικρότερο του $-\frac{\beta}{\alpha}$.



- $\alpha = 0$. Τότε η $\alpha x > -\beta$ γίνεται $0x > -\beta$. Επομένως:
  αν $-\beta < 0$, δηλαδή $\beta > 0$, η (2) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ
  αν $-\beta > 0$, δηλαδή $\beta < 0$, η (2) δεν έχει λύση (ειναι αδύνατη).

Σημείωση

Η ανίσωση $\alpha x+\beta < 0$ είναι ισοδύναμη με την $-\alpha x-\beta > 0$. Δηλαδή ανάγεται σε ανίσωση της μορφής (1).

1. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-3}{3}-\frac{x-2}{4} > 1+\frac{x-1}{2}$.

Είναι: $\frac{x-3}{3}-\frac{x-2}{4} > 1+\frac{x-1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12\left(\frac{x-3}{3}-\frac{x-2}{4}\right) > 12\left(1+\frac{x-1}{2}\right)$ [πολ/σμός με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών]

$\Leftrightarrow 4(x-3)-3(x-2) > 12+6(x-1)$

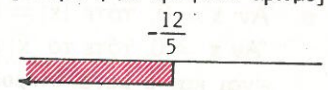
$\Leftrightarrow 4x-12-3x+6 > 12+6x-6$ [επιμεριστικότητα]

$\Leftrightarrow 4x-3x-6x > 12-6+12-6$ [μεταφορά όρων]

$\Leftrightarrow -5x > 12$

$\Leftrightarrow x < -\frac{12}{5}$ [διαίρεση με αρνητικό αριθμό]

Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται το σύνολο λύσεων της ανισώσεως.



2. Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$x-2 \geq 0 \quad \text{και} \quad 5x-8 \leq 3x.$$

Είναι:

$(x-2 \geq 0$ και $5x-8 \leq 3x) \Leftrightarrow (x \geq 2$ **και** $5x-3x \leq 8)$
$\Leftrightarrow (x \geq 2$ **και** $2x \leq 8)$
$\Leftrightarrow (x \geq 2$ **και** $x \leq 4)$.

Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται το σύνολο στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις.

Έννοια διαστήματος

3.13 Στην προηγούμενη εφαρμογή (2) είδαμε ότι οι δύο ανισώσεις $x-2 \geq 0$ και $5x-8 \leq 3x$ συναληθεύουν στο σύνολο των τιμών του x που ικανοποιούν τη διπλή ανίσωση $2 \leq x \leq 4$.

Το σύνολο αυτό ονομάζεται πιο σύντομα **κλειστό διάστημα** από το 2 ως το 4 και συμβολίζεται **[2, 4]**. Είναι λοιπόν

$$x \in [\alpha,\beta] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

Αν τώρα από το κλειστό διάστημα **[α,β]** παραλείψουμε τα άκρα του **α** και **β**, προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα** που συμβολίζεται **(α,β)**. Δηλαδή είναι:

$$x \in (\alpha,\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < x < \beta$$

Τέλος, αν από το κλειστό διάστημα **[α,β]** παραλείψουμε μόνο το **α** ή μόνο το **β**, προκύπτουν αντιστοίχως **το ανοικτό αριστερά** διάστημα **(α,β]** ή το **ανοικτό δεξιά** διάστημα **[α,β)**. Δηλαδή είναι:

$$\chi \in (\alpha,\beta] \Leftrightarrow \alpha < x \leq \beta \quad \text{και} \quad x \in [\alpha,\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq x < \beta$$

Ασκήσεις 9, 10.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός

3.14 Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, η **απόλυτη τιμή** του συμβολίζεται με $|x|$ και ορίζεται ως εξής:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Άμεσες συνέπειες

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής συμπεραίνουμε αμέσως τα εξής:

- Άν $x = 0$, τότε $|x| = 0$.
  Άν $x \neq 0$, τότε το $|x|$ είναι το **θετικό** στοιχείο της δυάδας $\{x, -x\}$ που είναι και **ο μεγαλύτερος από τους x και $-x$** (§ 3.6 Πόρ.).
  Άρα έχουμε:

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \\ |x| \geq x \text{ καί } |x| \geq -x \end{array}} \quad \begin{array}{c}(1)\\(2)\end{array}$$

- Από τη (2) έχουμε $x \leq |x|$ και $-|x| \leq x$, δηλαδή

$$\boxed{-|x| \leq x \leq |x|} \quad (3)$$

- Το $|x|$ ή το $|-x|$ είναι το ίδιο θετικό στοιχείο της δυάδας $\{x, -x\}$. ή το 0. Επομένως

$$\boxed{|-x| = |x| \geq 0} \quad (4)$$

- Για τη δύναμη $|x|^2$ έχουμε:

$$|x|^2 = |x|\,|x| = \begin{cases} x\,x = x^2 & \text{αν } x \geq 0 \\ (-x)(-x) = x^2 & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Επομένως $\boxed{|x|^2 = x^2}$ (5)

ΘΕΩΡΗΜΑ 8

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και α ισχύει η ισοδυναμία:**
> $$|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$$

Απόδειξη

- Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $|x| \leq \alpha \Rightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.
  Από την $|x| \leq \alpha$ έχουμε και $-|x| \geq -\alpha$, αλλά σύμφωνα με την (3) είναι και $-|x| \leq x \leq |x|$, οπότε $-\alpha \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq \alpha$.
  Άρα $-\alpha \leq x \leq \alpha$.
- Αντιστρόφως, $-\alpha \leq x \leq \alpha \Rightarrow |x| \leq \alpha$, γιατί αν ήταν $|x| > \alpha$, τότε ή $x > \alpha$ (άτοπο) ή $-x > \alpha$, οπότε $x < -\alpha$ (άτοπο).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθούν οι εξισώσεις α) $|x| = \alpha$ και β) $|x| = |\alpha|$.**
   α) Αν $\alpha > 0$, έχουμε
   $|x| = \alpha \Leftrightarrow |x|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x+\alpha) = 0$
   $\Leftrightarrow (x - \alpha = 0 \;\text{ ή }\; x + \alpha = 0) \Leftrightarrow x = \pm\alpha$.
   Αν $\alpha < 0$, έχουμε $|x| = \alpha < 0$ που είναι αδύνατο.
   Αν $\alpha = 0$, τότε $|x| = 0$ και $x = 0$.
   β) $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow |x|^2 = |\alpha|^2 \Leftrightarrow x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \pm\alpha$.
2. **Να λυθούν οι εξισώσεις α) $|x-3| = 4$ και β) $|3x+8| = 23$.**
   α) Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι:
   $|x-3| = 4 \Leftrightarrow (x-3) = \pm 4 \Leftrightarrow (x-3 = 4 \text{ ή } x-3 = -4)$
   $\Leftrightarrow (x = 7 \text{ ή } x = -1)$
   β) Ομοίως βρίσκουμε $x = 5$ ή $x = -\frac{31}{3}$.
3. **Να αποδειχθεί ότι, αν $xyz \neq 0$, τότε $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} \leq 3$**
   Από τις ανισότητες $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, $z \leq |z|$ προκύπτουν αντίστοιχα οι ανισότητες:
   $\frac{x}{|x|} \leq 1$, $\frac{y}{|y|} \leq 1$, $\frac{z}{|z|} \leq 1$. Οπότε, αν τις προσθέσουμε κατά μέλη, θα έχουμε:
   $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} \leq 1+1+1 = 3$.
4. **Αν $|x| \leq 2$, $|y| \leq 3$ και $|z| \leq 5$, να δείξετε ότι $-10 \leq x+y+z \leq 10$.**
   Σύμφωνα με το θεώρημα 8 είναι
   $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$
   $|y| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 3$
   $|z| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq z \leq 5$
   οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε
   $-2-3-5 \leq x+y+z \leq 2+3+5$, δηλ. $-10 \leq x+y+z \leq 10$.

Ασκήσεις 11,12.

Απόλυτη τιμή αθροίσματος

3.15 Για την απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 9

> **Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x καί y είναι**
> $$|x+y| \leq |x|+|y|$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα (§ 3.14, (3)) έχουμε για τους x,y:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

και με πρόσθεση κατά μέλη $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$. Άρα (Θεώρ. 8) έχουμε και $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Γενικότερα αποδεικνύεται με τη μέθοδο της επαγωγής ότι:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu| \leq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|$$

Απόλυτη τιμή γινομένου

3.16 Για την απόλυτη τιμή του γινομένου ισχύει το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 10

> **Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο πραγματικών αριθμών ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους. Δηλαδή**
> $$\forall x,\ \forall y, \qquad |xy| = |x|\,|y|$$

Απόδειξη. Αν ένας από τους αριθμούς είναι μηδέν, η ισότητα προφανώς ισχύει. Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

$$\left.\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| = x \\ |y| = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x||y| = xy = |xy|, \text{ επειδή } xy>0$$

$$\left.\begin{matrix} x<0 \\ y<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| = -x \\ |y| = -y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x||y| = (-x)\,(-y) = xy = |xy|, \text{ επειδή } xy>0$$

$$\left.\begin{matrix} x>0 \\ y<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| = x \\ |y| = -y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x||y| = x(-y) = -xy = |xy|, \text{ επειδή } xy<0$$

$$\left.\begin{matrix} x<0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| = -x \\ |y| = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x||y| = (-x)y = -xy = |xy|, \text{ επειδή } xy<0.$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu| = |\alpha_1|\,|\alpha_2|\ldots|\alpha_\nu|$.

Συνέπεια τ ς προηγούμενης ιδιότητας είναι:

ΠΟΡΙΣΜΑ

> **Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο πραγματικών αριθμών x, y (y ≠ 0) ισούται με το πηλίκο των απόλυτων τιμών τους. Δηλαδή είναι:**
> $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\left(\text{Πράγματι είναι: } \left|\frac{x}{y}\right| |y| = \left|\frac{x}{y}\, y\right| = |x|\right)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχθεί ότι $|x-y| \leq |x|+|y|$ και να εξεταστεί πότε ισχύει η ισότητα.**

Είναι $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$.

Έστω τώρα ότι $|x-y| = |x|+|y|$, τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} |x-y| = |x|+|y| &\Leftrightarrow |x-y|^2 = (|x|+|y|)^2 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 = |x|^2+|y|^2+2|x||y| \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy = x^2+y^2+2|xy| \\ &\Leftrightarrow -xy = |xy|. \end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία, επειδή $|xy| \geq 0$, θα πρέπει να είναι $xy \leq 0$, δηλαδή οι x,y να είναι ετερόσημοι ή ο ένας τουλάχιστο να είναι 0.

2. **Να αποδειχθεί ότι $x^2+|xy|+|-x|y+y|-y| = (|x|+|y|)(|x|+y)$.**

Είναι:

$$\begin{aligned} x^2+|xy|+|-x|y+y|-y| &= |x|^2+|x||y|+|x|y+y|y| \\ &= |x|\,(|x|+|y|)+y(|x|+|y|) \\ &= (|x|+|y|)\,(|x|+y). \end{aligned}$$

Ασκήσεις 13,14,15.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθεί η ανίσωση $|x-2| \leq 6$.**

Είναι:
$$\begin{aligned} |x-2| \leq 6 &\Leftrightarrow -6 \leq x-2 \leq 6 \\ &\Leftrightarrow -6+2 \leq x \leq 6+2 \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 8 \\ &\Leftrightarrow x \in [-4,8]. \end{aligned}$$

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική λύση της ανισώσεως.

2. **Να λυθεί η ανίσωση $|x| \geq \theta$, όπου θ θετικός.**

Είναι:
$$\begin{aligned} |x| \geq \theta &\Leftrightarrow |x|^2 \geq \theta^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-\theta^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-\theta)\,(x+\theta) \geq 0. \end{aligned}$$

Για να ισχύει η τελευταία, θα πρέπει οι $x-\theta$ και $x+\theta$ να είναι ομόσημοι. Άρα θα είναι:

ή $x-\theta \geq 0$ **και** $x+\theta \geq 0$ δηλαδή $x \geq \theta$

ή $x-\theta \leq 0$ **και** $x+\theta \leq 0$ δηλαδή $x \leq -\theta$.

Επομένως ισχύει η ισοδυναμία:

$$|x| \geq \theta \Leftrightarrow (x \leq -\theta \quad \text{ή} \quad x \geq \theta)$$

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική λύση της ανισώσεως.

3. **Να λυθεί η ανίσωση $|x-1| \geq 5$.**

Σύμφωνα με την προηγούμενη εφαρμογή είναι:

$$\begin{aligned} |x-1| \geq 5 &\Leftrightarrow (x-1 \leq -5 \quad \text{ή} \quad x-1 \geq 5) \\ &\Leftrightarrow (x \leq -4 \quad \text{ή} \quad x \geq 6) \end{aligned}$$

Η γραφική λύση της ανισώσεως παριστάνεται στο διπλανό σχήμα.

4. Άν $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ και ν φυσικός μεγαλύτερος του 1, τότε είναι:

$$(1+\alpha)^{\nu} > 1+\nu\alpha \qquad (1)$$

Θα αποδείξουμε την ανισότητα με τη μέθοδο της επαγωγής. Η ανισότητα ισχύει για $\nu = 2$. Πράγματι

$$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 > 1+2\alpha.$$

Υποθέτοντας ότι αληθεύει η (1) αρκεί να δείξουμε ότι:
$(1+\alpha)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\alpha$.

Έχουμε: $(1+\alpha)^{\nu} > 1+\nu\alpha \Rightarrow (1+\alpha)^{\nu}(1+\alpha) > (1+\nu\alpha)(1+\alpha)$

$$\Rightarrow (1+\alpha)^{\nu+1} > 1+\alpha+\nu\alpha+\nu\alpha^2$$
$$\Rightarrow (1+\alpha)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\alpha+\nu\alpha^2$$
$$\Rightarrow (1+\alpha)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\alpha.$$

Εξετάστε τις περιπτώσεις: $\alpha = -1$, $\alpha = 0$, $\nu = 0$, $\nu = 1$.

Ασκήσεις για επανάληψη 16,17,18,19,20,21.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές:

α) $\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) < 0$

β) $x > 0$ καί $y > 0 \Rightarrow x^3+y^3 \geq x^2y+xy^2$

γ) $x > 2 \Rightarrow x^3 > 2x^2-x+2$.

2. Να αποδειχθεί ότι ισχύουν:

α) $(x+y)^2 \geq 4xy$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq \alpha(\beta+\gamma-\alpha)+\beta(\gamma+\alpha-\beta)+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$

γ) $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq 2\alpha(\beta+\gamma)$.

3. Να αποδειχθεί η συνεπαγωγή
$x < 1 < y \Rightarrow xy-x-y+1 < 0$.

4. Να αποδειχθεί ότι ισχύουν:

α) $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1} \leq 1$

β) $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \dfrac{\alpha}{1+\alpha} + \dfrac{\beta}{1+\beta}$, όπου α,β είναι θετικοί.

5. Αν $x < z$ και $0 < y < \omega$, τότε είναι $x - \dfrac{1}{y} < z - \dfrac{1}{\omega}$.

6. Αν α και β είναι θετικοί αριθμοί και $\alpha+\beta = 1$, να αποδειχθεί ότι είναι:

α) $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}$

β) $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right) \geq 9$.

7. Να αποδειχθεί ότι ισχύουν:

α) $\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta > \alpha-\beta$

β) $0 < \alpha < \beta$ και $0 < \gamma < \delta \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\delta} < \dfrac{\beta}{\gamma}$.

8. Αν είναι $x > y > 0$ και $\alpha > \beta > 0$, να αποδειχθεί ότι $x^k\beta^\lambda > y^k\alpha^\lambda$, όταν k,λ είναι ακέραιοι και $k > 0$, $\lambda < 0$.

9. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\lambda x > x+2$ **β)** $\dfrac{x-\lambda}{2} + \dfrac{2x+3}{4} > \dfrac{\lambda x}{6}$

γ) $\dfrac{\lambda(x-2)}{2} - \dfrac{2x-\lambda}{5} < \dfrac{x}{10} - \dfrac{2}{5}$.

10. Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α) $2x+3 > x$, $x-5 < 4$ **β)** $x(x+2)-(x+1)x > 2$, $2x(x-1) < x(2x-3)+3$

11. Αν είναι $\alpha < \beta < \gamma$, να απλοποιηθεί η παράσταση
$A = 3|\alpha-\beta|+2|\beta-\gamma|-4|\gamma-\alpha|$.

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{3|x|+1}{2} + \dfrac{2|x|-1}{3} = \dfrac{|x|+2}{4}$

β) $(2|x|-5)-(4|x|-3) = 7|x|-1$

γ) $|3x-1| = |x-3|$.

13. Αν είναι $|x-y| < \alpha$ και $|y-\omega| < \alpha$, να αποδειχθεί ότι $|x-\omega| < 2\alpha$.

14. Να αποδειχθεί ότι:
$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$ και να εξεταστεί πότε ισχύουν οι ισότητες

α) $||x|-|y|| = |x+y|$ **β)** $|x+y| = |x|+|y|$

15. Να αποδειχθεί ότι, αν $xy \neq 0$, θα είναι
$$\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2.$$

16. Αν α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί και λ,μ,ν θετικοί, να αποδείξετε τη συνεπαγωγή
$$\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \frac{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma}{\lambda+\mu+\nu} < \gamma.$$

17. Αν $x \geq y > 0$, να συγκριθούν οι αριθμοί
$\dfrac{x-y}{x+y}$ καί $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

18. Αν $\alpha+\beta = 1$, να αποδειχθεί ότι:

α) $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}$

β) $\alpha^2+\beta^2 \geq \dfrac{1}{2}$

γ) $\alpha^4+\beta^4 \geq \dfrac{1}{8}$.

19. Αν είναι $(2x-3y+1)^2+(3x-5y+2)^2 = 0$, να προσδιοριστούν οι αριθμοί x και y.

20. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $2x-1 \leq x \leq \dfrac{x+3}{2}$

β) $(3x-2)(x-2) = 0$, $2x-4 \leq -3x$.

21. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{2|x|-3}{4} < \dfrac{|x|+1}{3}$

β) $3(|x|-1)+2(|x|-2) > 2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **α)** Είναι $\alpha-\beta > 0$, $\beta-\gamma > 0$ και $\gamma-\alpha < 0$.
   β) Αποδεικνύουμε ότι: $(x^3+y^3)-(x^2y+xy^2) \geq 0$.
   γ) Αποδεικνύουμε ότι: $x^3-(2x^2-x+2) > 0$.
2. **α)** Αποδεικνύουμε ότι: $(x+y)^2-4xy \geq 0$.
   β) Αρκεί να δείξουμε ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^2-[\alpha(\beta+\gamma-\alpha)+\beta(\gamma+\alpha-\beta)+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)] \geq 0$.
   γ) Αρκεί να δείξουμε ότι: $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha(\beta+\gamma) \geq 0$ ή $(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2 \geq 0$.
3. Είναι $xy-x-y+1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) < 0 \ldots$
4. **α)** Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με το θετικό α^2+1.
   β) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με το $(1+\alpha+\beta)(1+\alpha)(1+\beta)$.
5. $0 < y < \omega \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{\omega} \Rightarrow -\frac{1}{y} < -\frac{1}{\omega}$ κτλ.
6. **α)** Στην $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$ θέτουμε όπου β τό $1-\alpha$ και κάνουμε τις πράξεις.
   β) Κάνουμε τις πράξεις και εφαρμόζουμε την (α).
7. **α)** $\beta > 0 \Rightarrow \beta > -\beta$ κτλ. **β)** Πολλαπλασιάζουμε τις ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ κατά μέλη και διαιρούμε τα μέλη της ανισότητας που θα προκύψει με το θετικό $\gamma\delta$.
8. Εφαρμόζουμε τα Θεωρ. 7, 6.
9. **α)** Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $x(\lambda-1) > 2$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\lambda-1 > 0$, $\lambda-1 < 0$ και $\lambda-1 = 0$.
   β) Μετά τις πράξεις έχουμε $2x(6-\lambda) > 6\lambda-9$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $6-\lambda > 0$, $6-\lambda < 0$ και $6-\lambda = 0$.
   γ) Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $5x(\lambda-1) < 8\lambda-4$ κτλ.
10. **α)** $-3 < x < 9$, **β)** $2 < x < 3$.
11. Παρατηρούμε ότι $\alpha-\beta < 0$, $\beta-\gamma < 0$, $\gamma-\alpha > 0$, οπότε $A = \alpha+\beta-2\gamma$.
12. **α)** Αν θεωρήσουμε άγνωστο το $|x|$, βρίσκουμε $|x| = \frac{4}{23}$ ή $x = \pm\frac{4}{23}$.
    β) Ομοίως βρίσκουμε $|x| = -\frac{1}{9}$, που απορρίπτεται.
    γ) Έχουμε $3x-1 = \pm(x-3)$ (§ 3.14 Εφαρ. 1 (β)).
13. Προσθέτουμε τις ανισότητες κατά μέλη και εφαρμόζουμε το θεώρημα 9.
14. $||x|-|y|| \leq |x+y| \Leftrightarrow ||x|-|y||^2 \leq |x+y|^2 \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x||y| \leq x^2+y^2+2xy$ κτλ. Το ίσον ισχύει, όταν $xy \leq 0$. Η άλλη ανισότητα αποδεικνύεται ομοίως.
15. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με το θετικό $|x||y|$.
16. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανισότητας, που θέλουμε να αποδείξουμε, με το θετικό $\lambda+\mu+\nu$ και μετά αποδεικνύουμε ότι $\mu\alpha+\nu\alpha < \mu\beta+\nu\gamma$ κτλ.
17. Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
18. **α)** Είναι η άσκ. 6(α). **β)** Είναι: $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \geq \frac{1}{2}$ κτλ.
    γ) Υψώνουμε την προηγούμενη στο τετράγωνο και όπου $\alpha\beta$ θέτουμε το $\frac{1}{4}$.
19. Θα είναι $2x-3y+1 = 0$ και $3x-5y+2 = 0$ κτλ.
20. **α)** $x \leq 1$ **β)** Είναι $\left(x = \frac{2}{3}\right.$ ή $\left.x = 2\right)$ και $x \leq \frac{4}{5}$. Άρα $x = \frac{2}{3}$.
21. **α)** Είναι $|x| < \frac{13}{2}$ ή $-\frac{13}{2} < x < \frac{13}{2}$ (§ 3.15 Εφ. 1).
    β) Είναι $|x| > \frac{9}{5}$, άρα $x < -\frac{9}{5}$ ή $x > \frac{9}{5}$ (§ 3.15 Εφ. 2).

4 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της σχέσεως και ειδικότερα της συναρτήσεως, που είναι από τις βασικότερες μαθηματικές έννοιες, εμφανίζεται στο σχολικό πρόγραμμα από τη Β' κιόλας τάξη του Γυμνασίου. Σ' αυτή θεμελιώνεται και ένα σημαντικό τμήμα του προγράμματος της Γ' Γυμνασίου.

Στο κεφάλαιο αυτό δεν επιδιώκεται απλώς μια επανάληψη, απαραίτητη φυσικά, των εννοιών αυτών. Η υποδομή του γυμνασιακού προγράμματος επιτρέπει μια αυστηρότερη και βαθύτερη προσέγγισή τους καθώς και τη λεπτομερέστερη μελέτη τους.

Εξάλλου ο ορισμός των πράξεων στο σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων οδηγεί αβίαστα το μαθητή στο να παραλληλίσει τη δομή αυτού του συνόλου με τη δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών που μελέτησε στο κεφάλαιο 2.

Τέλος η παρουσίαση της ύλης δίνει την ευκαιρία στο μαθητή να επαναλάβει, να εμπεδώσει και να διευρύνει ένα ενδιαφέρον τμήμα γνώσεων, κυρίως αλγεβρικού λογισμού, που περιλάμβανε η γυμνασιακή διδασκαλία.

ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Έννοια διμελούς σχέσεως

4.1 Όλες οι διμελείς σχέσεις που συναντήσαμε ως τώρα έχουν εισαχθεί με τη βοήθεια προτασιακών τύπων με δύο μεταβλητές. Κάθε φορά δηλαδή που είχαμε έναν τέτοιο προτασιακό τύπο λέγαμε ότι **«ορίζει μια διμελή σχέση»**, χωρίς να έχουμε δώσει ορισμό της έννοιας της διμελούς σχέσεως. Αυτόν τον ορισμό διατυπώνουμε παρακάτω.

Όταν δίνεται ένας προτασιακός τύπος $\mathbf{p(x,y)}$ με δύο μεταβλητές, τότε είναι εντελώς καθορισμένα τρία σύνολα:

- Το σύνολο **A** που διατρέχει η μεταβλητή **x**.
- Το σύνολο **B** που διατρέχει η μεταβλητή **y**.
- Το σύνολο αλήθειας **G**, υποσύνολο του $\mathbf{A \times B}$ με στοιχεία εκείνα ακριβώς τα ζεύγη $\mathbf{(x,y)}$ που επαληθεύουν τον προτασιακό τύπο.

Έτσι $(x,y) \in G$ σημαίνει ό,τι και $p(x,y)$. Δηλαδή ισχύουν

$$\boxed{\begin{array}{lcl} (x,y) \in G & \Leftrightarrow & p(x,y) \\ (x,y) \notin G & \Leftrightarrow & \overline{p}(x,y) \end{array}}$$

Αντιστρόφως, αν δοθούν τα σύνολα A,B και ένα υποσύνολο G του $A \times B$, ορίζεται ο προτασιακός τύπος $\mathbf{(x,y) \in G}$ με $x \in A$, $y \in B$, του οποίου το σύνολο αλήθειας είναι ακριβώς το G.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι εκείνο που ορίζει ένας προτασιακός τύπος είναι η διατεταγμένη τριάδα **(A,B,G)** και αντιστρόφως, όταν δοθεί η (A,B,G), υπάρχει π.τ. — ο $(x,y) \in G$ — από τον οποίο αυτή ακριβώς η τριάδα καθορίζεται.

Είναι λοιπόν εύλογο να ταυτίσουμε τη διμελή σχέση που, όπως λέμε, ορίζει ένας προτασιακός τύπος με την τριάδα (A,B,G) δίνοντας τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω τα σύνολα A και B. Ονομάζουμε διμελή σχέση (αντιστοιχία) από το A στο B κάθε τριάδα (A,B,G), όπου G είναι υποσύνολο του A × B

Τα Α καί Β ονομάζονται αντιστοίχως **σύνολο αφετηρίας** και **σύνολο αφίξεως** και το G **γράφημα** της σχέσεως.

Για τα ζεύγη (x,y) που ανήκουν στο γράφημα G μιας σχέσεως σ γράφουμε συνήθως $x \sigma y$ και λέμε ότι:

«το (x,y) ικανοποιεί τη σχέση σ» ή ότι με τη σ:
«το x σχετίζεται με το y» ή
«στο x αντιστοιχίζεται το y» ή
«το y είναι αντίστοιχο του x».

Όταν για τον καθορισμό μιας διμελούς σχέσεως **από** το Α **στο** Β δίνεται ένας προτασιακός τύπος $p(x,y)$ εννοείται πάντοτε $x \in A$ και $y \in B$. Έτσι τα ζεύγη (x,y) των σχετιζόμενων στοιχείων, άρα και το G, είναι εντελώς καθορισμένα.

Άν στη διμελή σχέση (Α,Β,G) είναι $A = B$, τότε λέμε ότι έχουμε μια διμελή σχέση (μέσα) **στο** σύνολο Α.

Ισότητα διμελών σχέσεων

4.2 Από τον ορισμό της διμελούς σχέσεως προκύπτει ότι δύο διμελείς σχέσεις είναι ίσες (ταυτίζονται), αν έχουν ίδιο σύνολο αφετηρίας, ίδιο σύνολο αφίξεως και ίδιο γράφημα.

Αντιστροφή διμελών σχέσεων

4.3 Έστω (Α,Β,G) μια διμελής σχέση σ. Το σύνολο των ζευγών (y, x), για τα οποία $(x,y) \in G$, λέγεται **αντίστροφο γράφημα** του G και συμβολίζεται G^{-1}. Είναι συνεπώς:

$$(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G^{-1} \text{ καί } G^{-1} \subseteq B \times A$$

Άρα ορίζεται μια διμελής σχέση από το Β στο Α, η (B, A, G^{-1}), η οποία ονομάζεται **αντίστροφη** της σ και συμβολίζεται σ^{-1}.

Όταν μια σχέση σ ορίζεται από ένα π.τ. $p(x,y)$, ο **ίδιος** π.τ. ορίζει και τα ζεύγη (y,x) του G^{-1} που ικανοποιούν την αντίστροφη σχέση $\sigma^{-1} = (B,A,G^{-1})$. Επειδή όμως συνηθίζουμε να παριστάνουμε με x τη μεταβλητή του συνόλου αφετηρίας και με y τη μεταβλητή του συνόλου αφίξεως, τα ζεύγη του G^{-1} ορίζονται με τη μορφή (x,y), αν στον $p(x,y)$ που ορίζει τη σ εναλλάξουμε τα γράμματα x και y. Έτσι ο «ανάστροφος» τύπος που προκύπτει, τον οποίο ας συμβολίσουμε $p(y,x)$ με $x \in B$ και $y \in A$, ορίζει τη σ^{-1}.

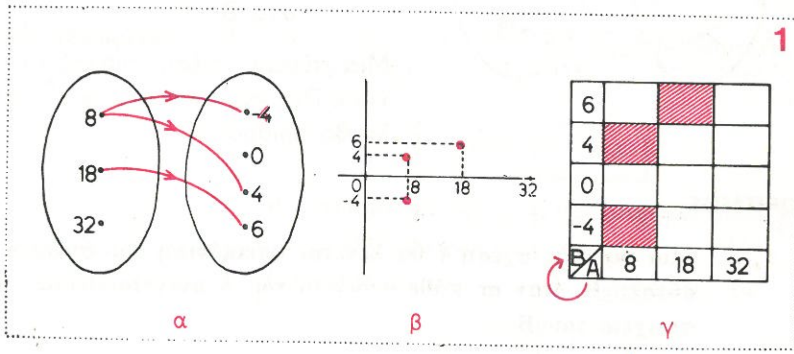
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνονται τα σύνολα $A = \{8, 18, 32\}$ και $B = \{-4, 0, 4, 6\}$ και η σχέση σ από το Α στο Β που ορίζεται από τον τύπο $y^2 = 2x$.

α) Να βρεθεί το γράφημα G της σ.

β) Να βρεθεί η αντίστροφη σχέση σ^{-1}.

α) Πρέπει να βρούμε εκείνα τα ζεύγη (x,y) για τα οποία $y^2=2x$.
Αν $x = 8$, τότε $y^2 = 2 \cdot 8$ η $y = \pm 4$.
Αν $x = 18$, τότε $y^2 = 2 \cdot 18$ η $y = \pm 6$.
Αν $x = 32$, τότε $y^2 = 2 \cdot 32$ η $y = \pm 8$.
Επειδή όμως $-6 \notin B$, και $\pm 8 \notin B$, το γράφημα της σχέσεως σ θα είναι:
$$G = \{(8, -4), (8,4), (18,6)\}.$$
Στο σχήμα 1 παριστάνεται η σχέση σ με *βελοδιάγραμμα* (1α), με *καρτεσιανό διάγραμμα* (1β) και με *πίνακα διπλής εισόδου* (1γ).

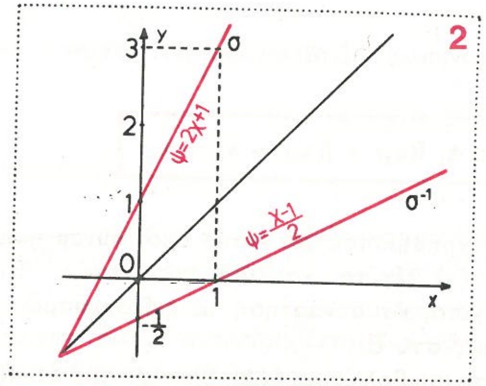


α β γ

β) Το αντίστροφο γράφημα είναι $G^{-1} = \{(-4,8), (4,8), (6,18)\}$, οπότε η αντίστροφη σχέση είναι $\sigma^{-1} = (B, A, G^{-1})$.

2. Έστω μια διμελής σχέση σ στο $\mathbb{R}$ με τύπο $y = 2x + 1$. Να βρεθεί η σχέση σ^{-1} και να γίνουν τα καρτεσιανά διαγράμματα των σχέσεων σ και σ^{-1}.

Η σ^{-1} θα είναι μια σχέση στο R με τύπο $x = 2y + 1$ ή $y = \frac{x-1}{2}$.

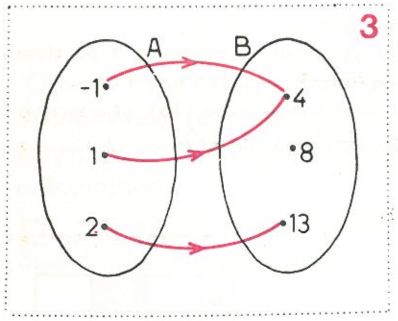


Στο σχήμα 2 παριστάνονται τα καρτεσιανά διαγράμματα των σχέσεων σ σ^{-1}, τα οποία είναι ευθείες συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της γωνίας των θετικών ημιαξόνων.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έννοια συναρτήσεως

4.4 Στο σχήμα 3 έχουμε το βελοδιάγραμμα μιας σχέσεως από τό σύνολο Α στο Β, η οποία ορίζεται από τον τύπο $y = 3x^2+1$.



Ειδικότερα σ' αυτή τη σχέση παρατηρούμε ότι:

- **Όλα** τα στοιχεία του Α σχετίζονται με στοιχεία του Β και
- Οποιοδήποτε στοιχείο του Α έχει **ένα μοναδικό** αντίστοιχο στο Β.

Μια τέτοια σχέση ονομάζεται **απεικόνιση.** Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια διμελής σχέση f θα λέγεται απεικόνιση του συνόλου Α στο σύνολο Β, όταν σε κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται ένα μόνο στοιχείο του Β

Το σύνολο αφετηρίας Α λέγεται και **πεδίο ορισμού** της απεικονίσεως. Μια απεικόνιση f του Α στο Β συμβολίζεται $f: A \to B$. Το μοναδικό $y \in B$, που είναι αντίστοιχο ενός στοιχείου $x \in A$, συμβολίζεται **f(x)** και λέγεται **εικόνα** του x. Γράφουμε λοιπόν

$$y = f(x)$$

Άρα το γράφημα της f αποτελείται από ζεύγη της μορφής **(x, f(x))** με $x \in A$.

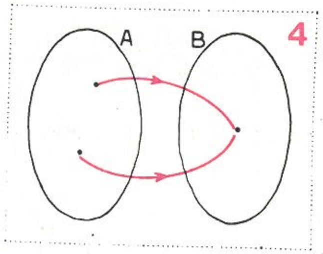
Από τον ορισμό της απεικονίσεως συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$\boxed{\forall\, x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2} \qquad (1)$$

Αντί του όρου απεικόνιση χρησιμοποιείται και ο όρος **συνάρτηση.** Στην περίπτωση αυτή η εικόνα f(x) λέγεται και **τιμή** της f **στο** x. Έτσι, μια απεικόνιση του Α στο Β λέγεται και συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α, ή *ορισμένη* στο Α, και *με τιμές* στο Β.
Το σύνολο των τιμών της f το συμβολίζουμε **f (A)**. Είναι φανερό ότι $f(A) \subseteq B$.

Ειδικές συναρτήσεις

4.5 **Σταθερή συνάρτηση.** Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται **σταθερή** με τιμή c, όταν



$$\boxed{\forall x \in A,\ f(x) = c}$$

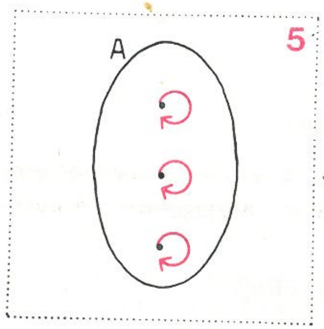
Τέτοια συνάρτηση έχουμε στο σχήμα 4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f: \{-2,0,2\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 4x + 3$.

Έχουμε $f(-2) = 3$, $f(0) = 3$ και $f(2) = 3$. Δηλαδή για κάθε $x \in \{-2,0,2\}$ είναι $f(x) = 3$. Άρα η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Ταυτοτική συνάρτηση. Μια συνάρτηση $f: A \to A$ λέγεται **ταυτοτική** στο Α, όταν



$$\boxed{\forall x \in A,\ f(x) = x}$$

Μια τέτοια συνάρτηση, που συμβολίζεται I_A, έχουμε στο σχήμα 5.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (x+1)^2 - (x^2+x+1)$ είναι ταυτοτική στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - x - 1 = x$.

Ακολουθία. Κάθε συνάρτηση α, ορισμένη στο $\mathbb{N}^*$ (ή $\mathbb{N}$) με τιμές σε ένα σύνολο Ε, λέγεται **ακολουθία** στοιχείων του Ε. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, η ακολουθία λέγεται **πραγματική.**
Συνήθως η τιμή της α που αντιστοιχίζεται στο φυσικό αριθμό ν γράφεται α_ν, αντί $\alpha(\nu)$, και η ακολουθία συμβολίζεται $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ ή συντομότερα (α_ν). Π.χ. ή ἀκολουθία

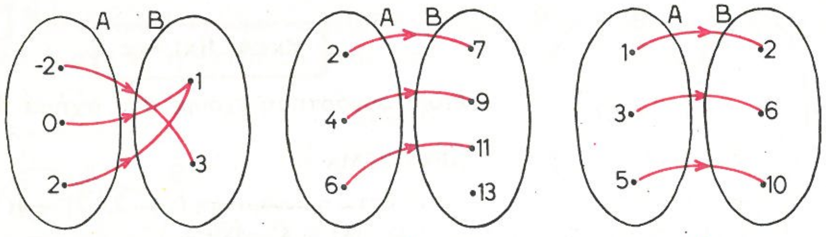
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^\nu}, \ldots$$

Είδη συναρτήσεων

4.6 Στο σχήμα 6 έχουμε τα βελοδιαγράμματα τριών διμελών σχέσεων. Καθεμιά από τις σχέσεις αυτές, όπως φαίνεται αμέσως από το αντίστοιχο βελοδιάγραμμα είναι μια συνάρτηση του Α στο Β, γιατί σε κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται ένα μόνο στοιχείο του Β. Ειδικότερα παρατηρούμε ότι:

● Στο σχήμα 6α έχουμε μια συνάρτηση f, στην οποία **κάθε** στοιχείο

6



του B είναι εικόνα ενός τουλάχιστο στοιχείου του A. Δηλαδή είναι:

$$\boxed{f(A) = B}$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **«συνάρτηση επί»**.

● Στο σχήμα 6β έχουμε μια συνάρτηση f του A στο B, στην οποία σε διαφορετικά στοιχεία του A αντιστοιχίζονται **διαφορετικά** στοιχεία του B. Δηλαδή είναι :

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

και σύμφωνα με την (1) της § 4.4 θα είναι:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **«συνάρτηση ένα προς ένα (1—1)»**(1).

● Στο σχήμα 6γ έχουμε μια συνάρτηση f, στην οποία **κάθε** στοιχείο του B είναι εικόνα **ενός** και **μόνο** στοιχείου του A. Δηλαδή είναι:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ f(A) = B \quad \text{και} \\ 2.\ \forall x_1, x_2 \in A,\quad x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{array}}$$

Η συνάρτηση αυτή λοιπόν είναι **«συνάρτηση 1—1 και επί»**.

(1) Λέγεται και αμφιμονοσήμαντη ή αμφιμονότιμη.

Αντίστροφη συνάρτηση

4.7 Επειδή μια συνάρτηση f του A στο B είναι μια διμελής σχέση, σύμφωνα με την § 4.3 ορίζεται και η αντίστροφη σχέση f^{-1} από το B στο A. Είναι προφανές ότι, αν η f **δεν** είναι επί ή **δεν** είναι 1—1, τότε η f^{-1} **δεν ειναι συνάρτηση.** Εξετάζουμε ακόμα τις εξής περιπτώσεις:

● Η f είναι «συνάρτηση επί». Τότε είναι δυνατό, όπως φαίνεται και στο σχήμα 6α, με τη σχέση f^{-1} σε ένα στοιχείο του B να αντιστοιχίζονται διαφορετικά στοιχεία του A. Επομένως η f^{-1} μπορεί να μην ειναι συνάρτηση.

● Η f είναι «συνάρτηση 1—1». Τότε είναι δυνατό (Σχ. 6β) να υπάρχει στοιχείο του B που να μην είναι αντίστοιχο κάποιου στοιχείου του A. Επομένως πάλι η f^{-1} μπορεί να μην είναι συνάρτηση.

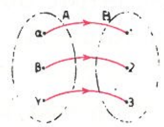
● Η f είναι «συνάρτηση 1—1 και επί». Τότε (Σχ. 6γ) με τη σχέση f^{-1} σε κάθε στοιχείο του B αντιστοιχίζεται ένα μόνο στοιχείο του A, που σημαίνει ότι η f^{-1} είναι συνάρτηση.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι **μόνο στην περίπτωση που η f ειναι «συνάρτηση 1—1 και επί» η f^{-1} ειναι επίσης συνάρτηση και μάλιστα 1—1 και επί.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

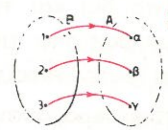
Να εξεταστεί αν είναι συναρτήσεις οι αντίστροφες σχέσεις των συναρτήσεων:

α) f_1 **της οποίας το βελοδιάγραμμα παριστάνεται στο σχ. 7.**
β) f_2: $A \to B$ **με** $f_2(x) = 2x + 1$, $A = \{0, 2, 3\}$, **και** $B = \{1, 5, 7\}$.
γ) f_3: $A \to B$ **με** $f_3(x) = x^2 + 1$, $A = \{1, -1, 3\}$, **και** $B = \{2, 10\}$.



7

α) Η f_1 είναι συνάρτηση 1—1 και επί. Άρα η f_1^{-1} είναι συνάρτηση ορισμένη στο B και με τιμές στο A επίσης 1—1 και επί. Στο σχήμα 8 παριστάνεται το βελοδιάγραμμα τῆς f_1^{-1}.



8

β) Θα πρέπει να εξετάσουμε αν $f_2(A) = B$ και $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$. Είναι $f_2(0) = 1$, $f_2(2) = 5$ και $f_2(3) = 7$. Άρα $f(A) = \{1, 5, 7\} = B$ και για $x_1 \neq x_2$, είναι $f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$. Άρα η f_2^{-1} είναι συνάρτηση.
γ) Ομοίως έχουμε $f_3(1) = 2$, $f_3(-1) = 2$, $f_3(3) = 10$. Άρα $f(A) = B$. Για τα διαφορετικά όμως στοιχεία 1 και −1 έχουμε $f_3(1) = f_3(-1) = 2$. Επομένως η f_3^{-1} δεν είναι συνάρτηση.

Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έννοια της πραγματικής συναρτήσεως

4.8 Αν στη συνάρτηση $f : A \to B$ είναι

- $B \subseteq \mathbb{R}$, η f λέγεται **πραγματική συνάρτηση.**
- $A \subseteq \mathbb{R}$, η f λέγεται συνάρτηση **πραγματικής μεταβλητής.**

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, η f είναι πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω Α το σύνολο των μαθητών μιας τάξεως. Αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε μαθητή το βάρος του, θα έχουμε μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο Α.
2. Η συνάρτηση f, η οποία στο $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό $f(x) = 4x^3-3x^2+5x+1$, είναι μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.
3. Η πρόσθεση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, η οποία σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ αντιστοιχίζει το άθροισμά τους $x+y$, είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$.
4. Ο πολλαπλασιασμός στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι επίσης μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2$, η οποία σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ αντιστοιχίζει το γινόμενο $xy \in \mathbb{R}$.
5. Η συνάρτηση f, η οποία στο $x \in [-4,3]$ αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{αν } -4 \le x \le -1 \\ 2, & \text{αν } -1 < x \le 1 \\ -2x+1, & \text{αν } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[-4, 3]$.

Από δω και πέρα θα ασχοληθούμε μόνο με πραγματικές συναρτήσεις. Συνήθως για τις συναρτήσεις αυτές δεν αναφέρεται το σύνολο αφίξεως Β και τότε εννοούμε ότι είναι το $\mathbb{R}$.

Ειδικότερα, όταν πρόκειται για πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, συνήθως δίνεται η τιμή της $f(x)$ στο x υπό μορφή αλγεβρικής παραστάσεως και δεν αναφέρεται ούτε το πεδίο ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή πεδίο ορισμού της f θα εννοούμε ότι είναι πάλι το $\mathbb{R}$, **εκτός από τα στοιχεία του για τα οποία η $f(x)$ δεν έχει νόημα πραγματικού αριθμού.** Έτσι π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^2+1$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Είναι δηλαδή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ενώ η συνάρτηση g με $g(x) = \dfrac{3+5x}{x}$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}^*$, αφού το πηλίκο $\dfrac{3+5x}{x}$ δεν ορίζεται για $x = 0$. Είναι λοιπόν $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε καταχρηστικά την έκφραση *«η συνάρτηση $y = f(x)$»* εννοώντας τη συνάρτηση f που ορίζεται από τον τύπο $y = f(x)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:**

f_1 με $f_1(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, f_2 μέ $f_2(x) = \dfrac{x+1}{x^3-4x^2+3x}$ και

f_3 με $f_3(x) = 4x^3+3x^2+5x+1$.

Το πεδίο ορισμού της f_1 είναι το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο η $f_1(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Αυτό συμβαίνει μόνο, όταν $x^2-1 \neq 0$ ή $x \neq \pm 1$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f_1 είναι το $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Για την f_2 θα πρέπει $x^3-4x^2+3x \neq 0$ ή $x(x-1)(x-3) \neq 0$ ή $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 3$. Άρα πεδίο ορισμού της f_2 είναι το $\mathbb{R} - \{0,1,3\}$.

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f_3(x)$ πραγματικός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της f_3 είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

2. **Για τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$ να βρεθούν:**

α) Το πεδίο ορισμού της Α

β) Τα ζεύγη $(0, f(0))$ $(1, f(1))$, $(-1, f(-1))$.

α) Θα πρέπει $x^2-5x+6 \neq 0$ ή $(x-2)(x-3) \neq 0$ ή $x \neq 2$, $x \neq 3$. Άρα $A = \mathbb{R} - \{2,3\}$.

β) Για $x = 0$ είναι $f(0) = -\dfrac{1}{6}$, οπότε $\left(0, f(0)\right) = \left(0, -\dfrac{1}{6}\right)$

» $x = 1$ » $f(1) = 0$ » $(1, f(1)) = (1,0)$

» $x = -1$ » $f(-1) = -\dfrac{1}{6}$ » $\left(-1, f(-1)\right) = \left(-1, -\dfrac{1}{6}\right)$.

Από αυτά μόνο τα ζεύγη μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f^{-1} δεν είναι συνάρτηση;

Ίσες συναρτήσεις

4.9 Έστω δύο συναρτήσεις f_1 και f_2. Για να είναι $f_1 = f_2$, επειδή έχουν κοινό σύνολο αφίξεως το $\mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί να έχουν κοινό πεδίο ορισμού Α και κοινό γράφημα. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$ πρέπει να είναι $(x,f_1(x)) = (x, f_2(x))$. Άρα έχουμε:

$$\boxed{f_1 = f_2 \Leftrightarrow \forall x \in A, \quad f_1(x) = f_2(x)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = x^2 + 1$ και f_2 μέ $f_2(x) = x^4 + 1$ με κοινό πεδίο ορισμού το $A = \{-1,0\}$. Παρατηρούμε ότι $f_1(-1) = f_2(-1) = 2$ και $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Δηλαδή για κάθε $x \in A$, $f_1(x) = f_2(x)$. Άρα $f_1 = f_2$.
Αν όμως πάρουμε ως πεδίο ορισμού το $A' = \{1,0,2\}$, παρατηρούμε ότι $f_1(2) \neq f_2(2)$. Άρα στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

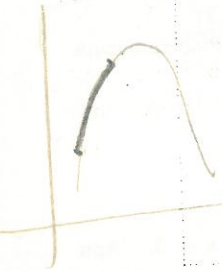
Περιορισμός και επέκταση συναρτήσεως

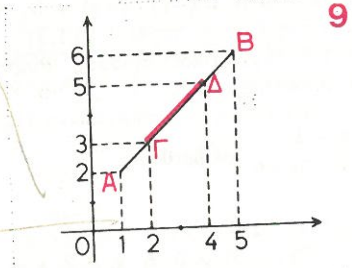
4.10 Έστω οι συναρτήσεις f_1, f_2 ορισμένες στα A_1, A_2 αντιστοίχως με $A_1 \subset A_2$. Αν για κάθε $x \in A_1$ είναι $f_1(x) = f_2(x)$, τότε:

η f_1 λέγεται **περιορισμός** της f_2 στο A_1 και
η f_2 λέγεται **επέκταση** της f_1 στο A_2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = x+1$, $x \in [2,4]$ και f_2 με $f_2(x) = x+1$, $x \in [1,5]$. Παρατηρούμε ότι $[2,4] \subset [1,5]$ και για κάθε $x \in [2,4]$ είναι $f_1(x) = f_2(x) = x+1$. Άρα η f_1 είναι ένας περιορισμός της f_2 στο $[2,4]$ και η f_2 μια επέκταση της f_1 στο $[1,5]$.





9

Στο σχήμα 9 η γραφική παράσταση της f_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και η γραφική παράσταση της f_2 είναι το τμήμα AB.

Ασκήσεις 6,7,8.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά

4.11 Έστω A το σύνολο των μαθητών της Β' τάξεως ενός Λυκείου οι οποίοι πήραν μέρος στις πανελλήνιες εξετάσεις του Ιουνίου και

f η συνάρτηση, η οποία αντιστοιχίζει στο μαθητή $x \in A$ τον αριθμό $f(x)$ των μονάδων που πήρε στο μάθημα της Φυσικής,

g η συνάρτηση, η οποία αντιστοιχίζει στο μαθητή $x \in A$ τον αριθμό $g(x)$ των μονάδων που πήρε στο μάθημα της Χημείας.

Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε μια νέα συνάρτηση h, η οποία σε κάθε μαθητή $x \in A$ αντιστοιχίζει το άθροισμα $f(x)+g(x)$ των μονάδων στα μαθήματα Φυσικής και Χημείας. Θα είναι λοιπόν $h(x) = f(x)+g(x)$.
Η συνάρτηση h λέγεται **άθροισμα** των f και g.

Έστω τώρα A ένα σύνολο αυτοκινήτων και

f η συνάρτηση, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε αυτοκίνητο $x \in A$ τον αριθμό $f(x)$ των χιλιομέτρων που διανύει το αυτοκίνητο αυτό κατά μέσο όρο την ημέρα,

g η συνάρτηση, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε αυτοκίνητο $x \in A$ τον αριθμό $g(x)$ των ημερών που κινήθηκε το αυτοκίνητο αυτό κατά το μήνα Μάιο.

Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε μια νέα συνάρτηση h, η οποία σε κάθε αυτοκίνητο $x \in A$ αντιστοιχίζει τον αριθμό $f(x)g(x)$ των χιλιομέτρων που έχει διανύσει το μήνα Μάιο. Θα είναι λοιπόν $h(x) = f(x)\,g(x)$.

Η συνάρτηση h λέγεται **γινόμενο** των συναρτήσεων f και g.

Στα επόμενα **θεωρούμε** το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού A, που το συμβολίζουμε $\mathbf{F}_A$, και στο οποίο ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις.

Πρόσθεση συναρτήσεων

4.12 **Ορισμός.** Αν f_1 και f_2 είναι δύο συναρτήσεις του F_A, τότε η συνάρτηση η οποία σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζει το $f_1(x)+f_2(x)$ λέγεται **άθροισμα** των f_1 και f_2 και συμβολίζεται f_1+f_2. Δηλαδή είναι

$$\boxed{\forall x \in A, \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)} \qquad (1)$$

Γενικότερα, αν η f_1 ορίζεται στο A_1 και η f_2 στο A_2, τότε η f_1+f_2 ορίζεται με την (1) στο σύνολο $A = A_1 \cap A_2$.

Ως άθροισμα ν συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu-1}, f_\nu$ για κάθε φυσικό $\nu > 2$ ορίζεται το άθροισμα των συναρτήσεων $(f_1+f_2+\ldots+f_{\nu-1})$ και f_ν.

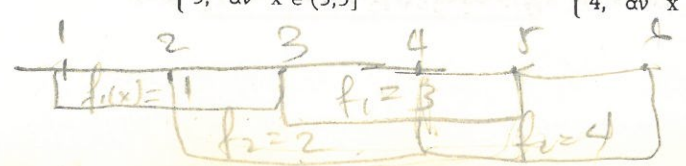
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

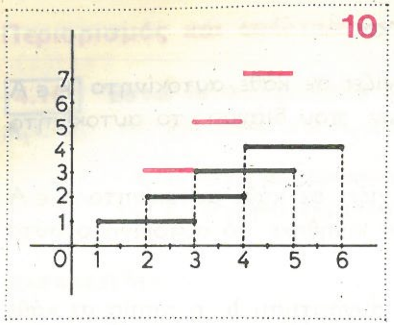
1. Δίνονται οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = \frac{x}{2}$ και f_2 με $f_2(x) = x$ με κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Το άθροισμά τους είναι η συνάρτηση f_1+f_2, η οποία στο x αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(x) &= f_1(x)+f_2(x)\\ &= \frac{x}{2} + x\\ &= \frac{3x}{2}.\end{aligned}$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f_1 και f_2 ορισμένες αντιστοίχως στα $[1,5]$ και $[2,6]$

με $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [1,3] \\ 3, & \text{αν } x \in (3,5] \end{cases}$ και $f_2(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } x \in [2,4] \\ 4, & \text{αν } x \in (4,6] \end{cases}$





Το άθροισμά τους είναι η συνάρτηση f_1+f_2, ορισμένη στο $[2,5]$, η οποία στο x αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό

$$(f_1+f_2)(x)=\begin{cases}1+2=3, & \text{αν } x\in[2,3]\\ 3+2=5, & \text{αν } x\in(3,4]\\ 3+4=7, & \text{αν } x\in(4,5]\end{cases}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1, f_2, f_1+f_2 δίνονται στο σχήμα 10.

4.13 **Ιδιότητες.** Έστω f_1, f_2 και f_3 τρεις συναρτήσεις του F_A. Τότε, επειδή για κάθε $x\in A$ οι $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, θα είναι:

$$\forall x\in A\ ,\quad f_1(x)+f_2(x)=f_2(x)+f_1(x).$$

Το $f_1(x)+f_2(x)$ όμως είναι η τιμή της συναρτήσεως f_1+f_2 στο x, ενώ το $f_2(x)+f_1(x)$ είναι η τιμή της f_2+f_1 στο x. Είναι λοιπόν

$$\forall x\in A,\quad (f_1+f_2)(x)=(f_2+f_1)(x)$$

που σημαίνε $\quad f_1+f_2=f_2+f_1 \quad$ **(1)**

Δηλαδή η πρόσθεση των πραγματικών συναρτήσεων είναι **αντιμεταθετική.**

Ομοίως έχουμε $\forall\ x\in A,\ [f_1(x)+f_2(x)]+f_3(x)=f_1(x)+[f_2(x)+f_3(x)]$

πού σημαίνει $\quad \mathbf{(f_1+f_2)+f_3=f_1+(f_2+f_3)} \quad$ **(2)**

Δηλαδή η πρόσθεση στο F_A είναι και **προσεταιριστική.**

Έστω τώρα ω η συνάρτηση του F_A, για την οποία έχουμε, για κάθε $x\in A$, $\omega(x)=0$. Τότε, αν f είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του F_A, θα έχουμε:

$$\forall\ x\in A,\quad f(x)+\omega(x)=\omega(x)+f(x)=f(x)$$

δηλαδή $\quad \mathbf{f+\omega=\omega+f=f.} \quad$ **(3)**

Άρα η συνάρτηση ω θα είναι το **ουδέτερο στοιχείο** ως προς την πρόσθεση στο F_A.

Ας εξετάσουμε τώρα αν για κάθε συνάρτηση f του F_A υπάρχει μια άλλη συνάρτηση f^* του F_A τέτοια, ώστε να είναι

$$\mathbf{f+f^*=\omega} \qquad \textbf{(4)}$$

Από την (4) προκύπτει ότι:

$$\forall x\in A,\quad f(x)+f^*(x)=\omega(x)=0 \quad \text{ή}\quad f^*(x)=-f(x).$$

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει η f^* και είναι μοναδική. Η f^* που έχει την ιδιότητα (4) λέγεται **αντίθετη** της f και συμβολίζεται $-f$.

Το άθροισμα $f+(-g)$ το λέμε **διαφορά** της g από την f, το συμβολίζουμε $\mathbf{f-g}$ και για κάθε $x\in A$ είναι $\mathbf{(f-g)(x)=f(x)-g(x).}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Αν f, g είναι συναρτήσεις του F_A, να αποδειχθεί ότι $-(f+g)=-f-g$.**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις $-(f+g)$ και $-f-g$ για κάθε $x\in A$ έχουν την ίδια τιμή. Η τιμή της $-(f+g)$ στο x είναι $[-(f+g)](x)=-[(f+g)(x)]=-[f(x)+g(x)]$, ενώ της $-f-g$ είναι

$$\begin{aligned}(-f-g)(x)&=[(-f)+(-g)](x)\\&=(-f)(x)+(-g)(x)\\&=-f(x)-g(x)\\&=-[f(x)+g(x)],\ \text{δηλαδή ίση με } [-(f+g)](x).\end{aligned}$$

2. **Αν f_1 με $f_1(x)=(x-1)^2-(x-1)(x+2)$**
f_2 με $f_2(x)=(x-1)^2-(x^2-4x+3)$
f_3 με $f_3(x)=1-x$
είναι τρεις συναρτήσεις του F_A, να δειχθεί ότι $f_1+f_2=f_3$.

Έχουμε $f_1(x)+f_2(x)=[(x-1)^2-(x-1)(x+2)]+[(x-1)^2-(x^2-4x+3)]$
$$=x^2-2x+1-x^2-x+2+x^2-2x+1-x^2+4x-3$$
$$=1-x.$$

Άρα έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f_1(x)+f_2(x)=f_3(x)$. Δηλαδή $f_1+f_2=f_3$.

3. **Έστω οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x)=(x-1)^2$ και πεδίο ορισμού το $[1,4]$**
f_2 με $f_2(x)=(x+1)^2$ και πεδίο ορισμού το $[2,5]$
f_3 με $f_3(x)=x^2+x-5$ και πεδίο ορισμού το $[6,9]$.
Ορίζονται οι συναρτήσεις f_1+f_2, f_2+f_3 και f_1+f_3 ;

Η συνάρτηση f_1+f_2 ορίζεται στην τομή των πεδίων ορισμού των f_1 και f_2, δηλαδή στο διάστημα $[2,4]$ και είναι

$$\forall\ x\in[2,4],\quad \begin{aligned}f_1(x)+f_2(x)&=(x-1)^2+(x+1)^2\\&=2x^2+2.\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις f_2+f_3 και f_1+f_3 δεν ορίζονται, γιατί η τομή των πεδίων ορισμού των f_2, f_3 και των f_1, f_3 είναι το $\varnothing$.

Ασκήσεις 9,10,11.

Πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί συνάρτηση

4.14 Έστω f μια συνάρτηση του F_A. Τότε, για κάθε $x\in A$ είναι $f(x)+f(x)=2f(x)$. Δηλαδή στό x με τη συνάρτηση $f+f$ αντιστοιχίζεται τό $2f(x)$. Τή συνάρτηση $f+f$ τη συμβολίζουμε με $2f$ και την ονομάζουμε γινόμενο του αριθμού 2 επί την f.

Γενικότερα, αν $f\in F_A$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση που στο $x\in A$ αντιστοιχίζει το $\lambda f(x)$ ονομάζεται **γινόμενο του πραγματικού αριθμού λ επί τη συνάρτηση f** και συμβολίζεται με λf.

Είναι λοιπόν:

$$\boxed{\forall x\in A,\quad (\lambda f)(x)=\lambda f(x)}$$

4.15 **Ιδιότητες.** Αν κ,λ είναι πραγματικοί αριθμοί και f,g συναρτήσεις του F_A, τότε ισχύουν:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{1.} & \mathbf{k(\lambda f) = (k\lambda)\, f} \\ \mathbf{2.} & \mathbf{(k+\lambda)\, f = kf + \lambda f} \\ \mathbf{3.} & \mathbf{k(f+g) = kf + kg} \\ \mathbf{4.} & \mathbf{1\, f = f} \end{array}}$$

Για να αποδείξουμε π.χ. ότι $\kappa(\lambda f) = (\kappa\lambda)f$, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές για κάθε $x \in A$ έχουν την ίδια τιμή. Πράγματι:
Η τιμή της $\kappa(\lambda f)$ στο x είναι

$$[\kappa(\lambda f)]\,(x) = \kappa[(\lambda f)\,(x)] = \kappa\,[\lambda\, f(x)]$$

ενώ της $(\kappa\lambda)f$ είναι: $[(\kappa\lambda)f](x) = (\kappa\lambda)f(x)$.
Επειδή όμως κ,λ και f(x) είναι πραγματικοί αριθμοί, έχουμε:

$$\forall\, x \in A, \qquad \kappa[(\lambda f(x)] = (\kappa\lambda)\, f(x).$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες ιδιότητες.

Ασκήσεις 12, 13, 14.

Πολλαπλασιασμός συναρτήσεων

4.16 **Ορισμός.** Αν f_1 και f_2 είναι δύο συναρτήσεις του F_A, τότε η συνάρτηση η οποία σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζει το $f_1(x) \cdot f_2(x)$ λέγεται **γινόμενο** των συναρτήσεων f_1 και f_2 και συμβολίζεται $f_1\, f_2$. Δηλαδή είναι:

$$\boxed{\forall x \in A, \quad (f_1 f_2)\,(x) = f_1(x) f_2(x)} \qquad (1)$$

Γενικότερα, αν η f_1 ορίζεται στο A_1 και η f_2 στο A_2, τότε η $f_1 f_2$ ορίζεται με την (1) στο σύνολο $A = A_1 \cap A_2$.

Ως γινόμενο ν συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu-1}, f_\nu$ για κάθε φυσικό $\nu > 2$ ορίζεται το γινόμενο των συναρτήσεων $(f_1 f_2 \ldots f_{\nu-1})$ και f_ν.

Το γινόμενο ν ίσων συναρτήσεων $f\,f\,f \ldots f$ το συμβολίζουμε f^ν. Επομένως θα είναι

$$\begin{aligned} \forall\, x \in A, \quad (f^\nu)\,(x) &= (ff\ldots f)\,(x) \\ &= f(x)\, f(x) \ldots f(x) \\ &= [f(x)]^\nu. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνονται οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = x^2 - 1$ και f_2 με $f_2(x) = x^2 + 1$ με κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Το γινόμενό τους είναι η συνάρτηση $f_1 f_2$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία σε κάθε x αντιστοιχίζει το $(f_1 f_2)\,(x) = f_1(x)\, f_2(x) = (x^2 - 1)\,(x^2 + 1) = x^4 - 1$.

4.17. **Ιδιότητες.** Αν f_1, f_2, f_3 είναι τρεις συναρτήσεις του F_A, τότε έχουμε γιά κάθε $x \in A$,

$$f_1(x)\, f_2(x) = f_2(x)\, f_1(x)$$

$$f_1(x)\,[f_2(x)\, f_3(x)] = [f_1(x) f_2(x)] f_3(x) \qquad \text{καί}$$

$$[f_1(x) + f_2(x)]\, f_3(x) = f_1(x)\, f_3(x) + f_2(x)\, f_3(x)$$

που σημαίνει αντιστοίχως:

$$\mathbf{f_1 f_2 = f_2 f_1} \qquad (1)$$

$$\mathbf{f_1(f_2 f_3) = (f_1 f_2) f_3} \qquad (2)$$

$$\mathbf{(f_1 + f_2) f_3 = f_1 f_3 + f_2 f_3.} \qquad (3)$$

Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός στο F_A είναι πράξη **αντιμεταθετική**, **προσεταιριστική** και **επιμεριστική** ως προς την πρόσθεση.

Έστω τώρα **u** η συνάρτηση του F_A, για την οποία: $\forall\, x \in A$, $u(x) = 1$. Τότε, αν f είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του F_A, θα έχουμε

$$\forall\, x \in A, \quad f(x) u(x) = u(x)\, f(x) = f(x)$$

Δηλαδή
$$\mathbf{f\, u = u\, f = f.} \qquad (4)$$

Άρα η συνάρτηση u θα είναι το **ουδέτερο στοιχείο** ως προς τον πολλαπλασιασμό στο F_A.

Ας εξετάσουμε τώρα αν για μια συνάρτηση f του F_A υπάρχει συνάρτηση f^* τέτοια, ώστε να είναι

$$\mathbf{ff^* = u} \qquad (5)$$

Για να ισχύει η (5), πρέπει και αρκεί

$$\forall\, x \in A, \quad f(x)\; f^*(x) = u(x) = 1. \qquad (6)$$

Επομένως η f^* υπάρχει στο F_A **μόνο όταν** $\forall\, x \in A$, $f(x) \neq 0$, οπότε από την (6) θα έχουμε $f^*(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Στην περίπτωση αυτή η f^* λέγεται **συμμετρική** της f ως προς τον πολλαπλασιασμό. Γενικότερα, περιορίζοντας το πεδίο ορισμού A της f στό $A' = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση, που τη συμβολίζουμε (1) $\dfrac{1}{f}$, με τιμή στο $x \in A'$ το $\dfrac{1}{f(x)}$.

(1) Αποφεύγουμε το συμβολισμό f^{-1} αντί του $\frac{1}{f}$, γιατί σε αυτό το σύμβολο δίνουμε, όπως μάθαμε, άλλη σημασία.

Προσοχή: Όταν υπάρχει στο F_A η συμμετρική f^* της f, τότε είναι $A'=A$ και $f^* = \frac{1}{f}$. Π.χ. για τη συνάρτηση f του $F_{\mathbb{R}}$ με $f(x) = x-1$ δεν υπάρχει η συμμετρική της f^* στο $F_{\mathbb{R}}$, επειδή $f(1)=0$, ενώ η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}' = \mathbb{R} - \{1\}$ και είναι

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x-1}.$$

Έστω τώρα οι συναρτήσεις f,g με πεδία ορισμού A και B αντιστοίχως. Επειδή η $\frac{1}{g}$ ορίζεται στο $B' = \{x \in B : g(x) \neq 0\}$, θα ορίζεται (§ 4.16) και η συνάρτηση $f\frac{1}{g}$ στο σύνολο $A \cap B'$. Η συνάρτηση αυτή συμβολίζεται $\frac{f}{g}$ και λέγεται **πηλίκο** της f διά g.

Είναι λοιπόν

$$\forall x \in A \cap B', \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x)\frac{1}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έτσι όπως ορίστηκαν οι πράξεις στο σύνολο F_A έχουν όλες «σχεδόν» τις ιδιότητες των αντίστοιχων πράξεων στο $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα έχουν τις ιδιότητες που διατυπώνονται με τα αξιώματα I – VIII (Κεφ. 2) καθώς και με τα **θεωρήματα** που προκύπτουν από αυτά τα αξιώματα. Η βασική ιδιότητα του αξ. IX και τα σχετικά με αυτό θεωρήματα που ισχύουν στο $\mathbb{R}$ **δεν** ισχύουν στο F_A.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Αν f, g είναι συναρτήσεις του F_A, να δειχθεί ότι είναι**

$$\frac{1}{fg} = \frac{1}{f}\,\frac{1}{g}, \text{ όταν } \forall x \in A, \ (f(x) \neq 0 \text{ και } g(x) \neq 0).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in A$ είναι $\left(\frac{1}{fg}\right)(x) = \left(\frac{1}{f}\,\frac{1}{g}\right)(x)$.

Έχουμε: $\left(\frac{1}{fg}\right)(x) = \frac{1}{(fg)(x)} = \frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{1}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)}$ (1)

$$\left(\frac{1}{f}\,\frac{1}{g}\right)(x) = \left[\left(\frac{1}{f}\right)(x)\right]\left[\left(\frac{1}{g}\right)(x)\right] = \frac{1}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)} \qquad (2)$$

Από την (1) και (2) προκύπτει ότι για κάθε $x \in A$:

$\left(\frac{1}{fg}\right)(x) = \left(\frac{1}{f}\,\frac{1}{g}\right)(x)$. Δηλαδή $\frac{1}{fg} = \frac{1}{f}\,\frac{1}{g}$.

2. **Έστω οι συναρτήσεις f με $f(x) = x^2-2$, $x \in [2,7]$ και g με $g(x) = 5x^3-3x^2+2$, $x \in [3,9]$. Να οριστεί το γινόμενό τους.**

Η συνάρτηση fg ορίζεται στην τομή των πεδίων ορισμού των f και g, δηλαδή στο διάστημα [3,7] και είναι για κάθε $x \in [3,7]$

$$f(x)g(x) = (x^2-2)(5x^3-3x^2+2) = 5x^5-3x^4-10x^3+8x^2-4.$$

3. **Έστω οι συναρτήσεις f με $f(x) = x^2-5x+6$, και g με $g(x) = x^2-2x$. Να οριστεί η συνάρτηση $\frac{f}{g}$.**

Επειδή $x^2-2x=x(x-2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0,2\}$ είναι $g(x) \neq 0$. Άρα το πηλίκο $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο $\mathbb{R} - \{0,2\}$ και είναι

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x} = \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)} = \frac{x-3}{x}.$$

Ασκήσεις 15,16,17,18,19,20,21.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έννοια πολυωνυμικής συναρτήσεως

4.18 **Ορισμός.** Ονομάζουμε **πολυωνυμική συνάρτηση** μιας πραγματικής μεταβλητής x κάθε συνάρτηση f με

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

όπου $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ν φυσικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Οι συναρτήσεις: f_1 με $f_1(x) = 5x+1$

f_2 με $f_2(x) = \frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{3}{5}x-2$

f_3 με $f_3(x) = 2x^6-3x^4+\sqrt{2}\,x^3-6$

είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = x^2-3x+2$ και f_2 με $f_2(x) = x^3-x$. Να οριστούν οι f_1+f_2 και $f_1 f_2$.**

Έχουμε

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = (x^2-3x+2)+(x^3-x) = x^2-3x+2+x^3-x = x^3+x^2-4x+2$$

$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x) = (x^2-3x+2)(x^3-x) = x^5-3x^4+2x^3-x^3+3x^2-2x = x^5-3x^4+x^3+3x^2-2x.$$

Παρατηρούμε ότι τόσο το άθροισμα f_1+f_2 όσο και το γινόμενο f_1f_2 των δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων f_1, f_2 είναι επίσης πολυωνυμικές συναρτήσεις.

2. Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = 2x^2-3x$ και f_2 με $f_2(x) = x+5$. Να οριστούν οι συναρτήσεις $3f_1-2f_2$ και $2f_1+5f_2$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}(3f_1-2f_2)(x) &= (3f_1)(x)-(2f_2)(x) = 3f_1(x)-2f_2(x)\\ &= 3(2x^2-3x)-2(x+5) = 6x^2-11x-10\\ (2f_1+5f_2)(x) &= (2f_1)(x)+(5f_2)(x) = 2f_1(x)+5f_2(x)\\ &= 2(2x^2-3x)+5(x+5)\\ &= 4x^2-x+25.\end{aligned}$$

Ανάπτυγμα και παραγοντοποίηση

4.19 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια πολυωνυμική συνάρτηση h και υπάρχουν δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις f και g τέτοιες, ώστε να είναι

$$\mathbf{h = f\,g}$$

Τότε θα λέμε ότι η fg είναι μια **παραγοντοποιημένη μορφή** της h, ενώ η h είναι η **αναπτυγμένη μορφή** ή το **ανάπτυγμα** της fg.

Αν π.χ. είναι h με $h(x) = x^2-1$

f με $f(x) = x+1$

g με $g(x) = x-1$

τότε, επειδή $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, η h είναι το ανάπτυγμα της fg και η fg είναι μια παραγοντοποιημένη μορφή της h.

Στο Γυμνάσιο μελετήσαμε διάφορες περιπτώσεις παραγοντοποιήσεως ενός πολυωνύμου και είδαμε ότι δεν υπάρχει μια γενική μέθοδος, η οποία να εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση. Οπωσδήποτε, όμως, η παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου διευκολύνεται με τη χρησιμοποίηση των γνωστών ταυτοτήτων

$$\begin{aligned}\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2\\ \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 &= (\alpha-\beta)^2\\ \alpha^2-\beta^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\\ \alpha^3-\beta^3 &= (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\\ \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\end{aligned}$$

οι οποίες αληθεύουν, όταν τα α,β είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί ή οποιεσδήποτε πραγματικές **συναρτήσεις**. (Βλ. § 4.17 Παρατ.).

Όπως γνωρίζουμε, η παραγοντοποίηση είναι ένα βασικό «εργαλείο» στον αλγεβρικό λογισμό. Είδαμε π.χ. στο λογισμό των πραγματικών συναρτήσεων ότι η παραγοντοποίηση είναι χρήσιμη στον προσδιορισμό του πεδίου ορισμού μιας συναρτήσεως και στην εκτέλεση των πράξεων. Επίσης, όπως θα δούμε στην § 4.21, αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση και υπάρχουν πολυωνυμικές συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ τέτοιες, ώστε

$$f = f_1 f_2 \ldots f_\nu$$

τότε η λύση της εξισώσεως $f(x) = 0$ ή της ανισώσεως $f(x) > 0$ γίνεται απλούστερη. Για τους λόγους αυτούς θα υπενθυμίσουμε την παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου δίνοντας μερικά παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω $f(x) = (9x^2-1)(2x+3)-(4x^2-9)(3x+1)$.

Επειδή είναι $9x^2-1 = (3x+1)(3x-1)$

$4x^2-9 = (2x+3)(2x-3)$

θα είναι

$$\begin{aligned}f(x) &= (3x+1)(3x-1)(2x+3)-(2x+3)(2x-3)(3x+1)\\ &= (3x+1)(2x+3)\,[(3x-1)-(2x-3)]\\ &= (3x+1)(2x+3)(x+2).\end{aligned}$$

2. Έστω $f(x) = x^6-64$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}f(x) &= x^6-2^6 = (x^3)^2-(2^3)^2\\ &= (x^3+2^3)(x^3-2^3)\\ &= (x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4).\end{aligned}$$

3. Αν είναι $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$ και λ ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος, ώστε $f(\lambda) = 0$, τότε είναι $f(x) = (x-\lambda)\,g(x)$, όπου $g(x)$ το πηλίκο του $f(x)$ διά του $x-\lambda$. Αν π.χ $f(x) = x^3-5x^2+3x+1$, επειδή $f(1) = 1^3-5.1^2+3.1+1 = 0$, θα είναι $f(x) = (x-1)(x^2-4x-1)$, όπου $g(x) = x^2-4x-1$ είναι το πηλίκο του $f(x)$ διά $x-1$.

Ασκήσεις 22, 23, 24.

Έννοια ρητής συναρτήσεως

4.20 **Ορισμός.** Έστω f και g δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις και A το σύνολο λύσεων της εξισώσεως $g(x) = 0$. Η συνάρτηση **h** με $\mathbf{h(x)} = \dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$ είναι ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}-A$ και λέγεται **ρητή συνάρτηση.** Δηλαδή **ρητή συνάρτηση είναι το πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-6}$ είναι ρητή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{6\}$.

2. Η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-4}$ είναι ρητή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

3. Η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$ είναι επίσης ρητή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1 \text{ με } f_1(x) = \frac{x-1}{x^2-4} \quad \text{και} \quad f_2 \text{ με } f_2(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}.$$

Να οριστούν οι συναρτήσεις f_1+f_2 και f_1f_2.

Η f_1 είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ και η f_2 στο $\mathbb{R}-\{1,2\}$.
Άρα οι f_1+f_2 και f_1f_2 είναι ορισμένες στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,1,2\}$.
Η τιμή της f_1+f_2 στο x είναι :

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = \frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x+2}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} + \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x-1)+(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-2x+1+x^2+4x+4}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$

Επίσης

$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)\,f_2(x) = \frac{x-1}{x^2-4}\;\frac{x+2}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-2)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Προσοχή : Το γινόμενο f_1f_2 ορίζεται στο $\mathbb{R}-\{-2,1,2\}$, που είναι η τομή των πεδίων ορισμού των f_1 και f_2, και όχι στο $\mathbb{R}-\{2\}$, στο οποίο έχει νόημα το $\frac{1}{(x-2)^2}$.

2. Να απλοποιηθούν οι τιμές των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1 \text{ με } f_1(x) = \frac{x^2}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{1+x} \text{ και}$$

$$f_2 \text{ με } f_2(x) = \frac{x+3}{x}\;\frac{2}{x^2-2x}\;\frac{x-2}{x^2-9}.$$

Το πεδίο ορισμού της f_1 είναι $A=\mathbb{R}-\{-1,+1\}$. Άρα για κάθε $x \in A$

$$\text{έχουμε } f_1(x) = \frac{x^2}{1-x} + \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{-x^2}{x-1} + \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x^2(x+1)+2x-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-x^2(x+1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-(x+1)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-(x+1)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = -x-1.$$

Το πεδίο ορισμού της f_2 είναι το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{-3,0,2,3\}$.
Άρα για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$f_2(x) = \frac{x+3}{x}\;\frac{2}{x^2-2x}\;\frac{x-2}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+3}{x}\;\frac{2}{x(x-2)}\;\frac{x-2}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x+3)(x-2)}{x\,x(x-2)(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{2}{x^2(x-3)}.$$

3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-4}$. Να βρεθεί α) το πεδίο ορισμού της A και β) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f}$.

α) Για να ορίζεται η f, θα πρέπει $x^2-4 \neq 0$, δηλαδή $x \neq \pm 2$. Άρα το πεδίο ορισμού της είναι $A=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

β) Η $\frac{1}{f}$ ορίζεται στο σύνολο $A' = \{x \in A:\ f(x) \neq 0\}$. Πρέπει λοιπόν $\frac{x^3-x}{x^2-4} \neq 0$. Αυτό συμβαίνει μόνο, όταν $x^3-x \neq 0$, δηλαδή όταν $x \neq 0$ και $x \neq \pm 1$. Άρα A' είναι το $A-\{-1,0,1\}$, δηλαδή το $\mathbb{R}-\{-2,-1,0,1,2\}$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f \text{ με } f(x) = x^2-\frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g \text{ με } g(x) = x+\frac{1}{x}. \quad \text{Να οριστεί η } h = \frac{f}{g}.$$

Το πεδίο ορισμού των f και g είναι το $\mathbb{R}^*$ και επιπλέον $g(x) = \frac{x^2+1}{x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Άρα η $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}^*$ και είναι

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^3-1}{x}}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{x^3-1}{x^2+1}.$$

Ασκήσεις 25,26,27,28,29,30.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Εφαρμογές στη λύση εξισώσεων

4.21 Ας πάρουμε δύο πραγματικές συναρτήσεις f και g. Τό υποσύνολο S του $\mathbb{R}$, για τα στοιχεία του οποίου ισχύει

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

είναι το **σύνολο λύσεων** της εξισώσεως (1).
Με άλλα λόγια ο $x_0 \in \mathbb{R}$, είναι **λύση** ή **ρίζα** της (1), αν οι συναρτήσεις f και g έχουν την ίδια τιμή στο x_0, δηλαδή αν $f(x_0) = g(x_0)$.
Ας δούμε τώρα μερικές εφαρμογές επιλύσεως εξισώσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = 2x-6$, f_2 με $f_2(x) = x^2-4$ και f_3 με $f_3(x)=x^2+1$. Να βρεθεί το σύνολο λύσεων της $f_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x) = 0$.

Είναι $f_1(x)f_2(x)f_3(x) = 0 \Leftrightarrow (f_1(x) = 0 \text{ ή } f_2(x) = 0 \text{ ή } f_3(x) = 0)$
$\Leftrightarrow (2x-6 = 0 \text{ ή } x^2-4 = 0 \text{ ή } x^2+1 = 0).$

Από την $2x-6=0$ παίρνουμε $x=3$. Επομένως το σύνολο λύσεων της $f_1(x)=0$ είναι τό $S_1=\{3\}$.
Από την $x^2-4=0$ παίρνουμε $x=\pm 2$. Επομένως το σύνολο λύσεων της $f_2(x)=0$ είναι το $S_2=\{-2,+2\}$.
Για την $x^2+1=0$ παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x που να την επαληθεύει, γιατί το άθροισμα των θετικών αριθμών x^2 και 1 είναι θετικός αριθμός. Επομένως το σύνολο λύσεων της $f_3(x)=0$ είναι $S_3=\varnothing$.
Άρα το σύνολο λύσεων της $f_1(x)f_2(x)f_3(x)=0$ είναι (§ 1.13) $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{-2,2,3\}$.

2. **Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x)=\frac{x-5}{2(x-4)}+\frac{4}{x^2-16}$ και g με $g(x)=\frac{2x+11}{2(x+4)}$. Να βρεθεί το σύνολο λύσεων της $f(x)=g(x)$.**

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_1=\mathbb{R}-\{-4,4\}$ και της g είναι το $A_2=\mathbb{R}-\{-4\}$. Άρα τομή των πεδίων ορισμού τους είναι το $A=A_1\cap A_2=\mathbb{R}-\{-4,4\}$, οπότε για κάθε $x\in A$ έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned}
f(x)=g(x) &\Leftrightarrow \frac{x-5}{2(x-4)}+\frac{4}{(x^2-16)}=\frac{2x+11}{2(x+4)}\\
&\Leftrightarrow (x+4)(x-5)+8=(x-4)(2x+11)\\
&\Leftrightarrow x^2+4x-32=0\\
&\Leftrightarrow (x+8)(x-4)=0.\\
&\Leftrightarrow (x+8=0 \text{ ή } x-4=0)\\
&\Leftrightarrow (x=-8 \text{ ή } x=4).
\end{aligned}$$

Η τιμή όμως $x=4$ απορρίπτεται, γιατί δεν ανήκει στο σύνολο A.
Άρα το σύνολο λύσεων της $f(x)=g(x)$ είναι $S=\{-8\}$.

3. **Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2x}{x-1}-\frac{x+1}{2-x}=\frac{3}{x^2-3x+2}+4$.**

Είναι $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Επομένως η εξίσωση ορίζεται στο σύνολο $A=\mathbb{R}-\{1,2\}$.

$$\begin{aligned}
\text{Είναι } \frac{2x}{x-1}-\frac{x+1}{2-x}=\frac{3}{x^2-3x+2}+4 &\Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}+\frac{x+1}{x-2}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}+4\\
&\Leftrightarrow 2x(x-2)+(x+1)(x-1)=3+4(x-1)(x-2)\\
&\Leftrightarrow x^2-8x+12=0\\
&\Leftrightarrow (x-2)(x-6)=0\\
&\Leftrightarrow (x-2=0 \text{ ή } x-6=0)\\
&\Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=6).
\end{aligned}$$

Επειδή $2\notin A$, η τιμή $x=2$ απορρίπτεται. Άρα το σύνολο λύσεων της εξισώσεως είναι το $S=\{6\}$.

Ασκήσεις 31,32,33.

Εφαρμογές στη λύση ανισώσεων

$\boxed{4.22}$ Έστω οι πολυωνυμικές συναρτήσεις f, g και E το σύνολο λύσεων της $g(x)=0$. Τότε στο σύνολο $\mathbb{R}-E$ ορίζεται η ανίσωση

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \quad (1) \qquad \text{καθώς και η} \quad \frac{f(x)}{g(x)}<0 \qquad (2)$$

Για την (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)}>0 &\Leftrightarrow f(x)\,g(x)>0\\
&\Leftrightarrow [f(x)>0 \textbf{ και } g(x)>0] \textbf{ ή } [f(x)<0 \textbf{ και } g(x)<0]
\end{aligned}$$

οπότε, αν $S_1=\{x: f(x)>0 \textbf{ και } g(x)>0\}$, $S_2=\{x: f(x)<0 \textbf{ και } g(x)<0\}$, τότε το σύνολο λύσεων της (1) είναι (§ 1.13) το $S=S_1\cup S_2$.
Για την (2) παρατηρούμε ότι $\frac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow \frac{-f(x)}{g(x)}>0$. Επομένως η λύση της (2) ανάγεται στη λύση της (1).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x-1}>0$.**

Η ανίσωση ορίζεται στο σύνολο $\mathbb{R}-\{1\}$ και σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x-1}>0 &\Leftrightarrow (x-2)(x-1)>0\\
&\Leftrightarrow [x-2>0 \textbf{ και } x-1>0] \textbf{ ή } [x-2<0 \textbf{ και } x-1<0]
\end{aligned}$$

οπότε $S_1=\{x: x>2 \textbf{ και } x>1\}$ και $S_2=\{x: x<2 \textbf{ και } x<1\}$ ή $S_1=\{x: x>2\}$ και $S_2=\{x: x<1\}$. Άρα το σύνολο λύσεων της ανισώσεως είναι $S=S_1\cup S_2=\{x: x>2 \textbf{ ή } x<1\}$.

2. **Να λυθεί η ανίσωση $\frac{2x}{x+1}>3$.**

Η ανίσωση ορίζεται στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-1\}$ και είναι

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x+1}>3 &\Leftrightarrow \frac{2x}{x+1}-3>0\\
&\Leftrightarrow \frac{2x-3(x+1)}{x+1}>0\\
&\Leftrightarrow \frac{-(x+3)}{x+1}>0\\
&\Leftrightarrow -(x+3)(x+1)>0\\
&\Leftrightarrow (x+3)(x+1)<0\\
&\Leftrightarrow [(x+3<0 \textbf{ και } x+1>0)] \textbf{ ή } [(x+3>0 \textbf{ και } x+1<0).]
\end{aligned}$$

Οπότε $S_1=\{x: x+3<0 \textbf{ και } x+1>0\}=\{x: x<-3 \textbf{ και } x>-1\}=\varnothing$ και $S_2=\{x: x+3>0 \textbf{ και } x+1<0\}=\{x: x>-3 \textbf{ και } x<-1\}=(-3,-1)$.
Άρα σύνολο λύσεων είναι το $S=S_1\cup S_2=\varnothing\cup(-3,-1)=(-3,-1)$.

Ασκήσεις 34,35.
Ασκήσεις για επανάληψη 36,37,38,39,40,41,42,43.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{αν } x\le 0\\ 5x-4, & \text{αν } x>0. \end{cases}$

Να βρεθούν οι $f(3)$, $f(-2)$, $f(0)$.

2. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & \text{αν } x<0\\ \alpha x+3, & \text{αν } 0\le x<1\\ \beta x^2+2, & \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$

Να βρεθούν τα α και β, αν είναι $f(-1) = f(1)$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ και να υπολογιστεί το άθροισμα $f(2) - 2f\left(\frac{1}{4}\right) + f(-2)$.

3. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - x + 5$, $x \in \{-1, 0, 1\}$ είναι σταθερή συνάρτηση.

4. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 8x$, $x \in \{-3, 0, 3\}$ είναι ταυτοτική συνάρτηση.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = 2x^2 + 1$, $x \in \{1, 2, 3\}$ και f_2 με $f_2(x) = x^2 + 2$, $x \in \{-1, 1, 2, 3\}$. Να βρεθούν οι f_1^{-1} και f_2^{-1} και να εξεταστεί αν είναι συναρτήσεις.

6. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων και να απλοποιηθούν οι τιμές τους:

α) f_1 με $f_1(x) = \dfrac{x+4}{(2x+5)^2 - (x+1)^2}$

β) f_2 με $f_2(x) = \dfrac{(6x+8x^2)(x+3)}{2(4x^3+16x^2+12x)}$

γ) f_3 με $f_3(x) = \dfrac{(x+2)(2x+1)^2 - 16(x+2)}{(2x+5)(7-x)+4x^2-25}$

δ) f_4 με $f_4(x) = \dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9} + \dfrac{12-4x}{x^2-6x+9}$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x) = x+2$ και g με $g(x) = x^2+2$ με κοινό πεδίο ορισμού $E = \{0, 1\}$. Να δειχθεί:
α) $f = g$, β) $f \neq g$, αν ως πεδίο ορισμού τους πάρουμε το $\mathbb{R}$.

8. Για τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{x^2-3x+2}$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να δειχθεί ότι ειναι ταυτοτική.

9. Για τις συναρτήσεις f, g, h του F_A να αποδειχθεί ότι $f = g \Leftrightarrow f+h = g+h$.

10. Δίνονται οι σταθερές συναρτήσεις f με $f(x) = 3$ και g με $g(x) = 7$. Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $-3f+5g$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f_1 \text{ μέ } f_1(x) = \begin{cases} x^2+2x+3 & x \in [1,5] \\ 2x-1 & x \notin [1,5] \end{cases} \quad \text{και } f_2 \text{ με } f_2(x) = \begin{cases} x-1 & x \in [3,7] \\ -x^2-2x+5 & x \notin [3,7]. \end{cases}$$

Να οριστεί η f_1+f_2 και να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία είναι σταθερή.

12. Να αποδειχθεί ότι $k(f+g) = kf+kg$, όταν $k \in \mathbb{R}$ και f, g συναρτήσεις του F_A. Εφαρμογή για $k = -1$.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x) = 2x+5$ και g με $g(x) = x+4$. Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g$, $3f \pm 2g$.

14. Δίνονται οι σταθερές συναρτήσεις f με $f(x) = 5$ και g με $g(x) = 7$. Να οριστούν οι συναρτήσεις $5f \pm 7g$.

15. Αν f, g είναι συναρτήσεις του F_A, να δειχθεί ότι $(-f)g = -fg$.

16. Αν f, g, h είναι συναρτήσεις του F_A, να δειχθεί ότι
$$f = g \Rightarrow fh = gh.$$

17. Αν f με $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$, να βρεθεί:

α) το πεδίο ορισμού της A

β) Το σύνολο A' στο οποίο ορίζεται η $\dfrac{1}{f}$.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = x+1$ και f_2 μέ $f_2(x) = x^2-1$. Να οριστούν οι συναρτήσεις $\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}$ καί $\dfrac{f_1}{f_2}$.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x) = x^3-x^2-2x$ και g με $g(x) = x^2-2x$. Να οριστεί η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$.

20. Αν f_1, f_2, f_3, f_4 είναι συναρτήσεις με $f_1(x) = (2x+3)^3-1$, $f_2(x) = x+1$, $f_3(x) = x+2$ και $f_4(x) = 2x+3$, να δειχθεί ότι $f_1 = 2f_2(4f_3^2 - f_4)$.

21. Να απλοποιηθεί η τιμή της συναρτήσεως f στο x
$$f(x) = (x-1)^3 - 2(x+1)^2 + (x^2-x+1)^2 - (x^2+1).$$

22. Αν α, β, γ είναι οποιεσδήποτε πραγματικές συναρτήσεις, να δειχθεί ότι

α) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

23. Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $f(x) = x^3-2x^2-9x+18$.

24. Να παραγοντοποιηθούν τα πολυώνυμα α) $f_1(x) = (x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3$ και β) $f_2(x) = (x^2-4)^2-4(x^2-5x+6)^2$.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις

f_1 με $f_1(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ και f_2 με $f_2(x) = \dfrac{5x-4}{(x-1)(x+3)}$.

Να οριστεί η συνάρτηση f_1+f_2.

26. Αν f_1 με $f_1(x) = \dfrac{3x+2}{x(x-1)}$ και f_2 με $f_2(x) = \dfrac{4}{x(x-2)}$, να οριστεί η συνάρτηση f_1+f_2.

27. Έστω οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ και f_2 με $f_2(x) = \dfrac{5x-4}{x^2-4x+3}$.

Να οριστεί το άθροισμα f_1+f_2 και το γινόμενο f_1f_2.

28. Να απλοποιηθεί η τιμή της συναρτήσεως f στο x, $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1} - \dfrac{6}{x^2+2x-3}$.

29. Να απλοποιηθούν οι τιμές των συναρτήσεων f_1 και f_2 στο x:

$$f_1(x) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x}} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \frac{9x^2-4\alpha^2}{\frac{x-\alpha}{\alpha-2x} - 1}.$$

30. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x-3)(x+2)}$. Να οριστεί η συμμετρική της.

31. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(x+2)^2+(x^2+5x+6)^2=0$

β) $(x-1)^2(x^2-4)(x^2+2)=0$

γ) $(x-3)^2-(x^2-4x+3)=0$

32. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^3+3x^2+3x+1=0$

β) $(x-1)^2+(x^2-1)=0$

γ) $2x^3-2x=x^2-1$

33. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x^2-2x}=0$

β) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{2(x+2)}$.

34. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)}\geq 0$

β) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+3}\leq 0$.

35. Να βρεθεί για ποίες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1<\frac{1+x}{1-x}<2.$$

36. Να απλοποιηθούν οι τιμές των συναρτήσεων f_1 και f_2 στο x,

$$f_1(x)=\frac{\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{x^2}}{\dfrac{\alpha}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\alpha}} \quad \text{και} \quad f_2(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}.$$

37. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{x-1}{2-x}=\dfrac{1}{x+2}$

β) $\dfrac{x^2}{x+1}+1=\dfrac{1}{x+1}+2x$.

38. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{x-3}\geq 0$ β) $\dfrac{x+2}{2x-3}\leq 0$ γ) $\dfrac{3x-1}{x+3}>0$.

39. Αν $f_1(x)=(x-2)^2(2x+1)-(2-x)^2(2x-5)$

$f_2(x)=\dfrac{2x^2-10x+12}{x^2-2x-3}$

$f_3(x)=(x^2-4)(x+1)+(2-x)(x^2-1)$

να αποδειχθεί ότι $f_1=f_2f_3$ για $x\neq -1,3$.

40. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$5>\frac{2x-1}{x+3}>3.$$

41. Θεωρούμε τη συνάρτηση f που απεικονίζει κάθε φυσικό αριθμό στο υπόλοιπο της διαιρέσεώς του διά 3.

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρεθούν οι τιμές f(8), f(18), f(19) και f(22).

γ) Να επαληθεύσετε με παραδείγματα ότι, αν για δύο φυσικούς α,β με $\alpha>\beta$ συμβαίνει $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε $f(\alpha-\beta)=0$.

δ) Ομοίως να επαληθεύσετε ότι, αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}$ και $f(\alpha)=f(\beta)=0$, τότε $f(\alpha+\beta)=0$, $f(\alpha\gamma)=0$, $f(\alpha+\gamma)=f(\gamma)$.

42. Να αποδείξετε ότι οι δύο συναρτήσεις $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ που ορίζονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$f(\nu)=(-1)^{\nu}.2+(-1)^{\nu+1}.3 \quad \text{και} \quad g(\nu)=\begin{cases}-1, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ 1, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$$

είναι ίσες. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι για κάθε $k\in\mathbb{N}$ ισχύει $g(k)+g(k+1)=0$.

43. Αν f_1 με $f_1(x)=x^2+2x+1$ και f_2 με $f_2(x)=x^2-1$ είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις, να δειχθεί ότι $(f_1^4-f_2^4)(x)=8x(x^2+1)f_1^2(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Είναι $f(3) = 5 \cdot 3 - 4 = 11$, $f(-2) = -(-2)^2 = -4$, $f(0) = -(0)^2 = 0$.

2. Είναι $f(-1) = (-1-1)^2 = 4$, $f(1) = \beta \cdot 1^2 + 2 = \beta + 2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{9}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \frac{1}{2} + 3$. Άρα $4 = \beta + 2$, και $\frac{9}{4} = \frac{\alpha}{2} + 3$ κτλ.

3. Βρίσκουμε $f(-1) = f(0) = f(1)$.

4. Βρίσκουμε $f(-3) = -3$, $f(0) = 0$, $f(3) = 3$.

5. Το γράφημα G_1 της f_1 είναι $G_1 = \{(1,3), (2,9), (3,19)\}$, άρα η f_1 είναι «1 — 1 και επί» του $\{1,2,3\}$ στο $\{3,9,19\}$ και η f_1^{-1} είναι συνάρτηση με γράφημα το $G_1^{-1} = \{(3,1), (9,2), (19,3)\}$. Η f_2^{-1} δεν είναι συνάρτηση.

6. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές και εξαιρούμε από το $\mathbb{R}$ τις τιμές που τους μηδενίζουν. Έτσι η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$ κτλ.

7. α) Είναι $f(0) = g(0) = 2$ και $f(1) = g(1) = 3$.
   β) Επειδή δεν είναι $f(x) = g(x)$ για κάθε πραγματικό x.

8. Είναι $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \neq 0$, όταν $x \in \mathbb{R} - \{1,2\}$, και

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = x \text{ για } x \in \mathbb{R} - \{1,2\}.$$

9. Είναι: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.

10. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3 + 7 = 10$ κτλ.

11. Είναι για $x < 1$ $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = (2x-1) + (-x^2 - 2x + 5) = -x^2 + 4$ κτλ.

12. Είναι $(k(f+g))(x) = (kf + kg)(x) = (kf)(x) + (kg)(x) = kf(x) + kg(x)$ κτλ.

13. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ κτλ.

14. $(5f \pm 7g)(x) = (5f)(x) \pm (7g)(x) = 5f(x) \pm 7g(x)$ κτλ.

15. Αποδεικνύουμε ότι $((-f)g)(x) = (-fg)(x)$.

16. Αποδεικνύουμε ότι $f(x) = g(x) \Rightarrow (fh)(x) = (gh)(x)$.

17. α) $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Άρα $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.
    β) Θα πρέπει ακόμη $f(x) \neq 0$, δηλαδή $x - 3 \neq 0$ ή $x \neq 3$. Άρα $A' = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$.

18. Θα πρέπει $f_1(x) \neq 0$ και $f_2(x) \neq 0$, δηλ. $x \neq -1, 1$. Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ είναι $\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)(x) = \left(\frac{1}{f_1}\right)(x) + \left(\frac{1}{f_2}\right)(x)$

$$= \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)} \text{ κτλ.}$$

19. Θα πρέπει $g(x) \neq 0$, οπότε $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

20. Αρκεί να δείξουμε ότι $f_1(x) = 2f_2(x)\,(4f_3^2(x) - f_4(x))$.

21. Μετά τις πράξεις έχουμε $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 3$.

22. α) Κάνουμε τις πράξεις στο β' μέλος και καταλήγουμε στο πρώτο.
    β) $(\alpha + \beta + \gamma)^3 = [(\alpha + \beta) + \gamma]^3 = \ldots$

23. Επειδή $f(2) = 0$, τό $f(x)$ θα διαιρείται με τό $x - 2$ κτλ.

24. α) Παρατηρούμε ότι $(x-1) + (x-2) + (3-2x) = 0$ και εφαρμόζουμε την 22(α).
    β) Τό $f_2(x)$ είναι διαφορά τετραγώνων.

25. Το πεδίο ορισμού της f_1 είναι $\mathbb{R} - \{2\}$, και της f_2 το $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$. Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-3, 1, 2\}$ είναι $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \ldots$

26. Όμοια με την (25).

27. Όμοια με την (25).

28. Μετά τις πράξεις έχουμε $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+3)}$.

29. Μετά τις πράξεις στα σύνθετα κλάσματα έχουμε $f_1(x) = \frac{2(x-2)}{x}$ και $f_2(x) = (3x + 2\alpha)(\alpha - 2x)$.

30. Αν g η συμμετρική της, θα είναι $g = -\frac{1}{f}$ με $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$ κτλ.

31. α) Πρέπει να είναι ($x + 2 = 0$ **και** $x^2 + 5x + 6 = 0$) κτλ.
    β) $x = 1$ ή $x = \pm 2$ αφού $x^2 + 2 \neq 0$.
    γ) $(x-3)^2 - (x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - (x-1)(x-3) = 0$ κτλ.

32. α) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 1) + 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) + 3x$ $+ 3x(x+1) = 0$ κτλ.
    β) $(x-1)^2 + (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (x-1)(x+1) = 0$ κτλ.
    γ) $2x^3 - 2x = x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = 0$ κτλ.

33. α) $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = 0$. Πρέπει $x(x-2) \neq 0$. Βρίσκουμε $x = \pm 2$. Η $x = 2$ απορρίπτεται.
    β) Είναι $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Βρίσκουμε $x = -1$, που απορρίπτεται, και $x = -3$.

34. α) $\frac{(x+1)^3}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow [(x+1)^3(x-2) \geq 0$ **και** $x \neq 2] \Leftrightarrow [(x+1)^2(x+1)(x-2) \geq 0$ και $x \neq 2] \Leftrightarrow [(x+1)(x-2) \geq 0$ **και** $x \neq 2] \Leftrightarrow (x \leq -1$ **ή** $x > 2)$.
    β) $\frac{(x-1)^2(x+1)}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow [(x-1)^2(x+1)(x+3) \leq 0$ **και** $x \neq -3]$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ **ή** $[(x+1)(x+3) \leq 0$ **και** $x \neq -3]$ κτλ.

35. $1 < \frac{1+x}{1-x} < 3 \Leftrightarrow \left(1 < \frac{1+x}{1-x}\right.$ **και** $\left.\frac{1+x}{1-x} < 3\right)$ κτλ.

36. Κάνουμε τις πράξεις στα σύνθετα κλάσματα και έχουμε $f_1(x) = x + \alpha$ $f_2(x) = x^2$.

37. α) Είναι $\frac{2x}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{x+2}$ με $x \neq \pm 2$ κτλ. Βρίσκουμε $x = 0$ ή $x = -2$ που απορρίπτεται. β) Όμοια βρίσκουμε $x = 0$.

38. α) Όμοια με την (34 β) β) $\frac{x+2}{2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \{(x+2)(2x-3) \leq 0$ καί $x \neq \frac{3}{2}\}\ldots$ γ) $\frac{3x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+3) > 0 \ldots$

39. Θα αποδείξουμε ότι $f_1(x) = f_2(x)f_3(x)$ γιά $x \neq -1,3$.

40. Όμοια με την (35).

41. α) Τα διαφορετικά υπόλοιπα είναι οι 0,1,2. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\{0,1,2\}$.
β) Θα βρούμε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων 8 : 3, 18 : 3 κτλ.
γ) Παίρνουμε τα ζευγάρια $\alpha = 28$, $\beta = 25$, ή $\alpha = 38$ $\beta = 32$ κτλ.
δ) Παίρνουμε $\alpha = 12$, $\beta = 18$ και $\gamma = 5$...

42. Εξετάζουμε τις 2 περιπτώσεις ν = άρτιος και ν = περιττός. Αν k = άρτιος, τότε k+1 = περιττός κτλ.

43. Είναι $(f_1{}^4-f_2{}^4)(x) = f_1{}^4(x)-f_2{}^4(x) = [f_1{}^2(x)+f_2{}^2(x)][f_1{}^2(x) - f_2{}^2(x)] = \ldots$ Θέτουμε $f_1(x) = (x+1)^2$ και $f_2(x) = (x-1)(x+1)$.

5 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Με το αξίωμα του κιβωτισμού συμπληρώνεται το αξιωματικό σύστημα της θεωρίας των πραγματικών αριθμών, το οποίο αναπτύχθηκε στα κεφάλαια 2 και 3, και υπογραμμίζεται η εξάρτηση από το αξίωμα αυτό μερικών θεμελιωδών προτάσεων που ήταν ως τώρα «αυτονόητες», όπως π.χ. η ύπαρξη ρίζας ή δεκαδικών προσεγγίσεων ενός αριθμού. Δίνεται έτσι η ευκαιρία να επισημανθεί η διαφορά του ℝ *από το* ℚ *ως προς την πληρότητα που χαρακτηρίζει το πρώτο και όχι το δεύτερο.*
Εξάλλου η έννοια της ρίζας ενός αριθμού καθώς και η χρησιμοποίηση του ριζικού μόνο για τους μη αρνητικούς εισάγονται κατά τρόπο που συντελεί στην απλή παρουσίαση των ιδιοτήτων των πράξεων με ριζικά και της επιλύσεως της διώνυμης εξισώσεως στο ℝ. *Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η περιπτωσιολογία που οδηγεί συχνά σε σύγχυση ή και σε λάθη, ενώ υπάρχει εναρμόνιση με την έννοια ρίζας μιγαδικού αριθμού που θα διδαχθεί αργότερα. Τέλος εισάγεται η έννοια της δυνάμεως με ρητό εκθέτη ως ένα ακόμη παράδειγμα «του μηχανισμού της γενικεύσεως», που τόσο εύστοχα λειτουργεί στα μαθηματικά.*

ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΚΙΒΩΤΙΣΜΟΥ

Αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία

5.1 Σε προηγούμενες τάξεις συναντήσαμε αριθμούς σε δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Η γραφή αριθμών σε μια τέτοια μορφή στηρίζεται σε ορισμένες «παραδοχές», που είναι καιρός να αναλύσουμε.

- Τι εννοούμε π.χ. γράφοντας $\alpha = 3{,}6666\ldots$;

Ασφαλώς εννοούμε έναν αριθμό μεταξύ 3 και 4, ακριβέστερα μεταξύ 3,6 και 3,7 ή ακόμα 3,66 και 3,67... ή 3,66...6 και 3,66...7 κ.ο.κ. Αυτές οι όλο και ακριβέστερες δεκαδικές προσεγγίσεις του α με έλλειψη και με υπεροχή σχηματίζουν μια ακολουθία διαστημάτων

$$[3\,,4],\ [3{,}6\,,\ 3{,}7],\ [3{,}66\,,\ 3{,}67],\ldots,\ [3{,}\underbrace{66\ldots6}_{k\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\,,\ 3{,}\underbrace{66\ldots7}_{k\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}], \qquad (1)$$

των οποίων το πλάτος (δηλαδή η διαφορά των άκρων τους) είναι

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ldots,\ \frac{1}{10^k},\ldots,\ \text{και διαρκώς μικραίνει.}$$

Η γραφή λοιπόν $\alpha = 3{,}666\ldots$ σημαίνει ότι δεχόμαστε τα εξής:

1. υπάρχει αριθμός α, κοινό στοιχείο των διαστημάτων της ακολουθίας (1)
2. ο αριθμός αυτός είναι **μοναδικός** και συμβολίζεται (με βάση τις προσεγγίσεις του με έλλειψη) 3,666...

- Στις ίδιες παραδοχές στηρίζεται και η μετατροπή του 3,666... σε ρητό, γνωστή από το Γυμνάσιο. Πράγματι, από τις ανισότητες:

$$3 < \alpha < 4$$
$$3{,}6 < \alpha < 3{,}7$$
$$3{,}66 < \alpha < 3{,}67$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$3{,}66\ldots6 < \alpha < 3{,}66\ldots7$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

με πρόσθεση στα μέλη τους του 33 (= 36–3) ή με πολλαπλασιασμό των μελών τους επί 10 (§ 3.9 και § 3.10) προκύπτει ότι τόσο ο $33+\alpha$ όσο και ο 10α ανήκουν στα διαστήματα

$$[36\,,37],\ [36{,}6\,,\ 36{,}7],\ldots,\ [36{,}66\ldots6\,,\ 36{,}66\ldots7],\ldots \qquad (2)$$

που το πλάτος τους είναι πάλι $1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ldots,\ \frac{1}{10^k},\ldots$ Δεχόμενοι λοιπόν ότι τα διαστήματα αυτά έχουν ένα και μοναδικό κοινό στοιχείο που το γράφουμε 36,666..., θα έχουμε

$$36{,}66\ldots = 33+\alpha = 10\alpha, \quad \text{άρα} \quad \alpha = \frac{33}{9}.$$

- Με την ίδια έννοια ο αριθμός 2,59999... είναι το μοναδικό κοινό στοιχείο των διαστημάτων

$$[2\,,3],\ [2{,}5\,,2{,}6],\ [2{,}59\,,2{,}6],\ldots,\ [2{,}599\ldots9\,,2{,}6] \qquad (3)$$

δηλαδή ο αριθμός 2,6.

- Τέλος, αναζητώντας τη θετική ρίζα της εξισώσεως $x^2=2$ στο $\mathbb{R}$, την οποία συμβολίζουμε $\sqrt{2}$, βρίσκουμε τις δεκαδικές προσεγγίσεις της:

με έλλειψη : 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421,...

με υπεροχή: 2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, 1,41422,...

Γράφουμε λοιπόν $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι ένας «απειροψήφιος δεκαδικός» ρητός ή άρρητος είναι **το μοναδικό κοινό στοιχείο** των κλειστών διαστημάτων που ορίζουν οι δεκαδικές προσεγγίσεις του.

Άσκηση 1.

Αξίωμα κιβωτισμού

5.2 Τα διαστήματα που σχηματίζονται από τις δεκαδικές προσεγγίσεις ενός αριθμού, όπως είδαμε στα παραδείγματα της § 5.1, έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- Καθένα περιέχεται σε όλα τα προηγούμενα
- Τό πλάτος τους «μικραίνει όσο θέλουμε», δηλαδή μπορεί να γίνει μικρότερο από κάθε δεδομένο αριθμό οσοδήποτε μικρό (π.χ. από τον $\frac{1}{\mu}$, με οσοδήποτε μεγάλο $\mu\in\mathbb{N}^*$).

Διαστήματα με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται κιβωτισμένα. Πιο συγκεκριμένα: Τα **κλειστά** διαστήματα της ακολουθίας

$$[\alpha_0,\beta_0],\ [\alpha_1,\beta_1],\ldots,[\alpha_\nu,\beta_\nu]\ldots$$

ονομάζονται **κιβωτισμένα,** όταν έχουν τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $\forall\,\nu\in\mathbb{N}^*,\ [\alpha_\nu,\beta_\nu]\subseteq[\alpha_{\nu-1},\beta_{\nu-1}]$
2. Αν δοθεί ένας φυσικός αριθμός μ (οσοδήποτε μεγάλος), τότε υπάρχει διάστημα της ακολουθίας με πλάτος μικρότερο του $\frac{1}{\mu}$. Δηλαδή

$$\forall\,\mu\in\mathbb{N}^*,\ \exists\,\nu\in\mathbb{N},\ \beta_\nu-\alpha_\nu\leqslant\frac{1}{\mu}$$

Διατυπώνουμε τώρα γενικότερα τις «παραδοχές» που κάναμε για τα διαστήματα των ακολουθιών της § 5.1 με το ακόλουθο *«αξίωμα του κιβωτισμού»*.

ΑΞΙΩΜΑ XII

Για κάθε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων υπάρχει ένα μοναδικό κοινό στοιχείο τους

Έτσι, κάθε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων **ορίζει** έναν πραγματικό αριθμό (το κοινό τους στοιχείο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Τα διαστήματα της ακολουθίας

$$[0,1],\ \left[0,\frac{1}{2}\right],\ \left[0,\frac{1}{3}\right],\ldots,\left[0,\frac{1}{\nu}\right],\ldots$$

είναι κιβωτισμένα $\left(\alpha_\nu=0,\ \beta_\nu=\frac{1}{\nu},\ \beta_\nu-\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}\right)$ με κοινό στοιχείο το 0.

Παρατηρήστε ότι τα κιβωτισμένα διαστήματα είναι **κλειστά.** Π.χ. αν από τα προηγούμενα διαστήματα $\left[0,\frac{1}{\nu}\right]$ εξαιρέσουμε το 0, προκύπτουν τα ανοικτά αριστερά διαστήματα $\left(0,\frac{1}{\nu}\right]$, τα οποία δεν μπορεί να έχουν κοινό στοιχείο.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Αξίωμα του Αρχιμήδη

5.3 Ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός Αρχιμήδης χρησιμοποίησε σε πολλές περιπτώσεις την πρόταση, γνωστή **ως αξίωμα του Αρχιμήδη:** *«Για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha>0$ και $\beta>0$ υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος, ώστε $\nu\beta>\alpha$».*

Επειδή $\beta>0$, είναι $\nu\beta>\alpha \Leftrightarrow \nu>\frac{\alpha}{\beta}$. Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την πρόταση του Αρχιμήδη με την εξής γενικότερη διατύπωση

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Για κάθε πραγματικό αριθμό, υπάρχει φυσικός αριθμός μεγαλύτερός του, δηλαδή

$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\ \exists\,\nu\in\mathbb{N},\ \nu>\alpha$$

Απόδειξη. Η πρόταση είναι προφανής για $\alpha\leqslant0$. Έστω λοιπόν $\alpha>0$. Υποθέτουμε (§ 1.30) ότι αληθεύει η άρνηση του θεωρήματος που είναι (§ 1.22) η εξής: « Υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, να είναι $\nu\leqslant\alpha$».

'Αρα (§ 3.11 Εφ. 1) $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\nu}$. Συνεπώς $\frac{1}{\alpha} \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right]$, δηλαδή ο $\frac{1}{\alpha}$ ανήκει σε όλα τα διαστήματα :

$$\left[0, \frac{1}{1}\right], \left[0, \frac{1}{2}\right], \dots, \left[0, \frac{1}{\nu}\right], \dots$$

τα οποία, όπως είπαμε (§ 5.2 Παραδ.) είναι κιβωτισμένα με μοναδικό κοινό στοιχείο το 0. 'Αρα θα πρέπει $\frac{1}{\alpha} = 0$, που είναι **άτοπο** (§ 2.17 Παρ. 3).

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, είναι $-\alpha \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $\nu > -\alpha$. Επειδή $\nu > -\alpha \Leftrightarrow -\nu < \alpha$ έχουμε:

ΠΟΡΙΣΜΑ $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \exists\, \nu \in \mathbb{N}^*,\ -\nu < \alpha$

Διαστήματα με άκρα $+\infty$, $-\infty$

5.4 Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\{x : x > \alpha\}$, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα περιέχει οπωσδήποτε ένα φυσικό αριθμό $\nu > \alpha$, άρα και άλλο $\nu_1 > \nu$ και άλλο μεγαλύτερο του ν_1 κ.ο.κ. Το σύνολο αυτό, το οποίο συνεπώς δεν είναι κενό ούτε μπορεί να έχει μέγιστο στοιχείο, το συμβολίζουμε ως διάστημα με συμβολικό δεξιό άκρο $+\infty$ (συν άπειρο). Γράφουμε λοιπόν

$$\{x : x > \alpha\} = (\alpha, +\infty)$$

Επίσης γράφουμε $\quad \{x : x \geqslant \alpha\} = [\alpha, +\infty)$

Ομοίως το σύνολο $\{x : x < \alpha\}$, το οποίο όπως προκύπτει από το πόρισμα της § 5.3 δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, το συμβολίζουμε ως διάστημα με συμβολικό αριστερό άκρο $-\infty$:

$$\{x : x < \alpha\} = (-\infty, \alpha)$$

Επίσης $\quad \{x : x \leqslant \alpha\} = (-\infty, \alpha]$

Τέλος το $\mathbb{R}$, που είναι ένωση των διαστημάτων $[\alpha, +\infty)$ και $(-\infty, \alpha]$, γράφεται και ως διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Δεκαδικές προσεγγίσεις αριθμού

5.5 Μπορούμε τώρα να **αποδείξουμε** ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ορίζονται **μονοσήμαντα** οι δεκαδικές του προσεγγίσεις (μονάδας, δεκάτου,..., $\frac{1}{10^\nu}, \dots$). Αρχίζοντας από τις προσεγγίσεις ακέραιας μονάδας, ας αποδείξουμε πρώτα ότι ο α περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων, δηλαδή ότι υπάρχει ένας **μοναδικός** ακέραιος k_0 τέτοιος, ώστε να είναι

$$k_0 \leqslant \alpha < k_0 + 1 \qquad (1)$$

★ **Απόδειξη** Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$, τότε $k_0 = \alpha$. Υποθέτουμε λοιπόν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, οπότε

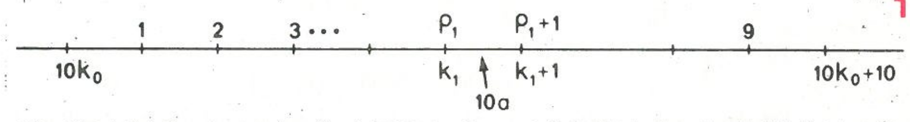
- αν $\alpha > 0$, αρκεί να λάβουμε ως $k_0 + 1$ το μικρότερο φυσικό αριθμό από εκείνους που υπερβαίνουν τον α (§ 5.3 Θεώρ.).
- αν $\alpha < 0$, τότε ο k_0 είναι ο μεγαλύτερος από τους ακέραιους που είναι μικρότεροι του α (§ 5.3 Πόρ.).

Από την (1) προκύπτει ότι

$$10\,k_0 \leqslant 10\alpha < 10k_0 + 10 \qquad (2)$$

Αλλά, όπως είδαμε προηγουμένως, ο 10α περιέχεται και μεταξύ δύο **διαδοχικών** ακεραίων k_1 και $k_1 + 1$. 'Αρα ο k_1 θα είναι (σχ. 1) ένας από

1



τους ακέραιους $10k_0, 10k_0+1, \dots, 10k_0+9$. Δηλαδή υπάρχει ένας μονοψήφιος ρ_1 τέτοιος, ώστε

$$k_1 = 10\,k_0 + \rho_1 \leqslant 10\alpha < k_1 + 1 \quad \text{ή}$$

$$\frac{k_1}{10} = k_0 + \frac{\rho_1}{10} \leqslant \alpha < \frac{k_1 + 1}{10} \qquad (3)$$

Γενικότερα για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος τέτοιος, ώστε $k_\nu \leqslant 10^\nu \alpha < k_\nu + 1$, δηλαδή $\frac{k_\nu}{10^\nu} \leqslant \alpha < \frac{k_\nu + 1}{10^\nu}$.

Αποδεικνύουμε όπως προηγουμένως (αν αντί για τους k_0, k_1 πάρουμε τους $k_{\nu-1}, k_\nu$), ότι υπάρχει ένας μονοψήφιος ρ_ν τέτοιος, ώστε

$$k_\nu = 10k_{\nu-1} + \rho_\nu, \text{ οπότε έχουμε}$$

$$\frac{k_\nu}{10^\nu} = \frac{k_{\nu-1}}{10^{\nu-1}} + \frac{\rho^\nu}{10^\nu} = k_0 + \frac{\rho_1}{10} + \frac{\rho_2}{10^2} + \dots + \frac{\rho_\nu}{10^\nu} \qquad (4)$$

Αν $\alpha = \frac{k_\nu}{10^\nu}$, τότε ο α είναι δεκαδικός με ν δεκαδικά ψηφία (ειδικά για $\nu = 0$, ο α είναι ακέραιος). Διαφορετικά

- ο $\frac{k_\nu}{10^\nu}$ είναι η προσέγγιση $\frac{1}{10^\nu}$ με έλλειψη του α.
- ο $\frac{k_\nu + 1}{10^\nu}$ είναι η προσέγγιση $\frac{1}{10^\nu}$ με υπεροχή του α.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι δεκαδικές αυτές προσεγγίσεις (μονάδας, δεκάτου, ..., $\frac{1}{10^\nu}, \dots$) του α, όπως προκύπτει από τις (3) και (4), σχηματίζουν ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων, η οποία ορίζει ακριβώς τον α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Με τη γνωστή διάταξη της διαιρέσεως 17 : 6 βρίσκουμε τις δεκαδικές προσεγγίσεις του $\alpha = -\dfrac{17}{6}$

με υπεροχή τις: $-2 \quad -2{,}8 \quad -2{,}83 \quad -2{,}833$

με έλλειψη τις: $-3 \quad -2{,}9 \quad -2{,}84 \quad -2{,}834$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν $\alpha^3 = 3$, να βρεθούν οι προσεγγίσεις $\dfrac{1}{10}$ του αριθμού α.

Πρέπει να ορίσουμε τον ακέραιο k_1 ώστε :

$$\frac{k_1}{10} \leq \alpha < \frac{k_1+1}{10} \quad \text{ή} \quad k_1 \leq 10\alpha < k_1+1$$

Αλλά $k_1 \leq 10\alpha < k_1+1 \Leftrightarrow k_1^3 \leq 1000\alpha^3 < (k_1+1)^3$ και αφού $\alpha^3 = 3$

$$\Leftrightarrow k_1^3 \leqslant 3000 < (k_1+1)^3$$

Επειδή ο $14^3 < 3000 < 15^3$, θα είναι $k_1 = 14$ και οι ζητούμενες προσεγγίσεις είναι $\dfrac{k_1}{10} = 1{,}4$ (με έλλειψη) και $\dfrac{k_1+1}{10} = 1{,}5$ (με υπεροχή).

'Ασκηση 2.

Η μέτρηση ευθύγραμμων τμημάτων

5.6 Έστω τ ένα (ευθύγραμμο) τμήμα. Είναι γνωστό πως ορίζεται στη Γεωμετρία, για κάθε φυσικό αριθμό ν, το τμήμα $\nu\tau$, το τμήμα $\dfrac{1}{\nu}\tau$ που γράφεται $\dfrac{\tau}{\nu}$, συνεπώς και το τμήμα $\mu \cdot \dfrac{\tau}{\nu}$ ($\mu \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$) που γράφεται $\dfrac{\mu}{\nu}\tau$ και λέγεται **γινόμενο** του τ επί τον ρητό $\dfrac{\mu}{\nu}$. Ο ορισμός του γινομένου $\lambda\tau$ και στην περίπτωση που ο λ είναι άρρητος στηρίζεται σε προτάσεις ανάλογες προς τα αξιώματα του Αρχιμήδη και του κιβωτισμού, που ισχύουν και στη Γεωμετρία. Συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής :

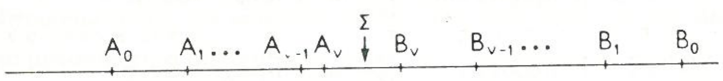
1. **Αν σ και τ είναι δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα (το τ μη μηδενικό), υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος, ώστε $\nu\tau > \sigma$.**

Εξάλλου τα τμήματα :

$$A_0B_0,\ A_1B_1, \ldots, A_\nu B_\nu, \ldots \qquad (1)$$

μιας ευθείας λέγονται **κιβωτισμένα**, όταν

- $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$, όλα τα σημεία του $A_\nu B_\nu$ είναι σημεία του $A_{\nu-1}B_{\nu-1}$.



- Αν δοθεί ένα τμήμα ε οσοδήποτε μικρό, υπάρχει τμήμα της ακολουθίας (1) μικρότερο του ε.

Έχουμε λοιπόν την πρόταση:

2. **Για κάθε ακολουθία κιβωτισμένων τμημάτων υπάρχει ένα μοναδικό κοινό σημείο τους.**

5.7 Γινόμενο τμήματος επί πραγματικό αριθμό. Θα ορίσουμε τώρα το γινόμενο $\lambda\tau$, όταν λ είναι θετικός πραγματικός αριθμός και μάλιστα άρρητος. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία που σχηματίζουν οι δεκαδικές προσεγγίσεις του λ (§ 5.5 Παρατ.)

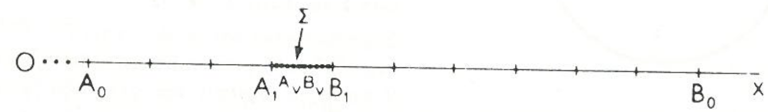
$$[k_0, k_0+1],\ \left[\frac{k_1}{10}, \frac{k_1+1}{10}\right],\ \left[\frac{k_2}{100}, \frac{k_2+1}{100}\right], \ldots, \left[\frac{k_\nu}{10^\nu}, \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\right], \ldots \qquad (\alpha)$$

Σε μια ημιευθεία Οx ορίζουμε τα σημεία $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ έτσι, ώστε

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad OA_\nu = \frac{k_\nu}{10^\nu}\tau$$

και τα σημεία $B_0, B_1, B_2, \ldots B_\nu$ έτσι, ώστε

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad OB_\nu = \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\tau$$



Επειδή τα διαστήματα της (α) είναι κιβωτισμένα, μπορούμε να αποδείξουμε(1) ότι και τα τμήματα A_0B_0, A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_\nu B_\nu$ είναι επίσης κιβωτισμένα. Επομένως υπάρχει ένα μοναδικό κοινό σημείο Σ όλων των τμημάτων $A_\nu B_\nu$. Το **τμήμα ΟΣ ορίζεται ως το γινόμενο $\lambda\tau$.**

Για το γινόμενο $\lambda\tau$ αποδεικνύονται (1) οι εξής βασικές ιδιότητες ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$):

$$(\lambda+\mu)\tau = \lambda\tau + \mu\tau \qquad (1)$$

$$\lambda(\tau+\sigma) = \lambda\tau + \lambda\sigma \qquad (2)$$

$$\lambda(\mu\tau) = (\lambda\mu)\tau \qquad (3)$$

5.8 Λόγος δύο τμημάτων. Έστω τ και σ δύο τμήματα (τ μη μηδενικό). Τότε με βάση το αξίωμα του Αρχιμήδη αποδεικνύεται, όπως ακριβώς στην § 5.5, ότι υπάρχει ένας μοναδικός **φυσικός** k_0 τέτοιος, ώστε

$$k_0\tau \leqslant \sigma < (k_0+1)\tau$$

και γενικότερα ότι, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένας k_ν τέτοιος, ώστε

$$\frac{k_\nu}{10^\nu}\tau \leqslant \sigma < \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\tau$$

Τα διαστήματα

$$[k_0, k_0+1], \ldots, \left[\frac{k_\nu}{10^\nu}, \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\right], \ldots$$

είναι κιβωτισμένα. 'Αρα (§ 5.2) ορίζουν έναν πραγματικό αριθμό λ. Τότε σύμφωνα με την § 5.7 είναι $\sigma = \lambda\tau$. Ο λ λέγεται **λόγος** του σ προς το τ, συμβολικά $\lambda = \dfrac{\sigma}{\tau}$.

Αν το τ λαμβάνεται ως μονάδα μετρήσεως των τμημάτων (μονάδα μήκους), ο λ λέγεται **μέτρο** (μήκος) του σ.

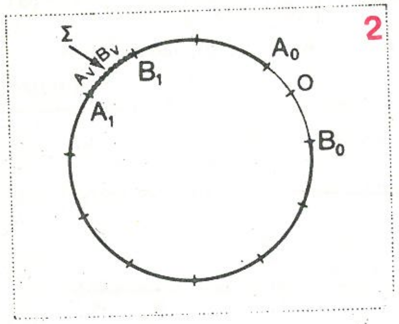
Αποδεικνύονται οι εξής βασικές ιδιότητες:

1. **Το μέτρο του αθροίσματος δύο τμημάτων ισούται με το άθροισμα των μέτρων τους.**
2. **Ο λόγος δύο τμημάτων ισούται με το λόγο των μέτρων τους** (ως προς κοινή μονάδα μετρήσεως).

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

Μέτρηση τόξων ή γωνιών

5.9 Επειδή οι προτάσεις 1 και 2 της § 5.6 ισχύουν και για τόξα (ή γωνίες), το γινόμενο τόξου επί πραγματικό αριθμό και ο λόγος δύο τόξων ορίζονται όπως οι αντίστοιχες έννοιες για τα τμήματα. Για τον ορισμό του $\lambda\tau$ π.χ., όταν τ είναι τόξο κύκλου και λ άρρητος, ορίζουμε στον **κύκλο** το σημείο Ο και με τις προσεγγίσεις του λ τα σημεία A_ν και B_ν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τα κιβωτισμένα τόξα $\widehat{A_\nu B_\nu}$ ορίζουν το μοναδικό σημείο Σ και είναι $\lambda\tau = \widehat{O\Sigma}$.



Συμπεραίνεται ότι οι ιδιότητες (1), (2), (3) της § 5.7 καθώς και οι βασικές ιδιότητες 1 και 2 της § 5.8 ισχύουν και για τόξα (γωνίες).

Τετραγωνική ρίζα

5.10 Έστω α πραγματικός αριθμός και η εξίσωση $x^2 = \alpha$ στο $\mathbb{R}$. Κάθε ρίζα της εξισώσεως αυτής λέγεται **τετραγωνική ρίζα** του α. Είναι φανερό ότι:

- Αν $\alpha < 0$, η εξίσωση δεν έχει καμιά ρίζα, αφού $\forall\, x,\ x^2 \geqslant 0$.
- Αν $\alpha = 0$, μοναδική ρίζα της εξισώσεως είναι ο 0, αφού $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ας εξετάσουμε αν η εξίσωση $x^2 = \alpha$ έχει ρίζες στην περίπτωση $\alpha > 0$. Παρατηρούμε ότι, αν ρ είναι ρίζα της εξισώσεως, τότε και ο $-\rho$ είναι επίσης ρίζα της, αφού $x^2 = (-x)^2$. Αρκεί λοιπόν στην περίπτωση αυτή να βρεθούν οι θετικές ρίζες, **αν υπάρχουν**.

Αποδεικνύεται σχετικά το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \geqslant 0$ υπάρχει ένας μοναδικός $x \geqslant 0$ τέτοιος, ώστε
$$x^2 = \alpha$$

Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι υπάρχει ένας μοναδικός φυσικός αριθμός ρ_0 τέτοιος, ώστε
$$\rho_0^2 \leqslant \alpha < (\rho_0+1)^2$$

Ειδικά, αν $\alpha = 0$, τότε $\rho_0 = 0$.

Σύμφωνα με την § 5.3, υπάρχει φυσικός $\mu > \alpha \geqslant 0$. Άρα $\mu \geqslant 1$ και $\mu^2 \geqslant \mu > \alpha$. Δηλαδή υπάρχουν φυσικοί αριθμοί των οποίων **το τετράγωνο** υπερβαίνει τον α. Τον μικρότερο από αυτούς παίρνουμε ως $\rho_0 + 1$.

Γενικότερα για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος ρ_ν τέτοιος, ώστε να είναι
$$\left(\frac{\rho_\nu}{10^\nu}\right)^2 \leq \alpha < \left(\frac{\rho_\nu+1}{10^\nu}\right)^2 \qquad (1)$$

Πράγματι, η (1) είναι ισοδύναμη της $\rho_\nu^2 \leqslant 10^{2\nu}\alpha < (\rho_\nu+1)^2$ ή, αν θέσουμε $10^{2\nu}\alpha = \beta$, της $\rho^2_\nu \leqslant \beta \leqslant (\rho_\nu+1)^2$, από την οποία σύμφωνα με τα προηγούμενα ορίζεται ο μοναδικός φυσικός ρ_ν.

Οι αριθμοί $\alpha_\nu = \dfrac{\rho_\nu}{10^\nu}$ και $\beta_\nu = \dfrac{\rho_\nu+1}{10^\nu}$ σχηματίζουν για $\nu \in \mathbb{N}$, διαστήματα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ κιβωτισμένα, τα οποία συνεπώς ορίζουν έναν αριθμό x. Άρα είναι:
$$\forall\, \nu \in \mathbb{N}, \quad \alpha_\nu \leqslant x \leqslant \beta_\nu$$
συνεπώς και (§ 3.11)
$$\alpha_\nu^2 \leqslant x^2 < \beta_\nu^2 \qquad (2)$$

Αλλά και τα διαστήματα $[\alpha_\nu^2, \beta_\nu^2]$, αποδεικνύεται (1) ότι είναι κιβωτισμένα.
Το μοναδικό κοινό στοιχείο αυτών των διαστημάτων, λόγω της (1), είναι ο α, και, λόγω της (2), ο x^2.
Άρα $x^2 = \alpha$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η εξίσωση λοιπόν $x^2 = \alpha$, με $\alpha > 0$, έχει ρίζες τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$ (θετική τετραγωνική ρίζα) και $-\sqrt{\alpha}$ (αρνητική τετραγωνική ρίζα).
2. Για να είναι η $\sqrt{\alpha}$ ρητός, πρέπει και αρκεί ο α να είναι τετράγωνο ρητού.

Διάκριση $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$

5.11 Τα αξιώματα I - IX του κεφαλαίου 2 και X, XI του κεφαλαίου 3 ισχύουν ειδικότερα και στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών. Αλλά το αξίωμα του κιβωτισμού που δεχόμαστε για πραγματικούς αριθμούς δεν ισχύει στο σύνολο $\mathbb{Q}$. Δηλαδή υπάρχει ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων ρητών αριθμών, αλλά δεν υπάρχει **ρητός** που να είναι κοινό στοιχείο των διαστημάτων. Πράγματι, αν ίσχυε το αξίωμα του κιβωτισμού στο $\mathbb{Q}$, θα μπορούσαμε, επαναλαμβάνοντας όσα είπαμε στην § 5.10, να αποδείξουμε ότι για **κάθε** ρητό α υπάρχει ρητός x τέτοιος, ώστε $x^2 = \alpha$. Αλλά αυτό δεν ισχύει, αφού π.χ. η εξίσωση $x^2 = 2$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}$, όπως ήδη ξέρουμε από το Γυμνάσιο.

Η διάκριση λοιπόν $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ αφορά τις ιδιότητες που προκύπτουν ως συνέπειες του αξιώματος του κιβωτισμού και που συνεπώς ισχύουν στο $\mathbb{R}$ αλλά όχι στο $\mathbb{Q}$.

ΡΙΖΕΣ ΤΑΞΕΩΣ ν

Ορισμός

5.12 Γενικεύοντας όσα είπαμε στην § 5.10 θα ονομάσουμε **ρίζα τάξεως ν** (νιοστή ρίζα) του πραγματικού αριθμού α ($\nu \in \mathbb{N}^*$) κάθε ρίζα της εξισώσεως $x^\nu = \alpha$.

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

Με τη μέθοδο που ακολουθήσαμε στην § 5.10 μπορούμε να αποδείξουμε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \neq 0$, ισχύει το εξής

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

> **Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \geqslant 0$ υπάρχει ένας μοναδικός $x \geqslant 0$ τέτοιος, ώστε**
> $$x^{\nu} = \alpha$$

Ο **μη αρνητικός** αυτός αριθμός συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Έτσι, η $\sqrt{\alpha}$ (§ 5.10) είναι η $\sqrt[2]{\alpha}$, ενώ το σύμβολο $\sqrt[1]{\ }$ δε χρησιμοποιείται, αφού $\alpha^1 = \alpha$ και συνεπώς $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$.

Τονίζουμε ότι το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ έχει νόημα **μόνο όταν** $\alpha \geqslant 0$ και με αυτή τη σημασία θα χρησιμοποιείται στα επόμενα.

Ειδικότερα επειδή $0^{\nu} = 0$ είναι $\sqrt[\nu]{0} = 0$ και συνεπώς για $\alpha > 0$ η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ είναι αριθμός **θετικός** (θετική νιοστή ρίζα του α).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Επειδή π.χ. $5^3 = 125$ και $\dfrac{25}{9} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$ θα είναι :

$$\sqrt[3]{125} \overset{(1)}{=} 5 \quad \text{και} \quad \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

2. Επειδή $\alpha^2 = (-\alpha)^2 = |\alpha|^2$ και $|\alpha| \geqslant 0$, θα είναι $\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{(-\alpha)^2} = \alpha$.

3. Είναι $\alpha^6 = (\alpha^2)^3$, $\alpha^6 \geqslant 0$ και $\alpha^2 \geqslant 0$. Άρα $\sqrt[3]{\alpha^6} = \alpha^2$.
   Επίσης $\alpha^6 = (\alpha^3)^2 = (-\alpha^3)^2$. Άρα : $\sqrt{\alpha^6} = |\alpha^3| = |\alpha|^3$.

4. Ομοίως $\sqrt[4]{81\alpha^4\beta^8} = \sqrt[4]{(3\alpha\beta^2)^4} = |3\alpha\beta^2| = 3|\alpha|\beta^2$,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8x^3}} = \frac{1}{2x}, \quad \sqrt{\frac{x^4}{2y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}\,|y|}.$$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού

5.13 Από το προηγούμενο θεώρημα συνάγεται αμέσως ότι η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, με $\alpha \geqslant 0$, έχει στο $\mathbb{R}_+$, μια μοναδική ρίζα, την $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Άρα

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt[\nu]{\alpha} \geqslant 0 \qquad (1)$$

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha \qquad (2)$$

(1) Οι ρίζες τρίτης τάξεως ονομάζονται κυβικές.

και ακόμη

$$\forall x, \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad x^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha} \qquad (3)$$

Εξάλλου από το θεώρημα 7 της § 3.11 προκύπτει ότι:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta} \qquad (4)$$

Ειδικότερα επειδή $\sqrt[\nu]{1} = 1$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < 1 \qquad (5)$$

$$\text{καί} \quad \alpha > 1 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > 1 \qquad (6)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχθει ότι : $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$.**

Είναι $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{1+3-2\sqrt{3}} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot1\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} =$
$= |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$.

2. **Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(1+x)^2}$.**

Είναι $A = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(1+x)^2} = |x-1| + |1+x|$. Αλλά

- αν $x \leqslant -1$, τότε και $x < 1$. Οπότε (§ 3.4) θα έχουμε :

$$x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow |x+1| = -x-1$$
$$x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow |x-1| = -x+1$$

Άρα $A = -x-1-x+1 = -2x$. Ομοίως βρίσκουμε ότι:

- αν $-1 < x \leqslant 1$, τότε $A = 2$
- αν $x > 1$, τότε $A = 2x$.

3. **Να δειχθεί ότι $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$.**

Είναι $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow 2+\sqrt{2} < 2^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 2 < 4$, που είναι αληθής.

4. **Να λυθούν οι εξισώσεις:**

α) $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x}$ **β)** $\sqrt[4]{4-x} = \sqrt[4]{1+2x}$.

α) Πρέπει να είναι $x-3 \geqslant 0$ **και** $2x \geqslant 0$, δηλαδή $x \geqslant 3$.
Για $x \geqslant 3$ όμως έχουμε:

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 = (\sqrt{2x})^2 \Leftrightarrow x-3 = 2x \Leftrightarrow x = -3$$

που απορρίπτεται, αφού $-3 < 3$.

β) Πρέπει να είναι $4-x \geqslant 0$ **και** $2x+1 \geqslant 0$ ή $x \leqslant 4$ **και** $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Όταν όμως $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$, έχουμε

$$\sqrt[4]{4-x} = \sqrt[4]{1+2x} \Leftrightarrow (\sqrt[4]{4-x})^4 = (\sqrt[4]{1+2x})^4 \Leftrightarrow 4-x = 1+2x \Leftrightarrow x = 1$$

που είναι λύση παραδεκτή.

Ασκήσεις 3, 4, 5, 6.

Ρίζα άλλης ρίζας

5.14 Έστω $\alpha \geq 0$ και μ, ν δύο θετικοί φυσικοί αριθμοί. Επειδή $\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$, θα ορίζεται η μ τάξεως ρίζα του, δηλαδή ο αριθμός $x = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}$. Αλλά τότε σύμφωνα με την (3) της § 5.13 είναι

$$\begin{aligned} x = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} &\Leftrightarrow x^{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha} \\ &\Leftrightarrow (x^{\mu})^{\nu} = \alpha \\ &\Leftrightarrow x^{\mu\nu} = \alpha \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\boxed{\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}} \qquad (1)$$

Επίσης έχουμε για $\mu, \nu, k \in \mathbb{N}^*$, αν $\alpha^k \geq 0$

$$\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{k\nu}} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{(\alpha^k)^{\nu}}} = \sqrt[\mu]{\alpha^k} \qquad (2)$$

Π.χ. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{8^2}$

Γινόμενο ριζών

5.15 Έστω ότι α, β είναι μη αρνητικοί αριθμοί και $\nu \in \mathbb{N}^*$. Τότε ορίζονται οι ρίζες $\sqrt[\nu]{\alpha}$, καί $\sqrt[\nu]{\beta}$ και είναι:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} &= \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} && \text{[δύναμη γινομένου]} \\ &= \alpha\beta && \text{[βάσει της (2) της § 5.13]} \end{aligned}$$

● Άρα από την (3) της § 5.13 έχουμε:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}} \qquad (1)$$

● Από την (1), επειδή είναι $\alpha = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}$, έχουμε:

$$\boxed{\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}} \qquad (2)$$

● Γενικότερα, αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k \geq 0$, τότε αποδεικνύεται επαγωγικά ότι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1}\,\sqrt[\nu]{\alpha_2}\cdots\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \sqrt[\nu]{\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_\nu} \qquad (3)$$

Η (3), όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_\nu$ δίνει:

$$\boxed{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^k = \sqrt[\nu]{\alpha^k}} \qquad (4)$$

● Εξάλλου, επειδή

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\,\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha}$$

θα είναι

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}} \qquad (5)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15} = \sqrt{6\cdot 15} = \sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5} = 3\sqrt{10}$.
2. $\sqrt{57600} = \sqrt{576\cdot 100} = 10\sqrt{2^6\cdot 3^2} = 10\cdot 2^3\cdot 3 = 240$.
3. $\sqrt{\alpha^7\cdot\beta\cdot\gamma^5} = \sqrt{(\alpha^3\gamma^2)^2\cdot\alpha\beta\gamma} = \alpha^3\gamma^2\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+)$.
4. $\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{17}} = \sqrt[3]{5^2-(\sqrt{17})^2} = \sqrt[3]{25-17} = \sqrt[3]{8} = 2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα εξαγόμενα :

α) $A = \sqrt{48} - \sqrt{8} + \sqrt{72} - \sqrt{243}$.

β) $B = (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1)$

γ) $\Gamma = \sqrt[6]{\alpha}\,\sqrt[12]{\alpha^7}\,\sqrt[15]{\alpha^2}$.

α) Είναι :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{4^2\cdot 3} - \sqrt{2^2\cdot 2} + \sqrt{6^2\cdot 2} - \sqrt{9^2\cdot 3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 9\sqrt{3} \\ &= (4-9)\sqrt{3} + (6-2)\sqrt{2} = -5\sqrt{3} + 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

β) Είναι $B=(\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{3}((\sqrt{3})^2-1)((\sqrt{2})^2-1)=\sqrt{6}\,2\cdot 1=2\sqrt{6}$$

γ) Μετασχηματίζουμε πρώτα τα ριζικά σε άλλα ισοδύναμα ίδιας τάξεως. Έτσι σύμφωνα με την 2 της § 5.14 θα έχουμε:

$$\sqrt[6]{\alpha}=\sqrt[6\cdot 10]{\alpha^{1\cdot 10}}=\sqrt[60]{\alpha^{10}}\qquad \sqrt[12]{\alpha^7}=\sqrt[12\cdot 5]{\alpha^{7\cdot 5}}=\sqrt[60]{\alpha^{35}}\qquad \sqrt[15]{\alpha^2}=\sqrt[15\cdot 4]{\alpha^{4\cdot 2}}=\sqrt[60]{\alpha^{8}}.$$

Επομένως (§ 5.15) έχουμε:

$$\sqrt[6]{\alpha}\cdot\sqrt[12]{\alpha^7}\cdot\sqrt[15]{\alpha^2}=\sqrt[60]{\alpha^{10}}\cdot\sqrt[60]{\alpha^{35}}\cdot\sqrt[60]{\alpha^{8}}=\sqrt[60]{\alpha^{53}}.$$

2. Να μετασχηματιστούν τα κλάσματα σε ισοδύναμα χωρίς ριζικά στον παρονομαστή: $\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}},\ \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}$

Είναι $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta}\sqrt[3]{\beta^2}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta^3}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}$$

3. Να απλοποιηθεί το άθροισμα: $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$

Έστω x το άθροισμα αυτό. Τότε:

$$x^2=(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})+2\sqrt{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}$$

$$=8+2\sqrt{16-15}=8+2=10.\ \text{Άρα } x=\sqrt{10}$$

Ασκήσεις 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.

Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ στο $\mathbb{R}$

5.16 Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- $\alpha=0$. Τότε μοναδική ρίζα της εξισώσεως είναι ο 0 ($x^\nu=0 \Leftrightarrow x=0$).
- $\alpha>0$. Τότε (§ 5.12) μοναδική θετική ρίζα της εξισώσεως είναι ο αριθμός $\sqrt[\nu]{\alpha}$ (θετική νιοστή ρίζα του α).

  Αν ο ν είναι άρτιος, ρίζα της εξισώσεως είναι και ο αρνητικός $-\sqrt[\nu]{\alpha}$, επειδή $(-x)^\nu=x^\nu$

  Αν ο ν είναι περιττός, επειδή $x<0 \Rightarrow x^\nu<0$, η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα.

- $\alpha<0$. Τότε η εξίσωση δεν έχει θετική ρίζα, αφού $x>0 \Rightarrow x^\nu>0$.

  Αν ο ν είναι άρτιος, δεν έχει ούτε αρνητική ρίζα, αφού $x^\nu=(-x)^\nu$

  Αν ο ν είναι περιττός, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$-x^\nu=-\alpha \Leftrightarrow (-x)^\nu=-\alpha \Leftrightarrow -x=\sqrt[\nu]{-\alpha} \Leftrightarrow x=-\sqrt[\nu]{-\alpha}\ ^{(1)}$$

Συνοψίζουμε τα συμπεράσματα στον πίνακα:

α	ν	Ρίζες της $x^\nu=\alpha$
$\alpha=0$		0
$\alpha>0$	άρτιος	$\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$
	περιττός	$\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha<0$	άρτιος	—
	περιττός	$-\sqrt[\nu]{-\alpha}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η εξίσωση $x^2=64$ ($\alpha>0$ και ν άρτιος) έχει ρίζες τους αριθμούς $\sqrt{64}=8$ και $-\sqrt{64}=-8$.
2. Η εξίσωση $x^4=-16$ ($\alpha<0$ και ν άρτιος) δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.
3. Η εξίσωση $x^3==-343$ ($\alpha<0$ και ν περιττός) έχει ρίζα τον $-\sqrt[3]{343}=-7$.
4. Η εξίσωση $8x^3-125$, που γράφεται $x^3=\dfrac{125}{8}$ ($\alpha>0$ και ν περιττός), έχει ρίζα τον $\sqrt[3]{\dfrac{125}{8}}=\dfrac{5}{2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η διώνυμη εξίσωση $\alpha x^k+\beta x^\lambda=0$ με $k,\lambda\in\mathbb{N}^*$, $k>\lambda$ και $\alpha\neq 0$.

Είναι $\alpha x^k+\beta x^\lambda=0 \Leftrightarrow x^\lambda\left(x^{k-\lambda}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^{k-\lambda}+\dfrac{\beta}{\alpha}=0$.

Η τελευταία είναι της μορφής $x^\nu=\alpha$.

Π.χ. $2x^5-16x^3=0 \Leftrightarrow x^2(x^3-8)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^3=8 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$.

(1) Στη βιβλιογραφία το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ χρησιμοποιείται και για την περίπτωση περιττής τάξεως ρίζας αρνητικού αριθμού, δηλαδή χρησιμοποιείται π.χ. η γραφή $\sqrt[3]{-8}$ αντί της $-\sqrt[3]{8}$.

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

5.17 Στη § 2.20 επεκτείναμε τον ορισμό της δυνάμεως και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ακέραιος. Τώρα μπορούμε να δώσουμε νόημα και σε σύμβολα $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, αν $\alpha > 0$ και μ,ν ακέραιοι $\neq 0$, τα οποία θα ονομάσουμε *«δυνάμεις με ρητό εκθέτη»*.

Αν ένα τέτοιο σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ έχει νόημα δυνάμεως του α, θα πρέπει να είναι θετικός αριθμός (αφού $\alpha > 0$) και επιπλέον να ισχύει

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\nu} = \alpha^{\mu}$$

Συνεπώς $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ θα είναι η θετική ρίζα της εξισώσεως $x^{\nu} = \alpha^{\mu}$. Αλλά η θετική ρίζα της εξισώσεως αυτής είναι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Επεκτείνουμε λοιπόν τον ορισμό της δυνάμεως με θετική βάση θέτοντας:

$$\boxed{\textbf{για } \alpha > 0 \textbf{ και } \mu, \nu \in \mathbb{Z}^*, \quad \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$

Από την (2) της § 5.14 προκύπτει ότι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[k\nu]{\alpha^{k\mu}} = \alpha^{\frac{k\mu}{k\nu}}$, ιδιότητα που δικαιολογεί τον όρο *«ρητός εκθέτης»*.

Αποδεικνύεται ότι όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων του θεωρήματος 14 της § 2.20 ισχύουν και στην περίπτωση που οι εκθέτες είναι ρητοί.

Π.χ. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\mu'}{\nu'}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu']{\alpha^{\mu'}} = \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'}} \cdot \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu'\nu}} = \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'}\alpha^{\mu'\nu}} =$

$= \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'+\mu'\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\nu'+\mu\nu}{\nu\nu'}} = \alpha^{\frac{\mu\nu'}{\nu\nu'}+\frac{\mu'\nu}{\nu\nu'}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu'}{\nu'}}$

Ασκήσεις 18, 19, 20, 21.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιους ρητούς παριστάνουν οι αριθμοί :

α) 0,3232...32... β) 2,34545...45... γ) −32,52699...9...

2. Να βρεθούν οι προσεγγίσεις $\frac{1}{10}$ του αριθμού x, αν

α) $x^2 = 7$ β) $x^3 = 5$

3. Να βρεθούν οι ρίζες:

α) $\sqrt[3]{216}$, β) $\sqrt[4]{625}$, γ) $\sqrt[3]{\frac{125}{512}}$, δ) $\sqrt{0,0009}$, ε) $\sqrt[3]{\frac{64x^6y^9}{125}}$

4. Να βρεθούν για $x \in \mathbb{R}$ οι τιμές των:

α) $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ β) $B = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(3-x)^2}$

5. Να απλοποιηθούν τα ριζικά:

α) $\sqrt{36x^4+12x^2+1}$, β) $\sqrt{\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{5}x^2+\frac{9}{25}}$, γ) $\sqrt{\frac{x^4}{25y^2}+1+\frac{25y^2}{4x^4}}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$ γ) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

β) $4 - \sqrt{x-2} = 0$ δ) $\sqrt{-3x+5} = \sqrt{x-7}$

7. Να απλοποιηθούν τα ριζικά:

α) $\sqrt{\sqrt[4]{16}}$ β) $\sqrt[9]{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3}$ γ) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$

8. Να βρεθούν τα εξαγόμενα:

α) $\sqrt{19600}$ β) $\sqrt[3]{27\cdot64\cdot343}$ γ) $\sqrt[5]{32\cdot243\cdot3125}$

9. Να απλοποιηθούν τα ριζικά:

α) $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8}$ β) $\sqrt{108x^5y^6}$ γ) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$ δ) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha\sqrt[4]{\beta^2}}}$

10. Να βρεθούν τα γινόμενα:

α) $\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[15]{\alpha^4}$ β) $\sqrt[12]{\alpha^7}\cdot\sqrt[20]{\alpha^3}\cdot\sqrt[15]{\alpha^2}$ γ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$

11. Να βρεθούν τα πηλίκα:

α) $\sqrt[12]{\alpha^5} : \sqrt[4]{\alpha}$ β) $\sqrt[9]{\alpha^8} : \sqrt[6]{\alpha^5}$ γ) $\sqrt[15]{3^{10}} : \sqrt[10]{3^3}$

12. Να βρεθούν τα αθροίσματα:

α) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$ γ) $-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{54}$

β) $3\sqrt{32}-2\sqrt{50}$ δ) $8\sqrt{20}+3\sqrt{80}-2\sqrt{500}$

13. Να απλοποιηθούν τα ριζικά:

α) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ β) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ γ) $\sqrt{54+14\sqrt{5}}$

14. Να μετασχηματιστούν τα παρακάτω κλάσματα σε άλλα ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

α) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ β) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ γ) $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ δ) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

15. Να απλοποιηθούν τα αθροίσματα:

α) $\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ β) $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3}$

16. Να βρεθεί η διαφορά $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

17. Έστω α, α', β, β' ρητοί αριθμοί. Αν οι β, β' είναι θετικοί, αλλά όχι τετράγωνα ρητών, να δειχθεί ότι

$$\alpha+\sqrt{\beta}=\alpha'+\sqrt{\beta'} \Rightarrow \alpha=\alpha' \text{ και } \beta=\beta'$$

18 Να βρεθούν τα εξαγόμενα:

α) $27^{-\frac{5}{6}}\cdot 3^{2,5}$ β) $(6,25)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

19. Να υπολογιστεί η τιμή του

$$A=\left[\alpha^{-\frac{3}{2}}\beta\,(\alpha\beta^{-2})^{-\frac{1}{2}}(\alpha^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3 \quad \text{γιά } \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{καί } \beta=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

20. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\alpha+\beta$

β) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\alpha-\beta$

21. Να βρεθούν τα εξαγόμενα:

α) $\left(7^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)$

β) $-2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)$

γ) $2\sqrt{6}\left(3^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{6}+12^{\frac{1}{2}}\right)$

δ) $\left(5\cdot 6^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(5\cdot 6^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. α) Ο ζητούμενος ρητός προκύπτει από την εξίσωση $32+x=100x$, δηλαδή είναι ο $x=\frac{32}{99}$.

β) Ομοίως από την εξίσωση (Βλ. Μαθηματικά Β' Γυμνασίου)

$$1000x-10x=2345-23 \text{ και είναι ο } \frac{129}{55}.$$

γ) $-32,527$.

2. Εργαζόμαστε όπως στην Εφαρμογή της § 5.5 και βρίσκουμε ως προσεγγίσεις:

α) 2,6 (με έλλειψη) και 2,7 (με υπεροχή).

β) Ομοίως 1,7 και 1,8.

3. α) 6 β) 5 γ) $\frac{5}{8}$ δ) 0,03 ε) $\frac{4x^2y^3}{5}$

4. α) Είναι : $A=\begin{cases} 1, & \text{αν } x>0 \\ -1, & \text{αν } x<0 \end{cases}$

β) Αν $x\leqslant 1$, είναι $B=-2x+4$
Αν $1<x\leqslant 3$, είναι $B=2$
Αν $x>3$, είναι $B=2x-4$.

5. α) $6x^2+1$ β) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{5}$ γ) $\left|\frac{x^2}{5y}+\frac{5y}{2x^2}\right|$

6. α) $x=4$ β) $x=18$ γ) Η εξίσωση δεν έχει λύση. δ) Η εξίσωση δεν έχει λύση.

7. α) $\sqrt{2}$ β) $\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ γ) $\sqrt{\sqrt{5}-2}$

8. α) 140 β) 84 γ) 30

9. α) $2|\alpha|\beta^2$ β) $6x^2|y|^3\sqrt{3x}$ γ) $\sqrt[20]{3^{13}}$ δ) $\sqrt[12]{\alpha^2|\beta|}$

10. α) $\sqrt[3]{\alpha^2}$ β) $\sqrt[15]{\alpha^{13}}$ γ) $\sqrt[30]{2^9\cdot 3^4}$

11. α) $\sqrt[6]{\alpha}$ β) $\sqrt[18]{\alpha}$ γ) $\sqrt[30]{3^{11}}$

12. α) $3\sqrt{2}$ β) $2\sqrt{2}$ γ) $-5\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{3}$ δ) $8\sqrt{5}$

13. α) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ β) $\sqrt{5}-2$ γ) $7+\sqrt{5}$

14. α) $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$ β) $2-\sqrt{3}$ γ) $-2x^2+2x\sqrt{x^2+1}-1$ δ) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$

15. α) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ β) 52

16. Αν x είναι η ζητούμενη διαφορά, βρίσκουμε ότι $x^2 = 4$ (Βλ. § 5.15 Εφ. 3).

17. Να υψώσετε στο τετράγωνο τα μέλη της $\alpha - \alpha' + \sqrt{\beta'} = \sqrt{\beta}$ και να λάβετε υπόψη την παρατήρηση 2 της § 5.10.

18. α) 1 β) $10\sqrt{10}$.

19. Μετά τις πράξεις βρίσκουμε $A = \alpha^{-4}\beta^{6}$, οπότε για $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ είναι $A = 1$.

20. α) Θέτουμε $\alpha^{\frac{1}{3}} = k$, $\beta^{\frac{1}{3}} = \lambda$ κτλ.
β) Ομοίως.

21. α) $x-1$ β) $-2\alpha\sqrt{\beta} + 2\beta\sqrt{\alpha}$ γ) $18\sqrt{2} - 24$ δ) $20\sqrt{30}$.

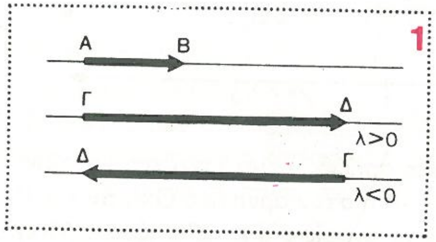
6 ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται οι βασικές έννοιες της Τριγωνομετρίας.
Με βάση όσα αναφέρονται στο προηγούμενο κεφάλαιο για τη μέτρηση ευθύγραμμων τμημάτων και τόξων ή γωνιών, τα οποία εδώ επιτρέπουν θεωρητικά τον ορισμό των συστημάτων αναφοράς, της αλγεβρικής τιμής τόξου και του τριγωνομετρικού κύκλου, εισάγεται η έννοια της κυκλικής συναρτήσεως.
Ο ορισμός των κυκλικών συναρτήσεων στηρίζεται στην «κανονική» απεικόνιση του $\mathbb{R}$ στον τριγωνομετρικό κύκλο, της οποίας χαρακτηριστικό είναι ότι διατηρεί το μήκος. Έτσι υπογραμμίζεται το γεγονός ότι οι κυκλικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, ενώ οι βασικές σχέσεις ανάμεσά τους καθώς και τα πρώτα συμπεράσματα από τη μελέτη τους (πρόσημο, τιμές σε ορισμένα x κτλ.) παρουσιάζονται ως άμεσες συνέπειες του ορισμού.
Η γενικότητα της έννοιας της κυκλικής συναρτήσεως, σε σύγκριση με τη γνωστή από το Γυμνάσιο έννοια του τριγωνομετρικού αριθμού οξείας γωνίας, υπογραμμίζεται τόσο με τη θεωρητική συσχέτισή τους όσο και με τις εφαρμογές. Αυτή άλλωστε η γενικότητα διέπει και τα θέματα που ακολουθούν: την εύρεση των βασικών σχέσεων των τριγωνομετρικών αριθμών δύο τόξων, των οποίων το άθροισμα είναι πολλαπλάσιο τεταρτοκυκλίου, καθώς και τη μελέτη των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Αλγεβρική τιμή διανύσματος

6.1 Όπως είναι γνωστό, δύο **παράλληλα** διανύσματα είναι ή **ομόρροπα** (έχουν την ίδια φορά), ή **αντίρροπα** (έχουν αντίθετη φορά). Όταν η φορά ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ χαρακτηριστεί (αυθαίρετα) ως **θετική,** οπότε η φορά του $\overrightarrow{BA}$ είναι η **αρνητική,** τότε και η φορά κάθε άλλου διανύσματος που έχει τη διεύθυνση της ευθείας ΑΒ είναι καθορισμένη. Λέμε ότι η ευθεία ΑΒ (όπως και κάθε παράλληλός της) είναι **προσανατολισμένη.** Συνήθως, τα σημεία Α και Β εκλέγονται έτσι, ώστε το τμήμα ΑΒ να λαμβάνεται ως μονάδα μετρήσεως. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, με θετική φορά, λέγεται **μοναδιαίο.**



Όταν δοθούν ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένας πραγματικός αριθμός λ, ορίζουμε ως **γινόμενο** $\lambda\overrightarrow{AB}$, το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, το οποίο είναι (σχ. 1):

- ομόρροπο του $\overrightarrow{AB}$, αν $\lambda > 0$
- αντίρροπο του $\overrightarrow{AB}$, αν $\lambda < 0$ και τέτοιο, ώστε (§ 5.7) $\Gamma\Delta = |\lambda| AB$.

Αντιστρόφως, όταν δοθούν δύο παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε ορίζεται ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός λ τέτοιος, ώστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$. Πράγματι, έστω k ο λόγος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ΑΒ (§ 5.8). Τότε $\Gamma\Delta = k\,AB$ και σύμφωνα με τα προηγούμενα:

- αν $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα, τότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = k\,\overrightarrow{AB}$ και $\lambda = k$
- αν $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίρροπα, τότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -k\,\overrightarrow{AB}$ και $\lambda = -k$.

Ο αριθμός λ λέγεται λόγος του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ προς το $\overrightarrow{AB}$.

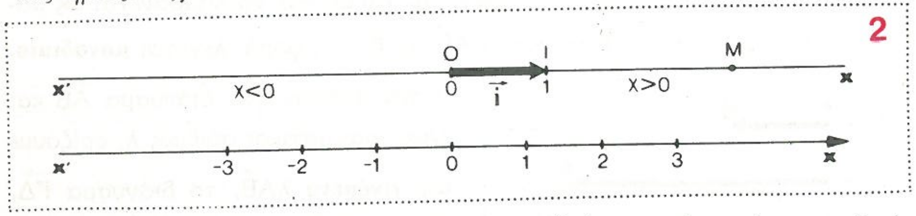
Όταν το $\overrightarrow{AB}$ είναι **μοναδιαίο,** τότε ο λόγος λ λέγεται **αλγεβρική τιμή** του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και σημειώνεται $\overline{\Gamma\Delta}$.

Αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες (1), (2) και (3) της § 5.7 ισχύουν και για το γινόμενο διανύσματος επί πραγματικό αριθμό. Αποδεικνύονται επίσης οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

1. Η αλγεβρική τιμή του αθροίσματος δύο παράλληλων διανυσμάτων ισούται με το άθροισμα των αλγεβρικών τους τιμών.
2. Ο λόγος δύο παράλληλων διανυσμάτων ισούται με το λόγο των αλγεβρικών τους τιμών (ως προς κοινό μοναδιαίο διάνυσμα).

Άξονας

6.2 Ένας **άξονας** με **αρχή** Ο είναι μια ευθεία x'x στην οποία έχει οριστεί εκτός από το σημείο Ο και ένα άλλο σημείο Ι, ώστε το διάνυσμα $\vec{OI} = \vec{i}$ να λαμβάνεται ως **μοναδιαίο.** Έτσι σε κάθε σημείο Μ του άξονα αντιστοιχίζεται η αλγεβρική τιμή $x = \overline{OM}$ του διανύσματος $\vec{OM}$, που ονομάζεται **τετμημένη** του Μ. Η τετμημένη του Ο είναι μηδέν και του Ι είναι 1. Στα σημεία του ημιάξονα Οx, ο οποίος περιέχει το Ι, αντιστοιχούν θετικές τετμημένες (*θετικός ημιάξονας*), ενώ στα σημεία του Οx' αρνητικές (*αρνητικός ημιάξονας*).

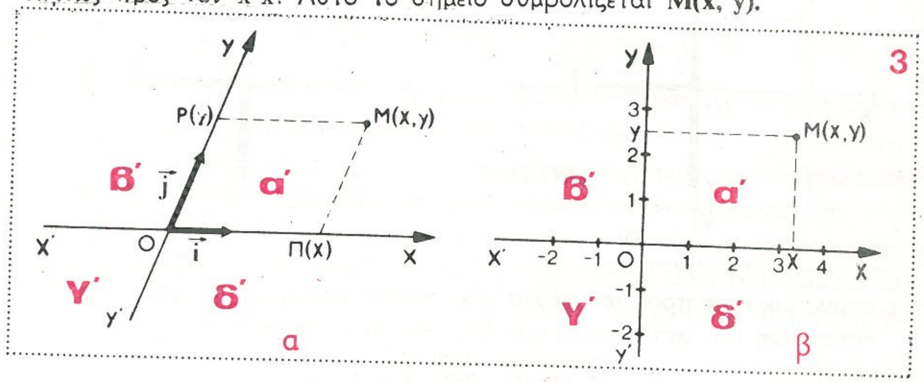


Αντιστρόφως, αν δοθεί ένας πραγματικός αριθμός x, υπάρχει ένα μοναδικό σημείο Μ στο θετικό ημιάξονα Οx, αν $x > 0$ ή στον αρνητικό Οx', αν $x < 0$, του οποίου η τετμημένη είναι x. Αυτό το σημείο το συμβολίζουμε **M(x).** Έτσι έχουμε μια «1—1 και επί» απεικόνιση του άξονα x'x, ως σημειοσυνόλου, στο $\mathbb{R}$. Όταν δίνεται το σημείο Ο και το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$, τότε ορίζεται πλήρως ο άξονας x'x με αρχή Ο, καθώς και η απεικόνισή του στο $\mathbb{R}$, που περιγράψαμε προηγουμένως. Θα λέμε τότε ότι έχουμε ορίσει ένα **σύστημα αναφοράς** στην ευθεία x'x, που το γράφουμε $(O, \vec{i})$ ή απλά με το σύμβολο Οx, του **θετικού** ημιάξονα. (Τότε το $\vec{i}$ υπονοείται, όπως π.χ. όταν έχει προκαθοριστεί η μονάδα μήκους).

Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς στο επίπεδο

6.3 Έστω x'x, y'y δύο τεμνόμενοι άξονες με κοινή αρχή Ο και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντιστοίχως και Μ ένα σημείο του επιπέδου τους (σχ. 3α).
Από το Μ φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες y'y, x'x, οι οποίες τέμνουν τους άξονες x'x, y'y αντιστοίχως στα σημεία Π και Ρ.
Αν x είναι η τετμημένη του Π στον x'x και y η τετμημένη του Ρ στον y'y, τότε στο σημείο Μ αντιστοιχίζεται ένα συγκεκριμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, το (x, y).

Οι x, y λέγονται **συντεταγμένες** και ειδικότερα ο x **τετμημένη** και ο y **τεταγμένη** του σημείου Μ.
Αντιστρόφως σε κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) αντιστοιχίζεται ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες x, y, το σημείο τομής δύο ευθειών: Εκείνης που άγεται από το σημείο Π(x) του άξονα x'x παραλλήλως προς τον άξονα y'y και εκείνης που άγεται από το σημείο Ρ(y) του y'y παραλλήλως προς τον x'x. Αυτό το σημείο συμβολίζεται **M(x, y).**



Έτσι έχουμε μια «1—1 και επί» απεικόνιση του επιπέδου, ως σημειοσυνόλου, στο σύνολο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Το ζεύγος των δύο αξόνων x'x (*άξονας τετμημένων*) και y'y (*άξονας τεταγμένων*) καθώς και η απεικόνιση του επιπέδου στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ που περιγράψαμε ορίζονται πλήρως, αν δοθούν η κοινή τους αρχή Ο και τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, με $\vec{i} \nparallel \vec{j}$. Θα λέμε τότε ότι έχουμε ορίσει ένα **καρτεσιανό σύστημα αναφοράς** στο επίπεδο, που το γράφουμε $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ή Οxy (όταν π.χ. έχει προκαθοριστεί η μονάδα μήκους).
Έστω Οxy ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Το σύνολο των σημείων M(x, y) για τα οποία είναι:

- $x = 0$, είναι η ευθεία y'y
- $y = 0$, είναι η ευθεία x'x.

Εξάλλου τα σύνολα των σημείων M(x, y) για τα οποία ($x > 0$ **και** $y > 0$), ($x < 0$ **και** $y > 0$), ($x < 0$ **και** $y < 0$), ($x > 0$ **και** $y < 0$), ονομάζονται αντιστοίχως **α', β', γ', δ' τεταρτημόρια.**

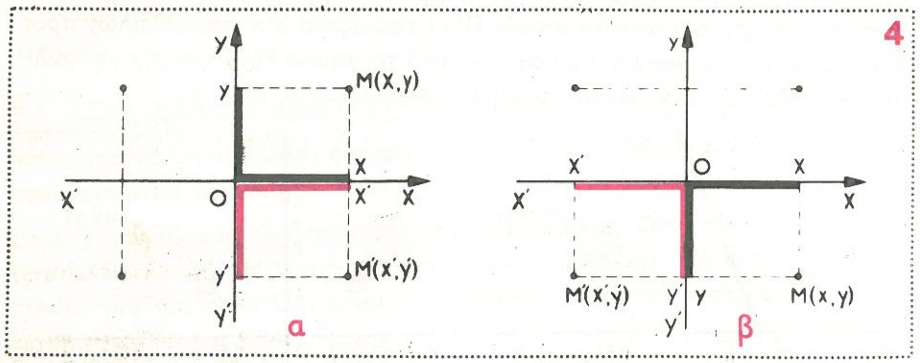
Ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς

6.4 Ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του οποίου οι άξονες τέμνονται καθέτως και τα μοναδιαία διανύσματά τους ορίζονται από ίσα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται **ορθοκανονικό** (σχ. 3β).
Έστω Οxy ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς και M(x, y), M'(x', y') δύο σημεία του επιπέδου. Για να είναι τα σημεία αυτά:

● συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x, πρέπει και αρκεί να έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες (σχ. 4α), δηλαδή

$$x = x' \quad \text{και} \quad y = -y'$$

4



● συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y, πρέπει και αρκεί να έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες (σχ. 4β), δηλαδή

$$x = -x' \quad \text{και} \quad y = y'$$

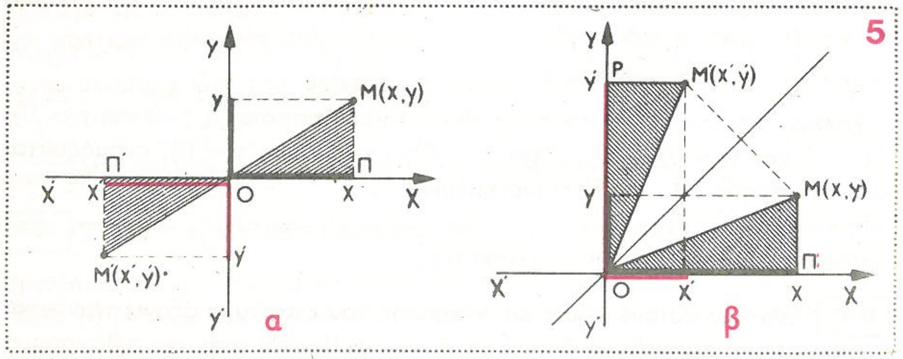
● συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων, πρέπει και αρκεί να έχουν αντίθετες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες (σχ. 5α), δηλαδή

$$x = -x' \quad \text{και} \quad y = -y'$$

● συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων Ox, Oy, όπως προκύπτει από την ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων ΟΠΜ και ΟΡ΄Μ΄ (σχ. 5β), πρέπει και αρκεί η τετμημένη του καθενός να είναι ίση με την τεταγμένη του άλλου, δηλαδή

$$x = y' \quad \text{και} \quad y = x'$$

5



Σημείωση

Στα επόμενα, όπου αναφερόμαστε σε σύστημα αναφοράς χωρίς άλλη διευκρίνιση, θα εννοούμε ότι είναι ορθοκανονικό.

Μονάδες μετρήσεων τόξων (γωνιών)

6.5 Ως μονάδες για τη μέτρηση των τόξων εκτός από τη **μοίρα** (1^0), που είναι το $\frac{1}{360}$ του κύκλου, χρησιμοποιούνται και ο **βαθμός** (grade, 1^g), ίσος προς το $\frac{1}{400}$ του κύκλου, και κυρίως το **ακτίνιο** (radian, 1^{rad}). Το ακτίνιο είναι τόξο, του οποίου το **μήκος** είναι ίσο προς την ακτίνα ρ του κύκλου. Έτσι, ένα τόξο **α ακτινίων** έχει μήκος **αρ.**

Επειδή, όπως είναι γνωστό από τη Γεωμετρία, το μήκος του κύκλου είναι 2πρ, το μέτρο (του τόξου) ενός πλήρους κύκλου σε ακτίνια είναι 2π.

Έστω μ, β και α τα μέτρα ενός τόξου σε μοίρες, βαθμούς και ακτίνια αντιστοίχως. Επειδή τα αντίστοιχα μέτρα του ημικυκλίου είναι 180, 200 και π, θα έχουμε ως λόγο του τόξου προς το ημικύκλιο, σύμφωνα με την § 5.9, το λόγο των μέτρων τους:

$$\boxed{\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}} \qquad (1)$$

Οι τύποι (1) χρησιμοποιούνται για την αλλαγή της μονάδας μετρήσεως. Έτσι π.χ. ένα τόξο 18^0 είναι $\frac{18\pi}{180} = \frac{\pi}{10}^{rad}$ ή $\frac{18 \cdot 200}{180} = 20^g$.

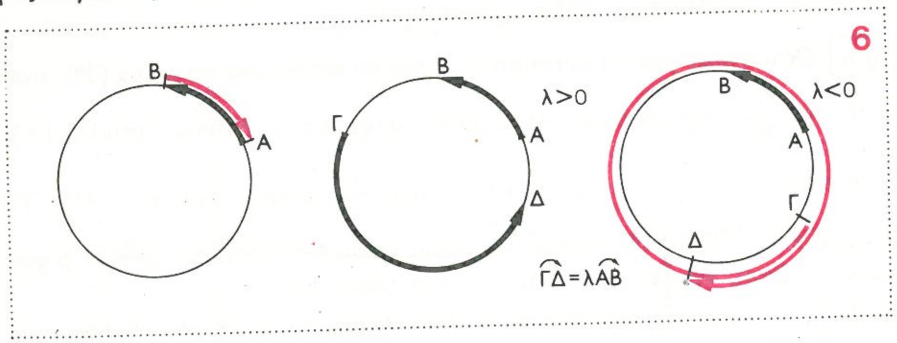
Ως μέτρο μιας γωνίας ορίζεται, όπως είναι γνωστό, το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει η γωνία, όταν αυτή καταστεί επίκεντρη.

Αλγεβρική τιμή (προσανατολισμένου) τόξου

6.6 Αν Α και Β είναι σημεία κύκλου, υπάρχουν άπειρα τόξα με άκρα Α και Β. Από ένα συγκεκριμένο τόξο $\overset{\frown}{AB}$, π.χ. εκείνο που αντιστοιχεί σε κυρτή επίκεντρη γωνία και που είναι μοναδικό (όταν τα Α και Β δεν είναι αντιδιαμετρικά) ορίζονται δύο τόξα αντίθετης φοράς. Το $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$ που έχει αρχή το Α και πέρας το Β και το $\overset{\frown}{\mathbf{BA}}$ που έχει αρχή το Β και πέρας το Α. Τα τόξα αυτά, όπως και κάθε τόξο που έχει αρχή και πέρας, λέγονται **προσανατολισμένα.**

Όταν η φορά του $\overset{\frown}{AB}$ χαρακτηριστεί (αυθαίρετα) ως **θετική,** οπότε η φορά του $\overset{\frown}{BA}$ είναι **αρνητική,** τότε η φορά κάθε άλλου τόξου προσανατολισμένου είναι καθορισμένη. Λέμε τότε ότι ο κύκλος είναι **προσανατολισμένος.**

Αν τα Α και Β έχουν εκλεγεί έτσι, ώστε το $\overset{\frown}{AB}$ να είναι η μονάδα μετρήσεως των τόξων, τότε το αντίστοιχο προσανατολισμένο τόξο θετικής φοράς λέγεται **μοναδιαίο**.



● Ως **γινόμενο** ενός τόξου $\widehat{AB}$ επί πραγματικό αριθμό λ ορίζεται τόξο *ομόρροπο*, (αν $\lambda > 0$) ή *αντίρροπο* (αν $\lambda < 0$), του $\widehat{AB}$ με μέτρο $|\lambda|AB$.

● Εξάλλου, αν δοθούν δύο τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ του κύκλου, αποδεικνύεται, όπως και στην § 6.1, ότι υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός λ τέτοιος, ώστε $\widehat{\Gamma\Delta} = \lambda\, \widehat{AB}$. Ο αριθμός λ λέγεται **λόγος** του $\widehat{\Gamma\Delta}$ προς το $\widehat{AB}$. Αν $\widehat{AB}$ είναι μοναδιαίο τόξο, τότε ο λ λέγεται **αλγεβρική τιμή** του $\widehat{\Gamma\Delta}$.

Αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες (1), (2), (3) της § 5.7 ισχύουν και για το γινόμενο προσανατολισμένου τόξου επί πραγματικό αριθμό.

Αποδεικνύονται ακόμη οι ιδιότητες:

1. Η αλγεβρική τιμή του αθροίσματος δύο προσανατολισμένων τόξων ισούται με το άθροισμα των αλγεβρικών τους τιμών.
2. Ο λόγος δύο προσανατολισμένων τόξων ισούται με το λόγο των αλγεβρικών τους τιμών (ως προς κοινό μοναδιαίο τόξο).

Τριγωνομετρικός κύκλος

6.7 Στα επόμενα υποθέτουμε ότι έχει καθοριστεί η μονάδα για τη μέτρηση του μήκους ευθύγραμμων τμημάτων ή και τόξων.

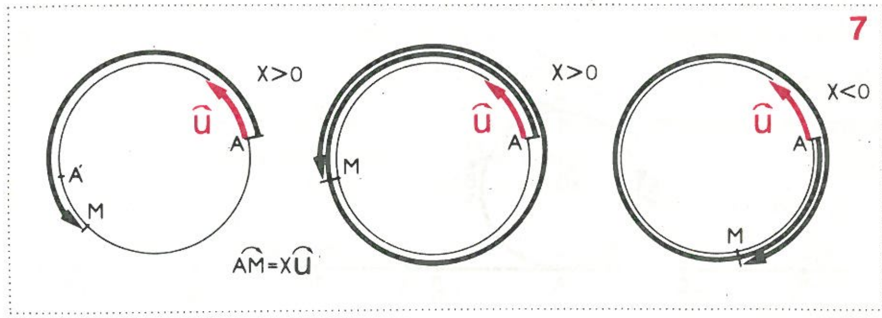
Έστω **C** ένας προσανατολισμένος κύκλος με ακτίνα ίση με τη μονάδα μήκους (μοναδιαίος), στον οποίο εκλέγουμε (αυθαιρέτως) ένα σημείο A.

Ο **C** λέγεται **τριγωνομετρικός** κύκλος με **αρχή** το A. Αν $\widehat{\mathbf{u}}$ είναι το μοναδιαίο τόξο στον **C**, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό x, ορίζεται το τόξο $\widehat{AM} = x \cdot \widehat{\mathbf{u}}$, δηλαδή το προσανατολισμένο τόξο με αρχή A, του οποίου η αλγεβρική τιμή είναι x (σχ. 7).

Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση $f: \mathbb{R} \to \mathbf{C}$, με την οποία σε κάθε $x \in \mathbb{R}$

αντιστοιχίζεται το πέρας του παραπάνω τόξου $\widehat{AM}$. Η απεικόνιση εξαρτάται φυσικά από την εκλογή της μονάδας μετρήσεως των τόξων. Έτσι, το σημείο A', αντιδιαμετρικό του A (σχ. 7), είναι εικόνα του αριθμού:

● 180, αν ως μονάδα λαμβάνεται η μοίρα
● 200, αν ως μονάδα λαμβάνεται ο βαθμός
● π, αν ως μονάδα λαμβάνεται το ακτίνιο.



Επειδή υπάρχουν περισσότερα του ενός τόξα που έχουν αρχή το A και πέρας το M, θα υπάρχουν και περισσότεροι του ενός πραγματικοί αριθμοί, οι οποίοι με την f απεικονίζονται στο σημείο M. Άρα η f είναι απεικόνιση «επί» αλλά όχι «1—1».

Κανονική απεικόνιση του $\mathbb{R}$ στον C

6.8 Την απεικόνιση του $\mathbb{R}$ στον τριγωνομετρικό κύκλο **C**, που περιγράψαμε στην § 6.7, θα τη λέμε **κανονική,** όταν ως μονάδα μετρήσεως των τόξων λαμβάνεται το ακτίνιο. Το χαρακτηριστικό της κανονικής απεικονίσεως, που θα συμβολίζουμε με **φ**, είναι ότι κάθε πραγματικός αριθμός x απεικονίζεται στο πέρας τόξου x ακτινίων, του οποίου δηλαδή το μήκος είναι $|x|$. Έτσι οι αριθμοί 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi, \ldots$, δηλαδή οι αριθμοί $k . 2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, απεικονίζονται όλοι στο σημείο A.

Γενικότερα, αν ο x απεικονίζεται[1] στο M, τότε ο αριθμός $x' = x + k \cdot 2\pi$ απεικονίζεται στο πέρας τόξου που είναι άθροισμα (§ 6.6, Ιδιοτ. 1) του $\widehat{AM}$ και k κύκλων, δηλαδή στο ίδιο σημείο M.

Αντιστρόφως, έστω x και x' δύο πραγματικοί αριθμοί με κοινή εικόνα το σημείο M. Τότε τα δύο τόξα $\widehat{AM}$ με αλγεβρικές τιμές x και x' θα διαφέρουν κατά ακέραιο αριθμό κύκλων. Άρα οι αριθμοί x και x' διαφέρουν κατά $k . 2\pi$ ή $2k\pi$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να απεικονίζονται με την φ

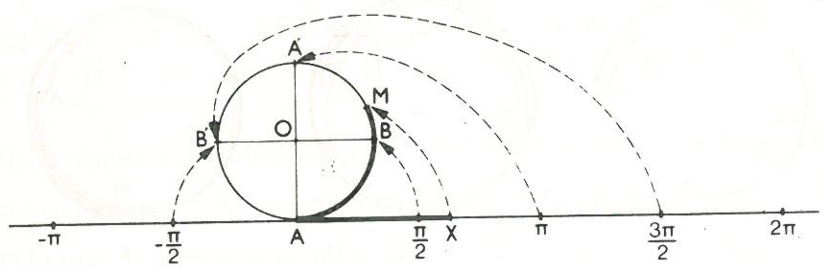
(1) Στα επόμενα όπου αναφερόμαστε σε απεικόνιση, χωρίς άλλη διευκρίνιση, θα εννοούμε την **κανονική** απεικόνιση **φ**.

δύο αριθμοί x, x' στό ίδιο σημείο $M \in C$, πρέπει και αρκεί να διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή

$$M = \varphi(x) = \varphi(x') \Leftrightarrow \exists\; k \in \mathbb{Z},\quad x' = x + 2k\pi$$

Μια εποπτική παράσταση της κανονικής απεικονίσεως φ δίνεται με το σχήμα 8. Στον άξονα με αρχή A, που εφάπτεται στον τριγωνομετρικό κύκλο C, έχει απεικονιστεί το $\mathbb{R}$, έτσι ώστε η φ «υλοποιείται», αν κάθε ημιάξονας «περιτυλιχτεί» γύρω από τον C.

8



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ο αριθμός π απεικονίζεται στο A', αντιδιαμετρικό του A. Άρα όλοι οι αριθμοί της μορφής $\pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή όλα τα περιττά πολλαπλάσια του π και μόνο αυτά, απεικονίζονται στο A'.

Επίσης, όπως είδαμε, οι αριθμοί $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή τα άρτια πολλαπλάσια του π, απεικονίζονται στο A.

2. Ο αριθμός $\frac{\pi}{2}$ απεικονίζεται στο σημείο B, που είναι το μέσο του θετικού ημικυκλίου $\overset{\frown}{AA'}$. Άρα απεικονίζονται στο B όλοι οι αριθμοί της μορφής $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Ο αριθμός $\frac{3\pi}{2}$ $\left(\text{ή ο } -\frac{\pi}{2}\right)$ απεικονίζεται στο B', αντιδιαμετρικό του B. Άρα στο B' απεικονίζονται όλοι οι αριθμοί της μορφής $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Σημείωση

Αν ως μονάδα μετρήσεως τόξων ληφθεί η μοίρα (βαθμός), τότε όλα τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν, αρκεί να αντικατασταθεί ο π με 180 (ή 200).

Π.χ. οι αριθμοί $k.360+90$ (ή $k.400+100$) απεικονίζονται στο σημείο B.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθεί η απόσταση των σημείων του τριγωνομετρικού κύκλου στα οποία απεικονίζονται οι αριθμοί : α) $2k\pi+\theta$ και $(2k+1)\pi+\theta$.**

β) $2k\pi+\theta$ και $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi + \theta$.

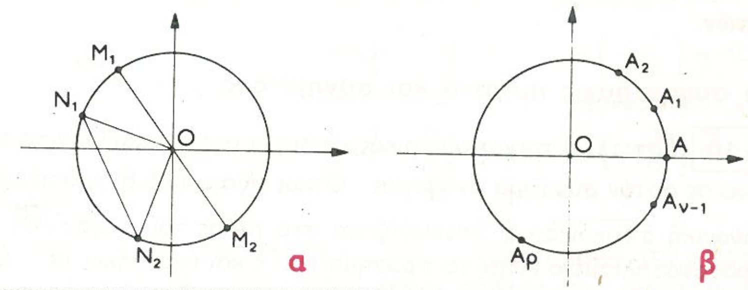
α) Επειδή οι αριθμοί $2k\pi+\theta$ και $(2k+1)\pi+\theta$ διαφέρουν κατά π, τα σημεία M_1, M_2 στα οποία αυτοί απεικονίζονται (σχ. 9α) θα είναι άκρα ενός τόξου με μήκος π, δηλαδή θα είναι αντιδιαμετρικά. Επομένως η απόστασή τους θα είναι ίση με 2.

β) Ομοίως οι αριθμοί $2k\pi+\theta$ και $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi+\theta$ διαφέρουν κατά $\frac{\pi}{2}$ και τα σημεία N_1, N_2 (σχ. 9α) στα οποία απεικονίζονται είναι άκρα τόξου με μήκος $\frac{\pi}{2}$, δηλαδή ενός τεταρτοκυκλίου. Επομένως το τρίγωνο ON_1N_2 είναι ορθογώνιο στο O και έχουμε :

$$(N_1N_2)^2 = (ON_1)^2 + (ON_2)^2$$
$$= 1^2 + 1^2 = 2$$

Άρα η απόστασή τους είναι $\sqrt{2}$.

9



2. **Ποιων αριθμών οι εικόνες πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου του οποίου μια κορυφή είναι η αρχή A του κύκλου.**

Έστω ότι το κανονικό πολύγωνο έχει ν πλευρές. Τότε οι κορυφές του χωρίζουν το μοναδιαίο κύκλο σε ν ίσα τόξα με μήκος $\frac{2\pi}{\nu}$. Άρα (σχ. 9β)

στο $A = A_0$ απεικονίζεται ο αριθμός 0

στο A_1 » » » $\frac{2\pi}{\nu}$

» A_2 » » » $2 \cdot \frac{2\pi}{\nu}$

. . . .

» A_ρ » » » $\rho \cdot \frac{2\pi}{\nu}$

. . . .

» $A_{\nu-1}$ » » » $(\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι της μορφής $2k\pi + \rho\frac{2\pi}{\nu}$, με $k \in \mathbb{Z}$ και $\rho = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$.

Ασκήσεις 1, 2, 3.

Σύστημα αναφοράς προσαρτημένο στον C

6.9 Με τον τριγωνομετρικό κύκλο **C**, που έχει αρχή το σημείο A, συνδέεται ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy (σχ. 10), που ορίζεται ως εξής:

- Η αρχή O είναι το κέντρο του κύκλου.
- Το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x'x είναι το $\overrightarrow{OA}$.
- Το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα y'y είναι το $\overrightarrow{OB}$, όπου B είναι η εικόνα του $\frac{\pi}{2}$ (κατά την κανονική πάντοτε απεικόνιση φ).

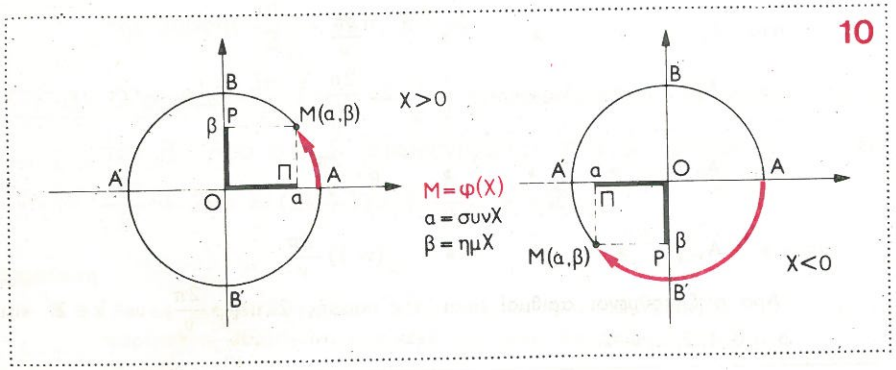
Θα λέμε ότι το Oxy είναι το *προσαρτημένο* στον τριγωνομετρικό κύκλο σύστημα αναφοράς.
Ο άξονας x'x λέγεται άξονας των **συνημιτόνων** και ο y'y άξονας των **ημιτόνων.**

Οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο

6.10 Έστω **C** ο τριγωνομετρικός κύκλος με αρχή A και Oxy το προσαρτημένο σε αυτόν σύστημα αναφοράς. Όπως είδαμε (§ 6.8) ο αριθμός x με την κανονική απεικόνιση φ απεικονίζεται στο πέρας του τόξου $\overset{\frown}{AM}$, που είναι προσανατολισμένο κατά το πρόσημο του x και έχει μήκος $|x|$. Έστω (α,β) οι συντεταγμένες του σημείου M, ως προς το Oxy. Αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ την τετμημένη α του σημείου $M = \varphi(x)$, τότε ορίζεται μια **πραγματική** συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, που ονομάζεται **συνημίτονο** και συμβολίζεται **συν**[1]. Είναι δηλαδή (σχ. 10)

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \textbf{συν}x^{(1)} = \textbf{τετμημένη } \alpha \textbf{ του } \varphi(x)$$

10



(1) ή **cos** (cosinus). Γράφουμε συνx αντί συν(x).

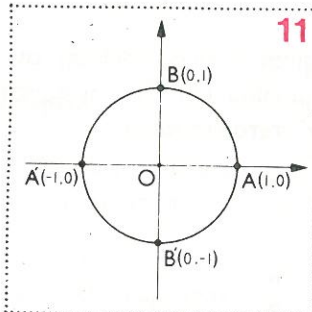
Ομοίως ορίζουμε τη συνάρτηση **ημίτονο,** συμβολικά **ημ**[1], με την οποία σε κάθε $x \in \mathbb{R}$, αντιστοιχίζεται η τεταγμένη β του σημείου $M = \varphi(x)$. Είναι δηλαδή

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \textbf{ημ}x = \textbf{τεταγμένη } \beta \textbf{ του } \varphi(x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι αριθμοί $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, -\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}$ απεικονίζονται με την απεικόνιση φ (σχ. 11) στα σημεία. A(1, 0), B(0, 1), A'(−1, 0), B'(0, −1), A, B', A', B αντιστοίχως. Επομένως έχουμε:

11



$συν0 = 1$	$ημ0 = 0$
$συν\frac{\pi}{2} = 0$	$ημ\frac{\pi}{2} = 1$
$συν\,\pi = -1$	$ημ\pi = 0$
$συν\frac{3\pi}{2} = 0$	$ημ\frac{3\pi}{2} = -1$
$συν\,2\pi = 1$	$ημ\,2\pi = 0$
$συν\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$συν\,(-\pi) = -1$	$ημ(-\pi) = 0$
$συν\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$	$ημ\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η τετμημένη α και η τεταγμένη β όλων των σημείων του τριγωνομετρικού κύκλου είναι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος [−1, 1]. Άρα οι συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο παίρνουν τιμές στο [−1, 1].
Είναι δηλαδή

$$\boxed{\forall\, x, \quad \begin{array}{l} -1 \leqslant \textbf{συν}x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \textbf{ημ}x \leqslant 1 \end{array}}$$

2. Στην § 6.8 είδαμε ότι όλοι οι αριθμοί x και $2k\pi + x$ απεικονίζονται στο ίδιο σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου.
Άρα η τιμή της συναρτήσεως συνημίτονο στο x είναι ίδια με την τιμή της στο $2k\pi + x$. Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση ημίτονο. Δηλαδή έχουμε:

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{array}{l} \textbf{συν}x = \textbf{συν}(2k\pi + x) \\ \textbf{ημ}x = \textbf{ημ}(2k\pi + x) \end{array}}$$

(1) ή **sin** (sinus). Γράφουμε ημx αντί ημ(x).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$ημ17π = ημ(8.2π+π) = ημπ = 0$$

$$συν(-27π) = συν[2(-13)π-π] = συν(-π) = -1$$

$$ημ\left(\frac{25π}{2}\right) = ημ\left(12π + \frac{π}{2}\right) = ημ\left(6{\cdot}2π + \frac{π}{2}\right) = ημ\,\frac{π}{2} = 1$$

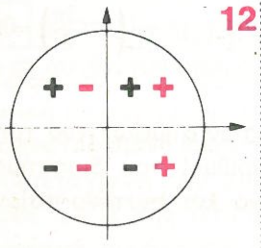
$$συν\left(\frac{19π}{2}\right) = συν\left(9π + \frac{π}{2}\right) = συν\left(4.2π + π + \frac{π}{2}\right) = συν\,\frac{3π}{2} = 0$$

Πρόσημο ημx και συνx

6.11 Αφού τό συνx είναι τετμημένη, θα είναι θετικός αριθμός, αν ο x απεικονίζεται σε σημείο του α' ή δ' τεταρτημορίου (§ 6.3) και αρνητικός, αν ο x απεικονίζεται σε σημείο του β' ή γ' τεταρτημορίου.

Ομοίως το ημx είναι θετικός αριθμός, αν ο x απεικονίζεται σε σημείο του α' ή β' τεταρτημορίου και αρνητικός αν ο x απεικονίζεται σε σημείο του γ' ή δ'. Έτσι θα έχουμε (σχ. 12).

12



Πρόσημο ημΧ
Πρόσημο συνΧ

- Αν $0<x<\frac{π}{2}$, τότε ημx>0, συνx>0
- Αν $\frac{π}{2}<x<π$, τότε ημx>0, συνx<0
- Αν $π<x<\frac{3π}{2}$, τότε ημx<0, συνx<0
- Αν $\frac{3π}{2}<x<2π$, τότε ημx<0, συνx>0

Το βασικό Θεώρημα

6.12 Οι τιμές των συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο στο x δεν είναι ανεξάρτητες. Θα αποδείξουμε ότι:

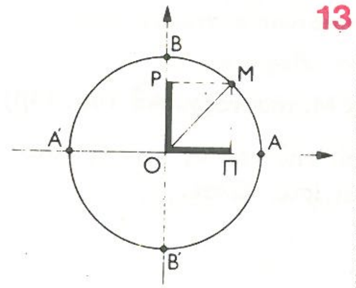
ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Γιά κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:
$$ημ^2x + συν^2x = 1^{(1)}$$

(1) Γράφουμε $ημ^2x$ αντί του $(ημx)^2$ και $συν^2x$ αντί $(συνx)^2$.

Απόδειξη. Έστω Μ η εικόνα του x στον τριγωνομετρικό κύκλο και Π, Ρ οι ορθές προβολές του Μ στους άξονες συνημιτόνων και ημιτόνων αντιστοίχως. Τότε έχουμε:

13



$$συνx = \overline{OΠ} \quad και \quad ημx = \overline{OP}$$

Εξάλλου $(OΠ)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$

ή $(\overline{OΠ})^2 + (\overline{OP})^2 = 1$

Άρα $συν^2x + ημ^2x = 1.$

ΠΟΡΙΣΜΑ

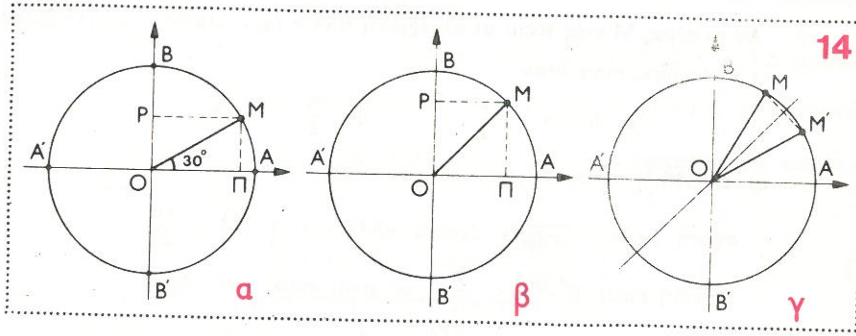
Γιά κάθε πραγματικό αριθμό x είναι
1. $ημ^2x = 1 - συν^2x$
2. $συν^2x = 1 - ημ^2x$

Ημίτονο και συνημίτονο των αριθμών $\frac{π}{6}, \frac{π}{4}, \frac{π}{3}$

6.13 Οι αριθμοί αυτοί απεικονίζονται στο α' τεταρτημόριο και συνεπώς το ημίτονο και συνημίτονό τους είναι θετικοί αριθμοί. Συγκεκριμένα:

1. Ο αριθμός $\frac{π}{6}$ απεικονίζεται στο πέρας Μ τόξου 30° (σχ. 14α) και αν Π είναι η προβολή του Μ στον άξονα των συνημιτόνων, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΠΟΜ η γωνία $\widehat{O}$ είναι 30°.

14



Άρα $(ΠΜ) = \frac{1}{2}(OM) = \frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε:

$$ημ\frac{π}{6} = (ΠΜ) = \frac{1}{2}$$

και (§ 6.12 Πορ.) $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \eta\mu^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Άρα

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Ο αριθμός $\frac{\pi}{4}$ απεικονίζεται στο μέσο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (σχ. 14β). Άρα το Μ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας των θετικών ημιαξόνων και οι συντεταγμένες του είναι ίσες. Ώστε

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \eta\mu \frac{\pi}{4}$$

και (§ 6.12 Θεώρ.) $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4} = 1$ ή $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$. Άρα

$$\eta\mu \frac{\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Για τον αριθμό $\frac{\pi}{3}$ μπορούμε να εργαστούμε όπως και στην περίπτωση του $\frac{\pi}{6}$. Αλλά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι αριθμοί $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{\pi}{6}$ απεικονίζονται στα σημεία Μ και Μ', συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας των θετικών ημιαξόνων (σχ. 14γ). Άρα (§ 6.4) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu \frac{\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Αν το πέρας Μ ενός τόξου με αλγεβρική τιμή x έχει τεταγμένη $\frac{3}{5}$, να βρεθούν οι τιμές ημx, συνx όταν :**

α) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **β)** $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

α) Επειδή η τεταγμένη του Μ είναι ημx, θα είναι $\eta\mu x = \frac{3}{5}$. Από τη σχέση $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$ έχουμε $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Επειδή όμως $0 < x < \frac{\pi}{2}$, θα είναι $\sigma\upsilon\nu x > 0$. Άρα

$$\sigma\upsilon\nu\, x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

β) Ομοίως, επειδή $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, θα είναι $\sigma\upsilon\nu x < 0$. Άρα

$$\sigma\upsilon\nu\, x = -\frac{4}{5}.$$

2. **Να αποδειχθεί ότι**

$$\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\, \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$$

Είναι γνωστή η ταυτότητα στο $\mathbb{R}$ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$. Επομένως για $\alpha = \eta\mu^2 x$ και $\beta = \sigma\upsilon\nu^2 x$ έχουμε:

$$\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$$
$$= 1 - 2\eta\mu^2 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x$$

3. **Να αποδειχθεί ότι, αν ημx συνx $\neq 0$, τότε**

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu\, x} + \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x} = \frac{1}{\eta\mu\, x\, \sigma\upsilon\nu\, x}.$$

Είναι $\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x}$.

4. **Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με**

$$f(x) = 2\,(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) - 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$$

είναι σταθερή.

Είναι $f(x) = 2[(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^3 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)]$
$-3[(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x]$
$= 2(1 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x) - 3\,(1 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x)$
$= 2 - 6\, \eta\mu^2 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x - 3 + 6\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$
$= -1$

Ασκήσεις 4, 5, 6, 7, 8.

Οι συναρτήσεις εφαπτομένη και συνεφαπτομένη

6.14 Επειδή οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, το πηλίκο $\frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu}$ είναι συνάρτηση που ορίζεται (§ 4.17) στο σύνολο $\mathbb{R}_1 = \{x : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **εφαπτομένη** και συμβολίζεται **εφ** (1). Είναι λοιπόν

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_1, \quad \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} \qquad (1)$$

Ομοίως ορίζεται και η συνάρτηση $\frac{\sigma\upsilon\nu}{\eta\mu}$, που ονομάζεται **συνεφαπτομένη**, συμβολικά **σφ** (2).

(1) ή **tg** (tangente). Γράφουμε εφx αντί εφ(x)
(2) ή **ctg** (cotangente). Γράφουμε σφx αντί σφ(x).

Πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}_2 = \{x : ημx \neq 0\}$. Επομένως

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_2, \quad σφx = \frac{συνx}{ημx}} \qquad (2)$$

Οι συναρτήσεις ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη λέγονται **κυκλικές** ή **τριγωνομετρικές** συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Από το παράδειγμα της σελ. 151 προκύπτει ότι:

$$εφ0 = εφ(\pm\pi) = εφ2\pi = σφ\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = σφ\left(\pm\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{0}{\pm 1} = 0.$$

Στους αριθμούς $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$ δεν ορίζεται η εφαπτομένη και στους 0, $\pm\pi$, 2π η συνεφαπτομένη.

2. Σύμφωνα με την § 6.13 έχουμε:

$$εφ\frac{\pi}{4} = σφ\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$εφ\frac{\pi}{6} = σφ\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$εφ\frac{\pi}{3} = σφ\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, συνοψίζονται στον πίνακα:

x	$ημx$	$συνx$	$εφx$	$σφx$
0	0	1	0	$-$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	0

Μνημονικός κανόνας. Η στήλη του ημx προκύπτει από τον τύπο $\frac{\sqrt{k}}{2}$ για $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

6.15 Το **γινόμενο** των συναρτήσεων **εφ** και **σφ** ορίζεται (§ 4.16) στο σύνολο $\mathbb{R}_3 = \mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 = \{x : ημx\, συνx \neq 0\}$ και είναι:

$$εφx\, σφx = \frac{ημx}{συνx} \cdot \frac{συνx}{ημx} = 1. \quad \text{Ώστε}$$

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_3, \quad εφx\, σφx = 1}$$

Σημείωση

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $συνx = 0$ επαληθεύεται από όσα x απεικονίζονται στα σημεία Β ή Β' του τριγωνομετρικού κύκλου, δηλαδή από τους αριθμούς (§ 6.8, Παρατ. 2, 3) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, που είναι τα άρτια ή περιττά πολλαπλάσια του π αυξημένα κατά $\frac{\pi}{2}$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως εφ είναι ακριβέστερα:

$$\mathbb{R}_1 = \left\{x : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

Επίσης η εξίσωση $ημx = 0$ επαληθεύεται από όσα x απεικονίζονται στα σημεία Α ή Α' του $\mathbf{C}$, δηλαδή από τους αριθμούς (§ 6.8, Παρατ. 1) της μορφής $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Άρα $\qquad \mathbb{R}_2 = \{x : x \neq k\pi\}$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι $\mathbb{R}_3 = \left\{x : \ x \neq k\frac{\pi}{2}\right\}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από την § 6.10 προκύπτει για την εφαπτομένη ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$, (δηλ. $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$) είναι:

$$εφ(2k\pi + x) = \frac{ημ(2k\pi + x)}{συν(2k\pi + x)} = \frac{ημx}{συνx} = εφx.$$

Ανάλογα, έχουμε για τη συνεφαπτομένη ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ (δηλ. $x \neq k\pi$):

$$σφ(2k\pi + x) = σφx.$$

2. Είναι προφανές ότι οι αριθμοί εφx και σφx είναι ομόσημοι. Ειδικότερα, για να είναι:

- $εφx > 0$ και $σφx > 0$

πρέπει και αρκεί τα ημx και συνx να είναι ομόσημα, δηλαδή ο x να απεικονίζεται στο α' ή γ' τεταρτημόριο.

- $εφx < 0$ και $σφx < 0$

πρέπει και αρκεί τα ημx και συνx να είναι ετερόσημα, δηλαδή ο x να απεικονίζεται στο β' ή δ' τεταρτημόριο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\varepsilon\varphi\,\frac{19\pi}{3} = \varepsilon\varphi\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(-\frac{22\pi}{5}\right) = \sigma\varphi\left(-2\cdot 2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \sigma\varphi\left(-\frac{2\pi}{5}\right) < 0$$

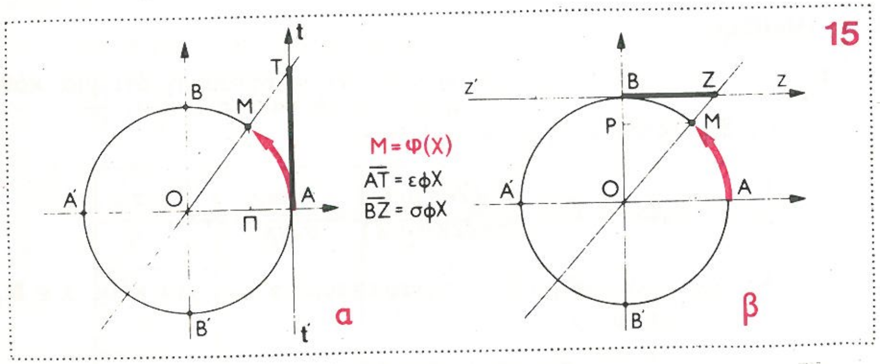
Άξονες εφαπτομένων και συνεφαπτομένων

6.16 Έστω tt' ο άξονας που έχει αρχή την αρχή Α του τριγωνομετρικού κύκλου **C** και είναι παράλληλος[1] προς τον άξονα y'y των ημιτόνων. Αν Μ είναι η εικόνα του αριθμού x στον **C** με την κανονική απεικόνιση και Τ η τομή της ευθείας ΟΜ με τον άξονα tt', τότε από τα όμοια τρίγωνα ΟΠΜ και ΟΑΤ προκύπτει ότι είναι (σχ. 15α):

$$\frac{AT}{OA} = \frac{\Pi M}{O\Pi} \quad \text{ή} \quad (AT) = \frac{(\overline{\Pi M})}{(\overline{O\Pi})} = \frac{|\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} = |\varepsilon\varphi x| \quad \text{ή} \quad |\overline{AT}| = |\varepsilon\varphi x|$$

Αλλά οι αριθμοί εφx και $\overline{AT}$ είναι ομόσημοι, θετικοί, όταν το Μ είναι στο α' ή γ' τεταρτημόριο και αρνητικοί, όταν το Μ είναι στο β' ή δ' τεταρτημόριο.

Άρα εφx $= \overline{AT}$, δηλαδή η εφαπτομένη του αριθμού x είναι ίση με την τετμημένη του Τ στον άξονα tt'.
Γι' αυτό ο άξονας tt' λέγεται **άξονας των εφαπτομένων.**



Έστω z'z ο άξονας με αρχή το Β παράλληλος προς τον άξονα των συνημιτόνων. Τότε, όπως και προηγουμένως, αποδεικνύεται ότι, αν Ζ είναι το σημείο τομής του άξονα z'z και της ευθείας ΟΜ (σχ. 15β), θα είναι

$$\sigma\varphi x = \overline{BZ}$$

Δηλαδή η συνεφαπτομένη του αριθμού x είναι ίση με την τετμημένη του Ζ στον άξονα z'z, που λέγεται **άξονας των συνεφαπτομένων.**

(1) Θα θεωρούμε πάντοτε ότι τα μοναδιαία διανύσματα σε παράλληλους άξονες είναι τα ίδια.

Σχέση συν, εφ και ημ, εφ

6.17 Από την $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ (συν x $\neq 0$)

$$\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad \text{ή} \quad \boxed{1 + \varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} \qquad (1)$$

Ομοίως για κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ (ημx $\neq 0$) έχουμε:

$$1 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x} \quad \text{ή} \quad \boxed{1 + \sigma\varphi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x}} \qquad (2)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχθεί ότι

α) $\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$, **β)** $\eta\mu^2 x = \dfrac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$.

α) Από την $1+\varepsilon\varphi^2 x = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ έχουμε : $\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$.

β) Από την $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, αν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$, παίρνουμε :

$$\eta\mu^2 x + \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = 1 \quad \text{ή} \quad \eta\mu^2 x(1+\varepsilon\varphi^2 x) + 1 = 1 + \varepsilon\varphi^2 x \quad \text{ή}$$

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}.$$

2. Αν είναι $\varepsilon\varphi x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **και** $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, **να βρεθούν οι τιμές των άλλων τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο x.**

Είναι $\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{3}{9}} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$,

οπότε, επειδή $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, θα είναι :

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\dfrac{3}{9}}{1+\dfrac{3}{9}} = \frac{\dfrac{3}{9}}{\dfrac{12}{9}} = \frac{1}{4}$$

οπότε, επειδή $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, θα είναι :

$$\eta\mu x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}.$$

3. Να αποδειχθεί ότι

α) $\dfrac{εφθ+σφω}{εφω+σφθ} = \dfrac{εφθ}{εφω}$ β) $εφ^2θ - ημ^2θ = εφ^2θημ^2θ$.

α) Έχουμε $\dfrac{εφθ+σφω}{εφω+σφθ} = \dfrac{εφθ + \dfrac{1}{εφω}}{εφω + \dfrac{1}{εφθ}} = \dfrac{\dfrac{εφθ\,εφω+1}{εφω}}{\dfrac{εφθ\,εφω+1}{εφθ}} = \dfrac{εφθ}{εφω}$.

β) $εφ^2θ - ημ^2θ = \dfrac{ημ^2θ}{συν^2θ} - ημ^2θ = \dfrac{ημ^2θ - ημ^2θ\,συν^2θ}{συν^2θ}$

$= \dfrac{ημ^2θ(1-συν^2θ)}{συν^2θ} = \dfrac{ημ^2θ}{συν^2θ}ημ^2θ = εφ^2θ\,.\,ημ^2θ$.

Ασκήσεις 9, 10, 11, 12, 13.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξου ή γωνίας

6.18 Έστω α ένας πραγματικός αριθμός και $\overset{\frown}{AM}$ το τόξο α ακτινίων στον τριγωνομετρικό κύκλο **C**. Οι αριθμοί συνα και ημα, δηλαδή οι συντεταγμένες του σημείου Μ, λέγονται αντιστοίχως **συνημίτονο** και **ημίτονο** του $\overset{\frown}{AM}$ καθώς και κάθε άλλου **τόξου** ή **γωνίας** α ακτινίων.

Έτσι έχουμε

$$συν\overset{\frown}{AM} = \text{τετμημένη του } M = συνα$$

$$ημ\overset{\frown}{AM} = \text{τεταγμένη του } M = ημα$$

Επίσης οι εφα και σφα λέγονται **εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη** κάθε τόξου ή γωνίας α ακτινίων.

Το ημίτονο, το συνημίτονο, η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη ενός τόξου (γωνίας) ω λέγονται και **τριγωνομετρικοί αριθμοί** του τόξου ή της γωνίας ω.

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 0^0–90^0 δίνονται στο τέλος του βιβλίου.

Εξάλλου, επειδή ένα τόξο (ή γωνία), που η αλγεβρική του τιμή σε μοίρες, βαθμούς ή ακτίνια είναι αντιστοίχως μ,β,α, γράφεται συνήθως $μ^0$, $β^g$, $α^{rad}$ θα είναι π.χ.

$$συνμ^0 = συνβ^g = συνα^{rad} = συνα, \quad εφμ^0 = εφα \text{ κτλ.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

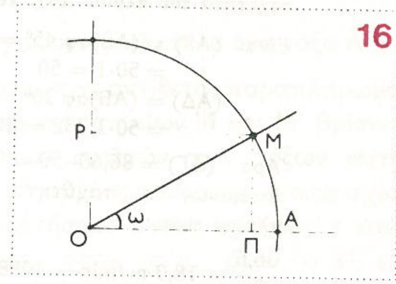
$ημ30^0 = ημ\,\dfrac{π}{6} = \dfrac{1}{2}$, $συν30^0 = συν\,\dfrac{π}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $ημ60^0 = ημ\,\dfrac{π}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$συν60^0 = συν\,\dfrac{π}{3} = \dfrac{1}{2}$, $συν(-270^0) = συν\left(-\dfrac{3π}{2}\right) = 0$, $ημ(-270^0) = 1$,

$εφ(1845^0) = εφ(5\cdot 360^0 + 45^0) = εφ45^0 = 1$.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

6.19 Οι ορισμοί της προηγούμενης παραγράφου όχι μόνο δεν αναιρούν αλλά γενικεύουν τους αντίστοιχους ορισμούς για οξείες γωνίες που είχαμε δώσει στο Γυμνάσιο.



Πράγματι για το συνημίτονο π.χ. μιας οξείας γωνίας ω:

- Σύμφωνα με τον ορισμό που είχαμε δώσει στο Γυμνάσιο, κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΟΠΜ (σχ. 16) και έχουμε:

$$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΟΠ}{ΟΜ}$$

ή, αν ως μονάδα μήκους ληφθεί το τμήμα ΟΜ, συνω = (ΟΠ).

- Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνουμε τώρα, θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο κέντρου Ο, του οποίου αρχή Α είναι το σημείο τομής του με την ευθεία ΟΠ. Τότε, επειδή η γωνία ω και το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{AM}$ έχουν ίδια αλγεβρική τιμή, θα έχουμε:

$$συνω = συν\,\overset{\frown}{AM} = \text{τετμημένη του } M = (ΟΠ)$$

Έτσι, οι δύο αυτοί ορισμοί του συνημιτόνου οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα. Το ίδιο αποδεικνύεται και για τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημω, εφω και σφω.

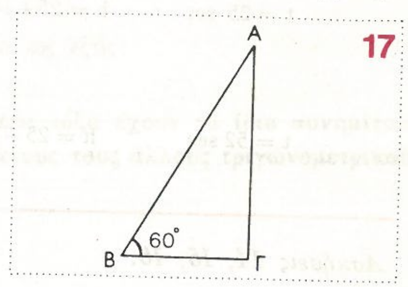
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Γενικότερα για **οποιοδήποτε** τόξο $\overset{\frown}{AM}$, αν (ΟΜ) = 1, είναι (σχ. 16) $\overline{ΟΠ} = συν\overset{\frown}{AM}$ και $\overline{OP} = ημ\overset{\frown}{AM}$. Άρα, αν η ακτίνα του κύκλου έχει μήκος (ΟΜ) = ρ, θα είναι

$$\overline{ΟΠ} = ρσυν\overset{\frown}{AM} \quad \text{και} \quad \overline{OP} = ρημ\overset{\frown}{AM}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ένας παρατηρητής Β (σχ. 17), που βρίσκεται σε απόσταση 10 m από τη βάση Γ ενός πύργου, βλέπει την κορυφή Α του πύργου υπό γωνία 60°. Να βρεθεί το ύψος του πύργου.**



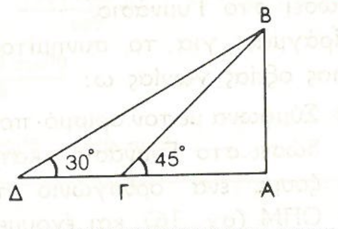
Είναι $εφ\,Β = \dfrac{(ΑΓ)}{(ΒΓ)}$, οπότε :

$(ΑΓ) = (ΒΓ)\,εφ\,Β$.

Άρα $(ΑΓ) = 10\,εφ\,60^0 =$
$= 10 \times \sqrt{3} = 10 \times 1{,}732 =$
$= 17{,}32$ m.

2. **Ένας πλοίαρχος παρατηρεί από το πλοίο του που κατευθύνεται προς την ακτή την κορυφή ενός φάρου ΑΒ, που έχει ύψος 50 m. Αν η γωνία ύψους μεταβάλλεται σε χρόνο 2 min από 30° στο σημείο Δ σε 45° στο Γ ποια είναι η ταχύτητα του πλοίου (σχ. 18);**

18



Είναι $(\text{ΑΓ}) = (\text{ΑΒ})\text{σφ}\,45^\circ = 50\cdot 1 = 50$

$(\text{ΑΔ}) = (\text{ΑΒ})\text{σφ}\,30^\circ = 50\cdot 1{,}732 = 86{,}60$

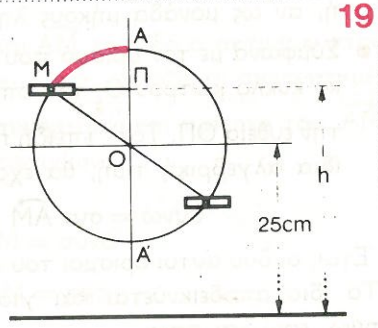
Άρα $(\text{ΔΓ}) = 86{,}60 - 50 = 36{,}60$·

Επομένως η ταχύτητα του πλοίου είναι:

$$\frac{36{,}6}{2} = 18{,}3\ \text{m/min} = 1098\ \text{m/h}$$

3. **Έστω Μ η θέση του ποδιού σε ένα πετάλι ποδηλάτου (σχ. 19) κέντρου Ο με ΟΜ = 10 cm. Αν το ύψος του Ο από το έδαφος είναι 25 cm και το πετάλι, αρχίζοντας από το Α με σταθερή ταχύτητα, συμπληρώνει μια πλήρη περιστροφή σε 4 sec, να βρεθεί το ύψος της θέσεως του ποδιού από το έδαφος, 2, 3, 25, 52 sec μετά τη διέλευσή του από το Α.**

19



Επειδή σε 1 sec το Μ διαγράφει τόξο $\frac{\pi}{2}$, σε t sec θα διαγράφει τόξο $t\cdot\frac{\pi}{2}$.

Εξάλλου το ύψος του πεταλιού θα είναι $h = 25 + \overline{\text{ΟΠ}}$.

Άρα (§ 6.19 Παρατ.) θα είναι:

$$h = 25 + 10\,\text{συν}\,t\,\frac{\pi}{2}.$$

Έτσι μετά από:

$t = 2$ sec $\quad h = 25 + 10\,\text{συν}\,\pi = 25 + 10(-1) = 15$

$t = 3$ sec $\quad h = 25 + 10\,\text{συν}\,3\frac{\pi}{2} = 25 + 10\cdot 0 = 25$

$t = 25$ sec $\quad h = 25 + 10\,\text{συν}25\frac{\pi}{2} = 25 + 10\,\text{συν}\left(12\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 25 + 10\,\text{συν}\frac{\pi}{2} = 25.$

$t = 52$ sec $\quad h = 25 + 10\,\text{συν}\,52\,\frac{\pi}{2} = 25 + 10\cdot\text{συν}(26\pi) = 25 + 10\cdot 1 = 35$

Ασκήσεις 14, 15, 16.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΞΩΝ ΜΕ ΕΙΔΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ Ή ΔΙΑΦΟΡΑ

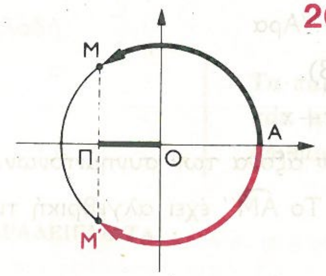
Γενικά

6.20 Στα επόμενα θεωρούμε στον τριγωνομετρικό κύκλο δύο τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΑΜ}'}$ που βρίσκονται σε ειδική σχέση (είναι π.χ. αντίθετα, παραπληρωματικά κτλ.) και με βάση την αμοιβαία θέση των σημείων Μ και Μ' βρίσκουμε αντίστοιχη σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών των τόξων αυτών. Αυτό σημαίνει ότι, αν x και x' είναι οι αλγεβρικές τιμές τους, έχουμε σχέσεις των τιμών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στους αριθμούς x και x' σε ορισμένες αξιοσημείωτες περιπτώσεις, όπως π.χ. όταν ο x' είναι $-x,\ \pi - x,\ \frac{\pi}{2} + x$ κτλ.

Αντίθετα τόξα

6.21 Οι αντίθετοι αριθμοί x και $x' = -x$ είναι αλγεβρικές τιμές των αντίθετων τόξων $\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΑΜ}'}$ (σχ 20).

20



Τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των συνημιτόνων και συνεπώς έχουν (§ 6.4) την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{συν}(-x) = \text{συν}x$$

$$\text{ημ}(-x) = -\text{ημ}x$$

οπότε, αν ορίζεται στο $-x$ η εφαπτομένη, δηλαδή αν $x \in \mathbb{R}_1$, θα είναι

$$\text{εφ}(-x) = \frac{\text{ημ}(-x)}{\text{συν}(-x)} = \frac{-\text{ημ}x}{\text{συν}x} = -\text{εφ}x$$

Ομοίως, αν ορίζεται στο $-x$ η συνεφαπτομένη, δηλαδή αν $x \in \mathbb{R}_2$, θα είναι

$$\text{σφ}(-x) = -\text{σφ}x$$

Τα παραπάνω τα διατυπώνουμε και ως εξής:

> **Τα αντίθετα τόξα έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

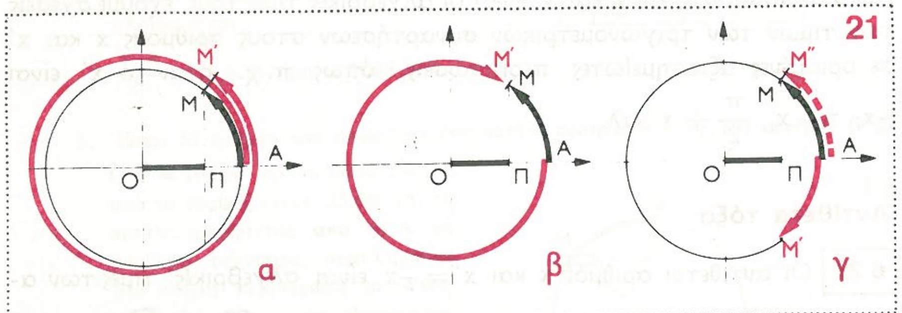
$$συν\left(-\frac{\pi}{3}\right)=συν\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \qquad ημ\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-ημ\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$εφ(-45^0)=-εφ45^0=-1$$

Τόξα με το ίδιο συνημίτονο

6.22 Έστω $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{AM'}$ δύο τόξα με το ίδιο συνημίτονο και x και x' οι αλγεβρικές τους τιμές. Επειδή είναι

$$συνx = συνx'$$



τα πέρατα Μ και Μ' έχουν ίδια τετμημένη. Άρα

- ή συμπίπτουν (σχ. 21α, β), οπότε (§ 6.8)

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x'$$

- ή είναι συμμετρικά (σχ 21γ) ως προς τον άξονα των συνημιτόνων.

Έστω $\overset{\frown}{AM''}$ το αντίθετο του τόξου $\overset{\frown}{AM'}$. Το $\overset{\frown}{AM''}$ έχει αλγεβρική τιμή $-x'$ και πέρας το σημείο Μ. Συνεπώς

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi - x'$$

Ώστε $συνx = συνx' \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi + x'$ ή $x = 2k\pi - x'$.

Αλλά και η αντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει αμέσως από την παρατήρηση 2 της § 6.10, αφού

$$συν(2k\pi + x') = συνx' \quad \text{και} \quad συν(2k\pi - x') = συν(-x) = συνx'.$$

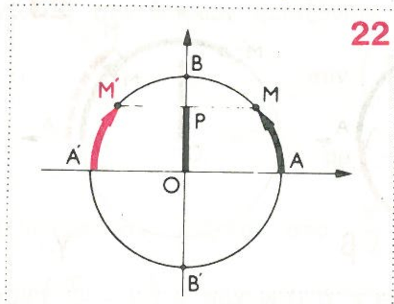
Άρα έχουμε τελικά την ισοδυναμία

$$\boxed{συν\,x = συν\,x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x' \quad ή \quad x = 2k\pi - x'}$$

Παραπληρωματικά τόξα

6.23 Οι αριθμοί x και π−x είναι αλγεβρικές τιμές των παραπληρωματικών τόξων $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{AM'}$ αντιστοίχως. Επειδή όμως $\pi - x = \pi + (-x)$, το $\overset{\frown}{AM'}$

θα είναι άθροισμα (§ 6.6 Ιδιότ.1) του ημικυκλίου $\overset{\frown}{ABA'}$ και ενός τόξου $\overset{\frown}{A'M'}$



αντίθετου του $\overset{\frown}{AM}$ (σχ. 22). Συνεπώς τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των ημιτόνων, έχουν δηλαδή (§ 6.4) ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.

Άρα θα είναι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{ημ(\pi - x) = ημx}$$

$$συν(\pi - x) = -συνx.$$

Επομένως, αν ορίζεται στο π−x η εφαπτομένη, δηλαδή αν $x \in \mathbb{R}_1$, θα είναι:

$$εφ(\pi - x) = \frac{ημ(\pi - x)}{συν(\pi - x)} = \frac{ημx}{-συνx} = -εφx$$

Ομοίως, για κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ θα είναι:

$$σφ(\pi - x) = -σφx.$$

Δηλαδή:

> **Τα παραπληρωματικά τόξα έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$ημ\frac{2\pi}{3} = ημ\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = ημ\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν\,150^0 = συν(180^0 - 30^0) = -συν30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

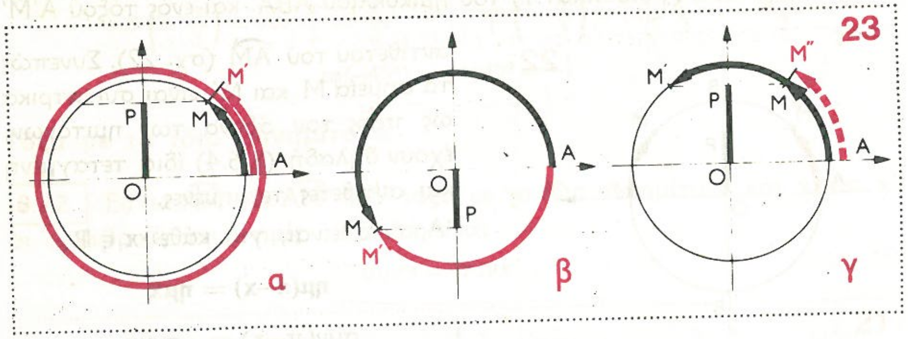
$$εφ\frac{3\pi}{4} = εφ\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\,εφ\frac{\pi}{4} = -1.$$

Τόξα με το ίδιο ημίτονο

6.24 Έστω $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{AM'}$ δύο τόξα με το ίδιο ημίτονο και x και x' οι αλγεβρικές τιμές τους. Επειδή είναι

$$ημx = ημx'$$

τα πέρατα Μ και Μ' έχουν την ίδια τεταγμένη. Άρα



- ή συμπίπτουν (σχ. 23α, β), οπότε (§ 6.8),

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x'$$

- ή είναι συμμετρικά (σχ. 23γ) ως προς τον άξονα των ημιτόνων.

Έστω $\overset{\frown}{AM''}$ το παραπληρωματικό του τόξου $\overset{\frown}{AM'}$. Το $\overset{\frown}{AM''}$ έχει αλγεβρική τιμή $\pi - x'$ και πέρας το Μ. Συνεπώς

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + \pi - x' = (2k+1)\pi - x'$$

Ώστε $\quad \eta\mu x = \eta\mu x' \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \ x = 2k\pi + x' \ \text{ή} \ x = (2k+1)\pi - x'$

Αλλά και η αντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει αμέσως από την παρατήρηση 2 της § 6.10, αφού

$$\eta\mu(2k\pi + x') = \eta\mu x' \ \text{καί} \ \eta\mu[(2k+1)\pi - x'] = \eta\mu(\pi - x') = \eta\mu x'$$

Άρα έχουμε τελικά την ισοδυναμία:

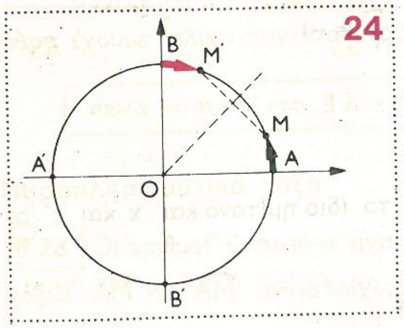
$$\boxed{\eta\mu\, x = \eta\mu\, x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x' \ \text{ή} \ x = (2k+1)\pi - x'}$$

Συμπληρωματικά τόξα

6.25 Οι αριθμοί x και $\frac{\pi}{2} - x$ είναι αλγεβρικές τιμές αντιστοίχως των συμπληρωματικών τόξων $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{AM'}$ (σχ. 24). Επειδή όμως

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + (-x),$$

το τόξο $\overset{\frown}{AM'}$ είναι άθροισμα (§ 6.6 Ιδιότ. 1) του τεταρτοκυκλίου $\overset{\frown}{AB}$ και του τόξου $\overset{\frown}{BM'}$, που είναι αντίθετο προς το $\overset{\frown}{AM}$.



Επομένως τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας των θετικών ημιαξόνων. Άρα (§ 6.4) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$$

Συνεπώς, αν ορίζεται στο $\frac{\pi}{2} - x$ η εφαπτομένη, δηλαδή αν είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x \neq 0$ ή $x \in \mathbb{R}_2$, τότε θα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \sigma\varphi x$$

Ομοίως, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ είναι: $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi x$.

Δηλαδή:

> **Στα συμπληρωματικά τόξα, το ημίτονο του καθενός ισούται με το συνημίτονο του άλλου και η εφαπτομένη του καθενός ισούται με τη συνεφαπτομένη του άλλου**

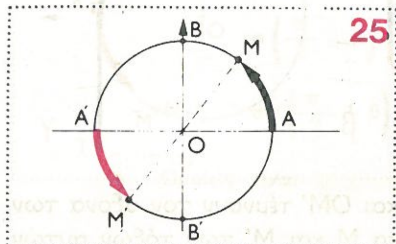
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\eta\mu\frac{\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\, 72^\circ = \varepsilon\varphi(90^\circ - 18^\circ) = \sigma\varphi 18^\circ > 0.$$

Τόξα που έχουν διαφορά π

6.26 Οι αριθμοί x και $\pi + x$ είναι αλγεβρικές τιμές αντιστοίχως των τόξων $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{AM'}$ (σχ. 25). Τό $\overset{\frown}{AM'}$ είναι άθροισμα του ημικυκλίου $\overset{\frown}{ABA'}$ και του τόξου $\overset{\frown}{A'M'}$ που είναι τόξο ίσο προς το $\overset{\frown}{AM}$. Επομένως τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων και επομένως (§ 6.4) έχουν αντίθετες τις ομώνυμες συντεταγμένες.



Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\eta\mu(\pi+x) = -\eta\mu x$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi+x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Οπότε, αν ορίζεται η εφαπτομένη στο $\pi+x$, δηλαδή αν

$$\sigma\upsilon\nu(\pi+x) = -\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \quad \acute{\eta} \quad x \in \mathbb{R}_1$$

θα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\pi+x) = \frac{\eta\mu(\pi+x)}{\sigma\upsilon\nu(\pi+x)} = \frac{-\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi x$$

Ομοίως, για κάθε $x \in \mathbb{R}_2$, είναι

$$\sigma\varphi(\pi+x) = \sigma\varphi x$$

Δηλαδή:

Τα τόξα που έχουν διαφορά π έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

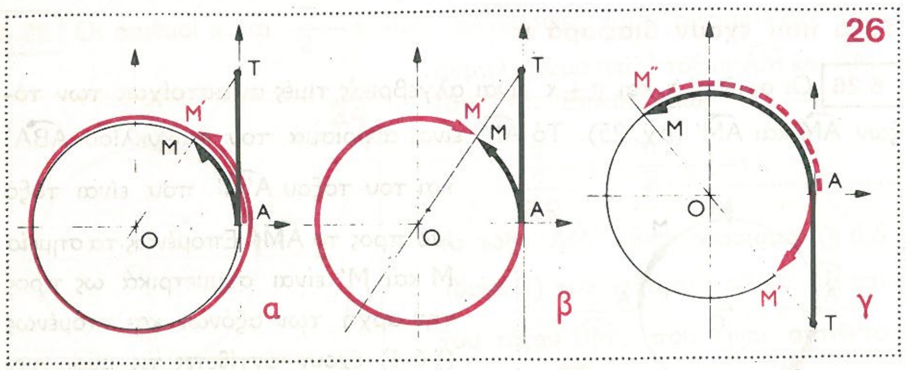
$$\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\ (225^0) = \varepsilon\varphi\ (180^0 + 45^0) = \varepsilon\varphi\ 45^0 = 1.$$

Τόξα με την ίδια εφαπτομένη ή συνεφαπτομένη

6.27 Έστω $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{AM'}$ δύο τόξα με την ίδια εφαπτομένη (ή συνεφαπτομένη) και x,x′ οι αλγεβρικές τους τιμές.

Επειδή είναι $\qquad \varepsilon\varphi x' = \varepsilon\varphi x$



τα σημεία Τ, Τ′, στα οποία οι ευθείες ΟΜ και ΟΜ′ τέμνουν τον άξονα των εφαπτομένων, συμπίπτουν. Άρα τα πέρατα Μ και Μ′ των τόξων αυτών

- ή συμπίπτουν (σχ. 26α, β), οπότε (§ 6.8)

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x' \qquad (1)$$

- ή το Μ′ είναι συμμετρικό του Μ ως προς την αρχή των αξόνων.

Έστω $\overset{\frown}{AM''}$ το τόξο $\overset{\frown}{AM'} + \overset{\frown}{ABA'}$. Το τόξο $\overset{\frown}{AM''}$ έχει αλγεβρική τιμή $\pi+x'$ και πέρας το Μ. Άρα

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + (\pi+x') = (2k+1)\pi + x' \qquad (2)$$

Η (1) και (2) συνοψίζονται στην: $\exists\, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad x = \lambda\pi + x'$

Ώστε $\quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x' \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad x = \lambda\pi + x'$

Αλλά και η αντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει από την παρατήρηση 2 της § 6.10 αφού

$$\varepsilon\varphi\ (\lambda\pi+x') = \begin{cases} \varepsilon\varphi(2k\pi+x') = \varepsilon\varphi x', & \text{αν } \lambda \text{ άρτιος} \\ \varepsilon\varphi[(2k+1)\pi+x'] = \varepsilon\varphi(\pi+x') = \varepsilon\varphi x', & \text{αν } \lambda \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Ώστε τελικά έχουμε την ισοδυναμία:

$$\boxed{\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = k\pi + x'}$$

Ομοίως για την συνεφαπτομένη έχουμε:

$$\boxed{\sigma\varphi x = \sigma\varphi x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = k\pi + x'}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξων που έχουν διαφορά $\frac{\pi}{2}$.

Έχουμε $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\ \theta$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \sigma\varphi(-\theta) = -\sigma\varphi\theta$$

και $\quad \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\varepsilon\varphi\theta$

Ομοίως είναι π. χ. $\quad \varepsilon\varphi 120^0 = \varepsilon\varphi(90^0 + 30^0) = -\sigma\varphi\ 30^0 = -\sqrt{3}$.

2. **Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξων που έχουν άθροισμα $\frac{3\pi}{2}$.**

$$\text{Έχουμε}\quad ημ\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = ημ\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] = -ημ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -συν\,\theta$$

$$συν\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = συν\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] = -συν\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -ημ\,\theta$$

$$εφ\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = εφ\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] = εφ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = σφ\,\theta.$$

$$\text{και}\quad σφ\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = = εφ\,\theta.$$

Ομοίως είναι π.χ. $ημ\,210^\circ = ημ\,(270^\circ-60^\circ) = -συν\,60^\circ = -\frac{1}{2}$.

3. **Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξων που έχουν διαφορά $\frac{3\pi}{2}$.**

$$\text{Έχουμε}\quad ημ\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = ημ\left[\frac{3\pi}{2}-(-\theta)\right] = -συν(-\theta) = -συν\,\theta$$

$$συν\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = συν\left[\frac{3\pi}{2}-(-\theta)\right] = -ημ(-\theta) = ημ\,\theta$$

$$εφ\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = εφ\left[\frac{3\pi}{2}-(-\theta)\right] = σφ\,(-\theta) = -σφ\,\theta$$

$$\text{και}\quad σφ\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -εφ\theta.$$

Ομοίως είναι π.χ. $συν\,300^\circ = συν\,(270^\circ+30^\circ) = ημ\,30^\circ = \frac{1}{2}$.

Σημείωση

Για την απομνημόνευση των σχέσεων των προηγούμενων εφαρμογών 1, 2, 3 καθώς και των § 6.21, 6.23, 6.25 και 6.26 χρησιμοποιείται ο επόμενος μνημονικός κανόνας:

Όταν δύο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά 0, π, 2π έχουν ομώνυμους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ενώ όταν έχουν άθροισμα ή διαφορά $\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$ οι τριγωνομετρικοί τους αριθμοί εναλλάσσονται (ημ με συν και εφ με σφ). Το πρόσημο, για το τόξο που έχει μορφή $\lambda\pi\pm\theta$ ή $\lambda\frac{\pi}{2}\pm\theta$, καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει, αν υποτεθεί ότι $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

4. **Για τις συναρτήσεις**

f με $f(x) = 2\,συν^2x+3\,συν\,x-1$ και

g με $g(x) = 5\,ημ^2x-2\,ημx+3$

να αποδειχθεί ότι $f(x) = f(-x)$ και $g(x) = g(\pi-x)$.

$$\begin{aligned}\text{Είναι}\quad f(-x) &= 2\,συν^2(-x)+3\,συν\,(-x)-1\\ &= 2\,συν^2x+3\,συν\,x-1\\ &= f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g\,(\pi-x) &= 2\,ημ^2(\pi-x)-2ημ(\pi-x)+3\\ &= 2ημ^2x-2ημx+3\\ &= g(x)\end{aligned}$$

5. **Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις**

$$A = \frac{2ημ(\pi-\theta)+συν\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-2ημ(2\pi-\theta)}{ημ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-3συν\,(\pi-\theta)+συν(2\pi-\theta)}$$

$$B = \frac{εφ(90^\circ+\theta)συν(270^\circ+\theta)ημ(180^\circ+\theta)}{ημ(180^\circ-\theta)συν(360^\circ+\theta)σφ(270^\circ-\theta)}$$

$$\text{Είναι:}\quad A = \frac{2ημ\theta+ημ\theta-2(-ημ\theta)}{συν\,\theta-3(-συν\theta)+συν\,\theta} = \frac{5\,ημ\,\theta}{5\,συν\theta} = εφ\,\theta.$$

$$B = \frac{σφ(-\theta)[-συν(90^\circ+\theta)](-ημ\theta)}{ημ\,\theta\,συν\,\theta\,σφ(90^\circ-\theta)} = \frac{-σφ\theta\,ημ\theta(-ημ\theta)}{ημ\,\theta\,συν\theta\,εφ\theta}$$

$$= \frac{σφ\,\theta\,ημ\theta\,ημ\,\theta}{ημ\theta\,συν\theta\,εφ\theta} = \frac{σφ\theta}{εφ\theta}\cdot\frac{ημ\theta}{συν\theta} = \frac{σφ\theta}{εφ\theta}\cdot εφ\theta = σφ\theta.$$

Ασκήσεις 17, 18, 19, 20.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έννοια της τριγωνομετρικής εξισώσεως

6.28 Αν μια εξίσωση περιλαμβάνει τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων εξαρτώμενες από τους αγνώστους, τότε η εξίσωση αυτή λέγεται **τριγωνομετρική**.

Π.χ. τριγωνομετρικές είναι οι εξισώσεις

$$συνx+συν2x+συν\,3x = 0$$
$$ημ\,(συν\,x) = 1$$
$$ημ^2x-συν\,x = 1$$
$$ημ\,x = συν\,2x$$
$$εφ\,x = εφ\,(\pi-x).$$

Η εξίσωση $x^2-2(συναημα)x+ημ^2\alpha = 0$, με άγνωστο x, δεν είναι τριγωνομετρική.

Είναι φανερό ότι οι μορφές των τριγωνομετρικών εξισώσεων ποικίλουν. Η επίλυση όμως πολλών από αυτές ανάγεται στην επίλυση των απλών μορφών που εξετάζονται στα επόμενα.

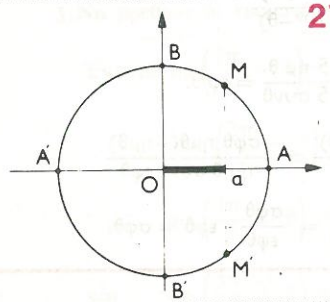
Η εξίσωση συνx = α

6.29 Είναι προφανές ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση, όταν $\alpha > 1$ ή $\alpha < -1$, δηλαδή όταν $|\alpha| > 1$, επειδή (§ 6.10, Παρατ. 1)

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad -1 \leqslant \text{συν}x \leqslant 1.$$

Υποθέτουμε λοιπόν $|\alpha| \leqslant 1$.

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν σημεία Μ και Μ′ του τριγωνομετρικού κύκλου με τετμημένη α (σχ. 27).



27

Οι ρίζες της εξισώσεως είναι προφανώς οι αλγεβρικές τιμές όλων των τόξων $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{AM'}$. Αν θ είναι μια από αυτές, δηλαδή αν $\text{συν}\theta = \alpha$, τότε η εξίσωση $\text{συν}x = \alpha$ γράφεται

$$\text{συν}x = \text{συν}\,\theta$$

και σύμφωνα με την § 6.22, όλες οι ρίζες της δίνονται από τους τύπους

$$x = 2k\pi \pm \theta, \quad \text{για τις διάφορες τιμές του } k \in \mathbb{Z}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για την εξίσωση $2\text{συν}x - \sqrt{2} = 0$ έχουμε $\text{συν}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και επειδή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{συν}\frac{\pi}{4}$, η εξίσωση γίνεται $\text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{4}$. Αυτή έχει λύσεις τις

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Η εξίσωση ημx = α

6.30 Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση αυτή έχει λύση **μόνο** αν $|\alpha| \leqslant 1$.

Στην περίπτωση αυτή έστω θ μια ρίζα της. Επειδή $\text{ημ}\theta = \alpha$, η εξίσωση $\text{ημ}x = \alpha$, γράφεται

$$\text{ημ}x = \text{ημ}\theta$$

και σύμφωνα με την § 6.24 όλες οι ρίζες της εξισώσεως δίνονται από τους τύπους

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= 2k\pi + \theta \\ x &= (2k+1)\pi - \theta \end{aligned}\right\} \text{ για } k \in \mathbb{Z}.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για την εξίσωση $2\,\text{ημ}x - 1 = 0$ έχουμε $\text{ημ}x = \frac{1}{2}$. Είναι όμως $\frac{1}{2} = \text{ημ}\frac{\pi}{6}$.

Άρα $\text{ημ}x = \text{ημ}\frac{\pi}{6}$, οπότε

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{και}$$

$$x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Η εξίσωση εφx = α

6.31 Αν θ είναι ένας αριθμός τέτοιος, ώστε $\text{εφ}\theta = \alpha$, η εξίσωση $\text{εφ}x = \alpha$ γράφεται

$$\text{εφ}x = \text{εφ}\theta$$

οπότε, σύμφωνα με την § 6.27, όλες οι ρίζες της εξισώσεως δίνονται από τον τύπο

$$\boxed{x = k\pi + \theta, \quad \text{γιά } k \in \mathbb{Z}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για την εξίσωση $\text{εφ}\,x - \sqrt{3} = 0$ έχουμε $\text{εφ}x = \sqrt{3}$ και επειδή $\sqrt{3} = \text{εφ}\frac{\pi}{3}$, είναι $\text{εφ}x = \text{εφ}\frac{\pi}{3}$, οπότε οι λύσεις είναι

$$x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Σημείωση

Η λύση της εξισώσεως $\text{σφ}x = \beta$.

- αν $\beta \neq 0$, ανάγεται στη λύση της $\frac{1}{\text{εφ}x} = \beta$ ή $\text{εφ}x = \frac{1}{\beta}$
- αν $\beta = 0$, λύσεις της $\text{σφ}x = \beta$ είναι οι αλγεβρικές τιμές όλων των τόξων που λήγουν στο Β ή Β′, δηλαδή $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Π.χ. η εξίσωση $\text{σφ}x = 1$ είναι ισοδύναμη με την $\text{εφ}x = 1$.

Οι λύσεις της είναι λοιπόν

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $(2\text{ημ}x+1)^2 - 4(1-\text{ημ}x)(2\,\text{ημ}x+1) = 0$

β) $\text{συν}\,2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ με $x \in [0, 2\pi]$.

α) Είναι

$$(2\eta\mu x+1)^2-4(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x+1)=0 \Leftrightarrow (2\eta\mu x+1)(2\eta\mu x+1-4+4\eta\mu x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\eta\mu x+1)(6\eta\mu x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\eta\mu x+1 = 0) \text{ ή } (6\eta\mu x-3) = 0)$$
$$\Leftrightarrow \left(\eta\mu x = -\frac{1}{2}\right). \text{ ή } \left(\eta\mu x = \frac{1}{2}\right)$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε:

$\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Άρα $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$

ή $x = (2k\pi+1)\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

Άρα $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

ή $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

β) Είναι

$\sigma\upsilon\nu 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$.

Άρα $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ καί $x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Επειδή $x \in [0, 2\pi]$ θα έχουμε $0 \leqslant k\pi \pm \frac{\pi}{8} \leqslant 2\pi$.

- Από την $0 \leqslant k\pi + \frac{\pi}{8} \leqslant 2\pi$ είναι $0 \leqslant k + \frac{1}{8} \leqslant 2$ ή $-\frac{1}{8} \leqslant k \leqslant \frac{15}{8}$

  άρα $k = 0$ ή 1. Για $k = 0$ έχουμε $x = \frac{\pi}{8}$ και

  για $k = 1$ έχουμε $x = \pi + \frac{\pi}{8}$

- Από την $0 \leqslant k\pi - \frac{\pi}{8} \leqslant 2\pi$ είναι $0 \leqslant k - \frac{1}{8} \leqslant 2$ ή $\frac{1}{8} \leqslant k \leqslant \frac{17}{8}$

  άρα $k=1$ ή 2.

  Για $k = 1$ έχουμε $x = \pi - \frac{\pi}{8}$ καί

  για $k = 2$ έχουμε $x = 2\pi - \frac{\pi}{8}$

Άρα οι λύσεις στο $[0, 2\pi]$ είναι $\frac{\pi}{8}$, $\pi + \frac{\pi}{8}$, $\pi - \frac{\pi}{8}$, $2\pi - \frac{\pi}{8}$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\, x$

β) $\varepsilon\varphi^2 x - \sigma\varphi^2 x = 0$

α) Είναι:

$\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\, x \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Άρα $$2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \qquad (1)$$

ή $$2x + \frac{\pi}{6} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} + x \qquad (2)$$

Από τη (1) έχουμε $3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ή $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$.

Από τη (2) έχουμε $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$.

β) Είναι

$$\varepsilon\varphi^2 x - \sigma\varphi^2 x = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x)(\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x = 0) \text{ ή } (\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = 0)$$
$$\Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi x) \text{ ή } (\varepsilon\varphi x = -\sigma\varphi x)$$

Από την $\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi x$ έχουμε $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Άρα

$x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x$ ή $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Από την $\varepsilon\varphi x = -\sigma\varphi x$ έχουμε $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Άρα

$x = k\pi + \frac{\pi}{2} + x$ ή $0x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, που είναι αδύνατη.

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\sigma\upsilon\nu\, x^0 = \frac{1}{2}, \quad \eta\mu\, x^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{καί} \quad \varepsilon\varphi\, x^0 = -\sqrt{3}.$$

Επειδή $\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\, 60^0$, οι λύσεις της $\sigma\upsilon\nu\, x^0 = \frac{1}{2}$ δίνονται από τους τύπους $x^0 = k \cdot 360^0 \pm 60^0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ομοίως οι λύσεις της $\eta\mu x^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\, 45^0$ δίνονται από τους τύπους

$$x^0 = k \cdot 360^0 + 45^0, \quad x^0 = (2k+1)180^0 - 45^0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

και οι λύσεις της $\varepsilon\varphi\, x^0 = -\sqrt{3} = \varepsilon\varphi(-30^0)$ είναι $x^0 = k \cdot 180^0 - 30^0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ασκήσεις 21, 22, 23.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιων αριθμών οι εικόνες στον τριγωνομετρικό κύκλο σχηματίζουν:
   α) κανονικό εξάγωνο **β)** ισόπλευρο τρίγωνο.
2. Ποιων αριθμών οι εικόνες στον τριγωνομετρικό κύκλο ορίζουν χορδές παράλληλες **α)** προς τη διάμετρο ΑΑ' **β)** προς τη διάμετρο ΒΒ'.
3. Να βρείτε τις εικόνες των αριθμών $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, στον τριγωνομετρικό κύκλο. Τι παρατηρείτε;
4. Αν $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ και το αντίστοιχο τόξο έχει πέρας $M\left(-\frac{5}{13}, y\right)$, να βρεθεί ο y και η αριθμητική τιμή της παραστάσεως
   $$A = \frac{(2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x) - (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)}{2\eta\mu x\; \sigma\upsilon\nu x}$$

5. Να αποδειχθεί ότι $ημ\dfrac{23π}{5} = ημ\dfrac{3π}{5}$, $συν\dfrac{-28π}{5} = συν\dfrac{2π}{5}$, $ημ\left(-\dfrac{30π}{7}\right) = ημ\dfrac{12π}{7}$

6. Να αποδειχθεί ότι

α) $ημ^6x + συν^6x = 1 - 3\,ημ^2x\,συν^2x$

β) $ημ^4x - συν^4x = 1 - 2συν^2x$

γ) $ημ^2xσυν^2φ - ημ^2φσυν^2x = ημ^2x - ημ^2φ$

δ) $\dfrac{ημx}{1+συνx} + \dfrac{1+συνx}{ημx} = \dfrac{2}{ημx}$.

7. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος, ώστε $ημx = 0$ **και** $συνx = 0$.

8. Οι αριθμοί $\dfrac{12}{13}$ και $-\dfrac{5}{13}$ είναι δυνατόν να είναι τιμές στο ίδιο x των συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο αντιστοίχως;
Σε ποιο τεταρτημόριο καταλήγει το αντίστοιχο τόξο;

9. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστάσεως

$$A = \frac{ημx + συνx}{εφx + σφx}, \quad \text{όταν } x = \frac{π}{3},\ \frac{π}{4},\ \frac{π}{6}.$$

10. Να βρεθούν οι $εφ\left(-\dfrac{23π}{6}\right)$ και $σφ\dfrac{17π}{4}$.

11. Να υπολογιστεί η τιμή της παραστάσεως $A = \dfrac{ημ\dfrac{13π}{6} + συν\left(-\dfrac{15π}{4}\right)}{εφ\dfrac{19π}{3} + σφ\dfrac{13π}{6}}$

12. Αν $ημx = \dfrac{12}{15}$ και $0 < x < \dfrac{π}{2}$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παραστάσεως

$$A = \frac{2εφx - 3συνx + 2σφx}{5ημx}.$$

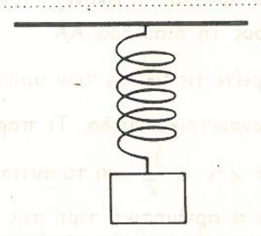
13. Να αποδειχθεί ότι

α) $σφx + εφx = \dfrac{1}{ημxσυνx}$ $\quad (ημx\,συνx \neq 0)$

β) $ημxσυνx(1+εφx)(1+σφx) = 1 + 2ημxσυνx$.

14. Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Το ύψος του h cm σε χρόνο t sec δίνεται από τον τύπο:

$$h = 50 + 20\,ημ\,t\frac{π}{4}.$$



28

Να βρεθεί

α) Το ύψος του σε 1, 2, 4, 6, 9 sec

β) Το μέγιστο και ελάχιστο ύψος.

15. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται το ένα ανατολικά και το άλλο δυτικά ενός πύργου ΓΔ. Αν οι γωνίες ύψους του Δ από τα σημεία Α και Β είναι αντιστοίχως α και β, να αποδειχθεί ότι το ύψος του πύργου είναι:

$$υ = \frac{(ΑΒ)}{σφ\,α + σφ\,β}.$$

16. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A = 120^0$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $εφ\,B = \dfrac{β\sqrt{3}}{β+2γ}$ και **β)** $α^2 = β^2 + γ^2 + βγ$.

17. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ:

α) $ημΑ = ημ(Β+Γ)$ $\qquad συνΑ = -συν(Β+Γ)$

$ημ\dfrac{Α}{2} = συν\dfrac{Β+Γ}{2}$ $\qquad συν\dfrac{Α}{2} = ημ\dfrac{Β+Γ}{2}$

β) Το εμβαδό του τριγώνου ισούται με $\dfrac{1}{2}αβ\,ημΓ$

γ) Αν $Α = 90^0$, τότε $ημ^2Β + ημ^2Γ = 1$.

18. Για τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f \text{ με } f(x) &= 2συν^2x + 3ημx\,συνx + 5ημ^2x + 1 \\ g \text{ με } g(x) &= 2εφx - 3σφx + 2 \quad \text{και} \\ φ \text{ με } φ(x) &= 4εφx + 4σφx - 1 \end{aligned}$$

να αποδειχθεί ότι $f(x) = f(π+x)$, $g(x) = g(π+x)$

$$φ(x) = φ\left(\frac{π}{2} - x\right) = φ(π+x) = φ\left(\frac{3π}{2} - x\right).$$

19. Να δειχθεί ότι:

α) $ημ(270^0+θ) + ημ(180^0+θ)) + ημ(90^0+θ) + ημ\,θ = 0$

β) $εφ\,1^0\,εφ\,2^0\,εφ\,3^0 \ldots εφ\,89^0 = 1$

γ) Αν $-90^0 < θ < 90^0$, τότε $ημ(180^0-θ)σφ(90^0-θ) > 2 - 2συν\,θ$.

20. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \frac{εφ(π-θ)\,συν(2π+θ)\,συν\left(\dfrac{π}{2}+θ\right)}{ημ(π+θ)\,συν(-θ)\,σφ\left(\dfrac{π}{2}-θ\right)}$$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $ημ^2 2x - ημ^2\left(x - \frac{π}{3}\right) = 0$

β) $συν^2 3x + ημ^2\left(x + \frac{π}{4}\right) = 1.$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $εφ\left(2x + \frac{π}{4}\right) = σφx$

β) $ημ5x = συν\left(x + \frac{π}{3}\right).$

23. Να λυθούν στο διάστημα $[0, 2π]$ οι εξισώσεις:

α) $2ημ3x = \sqrt{2}$

β) $3εφ\,2x = \sqrt{3}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. α) Οι εικόνες των αριθμών $0, \frac{π}{3}, \frac{2π}{3}, π, \frac{4π}{3}, \frac{5π}{3}$ στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου.

β) Οι εικόνες των αριθμών $0, \frac{2π}{3}, \frac{4π}{3}$ στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

2. α) Οι εικόνες των αριθμών $2kπ+x$ καί $(2k+1)π-x$, $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουν χορδές παράλληλες προς τη διάμετρο ΑΑ'.

β) Οι εικόνες των αριθμών $2kπ+x$ και $2kπ-x$, $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουν χορδές παράλληλες προς τη διάμετρο ΒΒ'.

3. Οι εικόνες των αριθμών $\frac{5π}{6}$ και $-\frac{π}{6}$ καθώς και των $\frac{11π}{6}$ και $\frac{5π}{6}$ είναι σημεία αντιδιαμετρικά. Οι εικόνες των αριθμών $\frac{5π}{6}$ και $-\frac{7π}{6}$ συμπίπτουν κτλ.

4. Είναι $συν\,x = -\frac{5}{13}$, $y = ημx = -\frac{12}{13}$ και $A = -\frac{59}{30}$

5. α) Είναι $\frac{23π}{5} = 4π + \frac{3π}{5}$.

β) Είναι $-\frac{28π}{5} = -6π + \frac{2π}{5}$.

γ) Είναι $-\frac{30π}{7} = -6π + \frac{12π}{7}$.

6. α) Το $ημ^6x + συν^6x$ να γραφεί $(ημ^2x)^3 + (συν^2x)^3$ και να γίνει χρήση της ταυτότητας $α^3+β^3 = (α+β)^3 - 3αβ(α+β)$ και της $ημ^2x + συν^2x = 1$.

β) Παρατηρήστε ότι το πρώτο μέλος της ταυτότητας είναι διαφορά τετραγώνων.

γ) Το $συν^2φ$ να γραφεί $1-ημ^2φ$, το $συν^2x$ να γραφεί $1-ημ^2x$ και να γίνουν οι πράξεις στο α' μέλος της ισότητας.

δ) Κάνουμε τις πράξεις στο πρώτο μέλος της ισότητας και καταλήγουμε στο δεύτερο.

7. Αν $ημx = 0$ **και** $συνx = 0$, τότε $ημ^2x = 0$ **και** $συν^2 x = 0$.

8. Οι αριθμοί $\frac{12}{13}$ καί $\frac{-5}{13}$ μπορεί να είναι τιμές των συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο στον ίδιο αριθμό x.

9. Για $x = \frac{π}{3}$, βρίσκουμε $A = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{8}$

Για $x = \frac{π}{4}$, βρίσκουμε $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Για $x = \frac{π}{6}$, βρίσκουμε $A = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{8}$

10. Ο αριθμός $-\frac{23π}{6}$ να γραφεί $-\frac{24π}{6} + \frac{π}{6}$, ενώ ο αριθμός $\frac{17π}{4}$ να γραφεί $\frac{16π}{4} + \frac{π}{4}$.

11. Είναι $ημ\frac{13π}{6} = ημ\left(\frac{12π}{6} + \frac{π}{6}\right) = ημ\left(2π + \frac{π}{6}\right) = ημ\frac{π}{6} = \frac{1}{2}$ κτλ.

Βρίσκουμε $A = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{12}$.

12. Είναι $συνx = \frac{9}{15}$, $εφx = \frac{4}{3}$, $σφx = \frac{3}{4}$ και $A = \frac{71}{120}$.

13. α) Κάνουμε τις πράξεις στο πρώτο μέλος της ισότητας και καταλήγουμε στο δεύτερο.

β) Ομοίως.

14. α) Το ύψος του σώματος σε 1, 2, 4, 6, 9 sec είναι αντιστοίχως 64,14 cm, 70 cm, 50 cm, 30 cm, 64,14 cm.

β) Το μέγιστο ύψος είναι 70 cm και το ελάχιστο 50 cm.

15. Παρατηρήστε ότι $υ = (ΑΓ)\,εφ\,α = (ΒΓ)\,εφ\,β$.

16. Αν Δ είναι η προβολή του Γ στην ΑΒ, τότε $εφ\,Β = \frac{(ΓΔ)}{(ΒΔ)}$.

17. α) Οι γωνίες Α και Β+Γ είναι παραπληρωματικές.

β) Το ύψος $υ_α$ ισούται με $β\,ημΓ$.

γ) Οι γωνίες Β και Γ είναι συμπληρωματικές.

18. Είναι $f(x+π) = 2συν^2(x+π)+3ημ(x+π)συν(x+π)+5ημ^2(x+π)+1$ κτλ.

$g(x+π) = 2εφ(x+π)-3σφ(x+π)+2$ κτλ.

$φ\left(\frac{π}{2}-x\right) = 4\,εφ\left(\frac{π}{2}-x\right)+4\,σφ\left(\frac{π}{2}-x\right)+1$ κτλ.

$φ\left(\frac{3π}{2}-x\right) = 4\,εφ\left(\frac{3π}{2}-x\right)+4\,σφ\left(\frac{3π}{2}-x\right)-1$ κτλ.

19. α) Είναι $ημ(270^\circ+θ) = -συν\,θ$, $ημ(180^\circ+θ) = -ημθ$ κτλ.

β) Παρατηρήστε ότι τα τόξα 1° και 89°, 2° και 88° κ.ο.κ. είναι συμπληρωματικά.

γ) Επειδή $συν\,θ > 0$, η ανισότητα είναι ισοδύναμη της $(1-συν\,θ)^2 > 0$.

20. Βρίσκουμε $A = -1$.

21. α) $ημ^2 2x-ημ^2\left(x-\frac{π}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[ημ2x+ημ\left(x-\frac{π}{3}\right)\right]\left[ημ2x-ημ\left(x-\frac{π}{3}\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow ημ2x+ημ\left(x-\frac{π}{3}\right)=0$ ή $ημ2x-ημ\left(x-\frac{π}{3}\right)=0$ κτλ.

β) Ομοίως.

22. α) $εφ\left(2x+\frac{π}{4}\right) = σφx \Leftrightarrow εφ\left(2x+\frac{π}{4}\right) = εφ\left(\frac{π}{2}-x\right)$ κτλ.

β) $ημ5x = συν\left(x+\frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow ημ5x = ημ\left(\frac{π}{2}-x-\frac{π}{3}\right)$ κτλ.

23. α) Γράφεται ισοδύναμα $ημ3x = ημ\frac{π}{4}$. Εργαζόμαστε όπως στην Εφαρμογή 1β της § 6.31.

β) Ομοίως.

7 ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η μελέτη βασικών συναρτήσεων που ο μαθητής έχει ήδη συναντήσει στα γυμνασιακά μαθήματα. Για τη συμπλήρωση των γνώσεών του εκείνων σημαντικό ρόλο θα παίξει η έννοια της γραφικής παραστάσεως μιας συναρτήσεως, επειδή με αυτή, που ως τώρα ήταν ένα απλό σύνολο σημείων, θα ερμηνευθούν εποπτικά βασικές έννοιες, όπως η μονοτονία, η περιοδικότητα, η αρτιότητα και άλλες ιδιότητες των συναρτήσεων.

Η μελέτη διευκολύνεται με τη συστηματική χρησιμοποίηση της έννοιας του λόγου μεταβολής μιας συναρτήσεως καθώς και της αλλαγής του συστήματος αναφοράς, που επιτρέπει την αναγωγή σε γνωστές απλές μορφές συναρτήσεων.

Εκτός από το λόγο μεταβολής, που αποτελεί προεισαγωγή στην έννοια της παραγώγου, εισάγονται ευκαιριακά και ορισμένες απλές περιπτώσεις ορίου συναρτήσεως, ακροτάτων κτλ., που αποτελούν μια πρώτη επαφή του μαθητή με θέματα που θα μελετήσει βαθύτερα και εκτενέστερα σε μεγαλύτερη τάξη.

Επίσης το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες (c, y) έχει ως εξίσωση την $x = c$ και είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y'y (Σχ. 1β). Για $c = 0$ έχουμε $x = 0$, που είναι η εξίσωση του άξονα y'y. Εδώ, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η εξίσωση δεν είναι της μορφής $y = f(x)$. Άρα έχουμε εξίσωση σημειοσυνόλου που δεν είναι γραφική παράσταση συναρτήσεως.

7.2 **Γραφική παράσταση της f με f(x) = αx.** Η ζητούμενη γραφική παράσταση $\mathscr{C}$ έχει εξίσωση $y = \alpha x$ και περιέχει προφανώς την αρχή O(0, 0) των αξόνων.

Αν $\alpha = 0$, η εξίσωση γίνεται $y = 0$ και η $\mathscr{C}$ είναι (§7.1, Παράδ.) η ευθεία x'x. Υποθέτουμε $\alpha \neq 0$. Τότε:

Εκτός από το O και το σημείο A(1, α) ανήκει στη $\mathscr{C}$ (σχ. 2). Για κάθε άλλο σημείο της M(x,y) έχουμε $x \neq 0$ και

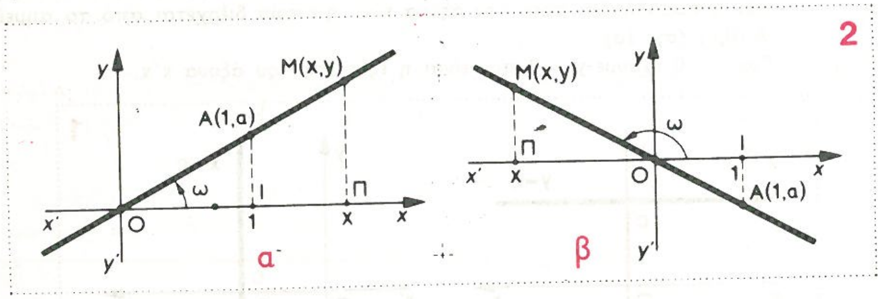
$$y = \alpha x, \quad \text{ή} \quad \frac{y}{x} = \frac{\alpha}{1} \qquad (1)$$

Έστω I και Π οι προβολές των A και M αντιστοίχως στον άξονα x'x. Από την (1) προκύπτει ότι τα τρίγωνα OIA και OΠM είναι όμοια. Οι ημιευθείες OM και OA ή συμπίπτουν ή είναι αντικείμενες, επειδή, λόγω της (1):

- αν $\alpha > 0$, το M έχει συντεταγμένες ομόσημες και βρίσκεται στο α', όπως το A, ή στο γ' τεταρτημόριο (σχ. 2α).
- αν $\alpha < 0$, το M έχει συντεταγμένες ετερόσημες και βρίσκεται στο β' ή στο δ', όπως το A, τεταρτημόριο (σχ. 2β).

Άρα το M είναι σημείο της ευθείας OA.

Αντιστρόφως οι συντεταγμένες κάθε σημείου M της OA επαληθεύουν την (1). Συνεπώς η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία OA.



7.3 **Συντελεστής διευθύνσεως.** Αν ω είναι η *θετική* κυρτή γωνία που σχηματίζει ο ημιάξονας Ox με την ευθεία OA (σχ. 2), τότε σύμφωνα με τις § 6.18 και 6.16 έχουμε εφω = $\overline{IA}$, δηλαδή

$$\text{εφ}\,\omega = \alpha \qquad (2)$$

Η εφω, δηλαδή ο α, καθορίζει πλήρως τη διεύθυνση της ευθείας και λέγεται **συντελεστής διευθύνσεως** της ευθείας.

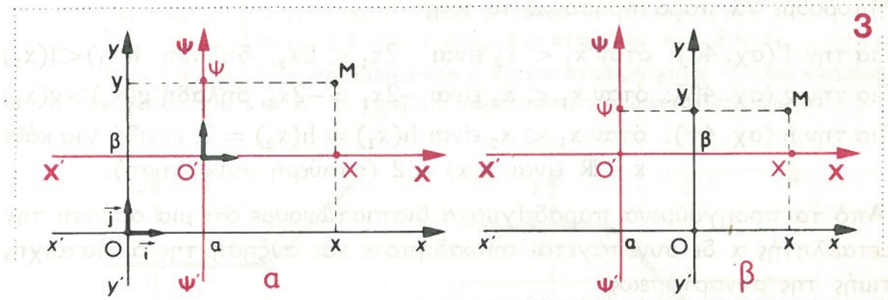
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η (2) ισχύει και όταν $\alpha = 0$, οπότε $\omega = 0$.
2. Είναι $0 \leq \omega < \pi$ με $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, γιατί για $\omega = \frac{\pi}{2}$ η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα y'y, που δεν είναι γραφική παράσταση συναρτήσεως (§ 7.1 Σημ.).

Αλλαγή συστήματος αναφοράς

7.4 Έστω M ένα σημείο με συντεταγμένες (x, y) ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxy (σχ. 3). Αν αλλάξουμε σύστημα αναφοράς, τότε προφανώς το **ίδιο** σημείο M έχει **άλλες** συντεταγμένες. Ας θεωρήσουμε π.χ. το σύστημα O'XΨ με αρχή O'(α, β) και άξονες παράλληλους[1] προς τους άξονες του πρώτου συστήματος. Αν (X, Ψ) είναι οι συντεταγμένες του M ως προς το νέο σύστημα αναφοράς, τότε έχουμε:

$$x = X + \alpha \quad \text{και} \quad y = \Psi + \beta \qquad (1)$$



Αυτή την αλλαγή των συντεταγμένων αξιοποιούμε σε ορισμένες περιπτώσεις, για να απλουστεύσουμε την εξίσωση $y = f(x)$ μιας γραφικής παραστάσεως $\mathscr{C}$.

Για να ανήκει το M στη $\mathscr{C}$, πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του x, y, να επαληθεύουν την $y = f(x)$. Λόγω όμως των (1) η εξίσωση γίνεται:

$$\Psi + \beta = f(X + \alpha) \qquad (2)$$

που σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του **ίδιου** σημείου M ως προς το νέο σύστημα αναφοράς επαληθεύουν τη (2) που πιθανόν να είναι εξίσωση απλούστερη.

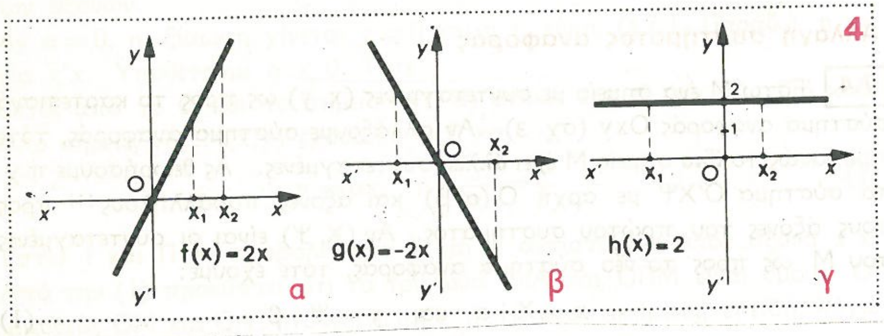
Π.χ. αν η εξίσωση της $\mathscr{C}$ είναι η $y = (x-2)^2 + 3$, θέτοντας $y = \Psi + 3$ και $x = X + 2$, έχουμε την $\Psi = X^2$ που επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των σημείων της $\mathscr{C}$ ως προς σύστημα αναφοράς με άξονες παράλληλους προς τους αρχικούς και διερχόμενους από το σημείο O'(2, 3).

(1) Το O'XΨ ορίζεται από το O' και τα μοναδιαία διανύσματα του Oxy.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Μονότονες συναρτήσεις

7.5 Στο σχήμα 4 έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f με $f(x) = 2x$, g με $g(x) = -2x$ και h με $h(x) = 2$.



Μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

Για την f (σχ. 4α): όταν $x_1 < x_2$ είναι $2x_1 < 2x_2$, δηλαδή $f(x_1)<f(x_2)$

Για την g (σχ. 4β): όταν $x_1 < x_2$ είναι $-2x_1 > -2x_2$, δηλαδή $g(x_1)>g(x_2)$

Για την h (σχ. 4γ): όταν $x_1 < x_2$ είναι $h(x_1) = h(x_2) = 2$, επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = 2$ (σταθερή συνάρτηση).

Από τα προηγούμενα παραδείγματα διαπιστώνουμε ότι μια αύξηση της μεταβλητής x δε συνεπάγεται οπωσδήποτε και αύξηση της αντίστοιχης τιμής της συναρτήσεως.

Οι επόμενοι ορισμοί αναφέρονται στο συσχετισμό των μεταβολών των τιμών μεταβλητής και συναρτήσεως.

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, λέγεται:

- **Γνησίως αύξουσα,** όταν $\forall\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **Αύξουσα,** όταν $\forall\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
- **Γνησίως φθίνουσα,** όταν $\forall\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **Φθίνουσα,** όταν $\forall\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Γενικότερα μια συνάρτηση λέγεται **μονότονη,** όταν είναι αύξουσα ή φθίνουσα, και **γνησίως μονότονη,** όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

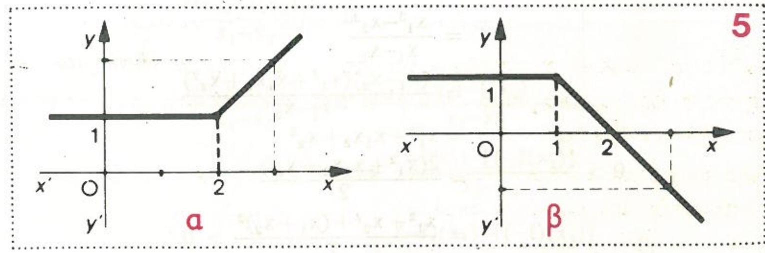
Συνήθως εξετάζουμε μια συνάρτηση σε κατάλληλα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της, σε καθένα από τα οποία παρουσιάζει ένα συγκεκριμένο είδος μονοτονίας.

Αν ο περιορισμός (§ 4.10) της f σε ένα υποσύνολο A' του πεδίου ορισμού

της A είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα (αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, φθίνουσα), τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, φθίνουσα) **στο A'**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Μια σταθερή συνάρτηση f είναι και αύξουσα και φθίνουσα, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) = f(x_2)$.
2. Η συνάρτηση g με $g(x) = x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επειδή $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+1 < x_2+1$, δηλαδή $g(x_1) < g(x_2)$.
3. Η h με $h(x) = 2-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι:
$$0 < x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; x_1^3 < x_2^3 \qquad [\S\ 3.11 \text{ Θεωρ. } 7]$$
$$x_1 < 0 < x_2 \;\Rightarrow\; x_1^3 < 0 < x_2^3$$
$$x_1 < x_2 < 0 \;\Rightarrow\; -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow (-x_1)^3 > (-x_2)^3 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3.$$
'Αρα σε κάθε περίπτωση, αν $x_1 < x_2$, τότε $x_1^3 < x_2^3$ ή $-x_1^3 > -x_2^3$ ή $2-x_1^3 > 2-x_2^3$, δηλαδή $h(x_1) > h(x_2)$.
4. Για τη συνάρτηση σ με $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x < 2 \\ x-1, & \text{αν } x \geqslant 2 \end{cases}$
έχουμε:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma(x_1) = 1 = \sigma(x_2), & \text{αν } x_1, x_2 < 2 \\ \sigma(x_1) = x_1-1 < x_2-1 = \sigma(x_2), & \text{αν } x_1, x_2 \geqslant 2 \\ \sigma(x_1) = 1 = 2-1 \leqslant x_2-1 = \sigma(x_2), & \text{αν } x_1 < 2 \leqslant x_2 \end{cases}$$
'Αρα η σ είναι αύξουσα. Ειδικότερα η σ είναι σταθερή για $x < 2$ και γνησίως αύξουσα για $x \geqslant 2$. Η γραφική παράστασή της δίνεται στο σχήμα 5 α.



Ομοίως διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση φ με
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x < 1 \\ 2-x, & \text{αν } x \geqslant 1 \end{cases}$$
είναι φθίνουσα. Η γραφική παράστασή της δίνεται στο σχήμα 5 β.

Λόγος μεταβολής συναρτήσεως

7.6 Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και x_1, x_2 δύο διαφορετικά στοιχεία του A. Ο λόγος
$$\boxed{\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$
λέγεται **λόγος μεταβολής** της συναρτήσεως f μεταξύ των x_1 και x_2.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, αν η συνάρτηση είναι μονότονη σε ένα σύνολο $B \subseteq A$, τότε ο λόγος μεταβολής της μεταξύ δύο οποιωνδήποτε στοιχείων του B διατηρεί σταθερό πρόσημο. Πράγματι, αν η f είναι π.χ. γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in B$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

που σημαίνει ότι οι αριθμοί $x_1 - x_2$ και $f(x_1) - f(x_2)$ είναι ομόσημοι. Συνεπώς έχουμε[1] $\lambda > 0$. Αλλά και αντιστρόφως, αν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ είναι $\lambda > 0$, τότε οι αριθμοί $x_1 - x_2$ και $f(x_1) - f(x_2)$ είναι ομόσημοι. Άρα έχουμε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να είναι η f:

- γνησίως αύξουσα στο B, πρέπει και αρκεί: $\forall\, x_1, x_2 \in B,\quad \lambda > 0$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι, για να είναι η f:

- γνησίως φθίνουσα στο B, πρέπει και αρκεί $\forall\, x_1, x_2 \in B,\quad \lambda < 0$
- σταθερή » » » » » $\forall\, x_1, x_2 \in B,\quad \lambda = 0$
- αύξουσα » » » » » $\forall\, x_1, x_2 \in B,\quad \lambda \geqslant 0$
- φθίνουσα » » » » » $\forall\, x_1, x_2 \in B,\quad \lambda \leqslant 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τη συνάρτηση f με $f(x) = x^3+1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} &= \frac{(x_1^3+1)-(x_2^3+1)}{x_1-x_2} \\ &= \frac{x_1^3-x_2^3}{x_1-x_2} \\ &= \frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{x_1-x_2} \\ &= x_1^2+x_1x_2+x_2^2 \\ &= \frac{2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{2} \\ &= \frac{x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2}{2} > 0.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι $\lambda > 0$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

α) f με $f(x) = 2x^2+1$

β) g με $g(x) = 2x-|3-x|$.

α) Ο λόγος μεταβολής της συναρτήσεως f είναι:

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} &= \frac{(2x_1^2+1)-(2x_2^2+1)}{x_1-x_2} \\ &= \frac{2(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2} \\ &= 2(x_1+x_2).\end{aligned}$$

(1) Εννοείται ότι $x_1 \neq x_2$ ώστε να ορίζεται ο λ.

Το πρόσημο του λ μένει σταθερό στο καθένα από τα σύνολα $\mathbb{R}_-$ και $\mathbb{R}_+$

Πράγματι:

- αν $x_1 < x_2 \leqslant 0$, τότε $x_1+x_2 < 0$, άρα $\lambda < 0$. Η συνάρτηση λοιπόν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_-$.
- αν $0 \leqslant x_1 < x_2$, τότε $x_1+x_2 > 0$, άρα $\lambda > 0$ και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_+$

β) Για τη συνάρτηση g, επειδή $|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{αν } x \leqslant 3 \\ x-3, & \text{αν } x \geqslant 3 \end{cases}$, έχουμε:

$$g(x) = \begin{cases} 3x-3, & \text{αν } x \leqslant 3 \\ x+3, & \text{αν } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Άρα

- αν $x_1 < x_2 \leqslant 3$, έχουμε $\lambda = \dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{(3x_1-3)-(3x_2-3)}{x_1-x_2}$

$$= \frac{3(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = 3 > 0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα για $x \leqslant 3$.

- αν $3 \leqslant x_1 < x_2$, έχουμε $\lambda = 1 > 0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα για $x \geqslant 3$.

2. Αν στο σύνολο A η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η —f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x_1, x_2 \in A$, θα είναι:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$$

και επειδή

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 &\Rightarrow -\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{-f(x_1)-[(-f(x_2)]}{x_1-x_2} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{(-f)(x_1)-[(-f)(x_2)]}{x_1-x_2} < 0,\end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι ο λόγος μεταβολής της συναρτήσεως −f είναι αρνητικός, δηλαδή η −f είναι γνησίως φθίνουσα.

3. Να αποδειχθεί ότι, αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση 1—1.

Θα πρέπει να δείξουμε (§ 4.6) ότι αν x_1, x_2 είναι τιμές της μεταβλητής x, τότε:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad (1)$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε $x_1 \neq x_2$ και έστω $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη για $x_1 < x_2$, θα είναι **ή** $f(x_1) < f(x_2)$ **ή** $f(x_1) > f(x_2)$, δηλαδή για $x_1 \neq x_2$ είναι πάντοτε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα ισχύει η (1).

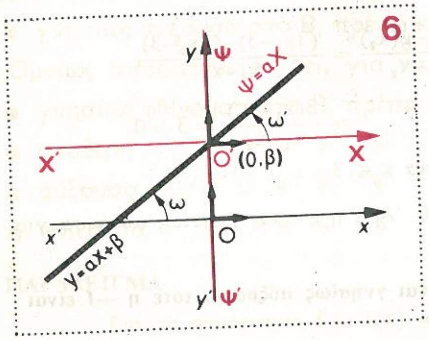
Ασκήσεις 1, 2, 3.

Μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = \alpha x+\beta$

7.7 Η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x+\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ λέγεται **ομοπαραλληλική** συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $y = \alpha x+\beta$ της γραφικής της παραστάσεως ως προς σύστημα αναφοράς Oxy γράφεται:

$$y-\beta = \alpha x \qquad (1)$$

Αν θέσουμε $x = X$ και $y = \Psi+\beta$, η (1) γίνεται $\Psi = \alpha X$. Η εξίσωση αυτή, ως προς νέο σύστημα αναφοράς το $O'X\Psi$ (§ 7.4), που έχει αρχή το $O'(0,\beta)$ και άξονες $X'X$, $\Psi'\Psi$, παράλληλους αντιστοίχως προς τους $x'x$, $y'y$, είναι (§ 7.2) εξίσωση ευθείας ε (σχ. 6), η οποία διέρχεται από το O' και έχει συντελεστή διευθύνσεως $\alpha = \varepsilon\varphi\omega'$.



Συνεπώς και η $y = \alpha x+\beta$ είναι ως προς το Oxy εξίσωση της ευθείας ε, που τέμνει τον Oy στο σημείο $(0,\beta)$. Ο συντελεστής διευθύνσεώς της είναι $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\omega' = \alpha$.

Για $y=0$, είναι $x = \frac{-\beta}{\alpha}$, δηλαδή η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(\frac{-\beta}{\alpha}, 0\right)$.

Εξάλλου ο λόγος μεταβολής της f είναι

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\alpha x_1+\beta-\alpha x_2-\beta}{x_1-x_2} = \frac{\alpha(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \alpha$$

Δηλαδή ο λ είναι **σταθερός** και μάλιστα ίσος με το συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας.

Άρα έχουμε (§ 7.6):

- αν $\alpha > 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα,
- αν $\alpha < 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα,
- αν $\alpha = 0$, η συνάρτηση είναι σταθερή.

Σημείωση

Αν για μια συνάρτηση f ο λόγος μεταβολής λ είναι σταθερός, έστω $\lambda = \alpha$, τότε η συνάρτηση είναι ομοπαραλληλική με συντελεστή διευθύνσεως α.

Πράγματι ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ των x και 0 είναι $\alpha = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Άρα $f(x) = \alpha x+f(0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2}{3}x-5$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί $\alpha = \frac{2}{3} > 0$, ενώ η συνάρτηση g με $g(x) = -x+6$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί $\alpha = -1 < 0$.

Ειδικότερα για $\beta = 0$ έχουμε τη γνωστή μας συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x$, που λέγεται **γραμμική** συνάρτηση και η οποία παρουσιάζει το ίδιο είδος μονοτονίας με την προηγούμενη. Επιπλέον η συνάρτηση αυτή έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $f(x_1+x_2) = \alpha(x_1+x_2) = \alpha x_1+\alpha x_2$, δηλαδή $\mathbf{f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)}$
2. $f(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$, δηλαδή $\mathbf{f(\lambda x) = \lambda f(x)}$

Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας

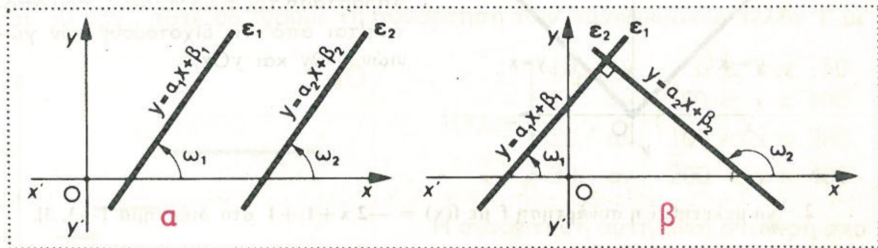
7.8 Έστω ε_1, ε_2 δύο ευθείες (σχ. 7) με αντίστοιχες εξισώσεις $y = \alpha_1 x+\beta_1$ και $y = \alpha_2 x+\beta_2$ και ω_1,ω_2 οι (θετικές κυρτές) γωνίες του ημιάξονα Ox με τις ευθείες αυτές. Τότε $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2, \text{ αφού } 0 \leqslant \omega_1,\ \omega_2 < \pi \ (\S\ 6.27)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \ (\S\ 7.3).$$

Άρα η ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας των ευθειών $y = \alpha_1 x+\beta_1$ και $y = \alpha_2 x+\beta_2$ είναι η

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$$



Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 (σχ. 7β) είναι κάθετες, τότε, υποθέτοντας $0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2}$ θα είναι $\omega_2 = \frac{\pi}{2} + \omega_1$, και αντιστρόφως.

Άρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{\pi}{2} + \omega_1$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2 = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega_1\right), \quad \text{αφού } \frac{\pi}{2} < \omega_2 < \pi, \ (\S\ 6.27)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2 = -\sigma\varphi\omega_1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2 = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega_1}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1\, \varepsilon\varphi\omega_2 = -1.$$

Επομένως η ικανή και αναγκαία συνθήκη καθετότητας των ευθειών $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι η

$$\boxed{\alpha_1\alpha_2 = -1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι ευθείες με εξισώσεις $y = 2x + 3$ και $y = 2x - 1$ είναι παράλληλες, γιατί $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, ενώ οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{2}{3}x + 1$ και $y = -\frac{3}{2}x + 7$ είναι κάθετες, γιατί $\alpha_1\alpha_2 = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = |x|$.

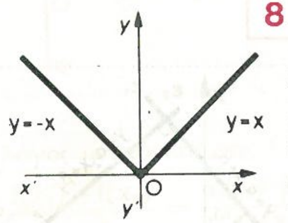
Για τη συνάρτηση f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \leqslant 0 \\ x, & \text{αν } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Όταν $x \leqslant 0$, επειδή $\alpha = -1 < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Όταν $x \geqslant 0$, επειδή $\alpha = 1 > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

8



Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως, που αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών x'Oy και yOx.

2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = -2|x+1|+1$ στο διάστημα $[-3, 3]$.

Για τη συνάρτηση f, επειδή $|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geqslant -1 \\ -(x+1), & \text{αν } x \leqslant -1, \end{cases}$

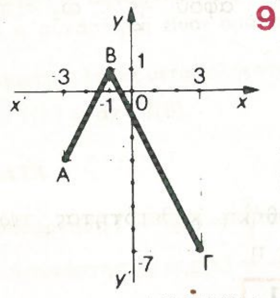
έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{αν } x \leqslant -1 \\ -2x-1, & \text{αν } x \geqslant -1 \end{cases}$$

Όταν $x \leqslant -1$, επειδή $\alpha = 2 > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

Όταν $x \geqslant -1$, επειδή $\alpha = -2 < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

9



Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως, που αποτελείται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και BΓ.

3. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες με εξισώσεις

$$y = (\lambda-1)x+5 \quad \text{και} \quad y = (2\lambda+1)x+7 \qquad \text{είναι :}$$

α) παράλληλες και β) κάθετες.

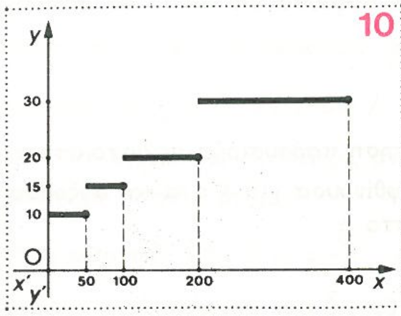
α) Για να είναι οι ευθείες παράλληλες, θα πρέπει να είναι $\alpha_1 = \alpha_2$, δηλαδή $\lambda - 1 = 2\lambda + 1$ ή $\lambda = -2$.

β) Για να είναι κάθετες, θα πρέπει $\alpha_1\alpha_2 = -1$, δηλαδή $(\lambda-1)(2\lambda+1) = -1$ ή $2\lambda^2 - \lambda = 0$ ή $\lambda(2\lambda - 1) = 0$, οπότε $\lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ασκήσεις 4, 5, 6, 7.

Συνάρτηση μονότονη κατά τμήματα

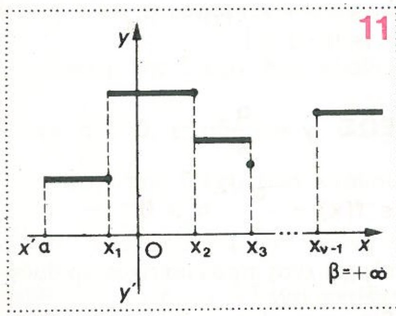
7.9 Έστω ότι το ταχυδρομικό τέλος σε δραχμές ενός δέματος βάρους x γραμμαρίων είναι f(x). Αν για δέματα βάρους μέχρι και 50 gr το τέλος αυτό είναι 10 δρχ., πάνω από 50 gr μέχρι και 100 gr είναι 15 δρχ., πάνω από 100 gr μέχρι και 200 gr είναι 20 δρχ. και από 200 gr μέχρι και 400 gr είναι 30 δρχ., τότε θα έχουμε τη συνάρτηση των *ταχυδρομικών τελών* f με



$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{αν } 0 < x \leqslant 50 \\ 15, & \text{αν } 50 < x \leqslant 100 \\ 20, & \text{αν } 100 < x \leqslant 200 \\ 30, & \text{αν } 200 < x \leqslant 400. \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή στο καθένα από τα διαστήματα (0, 50], (50, 100], (100, 200], (200, 400] και λέγεται **κλιμακωτή** συνάρτηση (σχ. 10).

Γενικότερα έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα με άκρα α και β. Η f θά λέγεται **κλιμακωτή** συνάρτηση, αν υπάρχουν αριθμοί $x_1, x_2, \dots x_{\nu-1}$ τέτοιοι, ώστε



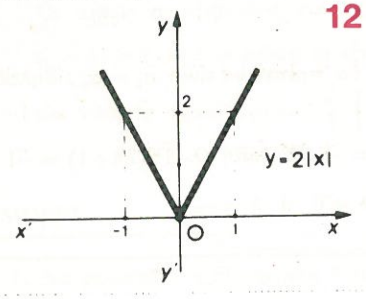
$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$$

και η f είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα (x_k, x_{k+1}) για $k = 0, 1, 2, \dots, \nu-1$ (σχ. 11).

Αν γενικότερα η f είναι **μονότονη** σε καθένα από τα διαστήματα (x_k, x_{k+1}), τότε θα λέγεται **μονότονη κατά τμήματα.**

Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = 2|x|$ (σχ. 12) είναι μονότονη κατά τμήματα, αφού:

12



- για $x \geqslant 0$ είναι $f(x) = 2x$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- για $x \leqslant 0$ είναι $f(x) = -2x$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Άσκηση 8.

Μέγιστο και ελάχιστο συναρτήσεως

7.10 Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει:

- **μέγιστο** στο $\alpha \in A$, όταν $\forall\, x \in A,\ f(x) \leqslant f(\alpha)$
- **ελάχιστο** στο $\alpha \in A$, όταν $\forall\, x \in A,\ f(x) \geqslant f(\alpha)$.

Παρατηρούμε ότι, αν η συνάρτηση f είναι αύξουσα για $x \leqslant \alpha$ και φθίνουσα για $x \geqslant \alpha$, τότε:

$$x < \alpha \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(\alpha)$$
$$\alpha < x \Leftrightarrow f(\alpha) \geqslant f(x),$$

δηλαδή $\forall\, x \in A$, $f(x) \leqslant f(\alpha)$ και η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο α.

Ομοίως διαπιστώνουμε ότι, αν η f είναι φθίνουσα για $x \leqslant \alpha$ και αύξουσα για $x \geqslant \alpha$, τότε παρουσιάζει ελάχιστο στο α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση f με $f(x) = |x|$ (§ 7.8 Εφ. 1), είναι φθίνουσα για $x \leqslant 0$ και αύξουσα για $x \geqslant 0$. Άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 ίσο με $f(0) = 0$.
2. Η συνάρτηση f με $f(x) = -2|x+1| + 1$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$ (§ 7.8 Εφ. 2), είναι αύξουσα για $x \leqslant -1$ και φθίνουσα για $x \geqslant -1$. Άρα παρουσιάζει μέγιστο στο -1 ίσο με $f(-1) = 1$.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y = \frac{\alpha}{x}$

Γενική μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$

7.11 Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $y = \frac{\alpha}{x} \neq 0$ που είναι εικόνα του x. Άρα πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}^*$.

Εξάλλου, αν $y = 0$, θα έχουμε $0 \cdot x = \alpha \neq 0$, επομένως δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}^*$ που να έχει ως εικόνα το 0. Αν όμως είναι $y \neq 0$, τότε υπάρχει πάντοτε ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός $x = \frac{\alpha}{y} \neq 0$ που έχει ως εικόνα τον y. Επομένως, αν περιορίσουμε το σύνολο αφίξεως της f στο $\mathbb{R}^*$, η f είναι μια συνάρτηση **1–1 και επί** του $\mathbb{R}^*$ στο $\mathbb{R}^*$. Επομένως ορίζεται και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, η οποία σε κάθε $y \in \mathbb{R}^*$ αντιστοιχίζει τον αριθμό $\frac{\alpha}{y} \in \mathbb{R}^*$. Είναι δηλαδή

$$f = f^{-1}.$$

Σημείωση

Κάθε συνάρτηση f, που είναι ίση με την αντίστροφή της f^{-1}, λέγεται **ενελικτική.**

Έστω τώρα x_1, x_2 δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές τιμές του x. Τότε ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ των x_1, x_2 θα είναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{\alpha}{x_1} - \dfrac{\alpha}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{-\alpha(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-\alpha}{x_1 x_2}.$$

Όταν τα x_1, x_2 είναι ομόσημα, όταν δηλαδή $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_-$ ή $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_+$, τότε και $x_1 x_2 > 0$. Συνεπώς ο λόγος μεταβολής $\frac{-\alpha}{x_1 x_2}$ έχει το πρόσημο του $-\alpha$, δηλαδή είναι θετικός, αν $\alpha < 0$, και αρνητικός, αν $\alpha > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ στα υποσύνολα $\mathbb{R}^*_-$ και $\mathbb{R}^*_+$ είναι **γνησίως αύξουσα, αν $\alpha < 0$,** και **γνησίως φθίνουσα, αν $\alpha > 0$.**

Εξάλλου

- αν $\alpha > 0$, επειδή οι x και $y = \frac{\alpha}{x}$ είναι ομόσημοι, η γραφική παράσταση της f έχει δύο κλάδους στο **α' και γ'** τεταρτημόριο.
- αν $\alpha < 0$, επειδή οι x και $y = \frac{\alpha}{x}$ είναι ετερόσημοι, η γραφική παράσταση της f έχει δύο κλάδους στο **β' και δ'** τεταρτημόριο.

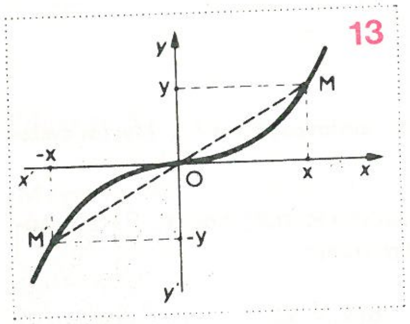
Τέλος παρατηρούμε ότι $f(-x) = \frac{\alpha}{-x} = -\frac{\alpha}{x} = -f(x)$. Δηλαδή στους **αντίθετους** x και $-x$ η f έχει **αντίθετες** τιμές. Είναι, όπως θα λέμε, μια **περιττή** συνάρτηση.

7.12 **Περιττή συνάρτηση.** Θα λέμε ότι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι **περιττή**, όταν

$$\boxed{\forall x \in A, \quad f(-x) = -f(x)}$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι, αν $\mathscr{C}$ είναι η γραφική παράσταση μιας περιττής συναρτήσεως και $M(x, y) \in \mathscr{C}$, τότε $-y = -f(x) = f(-x)$. Άρα και το $M'(-x, -y)$, συμμετρικό του M ως προς το O (§ 6.4), είναι σημείο της $\mathscr{C}$.

Με άλλα λόγια η γραφική παράσταση (σχ. 13) μιας περιττής συναρτήσεως έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.



13

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, γιατί

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Επίσης η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιττή, γιατί

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$.

Μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = \dfrac{1}{x}$

7.13 Επειδή $\alpha = 1 > 0$, η συνάρτηση αυτή είναι (§ 7.11) γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Η γραφική της παράσταση περιέχει τα σημεία π.χ. $M(1, 1)$, $N\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ άρα (§ 7.12) και τα σημεία $M'(-1, -1)$, $N'\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, $P\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$.

Ας δούμε τώρα πως συμπεριφέρεται η συνάρτηση αυτή για *πολύ μικρές* και *πολύ μεγάλες* τιμές του $|x|$.

α) Μελέτη για «πολύ μικρές» τιμές του $|x|$.

Έστω ότι ο x παίρνει τις θετικές τιμές $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{100000}, \ldots$ Τότε οι αντίστοιχες τιμές $\frac{1}{x}$ της συναρτήσεως θα είναι $10, 100, 100000, \ldots$

Γεννιέται τώρα το ερώτημα: Μπορούμε να βρούμε μια τιμή του $\frac{1}{x}$ οσοδήποτε μεγάλη θέλουμε; Με άλλα λόγια, αν δοθεί ένας θετικός αριθμός A, οσοδήποτε μεγάλος, υπάρχει θετική τιμή του x τέτοια, ώστε να είναι $\frac{1}{x} > A$; Έχουμε λοιπόν να λύσουμε στο $\mathbb{R}^*_+$ την ανίσωση

$$\frac{1}{x} > A \qquad (1)$$

που είναι ισοδύναμη της $1 > xA$ ή της $x < \frac{1}{A}$.

Άρα λύσεις της (1) υπάρχουν και το σύνολό τους είναι το διάστημα $\left(0, \frac{1}{A}\right)$, του οποίου το πλάτος ελαττώνεται, όσο το A αυξάνει, επειδή (§ 3.11. Εφ. 1α)

$$A < A' \Rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{A'}$$

Ώστε η τιμή $\frac{1}{x}$ της συναρτήσεως γίνεται όσο θέλουμε μεγάλη, αρκεί ο *θετικός* x να παίρνει τιμές «αρκετά κοντά» στο μηδέν.
Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι

ο $\frac{1}{x}$ τείνει στο $+\infty$, όταν ο x τείνει στο 0 με θετικές τιμές.

Ομοίως διαπιστώνουμε ότι, οσοδήποτε μεγάλος και αν είναι ο αριθμός $A > 0$, υπάρχει *αρνητική* τιμή του x, τέτοια ώστε $\frac{1}{x} < -A$. Πράγματι, σύνολο λύσεων της $\frac{1}{x} < -A$ στο $\mathbb{R}^*_-$ είναι το διάστημα $\left(-\frac{1}{A}, 0\right)$.
Λέμε λοιπόν ότι

ο $\frac{1}{x}$ τείνει στο $-\infty$, όταν ο x τείνει στο 0 με αρνητικές τιμές.

β) Μελέτη για «πολύ μεγάλες» τιμές του $|x|$.

Αν ο x παίρνει π.χ. τις τιμές $10, 100, 1000000, \ldots$ ο $\frac{1}{x}$ παίρνει τις τιμές $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000000}, \ldots$ Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να βρούμε θετική τιμή της συναρτήσεως όσο μικρή θέλουμε. Δηλαδή, αν δοθεί ένας θετικός αριθμός ε, οσοδήποτε μικρός, υπάρχει θετική τιμή του x τέτοια, ώστε $\frac{1}{x} < \varepsilon$. Πράγματι για $x > 0$,

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < x\varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

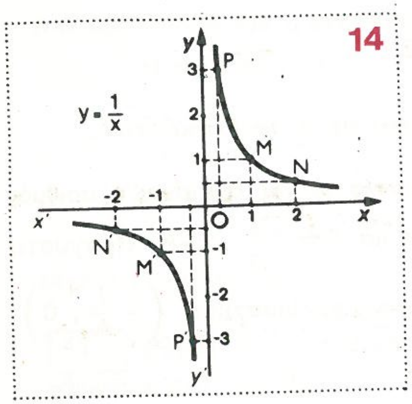
Άρα λύσεις υπάρχουν και το σύνολό τους είναι το διάστημα $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$, του οποίου το άκρο $\frac{1}{\varepsilon}$ αυξάνει, όσο το ε μικραίνει. Ώστε η τιμή $\frac{1}{x}$ της συναρτήσεως γίνεται όσο θέλουμε μικρή, αρκεί ο *θετικός* x να παίρνει τιμές «αρκετά μεγάλες». Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι

ο $\frac{1}{x}$ τείνει στο 0, όταν ο x τείνει στο $+\infty$.

Ομοίως διαπιστώνουμε ότι, οσοδήποτε μικρός και αν είναι ο αριθμός ε, υπάρχει *αρνητική* τιμή του x τέτοια, ώστε $\frac{1}{x} > -\varepsilon$.

Λέμε τότε ότι

ο $\frac{1}{x}$ τείνει στο 0, όταν ο x τείνει στο $-\infty$.



Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = \frac{1}{x}$ δίνεται στο σχήμα 14 και λέγεται **υπερβολή**.

Αποτελείται από δύο κλάδους, που βρίσκονται στο α' και γ' τεταρτημόριο και είναι συμμετρικοί ως προς την αρχή O των αξόνων. Οι ευθείες x'x και yy', λέγονται **ασύμπτωτες** της υπερβολής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

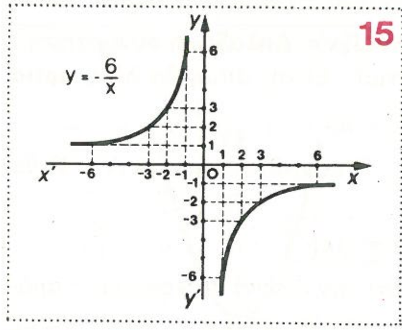
Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = -\frac{6}{x}$.

Επειδή $\alpha = -6 < 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και η γραφική της παράσταση αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς την αρχή O. Αν τώρα εργαστούμε όπως στην § 7.13, βρίσκουμε ότι η τιμή $-\frac{6}{x}$ της συναρτήσεως τείνει

στο $-\infty$, όταν ο x τείνει στο 0 με θετικές τιμές

στο $+\infty$, όταν ο x τείνει στο 0 με αρνητικές τιμές

στο 0, όταν ο x τείνει στο $+\infty$ ή $-\infty$.



Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως δίνεται στο σχήμα 15, και είναι, όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, υπερβολή. Αποτελείται από δύο κλάδους, που βρίσκονται όμως στο β' και στο δ' τεταρτημόριο.

7.14 Από την προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ότι γενικότερα η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$, είναι υπερβολή με κέντρο συμμετρίας το O(0, 0) και ασύμπτωτες τους άξονες x'x και y'y.

Ασκήσεις 9, 10.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y = \alpha x^2$

Γενική μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

7.15 Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $f(0) = 0$, η γραφική της παράσταση περιέχει το σημείο O(0, 0).

Ο λόγος μεταβολής της είναι

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1^2 - \alpha x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \alpha(x_1 + x_2).$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\alpha > 0$. Τότε, αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$, είναι $\lambda < 0$, ενώ αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, είναι $\lambda > 0$. Άρα η συνάρτηση είναι **φθίνουσα στο $\mathbb{R}_-$** και **αύξουσα στο $\mathbb{R}_+$** (γνησίως). Επομένως (§ 7.10) η f παρουσιάζει **ελάχιστο** $f(0) = 0$.

  Εξάλλου, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) \geqslant 0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται στο **α' και β'** τεταρτημόριο.

- $\alpha < 0$. Τότε, αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$, είναι $\lambda > 0$, ενώ αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ είναι $\lambda < 0$. Άρα η συνάρτηση είναι **αύξουσα στο $\mathbb{R}_-$** και **φθίνουσα στο $\mathbb{R}_+$**. Επομένως (§ 7.10) η f παρουσιάζει **μέγιστο** $f(0) = 0$.

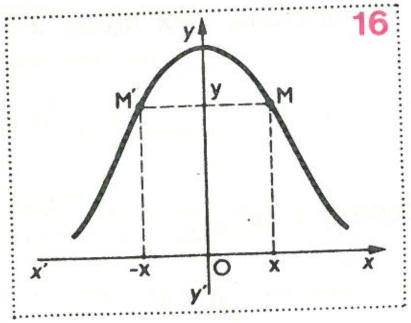
  Εξάλλου, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) \leqslant 0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται στο **γ' και δ'** τεταρτημόριο.

Ακόμη έχουμε ότι $f(-x) = \alpha(-x)^2 = \alpha x^2 = f(x)$. Δηλαδή η συνάρτηση f στους **αντίθετους** x και −x, έχει την **ίδια** τιμή. Είναι, όπως θα λέμε, **άρτια** συνάρτηση.

7.16 **Άρτια συνάρτηση.** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι **άρτια**, όταν

$$\boxed{\forall x \in A,\quad f(-x) = f(x)}$$

Από τον παραπάνω ορισμό συνάγεται ότι, αν $\mathcal{C}$ είναι η γραφική παράσταση μιας άρτιας συναρτήσεως f και $M(x, y) \in \mathcal{C}$, τότε $y = f(x) = f(-x)$. Άρα και το $M'(-x, y)$, συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $y'y$ (§ 6.4), είναι σημείο της $\mathcal{C}$, πράγμα που σημαίνει ότι η $\mathcal{C}$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ (σχ. 16).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση f με $f(x) = x^4$ είναι άρτια, γιατί $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$.
2. Η συνάρτηση f με $f(x) = $ συνx είναι άρτια, γιατί (§ 6.21) $\forall x \in \mathbb{R}$, συν(−x) = συνx.

Μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = x^2$

7.17 Σύμφωνα με την § 7.15 (περίπτ. $\alpha > 0$), η συνάρτηση αυτή θα είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}_-$ και αύξουσα στο $\mathbb{R}_+$ και παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $f(0) = 0$. Η γραφική της παράσταση περιέχει τα σημεία π.χ. $M(1, 1)$, $N(2, 4)$, $P\left(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}\right)$. Άρα (§ 7.16) και τα σημεία $M'(-1, 1)$, $N'(-2, 4)$, $P'\left(-2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}\right)$.

Ας εξετάσουμε τώρα πως μεταβάλλεται η τιμή x^2 της συναρτήσεως για «πολύ μεγάλες» τιμές του $|x|$.

Έστω A ένας οσοδήποτε μεγάλος θετικός αριθμός. Τότε (§ 5.10) υπάρχει $\alpha > 0$, ώστε να είναι $\alpha^2 = A$. Επομένως:

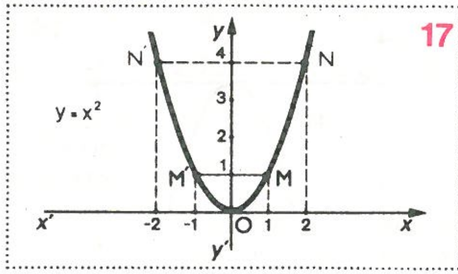
$$\begin{aligned} x^2 > A &\Leftrightarrow x^2 > \alpha^2 \\ &\Leftrightarrow |x| > \alpha \\ &\Leftrightarrow x > \alpha \text{ ή } x < -\alpha. \end{aligned}$$

Έτσι, για κάθε $x \in (-\infty, -\alpha)$ ή $x \in (\alpha, +\infty)$ το $x^2 \in (A, +\infty)$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο x^2 γίνεται όσο θέλουμε μεγάλος αρκεί να πάρουμε

τον x απολύτως αρκετά μεγάλο. Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι:

το x^2 τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο $-\infty$ ή το $+\infty$.

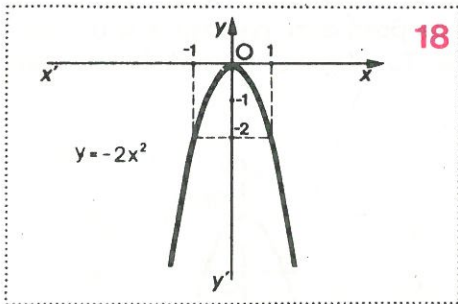


Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = x^2$ δίνεται στο σχήμα 17 και λέγεται **παραβολή** με **κορυφή** την αρχή των αξόνων O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^2$.

Επειδή $-2 < 0$, η συνάρτηση αυτή (§ 7.15) είναι αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Επομένως η f έχει μέγιστο στο $x = 0$, που είναι $f(0) = 0$. Αν εργαστούμε όπως στη § 7.17, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, όταν x τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε το $-2x^2$ τείνει στο $-\infty$.



Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως, που είναι παραβολή με κορυφή το O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον $y'y$, δίνεται στο σχήμα 18.

7.18 Από τα προηγούμενα προκύπτει γενικότερα ότι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f με

$$f(x) = \alpha x^2, \quad \alpha \neq 0 \tag{1}$$

είναι παραβολή με κορυφή το O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Η παραβολή αυτή παρουσιάζει στο O μέγιστο, αν $\alpha < 0$ και ελάχιστο, αν $\alpha > 0$.

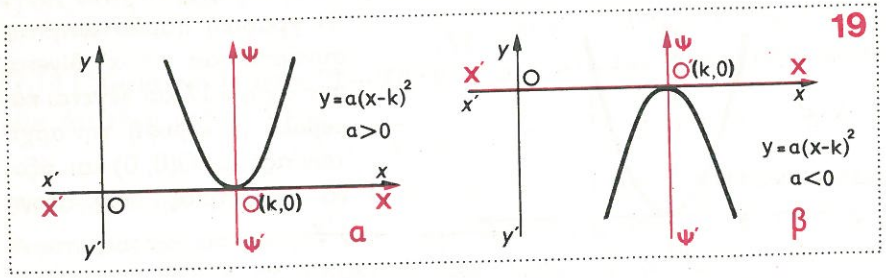
Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \alpha(x - k)^2$, $\alpha \neq 0$

7.19 Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $y = \alpha(x - k)^2$, αν θέσουμε $x - k = X$ και $y = \Psi$, γίνεται:

$$\Psi = \alpha X^2 \tag{1}$$

Η (1) όμως, ως προς νέο σύστημα αναφοράς το $O'X\Psi$ (§ 7.4) που έχει αρχή

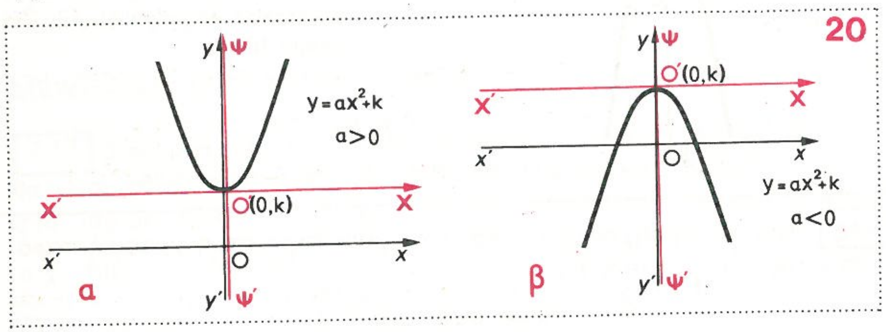
O'(k, 0) και άξονες X'X, Ψ'Ψ αντιστοίχως παράλληλους προς τους x'x, y'y, είναι (§ 7.18) εξίσωση παραβολής με κορυφή το O' και άξονα συμμετρίας τον Ψ'Ψ (σχ. 19). Επομένως και η $y = \alpha(x-k)^2$, ως προς το Oxy, είναι



εξίσωση παραβολής με κορυφή το σημείο O'(k,0) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = k$. Η παραβολή αυτή έχει στο $x = k$ ελάχιστο, αν $\alpha > 0$ και μέγιστο, αν $\alpha < 0$. Το μέγιστο ή το ελάχιστο είναι $f(k) = \alpha(k-k)^2 = 0$.

Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \alpha x^2 + k$

$\boxed{7.20}$ Αν εργαστούμε όπως και στην §7.19, διαπιστώνουμε ότι η $y = \alpha x^2 + k$ είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή το σημείο O'(0, k) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y. Η παραβολή αυτή έχει στο $x = 0$ ελάχιστο, αν $\alpha > 0$ και μέγιστο, αν $\alpha < 0$. Το μέγιστο ή το ελάχιστο είναι $f(0) = \alpha 0^2 + k = k$.



Ασκήσεις 11, 12.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Περιοδικές συναρτήσεις

$\boxed{7.21}$ Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Επειδή για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\,(x+2k\pi),$$

θα έχουμε $\sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\,(x+2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x+2.2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x+3.2\pi) = \dots$

Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **περιοδική συνάρτηση.**

Γενικότερα:

Μια συνάρτηση f, ορισμένη στο A, λέγεται **περιοδική,** όταν υπάρχει $T \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$\forall\, x \in A, \quad f(x+T) = f(x) \qquad (1)$$

Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συναρτήσεως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την (1) προκύπτει επαγωγικά ότι, αν $x \in A$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι $f(x+\nu T) = f(x)$, δηλαδή και ο νT είναι περίοδος. Αλλά και ο $-\nu T$ είναι περίοδος, αφού $f(x) = f(x-\nu T+\nu T) = f(x-\nu T)$.

Επομένως, αν για τη μελέτη της μεταβολής της f περιοριστούμε σε ένα διάστημα της μορφής $[\alpha, \alpha+T]$, οι τιμές της συναρτήσεως επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα $[\alpha+kT, \alpha+(k+1)T]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Άρα η μελέτη μιας περιοδικής συναρτήσεως αρκεί να γίνει στο διάστημα $[\alpha, \alpha+T]$, όπου T η μικρότερη θετική περίοδος, που λέγεται και **βασική.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π, γιατί $\eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu x$ και ο 2π είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει αυτή η σχέση.

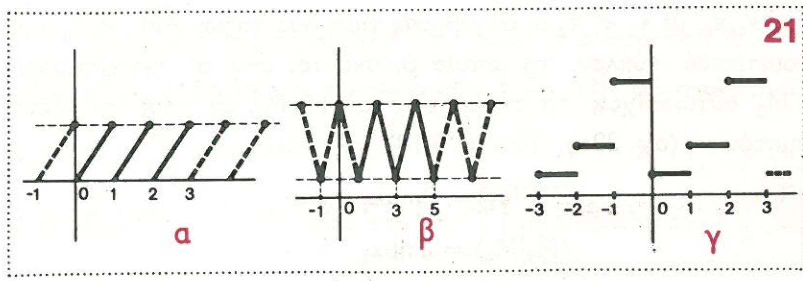
Επίσης, αν $\mathbb{R}_1$ είναι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως εφαπτομένη είναι

$$\mathbb{R}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}:\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{καί} \quad \varepsilon\varphi\,(x+\pi) = \varepsilon\varphi x.$$

Άρα η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική στο $\mathbb{R}_1$ με περίοδο π.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί η (βασική) περίοδος των συναρτήσεων των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα



Οι συναρτησεις του σχήματος έχουν περιόδους 1 (21α), 2 (21β) και 3(21γ).

2. Να βρεθεί η περίοδος των συναρτήσεων:
f με $f(x) = ημ5x$ ή γενικότερα $ημλx$, $συνλx$, $εφλx$, $σφλx$.

Έστω T μία περίοδος. Τότε θα είναι $f(x+T) = f(x)$. Οπότε:

$$ημ\,5(x+T) = ημ\,5x$$

$$5(x+T) = 2kπ + 5x \qquad (1)$$

$$ή \quad 5(x+T) = (2k+1)π - 5x \qquad (2)$$

Από την (1) έχουμε $T = \frac{2kπ}{5}$ και για $k=1$, $T = \frac{2π}{5}$.

Πράγματι είναι $f\left(x + \frac{2π}{5}\right) = ημ\,5\left(x + \frac{2π}{5}\right)$

$$= ημ\,(5x + 2π)$$

$$= ημ\,5x = f(x).$$

Από τη (2) έχουμε:

$$5T = (2k+1)π - 10x$$

$$T = \frac{(2k+1)π - 10x}{5}.$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του x έχουμε και διαφορετική τιμή του T. Άρα ο T δεν είναι σταθερός. Επομένως δεν μπορεί να είναι περίοδος.

Γενικότερα για την συνάρτηση f με $f(x) = ημλx$, περίοδος είναι ο $\frac{2π}{|λ|}$, για την g με $g(x) = συνλx$, είναι ο $\frac{2π}{|λ|}$ και για τις συναρτήσεις φ με $φ(x) = εφλx$ και h με $h(x) = σφλx$ είναι ο $\frac{π}{|λ|}$.

Ασκήσεις ***13, 14, 15.***

Μελέτη της συναρτήσεως ημίτονο

7.22 Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, θα μελετήσουμε τη μεταβολή της στο διάστημα $[0, 2π]$.

Έστω x_1, x_2, με $x_1 < x_2$ οι αλγεβρικές τιμές δύο τόξων $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ του τριγωνομετρικού κύκλου, τα οποία βρίσκονται στο α΄ τεταρτημόριο και M_1', M_2' αντιστοίχως τα συμμετρικά των M_1, M_2, ως προς τον άξονα των συνημιτόνων (σχ. 22α). Τότε (§ 6.10) θα είναι:

$$(M_1'M_1) = 2\,ημx_1 \quad \text{και}$$

$$(M_2'M_2) = 2\,ημx_2 \qquad (1)$$

Έχουμε όμως

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2$$

$$\Leftrightarrow \text{τόξο } M_1'M_1 < \text{τόξο } M_2'M_2$$

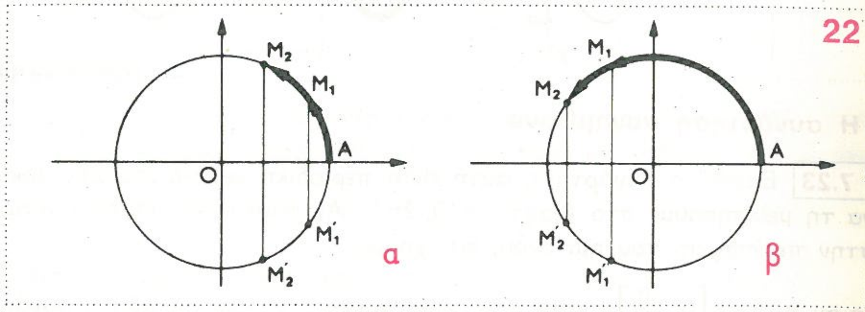
$$\Leftrightarrow \text{χορδή } M_1'M_1 < \text{χορδή } M_2'M_2$$

$$\Leftrightarrow (M_1'M_1) = (M_2'M_2) \qquad (2)$$

οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\forall\, x_1, x_2 \in \left[0, \frac{π}{2}\right], \quad x_1 < x_2 \Rightarrow ημx_1 < ημx_2$$

δηλαδή η συνάρτηση ημίτονο είναι γνησίως **αύξουσα στο** $\left[0, \frac{π}{2}\right]$.



Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

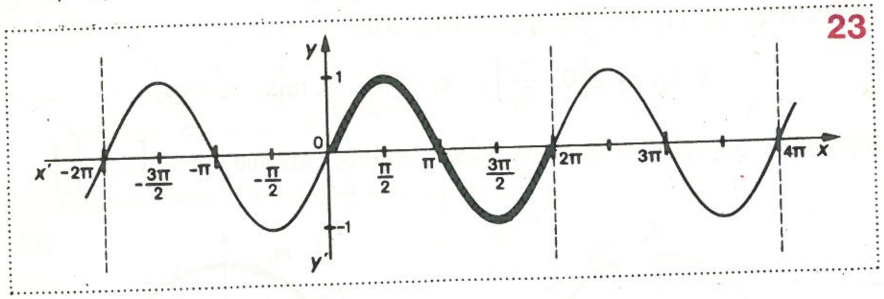
- αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{π}{2}, π\right]$, τότε (σχ. 22β) $x_1 < x_2 \Rightarrow ημx_1 > ημx_2$, δηλαδή η συνάρτηση ημίτονο είναι γνησίως **φθίνουσα στο** $\left[\frac{π}{2}, π\right]$
- αν $x_1, x_2 \in \left[π, \frac{3π}{2}\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow ημx_1 > ημx_2$, δηλαδή η συνάρτηση ημίτονο είναι γνησίως **φθίνουσα στό** $\left[0, \frac{3π}{2}\right]$.
- αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{3π}{2}, 2π\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow ημx_1 < ημx_2$, δηλαδή η συνάρτηση ημίτονο είναι γνησίως **αύξουσα στο** $\left[\frac{3π}{2}, 2π\right]$.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι, αφού η συνάρτηση ημίτονο είναι αύξουσα στο $\left[0, \frac{π}{2}\right]$ καί φθίνουσα στο $\left[\frac{π}{2}, π\right]$, θα παρουσιάζει μέγιστο στο $x = \frac{π}{2}$ ίσο με $ημ\frac{π}{2} = 1$.

Ομοίως, επειδή αυτή είναι φθίνουσα στο $\left[π, \frac{3π}{2}\right]$ και αύξουσα στο $\left[\frac{3π}{2}, 2π\right]$, θα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{3π}{2}$ ίσο με $ημ\left(\frac{3π}{2}\right) = -1$.

Τέλος, επειδή ημ(−x) = −ημx η συνάρτηση ημίτονο είναι περιττή, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Τα προηγούμενα συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 23.



Η συνάρτηση συνημίτονο

7.23 Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα [0, 2π]. Αν λοιπόν εργαστούμε όπως στην περίπτωση του ημιτόνου, θα έχουμε:

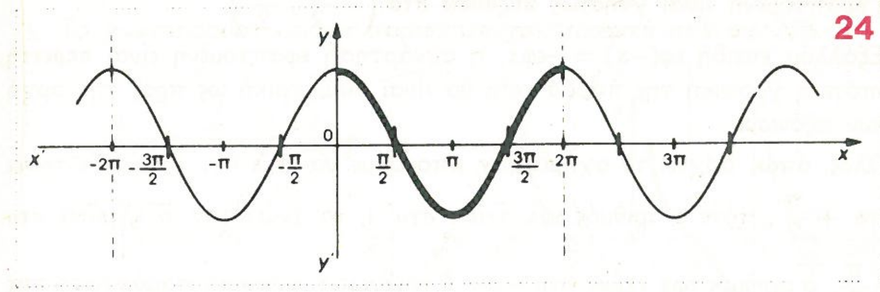
- αν $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow συνx_1 > συνx_2$, δηλαδή η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως **φθίνουσα στο** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
- αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow συνx_1 > συνx_2$, δηλαδή η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως **φθίνουσα στο** $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,
- αν $x_1, x_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow συν\,x_1 < συνx_2$, δηλαδή η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως **αύξουσα στο** $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$,
- αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow συνx_1 < συνx_2$, δηλαδή η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως **αύξουσα στό** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι, αφού η συνάρτηση συνημίτονο είναι φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, θα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \pi$, ίσο με $συνπ = -1$.

Τέλος, επειδή συν(−x) = συνx, η συνάρτηση συνημίτονο είναι άρτια συνάρτηση, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον

άξονα y'y.

Τα προηγούμενα συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 24.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η γραφική παράσταση της y = συνx μπορεί να προκύψει από τη γραφική παράσταση της y = ημx, αν λάβουμε υπόψη ότι $συνx = ημ\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

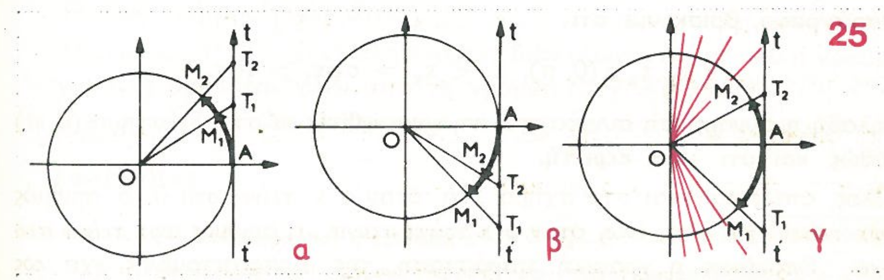
Η συνάρτηση εφαπτομένη

7.24 Επειδή είναι εφ(x+π) = εφx, η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π. Επομένως αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, αφού όπως είδαμε (§ 6.14) η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Έστω x_1, x_2, με $x_1 < x_2$, οι αλγεβρικές τιμές δύο τόξων $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ του τριγωνομετρικού κύκλου (σχ. 25), τα οποία ανήκουν στο α' ή δ' τεταρτημόριο. Τότε (§ 6.16) θα είναι:

$$εφx_1 = \overline{AT_1}$$
$$εφx_2 = \overline{AT_2}.$$

Είναι όμως $\overline{AT_1} < \overline{AT_2}$, άρα και $εφx_1 < εφx_2$.

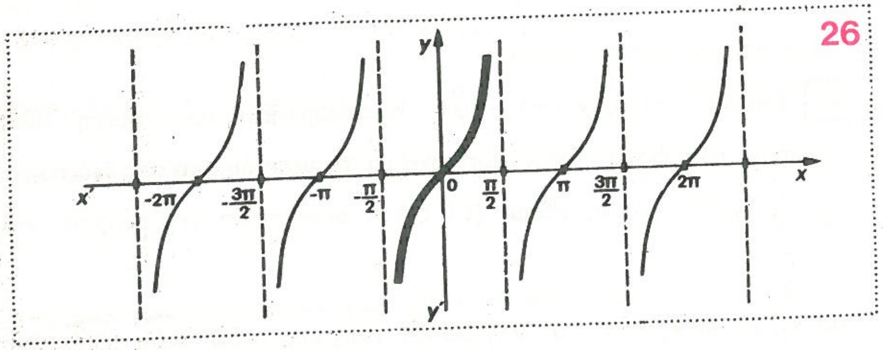


Επομένως, αν $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow εφx_1 < εφx_2$, δηλαδή η εφαπτομένη είναι γνησίως **αύξουσα στο** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Εξάλλου, επειδή $εφ(-x) = -εφx$, η συνάρτηση εφαπτομένη είναι **περιττή**, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Τέλος, όπως δείχνει το σχήμα 25γ μπορούμε να λέμε ότι, όταν ο x *τείνει στο* $+\frac{\pi}{2}$, τότε ο αριθμός εφx *τείνει στο* $+\infty$, ενώ όταν ο x *τείνει στο* $-\frac{\pi}{2}$, ο αριθμός εφx *τείνει στο* $-\infty$. Επομένως η γραφική παράσταση της εφαπτομένης έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$ και περνάει από την αρχή των αξόνων O, αφού είναι $εφ0 = 0$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 26.



Η συνάρτηση συνεφαπτομένη

7.25 Επειδή είναι $σφ(x+\pi) = σφx$, η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π. Επομένως αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $(0, \pi)$, αφού όπως είδαμε (§ 6.14) η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται για $x = 0, \pi$. Αν τώρα εργαστούμε όπως στην προηγούμενη παράγραφο, βρίσκουμε ότι:

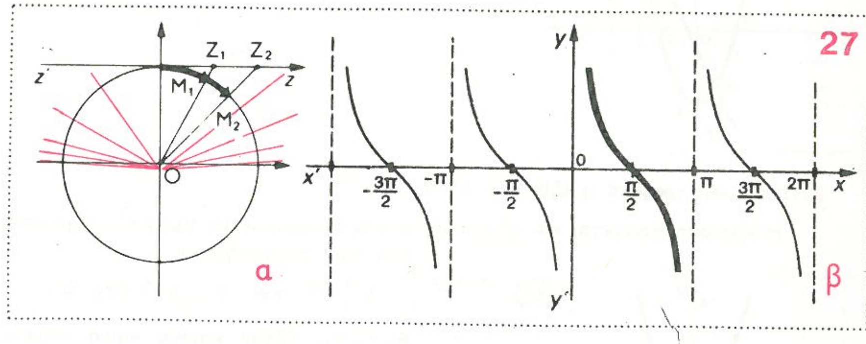
$$\forall\, x_1, x_2 \in (0, \pi),\ x_1 < x_2 \Rightarrow σφx_1 > σφx_2$$

δηλαδή η συνάρτηση συνεφαπτομένη ειναι **φθίνουσα** στο διάστημα $(0, \pi)$ καθώς και ότι είναι **περιττή.**

Τέλος, όπως φαίνεται στο σχήμα 27α, όταν ο x *τείνει στο* 0, ο αριθμός σφx *τείνει στο* $+\infty$, ενώ, όταν ο x *τείνει στο* π, ο αριθμός σφx *τείνει στο* $-\infty$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνεφαπτομένης έχε' ως

ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 0$, $x = \pi$ και περνάει από το σημείο $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, αφού είναι $σφ\frac{\pi}{2} = 0$.

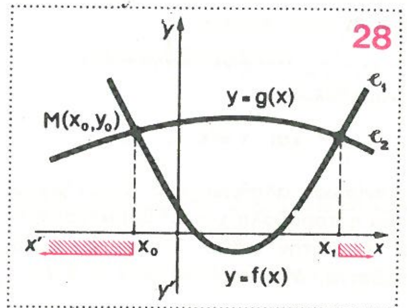
Τα συμπεράσματα αυτά παριστάνονται γραφικά στο σχ. 27β.



Ασκήσεις 16, 17.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ

7.26 Οι ρίζες μιας εξισώσεως $f(x) = g(x)$ (§ 4.29) μπορούν να προσδιοριστούν με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων. Πράγματι οι εξισώσεις



$$y = f(x)$$
$$y = g(x)$$

ορίζουν δύο συναρτήσεις f και g με αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, έστω $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$. Αν $M(x_0, y_0)$ είναι κοινό σημείο των $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, τότε $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$, δηλαδή ο x_0 είναι ρίζα της εξισώσεως $f(x) = g(x)$.

Αντιστρόφως, για κάθε ρίζα x_0 της $f(x) = g(x)$ έχουμε $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ δηλαδή $M(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Ώστε οι **τετμημένες** των σημείων τομής, αν υπάρχουν, των $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$ θα είναι **οι ρίζες** της εξισώσεως $f(x) = g(x)$.

Ομοίως συμπεραίνουμε ότι:

Η ανίσωση $f(x) > g(x)$ αληθεύει στα διαστήματα εκείνα που η γραμμή $\mathcal{C}_1$ $y = f(x)$ βρίσκεται *πάνω* από τη γραμμή $\mathcal{C}_2$ $y = g(x)$.

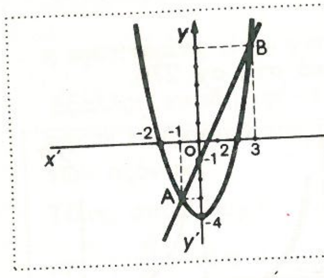
Π.χ. στο σχήμα 28 αληθεύει για $x < x_0$ και για $x > x_1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθεί γραφικά η εξίσωση $x^2 - 4 = 2x - 1$.**

Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2 - 4$ και

$y = 2x-1$ που είναι παραβολή και ευθεία αντιστοίχως (σχ. 29).



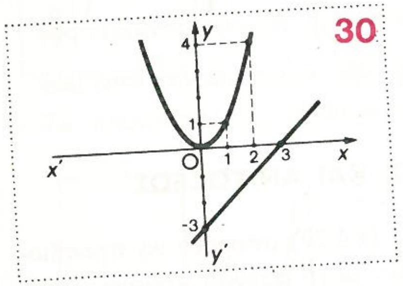
29

Αυτές τέμνονται στα σημεία A και B με τετμημένες -1 και 3, που είναι οι ρίζες της εξισώσεως $x^2-4 = 2x-1$.

2. Να λυθεί γραφικά η εξίσωση $x^2-x+3 = 0$.

Η εξίσωση γράφεται και $x^2= x-3$, οπότε βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y = x^2 \quad \text{και} \quad y = x-3 \text{ (σχ. 30).}$$



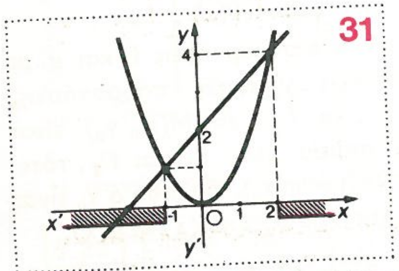
30

Αυτές δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

3. Να λυθεί γραφικά η ανίσωση $x^2-x-2 > 0$.

Η ανίσωση γράφεται $x^2> x+2$. Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y=x^2 \quad \text{και} \quad y=x+2 \quad \text{(σχ. 31).}$$



31

Η ανίσωση αληθεύει στα διαστήματα όπου η παραβολή $y = x^2$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x+2$. Αυτό συμβαίνει, όταν $x < -1$ ή $x > 2$.

Ασκήσεις 18, 19.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις συναρτήσεις:

$$f \text{ με } f(x) = x^3+5x^2+6 \quad \text{και}$$

$$g \text{ με } g(x) = \frac{1}{x^2} + 2x + 5$$

να υπολογιστεί ο λόγος μεταβολής για τα ζεύγη των τιμών $(-1, 2)$, $(3, 5)$.

2. Να εξεταστεί στο R_+^* η μονοτονία της συναρτήσεως:

$$f \text{ με } f(x) = \frac{1}{x^3} + 1$$

3. Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

$$f \text{ με } f(x) = |x|+|1-x|-x$$

$$g \text{ με } g(x) = \frac{x-1}{|x-1|}.$$

4. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x) = |x-2|-x$

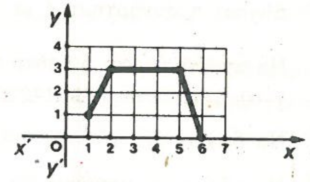
β) g με $g(x) = -2-3x$ στο διάστημα $[-5, +5]$.

5. Να γίνει γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) f με $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{αν } -3 \leq x \leq -2 \\ 1, & \text{αν } -2 < x < 2 \\ 3-x, & \text{αν } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

β) g με $g(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \\ 3x-4, & \text{αν } 2 \leq x < 3 \\ -3x+14, & \text{αν } 3 \leq x < 4 \\ 2, & \text{αν } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$

6. Να βρεθεί η τιμή $f(x)$ της συναρτήσεως f της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.



7. Να προσδιοριστεί ο λ, ώστε οι ευθείες

$$y = (2\lambda+1)x+3 \quad \text{και} \quad y = (5\lambda-1)x-2$$

α) να είναι παράλληλες και β) να είναι κάθετες.

8. Τα ταχυδρομικά τέλη για μια ταχυδρομική επιταγή καθορίζονται από το διπλανό πίνακα. Να γίνει γραφική παράσταση της αντίστοιχης συναρτήσεως.

Επιταγή σε δραχμές	Τέλη σε δραχμές
1- 200	10
201- 500	20
501- 1.000	29
1.001- 2.000	35
2.001- 3.000	41
3.001- 4.000	47
4.001- 5.000	53
5.001-10.000	60
10.001-20.000	75
ΣΤΟΙΧΕΙΑ των ΕΛΤΑ 7.12.79	

9. Να δειχθεί ότι είναι περιττές οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x) = \frac{1}{x} + εφx$

β) g με $g(x) = x^3 + ημx$

10. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις

α) f με $f(x) = \frac{2}{x}$ β) g με $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ γ) φ με $φ(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.

11. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x) = \frac{x^2}{2}$ β) φ με $φ(x) = (x-3)^2$ και

γ) g με $g(x) = \frac{-x^2}{3} + 1$

12. Να αποδειχθεί ότι είναι άρτιες οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x) = αx^4 + βx^2 + γ$ β) g με $g(x) = x^2 + συνx$.

13. Να βρεθεί η περίοδος των συναρτήσεων

α) f με $f(x) = ημ\, 3x$ β) g με $g(x) = ημ\frac{x}{2}$ γ) φ με $φ(x) = συν\frac{x}{3}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } x \text{ περιττός.} \end{cases}$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι περιοδική συνάρτηση, να βρεθεί η περίοδός της και να γίνει η γραφική της παράσταση.

15. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = ημ\,(x^2-2x+5)$ δεν είναι περιοδική.

16. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) f με $f(x) = ημ\, 2x$ β) g με $g(x) = 3συν\frac{x}{2} - 1$

γ) φ με $φ(x) = εφ\left(x - \frac{π}{4}\right) + 1$.

17. Να αποδείξετε με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων τις σχέσεις:

α) $συν\left(x + \frac{π}{2}\right) = -ημx$ β) $ημ\left(\frac{π}{2} + x\right) = συνx$.

18. Να λυθούν γραφικά οι εξισώσεις:

α) $\frac{4}{x} = x$ β) $x^2 = |x|$ γ) $x^2 - 4 = -\frac{3}{x}$.

19. Να λυθούν γραφικά οι ανισώσεις:

α) $|x| > 5$ β) $\frac{1}{x} > x^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ των -1 και 2 είναι $λ = 8$ και μεταξύ των 3 και 5 είναι $λ = 89$.

Ο λόγος μεταβολής της g μεταξύ των -1 και 2 είναι $λ = \frac{7}{4}$ και μεταξύ των 3 και 5 είναι $λ = \frac{442}{225}$.

2. Για τη συνάρτηση f έχουμε: $λ = -\frac{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2}{x_1^3x_2^3} < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_+^*$.

3. Για τη συνάρτηση f έχουμε : $f(x) = \begin{cases} -3x+1, & \text{αν } x < 0 \\ 1-x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ x-1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x < 1$ και γνησίως αύξουσα για $x \geq 1$.
Η g είναι σταθερή ίση με -1 για $x < 1$ και ίση με 1 για $x > 1$.

4. Για τη συνάρτηση f είναι :

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2, & \text{αν } x < 2 \\ -2, & \text{αν } x \geq 2, \end{cases} \quad \text{κτλ.}$$

Η συνάρτηση g είναι ομοπαραλληλική, γνησίως φθίνουσα στο $[-5, +5]$.

5. α) Βρίσκουμε τη μονοτονία της συναρτήσεως f σε κάθε διάστημα και μετά κάνουμε τη γραφική της παράσταση. Εργαζόμαστε δηλαδή όπως στην εφαρμογή 2 της § 7.8.

β) Ομοίως.

6. Η f είναι αύξουσα στο $[1,2)$, σταθερή στο $[2,5)$ και φθίνουσα στο $[5,6]$. Η τιμή της f στο x είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \\ 3, & \text{αν } 2 \leq x < 5 \\ -3x+8, & \text{αν } 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

7. Οι ευθείες είναι παράλληλες, όταν $λ = \frac{2}{3}$ και κάθετες, όταν $λ = 0$ ή $λ = -\frac{3}{10}$.

8. Εργαζόμαστε όπως στη § 7.9.

9. α) Για την f ισχύει :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) = \frac{1}{-x} + εφ(-x) \text{ κτλ.}$$

β) Ομοίως.

10. α) Είναι υπερβολή με ασύμπτωτες τους άξονες $x'x$ και $y'y$

β) Είναι υπερβολή με ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 2$ και $y = 1$

γ) Είναι $φ(x) = 2 - \frac{6}{x+1}$ κτλ.

11. α) Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή της § 7.17.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής f με $f(x) = \alpha(x-k)^2$, με $\alpha = 1$ και $k = 3$.

γ) Η συνάρτηση είναι της μορφής f με $f(x) = \alpha x^2 + k$, με $\alpha = -\frac{1}{3}$ και $k = 1$.

12. α) Για την f ισχύει: $\forall x,\ f(-x) = \alpha(-x)^4 + \beta(-x)^2 + \gamma$ κτλ.

β) Ομοίως.

13. α) Η περίοδος της f είναι $\frac{2\pi}{3}$.

β) Η περίοδος της g είναι $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

γ) Η περίοδος της φ είναι $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

14. Η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2.

15. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2 της § 7.21.

16. α) Η f είναι περιοδική με περίοδο π (§ 7.21, Εφ. 2)

β) Θέτουμε $y = \Psi - 1$ και $x = X$ και έχουμε $\Psi = 3\sigma\upsilon\nu\frac{X}{2}$

γ) Θέτουμε $y = \Psi + 1$ και $x = X + \frac{\pi}{4}$ κτλ.

17. α) Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις του $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ και $-\eta\mu x$ συμπίπτουν.

β) Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ και συνx συμπίπτουν.

18. α) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \frac{4}{x}$ και $y = x$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής τους είναι οι λύσεις της εξισώσεως.

β) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2$ και $y = |x|$ κτλ.

γ) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2 - 4$ και $y = -\frac{3}{x}$ κτλ.

19. α) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = |x|$ και $y = 5$ κτλ.

β) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \frac{1}{x}$ και $y = x^2$ κτλ.

8 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ℝ

Η ανάπτυξη των θεμάτων από την παραδοσιακή Άλγεβρα που περιλαμβάνει το κεφάλαιο αυτό, χαρακτηρίζεται από θεωρία, περιορισμένη στις απόλυτα βασικές γνώσεις, όπως αναφέρονται στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα, και από ποικιλία εφαρμογών. Μια τέτοια παρουσίαση, χωρίς να είναι εκτεταμένη όπως άλλοτε, δεν χάνει την πληρότητά της και ανταποκρίνεται στην επιδίωξη εκσυγχρονισμού της ύλης. Σε ορισμένες περιπτώσεις αποτελεί εμβάθυνση και επέκταση γνώσεων που ήδη έχει ο μαθητής (π. χ. λύση δευτεροβάθμιας εξισώσεως, συστήματα κτλ.).

Η επεξεργασία κύριων θεμάτων του κεφαλαίου στηρίζεται στις μορφές που μπορεί να πάρει το δευτεροβάθμιο τριώνυμο ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσάς του. Παράλληλα επισημαίνεται η σημασία του προσήμου του τριωνύμου για τις ανισώσεις β' βαθμού καθώς και για τη θέση αριθμού ως προς τις ρίζες του τριωνύμου.

Το τελευταίο τμήμα του κεφαλαίου αποτελεί ένα απαραίτητο συμπλήρωμα, σε θεωρητικότερη βάση, για τα συστήματα εξισώσεων απλής μορφής.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Γενικά

8.1 Κάθε εξίσωση με άγνωστο $x \in \mathbb{R}$ που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0,$$

όπου **α, β, γ** είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, λέγεται **εξίσωση δεύτερου βαθμού** στο $\mathbb{R}$. Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξισώσεως. Παραδείγματα εξισώσεων β' βαθμού δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Εξίσωση	Συντελεστές		
	α	β	γ
$\sqrt{2}\,x^2-x=0$	$\sqrt{2}$	-1	0
$\frac{x^2}{2}+x=\sqrt{3}\,x+1$	$\frac{1}{2}$	$1-\sqrt{3}$	-1
$\lambda x^2-\lambda x+\lambda\mu = x^2-\mu x$	$\lambda-1 \neq 0$	$\mu-\lambda$	$\lambda\mu$
$\alpha^2x^2+\beta x+\alpha^2= x^2+\alpha x-\beta^2$	$\alpha^2-1 \neq 0$	$\beta-\alpha$	$\alpha^2+\beta^2$

Για να λύσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, αρκεί να τη μετασχηματίσουμε, με παραγοντοποίηση του πρώτου μέλους της, σε ισοδύναμη της μορφής $A(x)B(x) = 0$, όπου $A(x)$, $B(x)$ είναι πρωτοβάθμιοι παράγοντες. Γιατί τότε η λύση της ανάγεται στη λύση των πρωτοβάθμιων εξισώσεων $A(x) = 0$ και $B(x) = 0$, αφού $A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ **ή** $B(x) = 0$. Τη μέθοδο αυτή, που είναι γνωστή από τα γυμνασιακά μαθήματα και που ήδη έχουμε εφαρμόσει (§ 4.21 εφ. 1), θα θυμίσουμε με τα ακόλουθα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η εξίσωση $\sqrt{2}\,x^2-3x = 0$ (1)

Επειδή $\sqrt{2}\,x^2-3x = x(\sqrt{2}\,x-3)$, έχουμε:

$(1) \Leftrightarrow (x = 0$ ή $\sqrt{2}\,x-3 = 0) \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ή } x = \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Η εξίσωση λοιπόν έχει ρίζες: 0 και $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

- Αν $\Delta = 0$, τότε οι ρίζες του τύπου (5) συμπίπτουν και λέμε ότι η εξίσωση έχει μια **ρίζα διπλή**, την $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

2. $\mathbf{\Delta < 0}$, οπότε $\frac{-\Delta}{4\alpha^2} = \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} > 0$. Τότε, όπως προκύπτει από την (3), το πρώτο μέλος της εξισώσεως (2) είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η εξίσωση δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο αριθμός των ριζών της εξισώσεως

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

στο $\mathbb{R}$ εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμού $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, που λέγεται **διακρίνουσα** της εξισώσεως.

Τα προηγούμενα συμπεράσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	
$\mathbf{\Delta > 0}$	Δύο άνισες ρίζες $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$
$\mathbf{\Delta = 0}$	Μία ρίζα διπλή $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$
$\mathbf{\Delta < 0}$	Δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για την εξίσωση $3x^2 - 15x + 18 = 0$ είναι $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 3 \cdot 18 = 225 - 216 = 9$, οπότε οι ρίζες της είναι:

$$\rho_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{6} = \frac{15 \pm 3}{6} \begin{cases} \nearrow \rho_1 = \frac{15+3}{6} = 3 \\ \searrow \rho_2 = \frac{15-3}{6} = 2 \end{cases}$$

2. Για την εξίσωση $x^2 - 6x + 9 = 0$ είναι $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, οπότε

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3.$$

3. Για την εξίσωση $2x^2 - 3x + 10 = 0$ είναι $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -71 < 0$, οπότε αυτή δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι, τότε είναι $-\alpha\gamma > 0$ άρα και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, οπότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

2. Αν ο συντελεστής β έχει τη μορφή $2\beta'$ (π.χ αν είναι άρτιος), τότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\beta')^2 - 4\alpha\gamma = 4\beta'^2 - 4\alpha\gamma = 4(\beta'^2 - \alpha\gamma) = 4\Delta'$, όπου

$$\mathbf{\Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma}$$

Στην περίπτωση αυτή ο τύπος (5) γράφεται απλούστερα

$$\boxed{\rho_{1,2} = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\Delta'}}{\alpha}} \qquad (5')$$

3. Επειδή Δ και Δ' είναι ομόσημοι, τα συμπεράσματα του παραπάνω πίνακα ισχύουν, αν αντί Δ, παίρνουμε την απλοποιημένη μορφή Δ'.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθούν οι εξισώσεις:**

α) $\sqrt{2}\,x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2})x + \sqrt{5} = 0$ **β)** $(\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2\alpha^2\beta\,x + \alpha^2\beta^2 = 0$, $\alpha \neq \pm\beta$

α) Έχουμε $\Delta = [-(\sqrt{5} + \sqrt{2})]^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

Άρα οι ρίζες της εξισώσεως είναι:

$$\rho_{1,2} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \pm \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} \pm (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \begin{cases} \nearrow \rho_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \searrow \rho_2 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \end{cases}$$

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta' &= (\alpha^2\beta)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)\alpha^2\beta^2 \\ &= \alpha^4\beta^2 - \alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^4 \\ &= \alpha^2\beta^4. \end{aligned}$$

Άρα οι ρίζες της εξισώσεως είναι

$$\rho_{1,2} = \frac{\alpha^2\beta \pm \sqrt{\alpha^2\beta^4}}{(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{\alpha^2\beta \pm \alpha\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$= \frac{\alpha\beta(\alpha \pm \beta)}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} \begin{cases} \nearrow \rho_1 = \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \\ \searrow \rho_2 = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}. \end{cases}$$

2. **Να εξεταστεί πόσες ρίζες έχουν οι παρακάτω εξισώσεις:**

α) $x^2 - sx - 1 = 0$ **β)** $\alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 = 0$, $\alpha \neq 0$ **γ)** $\alpha^2x^2 - 2\alpha x + 1 + \alpha^2\beta^2 = 0$, $\alpha \neq 0$.

Έχουμε:

α) $\Delta = s^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = s^2 + 4 > 0$. Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν παρατηρήσουμε ότι οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι (§ 8.2 παρατ. 1).

β) $\Delta' = \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$. Άρα η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή, την $\rho = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha}$.

γ) $\Delta' = \alpha^2 - \alpha^2(1+\alpha^2\beta^2) = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha^4\beta^2 = -\alpha^4\beta^2$. Συνεπώς, αφού $\alpha \neq 0$, αν και $\beta \neq 0$, θα είναι $\Delta' < 0$ και η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Αν $\beta = 0$, τότε $\Delta' = 0$ και η εξίσωση έχει τη διπλή ρίζα $\rho = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$.

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $4\,\text{συν}^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\text{συν}x + \sqrt{3} = 0$

β) $x^2 - 7|x| - 18 = 0$.

α) Θέτουμε $\text{συν}x = y$ (1), οπότε έχουμε την εξίσωση:

$$4y^2 - 2(\sqrt{3}+1)y + \sqrt{3} = 0 \quad \text{μέ} \quad y \in [-1, +1].$$

Έχουμε
$$\begin{aligned}\Delta' &= (\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3}\\ &= 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3}\\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1\\ &= (\sqrt{3}-1)^2.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε :

$$\rho_{1,2} = \frac{(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{4} = \frac{(\sqrt{3}+1) \pm (\sqrt{3}-1)}{4} =$$

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rho_2 = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Από την (1) έχουμε:

για $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{συν}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{6}$. Επομένως $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$,

για $y = \frac{1}{2}$, $\text{συν}x = \frac{1}{2}$ ή $\text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{3}$. Επομένως $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

β) Επειδή $|x|^2 = x^2$ (§ 3.14), η εξίσωση γράφεται $|x|^2 - 7|x| - 18 = 0$ και, αν θέσουμε $|x| = y$ (2), τότε έχουμε :

$$y^2 - 7y - 18 = 0 \quad \text{με} \quad y \in \mathbb{R}_+ .$$

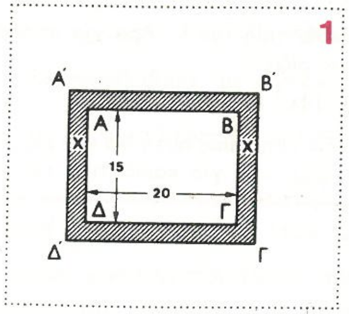
Είναι $\Delta = 49 + 72 = 121$ και

$$\rho_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} \quad \rho_1 = 9, \quad \rho_2 = -2$$

Η $\rho_2 = -2$ απορρίπτεται, επειδή $-2 \notin \mathbb{R}_+$, οπότε από την (2) έχουμε:
για $y = 9$, $|x| = 9$, οπότε $x = \pm 9$ (§ 3.14 εφαρ. 1).

4. Γύρω από μια πισίνα ΑΒΓΔ (σχ. 1) με διαστάσεις 15 m και 20 m θέλουμε να σχηματίσουμε μια πράσινη περιμετρική ζώνη με εμβαδό 200 m² και σταθερό πλάτος. Να βρεθεί το πλάτος αυτής της ζώνης.

Έστω x το πλάτος της ζώνης ($x > 0$). Τότε το ορθογώνιο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχει διαστάσεις $20+2x$, $15+2x$ και εμβαδό $(20+2x)(15+2x)$. Το εμβαδό της πράσινης ζώνης βρίσκεται, αν από το εμβαδό του Α΄Β΄Γ΄Δ΄ αφαιρέσουμε το εμβαδό του ΑΒΓΔ που είναι



$$15 \cdot 20 = 300 \text{ m}^2.$$

Επομένως έχουμε :

$$(20+2x)(15+2x) - 300 = 200$$

$$\text{ή} \quad 4x^2 + 70x - 200 = 0.$$

Οι ρίζες της εξισώσεως είναι -20 και $2{,}5$. Άρα το πλάτος της ζώνης πρέπει να είναι 2,5 m (η αρνητική λύση -20 απορρίπτεται).

5. Να βρεθεί ο χρόνος της κατακόρυφης πτώσεως ενός σώματος, αν γνωρίζουμε ότι κατά το τελευταίο δευτερόλεπτο το σώμα διέτρεξε διάστημα ίσο με τα τρία τέταρτα του ολικού διαστήματος.

Έστω ΑΒ το ολικό διάστημα και ΓΒ το διάστημα που διανύει το σώμα στο τελευταίο δευτερόλεπτο. Αν t sec είναι ο χρόνος της πτώσεως ($t > 1$) για το διάστημα ΑΒ, τότε για το διάστημα ΑΓ θα είναι $t-1$.

Όπως ξέρουμε όμως από τη Φυσική, το διάστημα s το οποίο διανύει ένα σώμα που πέφτει κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα μηδέν σε χρόνο t είναι $s = \frac{1}{2}gt^2$, όπου $g = 10$ m/sec². Επομένως, επειδή είναι ΑΒ–ΑΓ=ΓΒ, έχουμε:

$$\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-1)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}gt^2,$$

$$t^2 - (t-1)^2 = \frac{3}{4}t^2$$

$$3t^2 - 8t + 4 = 0.$$

Οι ρίζες της εξισώσεως είναι 2 και $\frac{2}{3}$. Άρα ο χρόνος της πτώσεως είναι 2 sec. (Η τιμή $\frac{2}{3}$ sec απορρίπτεται, γιατί σύμφωνα με το πρόβλημα ο ολικός χρόνος είναι μεγαλύτερος από ένα δευτερόλεπτο).

6. Για ποιές τιμές του λ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ίσες ρίζες:

α) $\lambda x^2 - (\lambda-1)x + 2\lambda - 2 = 0$

β) $x^2 - 2(\lambda-1)x + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

γ) $\lambda x^2 - 3(\lambda-3)x - (2\lambda+10) = 0.$

Για να έχουν οι εξισώσεις ίσες ρίζες, θα πρέπει $\Delta = 0$ (ή $\Delta' = 0$).

α) $\Delta = (\lambda-1)^2-4\lambda(2\lambda-2) = -7\lambda^2+6\lambda+1$

Θα πρέπει λοιπόν $-7\lambda^2+6\lambda+1 = 0$. Αν λύσουμε την εξίσωση αυτή, βρίσκουμε $\lambda = 1$ καί $\lambda = -\frac{1}{7}$.

β) $\Delta' = (\lambda-1)^2-(\lambda^2-2\lambda+1) = 0$ για κάθε τιμή του λ. Άρα για οποιαδήποτε τιμή του λ η εξίσωση θα έχει ίσες ρίζες.

γ) $\Delta = 9(\lambda-3)^2+4\lambda(2\lambda+10) = 17\lambda^2-14\lambda+81$.

Θα πρέπει $17\lambda^2-14\lambda+81 = 0$. Η εξίσωση όμως αυτή δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς η αρχική εξίσωση δεν έχει ρίζες ίσες για καμιά τιμή του λ.

Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

8.3 Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\Delta \geq 0$, που, όπως είδαμε, έχει ως ρίζες τους αριθμούς:

$$\rho_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad \rho_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Τότε θα είναι:

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta+\sqrt{\Delta})(-\beta-\sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-\Delta}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Δηλαδή $\boxed{\rho_1+\rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha}}$ **(1)** και $\boxed{\rho_1\rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}}$ **(2)**

Έτσι με τις σχέσεις (1) και (2) μπορούμε να βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξισώσεως, χωρίς προηγουμένως να τη λύσουμε.

Αν π.χ. ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες της εξισώσεως $2x^2-5x+1 = 0$, (της οποίας $\Delta > 0$), θα έχουμε:

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{και} \quad \rho_1\rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

8.4 **Αξιοσημείωτη εφαρμογή.** Όταν δίνεται το άθροισμα s δύο αριθμών και το γινόμενό τους p, μπορούμε να βρούμε τους αριθμούς αυτούς. Πράγματι οι ζητούμενοι αριθμοί x και y, **αν** υπάρχουν, θα είναι ρίζες της εξισώσεως

$$(\omega-x)(\omega-y) = 0$$

που είναι δευτεροβάθμια, με άγνωστο ω. Αλλά

$$(\omega-x)(\omega-y) = 0 \Leftrightarrow \omega^2-(x+y)\omega+xy = 0$$
$$\Leftrightarrow \omega^2-s\omega+p = 0.$$

Η τελευταία έχει ρίζες, μόνο όταν $\Delta = s^2-4p \geq 0$.

Π.χ. οι αριθμοί x και y, που έχουν άθροισμα 18 και γινόμενο 65, είναι ρίζες της εξισώσεως $\omega^2-18\omega+65 = 0$. Πράγματι οι ρίζες της εξισώσεως αυτής είναι οι αριθμοί (§ 8.2)

$$\frac{9\pm\sqrt{9^2-65}}{1} = 9\pm\sqrt{16} = 9\pm4, \text{ δηλαδή 13 και 5.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της εξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, να εκφρασθούν με τη βοήθεια των συντελεστών α,β,γ τα αθροίσματα $\rho_1^2+\rho_2^2$ και $\rho_1^3+\rho_2^3$.

Είναι
$$\rho_1^2+\rho_2^2 = (\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

και
$$\rho_1^3+\rho_2^3 = (\rho_1+\rho_2)^3-3\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2) = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3-3\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3}.$$

2. Αν ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες της εξισώσεως $x^2-5x+6 = 0$, να υπολογιστούν, χωρίς να βρεθούν οι ρίζες, οι παραστάσεις:

α) $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$ **β)** $\frac{\rho_1^2}{\rho_2}+\frac{\rho_2^2}{\rho_1}$.

Από την εξίσωση $x^2-5x+6 = 0$ έχουμε $\rho_1+\rho_2 = 5$, $\rho_1\rho_2 = 6$, οπότε είναι:

α) $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{5}{6}$

β) $\frac{\rho_1^2}{\rho_2}+\frac{\rho_2^2}{\rho_1} = \frac{\rho_1^3+\rho_2^3}{\rho_1\rho_2} = \frac{(\rho_1+\rho_2)^3-3\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2} = \frac{5^3-3\cdot6\cdot5}{6} = \frac{35}{6}.$

3. Από τα ζεύγη των πραγματικών αριθμών με σταθερό άθροισμα να βρεθούν εκείνοι που έχουν μέγιστο γινόμενο.

Έστω x, y οι ζητούμενοι αριθμοί, k το σταθερό άθροισμά τους και p το γινόμενό τους. Τότε έχουμε:

$$x+y=k \quad \text{και} \quad xy=p.$$

Άρα (§ 8.4) οι x, y είναι ρίζες της εξισώσεως $\omega^2-k\omega+p=0$ (1)

Επειδή όμως $x, y \in \mathbb{R}$, πρέπει η διακρίνουσα της (1) να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν. Δηλαδή

$$\Delta=k^2-4p \geqslant 0 \quad \text{ή} \quad p \leq \frac{k^2}{4}.$$

Δηλαδή η μεγαλύτερη τιμή του p είναι η $\frac{k^2}{4}$. Τότε όμως

$$\Delta=k^2-4\frac{k^2}{4}=k^2-k^2=0, \text{ οπότε οι ρίζες είναι ίσες, } x=y=\frac{k}{2}.$$

Π.χ. Το γινόμενο $x^2(8-x^2)$, επειδή το άθροισμα $x^2+(8-x^2)=8$ είναι σταθερό, γίνεται μέγιστο, όταν $x^2=8-x^2$ ή $2x^2=8$ και $x=\pm 2$.

Ασκήσεις 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Πρόσημο ριζών

8.5 Η διακρίνουσα, το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών της δευτεροβάθμιας εξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, μας δίνουν τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε το πρόσημο των ριζών της ρ_1 και ρ_2 χωρίς να τη λύνουμε.

Εξετάζουμε πρώτα το πρόσημο του $\frac{\gamma}{\alpha}$. Αν είναι:

- $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, τότε, επειδή οι α και γ είναι ετερόσημοι (§ 8.2 Παρατ. 1), η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, οι οποίες είναι και ετερόσημες, αφού το γινόμενό τους $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ είναι αρνητικό.
- $\frac{\gamma}{\alpha}=0$, τότε $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}=0$, οπότε η μία ρίζα τουλάχιστον, έστω η ρ_1, θα είναι μηδέν και η άλλη θα είναι $\rho_2=\rho_1+\rho_2=\frac{-\beta}{\alpha}$.
- $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, τότε η εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{R}$, μόνο αν $\Delta \geqslant 0$. Στην περίπτωση αυτή οι ρίζες είναι ομόσημες, θετικές όταν $\rho_1+\rho_2=\frac{-\beta}{\alpha}>0$, και αρνητικές όταν $\rho_1+\rho_2=\frac{-\beta}{\alpha}<0$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πρόσημο των ριζών ρ_1, ρ_2 της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\rho_1 \leqslant \rho_2$		
$\frac{\gamma}{\alpha}<0$		ρίζες ετερόσημες $\rho_1<0<\rho_2$
$\frac{\gamma}{\alpha}=0$		οι ρίζες είναι 0 και $\frac{-\beta}{\alpha}$
$\frac{\gamma}{\alpha}>0$ και $\Delta \geqslant 0$	$\frac{-\beta}{\alpha}>0$	δύο ρίζες θετικές $0<\rho_1 \leqslant \rho_2$
	$\frac{-\beta}{\alpha}<0$	δύο ρίζες αρνητικές $\rho_1 \leqslant \rho_2<0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η εξίσωση $5x^2+7x-6=0$ έχει ρίζες άνισες και ετερόσημες, γιατί είναι $\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{6}{5}<0$.

Η εξίσωση $-x^2+3x=0$ έχει ρίζες 0 και $\frac{-\beta}{\alpha}=-\frac{3}{-1}=3$, γιατί είναι $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{0}{-1}=0$.

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ έχει δύο ρίζες θετικές άνισες, γιατί είναι $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{10}{1}=10>0$, $\Delta=49-4\cdot1\cdot10=9>0$ και $\frac{-\beta}{\alpha}=7>0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι τιμές του λ, για τις οποίες η εξίσωση $x^2-2x+\lambda+2=0$ έχει α) 2 ρίζες ετερόσημες β) 2 ρίζες θετικές και άνισες γ) 2 ρίζες αρνητικές.

Είναι $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda+2}{1}=\lambda+2$, $\Delta'=1-(\lambda+2)=-\lambda-1$, $\frac{-\beta}{\alpha}=2$.

α) Πρέπει να είναι $\frac{\gamma}{\alpha}<0$ ή $\lambda+2<0$. Άρα $\lambda<-2$.

β) Πρέπει να είναι $\frac{\gamma}{\alpha}>0$ **και** $\Delta'>0$, αφού $\frac{-\beta}{\alpha}=2>0$. Επομένως πρέπει $\lambda+2>0$ **και** $-\lambda-1>0$, δηλαδή: $\lambda>-2$ **και** $\lambda<-1$, άρα $-2<\lambda<-1$.

γ) Πρέπει να είναι $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ και $\Delta' > 0$ και $\frac{-\beta}{\alpha} < 0$. Επειδή όμως $\frac{-\beta}{\alpha} = 2 > 0$, δεν υπάρχει τιμή του λ, για να έχουμε δύο ρίζες αρνητικές.

2. **Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ με $\alpha\beta\gamma \neq 0$ και ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της $x_1(x-x_2)^2+x_2(x-x_1)^2 = 0$, να αποδειχθεί ότι, αν οι x_1, x_2 είναι ετερόσημες, τότε και οι $\rho_1\, \rho_2$ είναι ετερόσημες.**

Η εξίσωση $x_1(x-x_2)^2+x_2(x-x_1)^2 = 0$ μετά τις πράξεις γίνεται

$$(x_1+x_2)x^2-4x_1x_2x+x_1x_2(x_1+x_2) = 0$$

και επειδή από την πρώτη εξίσωση έχουμε $x_1+x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ και $x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$, θα είναι

$$-\alpha\beta x^2-4\alpha\gamma x-\beta\gamma = 0.$$

Για να έχει η εξίσωση αυτή ρίζες ετερόσημες, πρέπει και αρκεί

$$\frac{-\beta\gamma}{-\alpha\beta} < 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\gamma}{\alpha} < 0.$$

Αυτό όμως ισχύει, γιατί η $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ έχει ρίζες ετερόσημες.

3. **Αν k, λ, μ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου, να δειχθεί ότι η εξίσωση**

$$kx^2-2(\lambda+\mu)x+k = 0$$

έχει δύο ρίζες θετικές και άνισες.

Θα πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ **και** $\Delta' > 0$ **και** $\frac{-\beta}{\alpha} > 0$. Δηλαδή

$\frac{k}{k} > 0$ **και** $(\lambda+\mu)^2-k^2 > 0$ **και** $\frac{2(\lambda+\mu)}{k} > 0$ ή

$1 > 0$ **και** $(\lambda+\mu-k)(\lambda+\mu+k) > 0$ **και** $k(\lambda+\mu) > 0$.

Οι ανισότητες αυτές αληθεύουν, γιατί οι k, λ, μ είναι θετικοί αριθμοί και $\lambda+\mu > k$ ή $\lambda+\mu-k > 0$, επειδή κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων.

Ασκήσεις 14, 15. 16.

ΤΡΙΩΝΥΜΟ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου δεύτερου βαθμού

8.6 Το πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$, ονομάζεται **τριώνυμο δεύτερου βαθμού**. Οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ λέγονται **και ρίζες του τριωνύμου** και η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$ **διακρίνουσα του τριωνύμου**. Οι ρίζες του τριωνύμου προφανώς υπάρχουν, όταν $\Delta \geqslant 0$.

Από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξισώσεως (§ 8.2) $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ προκύπτουν διάφορες μορφές του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Έτσι από την (3) της § 8.2 έχουμε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \qquad (1)$$

Ειδικότερα

- Αν $\Delta > 0$, και ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες του, τότε από την (4), λόγω των (5) της § 8.2, έχουμε $x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha} = (x-\rho_1)(x-\rho_2)$, άρα

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2) \qquad (2)$$

- Αν $\Delta = 0$, τότε $\rho_1 = \rho_2 = \rho = -\frac{\beta}{2\alpha}$, οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-\rho)^2 = \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \qquad (3)$$

- Αν $\Delta < 0$, τότε η (1) γράφεται και

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right] \qquad (4)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για το τριώνυμο $f(x) = 2x^2-6x+4$, που έχει ρίζες $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 2$, έχουμε: $f(x) = 2(x-1)(x-2)$.

2. Η τιμή του λ, για την οποία το τριώνυμο $f(x) = 3x^2-2x+2\lambda-1$ παίρνει τη μορφή (3), βρίσκεται από την ισότητα:
$\Delta' = 0$ ή $1-3(2\lambda-1) = 0$ ή $6\lambda-4 = 0$ ή $\lambda = \frac{2}{3}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:**

α) $f(x) = x^2-(k+\lambda+2)x+2(k+\lambda)$

β) $g(x) = (x+3)^2+(x+4)^2+(x+5)^2-(x+6)^2$.

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της εξισώσεως $f(x) = 0$. Είναι

$$\rho_{1,2} = \frac{k+\lambda+2 \pm \sqrt{(k+\lambda+2)^2-8(k+\lambda)}}{2} = \frac{k+\lambda+2 \pm \sqrt{(2-k-\lambda)^2}}{2}$$

$$= \frac{k+\lambda+2 \pm (2-k-\lambda)}{2} \begin{cases} \nearrow \rho_1 = \dfrac{k+\lambda+2+2-k-\lambda}{2} = 2 \\ \searrow \rho_2 = \dfrac{k+\lambda+2-2+k+\lambda}{2} = k+\lambda. \end{cases}$$

Άρα είναι $f(x) = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$
$= (x-2)(x-k-\lambda)$.

β) Είναι $g(x) = x^2+6x+9+x^2+8x+16+x^2+10x+25-x^2-12x-36 = 2x^2+12x+14.$

Βρίσκουμε τις ρίζες της $g(x) = 0$, οι οποίες είναι

$$\rho_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-2\cdot 14}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \rho_1 = -3+\sqrt{2} \\ \searrow \rho_2 = -3-\sqrt{2} \end{array}$$

Άρα είναι $g(x) = 2(x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2})$.

2. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

α) $\dfrac{x^2-(k+\lambda)x+k\lambda}{x^2-(1+\lambda)x+\lambda}$, β) $\dfrac{x^2-3kx+2k^2}{x^2-4k^2}$.

Παραγοντοποιούμε τους όρους κάθε κλάσματος και έχουμε:

α) $\dfrac{x^2-(k+\lambda)x+k\lambda}{x^2-(1+\lambda)x+\lambda} = \dfrac{(x-k)(x-\lambda)}{(x-1)(x-\lambda)} = \dfrac{x-k}{x-1}$.

β) $\dfrac{x^2-3kx+2k^2}{x^2-4k^2} = \dfrac{(x-2k)(x-k)}{(x-2k)(x+2k)} = \dfrac{x-k}{x+2k}$.

3. Να βρεθούν οι τιμές του λ, για τις οποίες το τριώνυμο

$$f(x) = x^2-(6\lambda-3)x+9\lambda^2-8$$

είναι τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου το οποίο και να προσδιοριστεί.

Για να είναι τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου, επειδή $\alpha = 1$, θα πρέπει $\Delta = 0$. Δηλαδή $(6\lambda-3)^2-4(9\lambda^2-8) = 0$ ή $\lambda = \dfrac{41}{36}$.

Για $\Delta = 0$ το τριώνυμο γίνεται:

$$f(x) = \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(x - \frac{-(6\lambda-3)}{2}\right)^2$$

και για $\lambda = \dfrac{41}{36}$, $f(x) = \left(x-\dfrac{6\cdot\frac{41}{36}-3}{2}\right)^2 = \left(x-\dfrac{23}{12}\right)^2$.

Ασκήσεις 17, 18, 19.

Πρόσημο τριωνύμου

8.7 Έστω f η πολυωνυμική συνάρτηση, με τιμή στο x το τριώνυμο

$$f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο του $f(x)$ για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής x.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $\Delta>0$. Τότε το τριώνυμο, που έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 άνισες, γράφεται (§ 8.6)

$$f(x) = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2).$$

Υποθέτοντας $\rho_1 < \rho_2$ έχουμε:

- Προφανώς $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$
- Για $x < \rho_1 < \rho_2$ είναι $x-\rho_1 < 0$ **και** $x-\rho_2 < 0$, οπότε $(x-\rho_1)(x-\rho_2) > 0$.

  Άρα το τριώνυμο είναι **ομόσημο** του α.
- Για $\rho_1 < \rho_2 < x$ είναι $x-\rho_1 > 0$ **και** $x-\rho_2 > 0$, οπότε $(x-\rho_1)(x-\rho_2) > 0$.

  Άρα το τριώνυμο είναι **ομόσημο** του α.
- Για $\rho_1 < x < \rho_2$ έχουμε $x-\rho_1 > 0$ **και** $x-\rho_2 < 0$, οπότε $(x-\rho_1)(x-\rho_2) < 0$.

  Άρα το τριώνυμο είναι **ετερόσημο** του α.

2. $\Delta = 0$. Τότε το τριώνυμο (§ 8.6) γράφεται

$$f(x) = \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Άρα μηδενίζεται για $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$, ενώ για κάθε $x \neq \dfrac{-\beta}{2\alpha}$, επειδή $\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 > 0$, είναι **ομόσημο** του α.

3. $\Delta < 0$. Τότε από τη σχέση (4) της § 8.6 έχουμε:

$$f(x) = \alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

και επειδή $\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \geqslant 0$ και $\dfrac{-\Delta}{4\alpha^2} > 0$, η παράσταση $\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4\alpha^2}$ είναι πάντοτε θετική και το τριώνυμο είναι **ομόσημο** του α για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι ετερόσημο του α μόνο στην περίπτωση που είναι $\Delta > 0$ και ο x παίρνει τιμές που βρίσκονται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Έστω ξ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε, εξετάζοντας την τιμή της f στο ξ, δηλαδή την $f(\xi) = \alpha\xi^2+\beta\xi+\gamma$, έχουμε τις περιπτώσεις:

   - **$f(\xi) = 0$.** Τότε ο ξ είναι ρίζα του $f(x)$
   - **$\alpha f(\xi)<0$,** δηλαδή ο $f(\xi)$ είναι ετερόσημος του α. Τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες ρ_1, ρ_2 μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο αριθμός ξ.
   - **$\alpha f(\xi)>0$,** δηλαδή ο $f(\xi)$ είναι ομόσημος του α. Τότε, **άν** υπάρχουν οι ρίζες ρ_1, ρ_2 και είναι $\rho_1 < \rho_2$, το $\xi \notin [\rho_1, \rho_2]$. Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να διακρίνουμε ποια από τις περιπτώσεις $\xi < \rho_1$ ή $\xi > \rho_2$ έχουμε, αν συγκρίνουμε τον ξ με το ημιάθροισμα $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}$,

     επειδή είναι πάντοτε $\rho_1 < \dfrac{\rho_1+\rho_2}{2} < \rho_2$.

2. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς ξ_1, ξ_2 ισχύει **$f(\xi_1)\cdot f(\xi_2) < 0$,** τότε οι αριθμοί $f(\xi_1)$ και $f(\xi_2)$ είναι ετερόσημοι. Αυτό σημαίνει ότι ένας από τους $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$ είναι ετερόσημος του α. Επομένως (Παρατ. 1) ένας μόνο από τους ξ_1, ξ_2 βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου $f(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Έστω το τριώνυμο $-x^2+6x-9$. Επειδή $\Delta' = 3^2-(-1)(-9) = 9-9 = 0$, τό
τριώνυμο έχει τή διπλή ρίζα $\rho = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = 3$ και είναι ομόσημο του α, δη-
λαδή αρνητικό για κάθε $x \neq 3$, ενώ για $x = 3$ μηδενίζεται.

Το τριώνυμο $2x^2-16x+30$, επειδή $\Delta' = 8^2-2\cdot 30 = 4 > 0$, είναι ετερόσημο του $\alpha = 2$, δηλαδή αρνητικό για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών του 3 και 5. Επομένως για $3 < x < 5$ είναι αρνητικό και για $x < 3$ ή $x > 5$ θετικό.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στους παρακάτω πίνακες

$\Delta = 0$	x	$-\infty$	3	$+\infty$
	$-x^2+6x-9$	$-$	0	$-$

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	3		5	$+\infty$
	$2x^2-16x+30$	$+$	0	$-$	0	$+$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχθεί ότι αν α,β,γ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου, τότε το τριώνυμο**
$$f(x) = \beta^2x^2+(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)x+\gamma^2, \quad \beta \neq 0$$
είναι θετικό για οποιαδήποτε τιμή του x.

Για να είναι το τριώνυμο πάντοτε θετικό, δηλαδή ομόσημο του συντελεστή β^2 για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta < 0$. Είναι:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2-4\beta^2\gamma^2\\
&= [\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+2\beta\gamma][\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-2\beta\gamma]\\
&= [(\beta+\gamma)^2-\alpha^2]\,[(\beta-\gamma)^2-\alpha^2]\\
&= (\beta+\gamma+\alpha)\,(\beta+\gamma-\alpha)\,(\beta-\gamma+\alpha)\,(\beta-\gamma-\alpha).
\end{aligned}$$

Επειδή α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου, θα είναι

$\alpha+\beta+\gamma > 0$ [άθροισμα θετικών αριθμών]
$\beta+\gamma-\alpha > 0$ $[\beta+\gamma > \alpha]$
$\beta-\gamma+\alpha > 0$ $[\beta+\alpha > \gamma]$
$\beta-\gamma-\alpha < 0$ $[\beta < \alpha+\gamma]$

Άρα μόνο ο τελευταίος παράγοντας είναι αρνητικός και επομένως $\Delta < 0$.

2. **Να βρεθούν οι τιμές του λ, για τις οποίες το τριώνυμο $f(x) = x^2-x+\lambda-1$ είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θετικό και για ποιες τιμές των λ και x το τριώνυμο γίνεται αρνητικό.**

Επειδή $\alpha = 1 > 0$, για να είναι το τριώνυμο πάντοτε θετικό, δηλαδή ομόσημο του α, θα πρέπει να είναι $\Delta < 0$. Επομένως:
$$1-4(\lambda-1) < 0 \quad ή \quad \lambda > \frac{5}{4}.$$
Το τριώνυμο γίνεται αρνητικό, δηλαδή ετερόσημο του α, όταν $\Delta > 0$ και ο x παίρνει τιμές μεταξύ των ριζών. Δηλαδή

όταν $1-4(\lambda-1) > 0$ ή $\lambda < \dfrac{5}{4}$ και (επειδή οι ρίζες είναι
$\dfrac{1+\sqrt{5-4\lambda}}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{5-4\lambda}}{2}$), $\quad \dfrac{1-\sqrt{5-4\lambda}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{5-4\lambda}}{2}$

3. **Να αποδειχθεί, χωρίς να χρησιμοποιηθεί η διακρίνουσα, ότι τα τριώνυμα:**
α) $f(x) = (x-k)(x-\lambda)+(x-\lambda)(x-\mu)+(x-\mu)(x-k) \quad (k < \lambda < \mu)$
β) $g(x) = (x-k)(x-\lambda)+p(x-k)+q(x-\lambda) \quad (k \neq \lambda, \quad pq > 0)$
έχουν ρίζες άνισες.

α) Μετά τις πράξεις έχουμε :
$f(x) = 3x^2-2(k+\lambda+\mu)x+k\lambda+\lambda\mu+\mu k$, οπότε $\alpha = 3 > 0$.
Εξάλλου από την αρχική μορφή του $f(x)$ είναι $f(\lambda) = (\lambda-\mu)(\lambda-k) < 0$, επειδή $k < \lambda < \mu$. Άρα $\alpha f(\lambda) < 0$.
Συνεπώς (§ 8.7, Παρατ. 1) το τριώνυμο έχει ρίζες άνισες.

β) Έχουμε $g(k) = q(k-\lambda)$, $g(\lambda) = p(\lambda-k)$, άρα
$$g(k)\cdot g(\lambda) = -pq(k-\lambda)^2 < 0.$$
Συνεπώς (§ 8.7 Παρατ. 2) το τριώνυμο έχει ρίζες άνισες.

4. **Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του κλάσματος :**

$$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$$

για πραγματικές τιμές του x.

Θέτουμε $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=y$. Τότε θα είναι :

$$x^2-3x+4=y(x^2+3x+4) \quad ή$$

$$(y-1)x^2+3(y+1)x+4(y-1)=0.$$

Αφού ο x είναι πραγματικός αριθμός, θα πρέπει $\Delta \geqslant 0$, δηλαδή:

$$9(y+1)^2-16(y-1)^2 \geqslant 0$$

$$ή \quad -7y^2+50y-7 \geqslant 0.$$

Επειδή το τριώνυμο $-7y^2+50y-7$ έχει $\alpha=-7<0$ και ρίζες τις $\frac{1}{7}$, 7 θα γίνεται θετικό, δηλαδή ετερόσημο του α, όταν $\frac{1}{7} \leqslant y \leqslant 7$.

Άρα η ελάχιστη τιμή του κλάσματος είναι $\frac{1}{7}$ και η μέγιστη 7.

5. **Να συγκριθούν οι ρίζες του τριωνύμου:**

α) $f(x)=3x^2-5x-7$ **με τον αριθμό 2**

β) $g(x)=x^2-6x+8$ **με τον αριθμό 5.**

α) Επειδή $\alpha=3>0$ και $f(2)=-5$, έχουμε $\alpha f(2)<0$.

Άρα το f(x) έχει ρίζες x_1, x_2 άνισες και ο αριθμός 2 βρίσκεται μεταξύ τους, δηλαδή $x_1<2<x_2$.

β) Επειδή $\alpha=1>0$ και $g(5)=3>0$, έχουμε $\alpha g(5)>0$. Επειδή ακόμη είναι $\Delta'=9-8=1>0$, το τριώνυμο έχει ρίζες άνισες και επομένως ο αριθμός 5 βρίσκεται εκτός του διαστήματος των ριζών.

Για να διαπιστώσουμε αν ο αριθμός 5 είναι μικρότερος από τη μικρότερη ή μεγαλύτερος από τη μεγαλύτερη ρίζα, τον συγκρίνουμε με το ημιάθροισμα των ριζών $\frac{-\beta}{2\alpha}$ που βρίσκεται πάντοτε μεταξύ των ριζών.

Είναι $\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{6}{2\cdot 1}=3$ και επειδή $\rho_1<3<\rho_2$ και $5>3$ θα είναι $5>\rho_2$.

Ασκήσεις 20, 21, 22, 23, 24.

Ανισώσεις δεύτερου βαθμού

8.8 Μια ανίσωση δεύτερου βαθμού με άγνωστο $x \in \mathbb{R}$ είναι της μορφής

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \quad ή \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma<0 \quad (\alpha \neq 0).$$

Για να λύσουμε μια τέτοια ανίσωση, πρέπει να βρούμε τις τιμές του x, για τις οποίες το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γίνεται αντιστοίχως θετικό ή αρνητικό. Άρα η λύση μιας ανισώσεως δεύτερου βαθμού ανάγεται στην εύρεση του προσήμου του τριωνύμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $-x^2+6x-8>0$. Εδώ ζητούμε τις τιμές του x, για τις οποίες το τριώνυμο $-x^2+6x-8$ είναι θετικό, δηλαδή ετερόσημο του $\alpha=-1$. Επειδή όμως $\Delta'=9-(-1)(-8)=1>0$, το τριώνυμο $-x^2+6x-8$ είναι ετερόσημο του $\alpha=-1$ για τιμές του x που είναι μεταξύ των ριζών του 2 και 4, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-x^2+6x-8$		−	0	+	0	−	

Συνεπώς το σύνολο λύσεων της ανισώσεως είναι το διάστημα (2, 4).

2. $x^2-6x+10>0$. Εδώ ζητούμε τις τιμές του x, για τις οποίες το τριώνυμο είναι θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\alpha=1$. Επειδή όμως είναι $\Delta'=9-10=-1<0$, το τριώνυμο είναι πάντοτε ομόσημο του α και συνεπώς η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. $4x^2-12x+9<0$. Έχουμε $\Delta'=36-4\cdot 9=0$. Άρα το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα την $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ και είναι ομόσημο του $\alpha=4$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \neq \frac{3}{2}$. Συνεπώς η ανίσωση δεν έχει λύση.

4. Στο παράδειγμα 1, αν είχαμε την $-x^2+6x-8 \geqslant 0$, τότε στο σύνολο λύσεων θα πρέπει να υπάρχουν και οι τιμές του x, οι οποίες μηδενίζουν το τριώνυμο, δηλαδή οι ρίζες του.

Συνεπώς εδώ το σύνολο λύσεων είναι το κλειστό διάστημα [2, 4].

Ανισώσεις ειδικής μορφής

8.9 Για να λύσουμε ανισώσεις της μορφής

$$A(x).B(x).\Gamma(x)...Q(x) \lesseqgtr 0 \qquad (1)$$

όπου A(x), B(x), Γ(x)... Q(x) πολυώνυμα πρώτου ή δεύτερου βαθμού ως προς x, βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και μετά προσδιορίζουμε το πρόσημο του γινομένου $A(x).B(x).\Gamma(x)...Q(x)$, όπως φαίνεται στο επόμενο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η ανίσωση

$$(3x-7)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)<0.$$

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά. Έτσι έχουμε:

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3x-7$		−	0	+	

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		−	0	+	0	−	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
x^2-6x+9		+	0	+	

Τοποθετούμε στη συνέχεια σε έναν κοινό άξονα τις ρίζες των παραγόντων και σχηματίζουμε τον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα, ο οποίος δίνει και το πρόσημο του γινομένου

$$\Gamma = (5x-7)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{3}$		3		4		$+\infty$
$3x-7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-6x+9		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
Γ		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$		$-$	

Βλέπουμε ότι το γινόμενο $\Gamma = (3x-7)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)$ είναι αρνητικό για $-1 < x < \frac{7}{3}$ και για $x > 4$. Συνεπώς η ανίσωση αληθεύει για $-1 < x < \frac{7}{3}$ ή $4 < x$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδή είναι $\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) \gtrless 0$,

το σύνολο λύσεων της κλασματικής ανισώσεως $\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0$ είναι

το ίδιο με το σύνολο λύσεων της $A(x)B(x) \gtrless 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x^3-5x^2+6x}{x+1} < 0$.

Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}-\{-1\}$ και είναι :

$$\frac{x^3-5x^2+6x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3-5x^2+6x) < 0.$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x^2-5x+6) < 0.$$

Αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Σχηματίζουμε λοιπόν τον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα που μας δίνει το πρόσημο του γινομένου

$$\Gamma = x(x+1)(x^2-5x+6)$$

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+6		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Γ		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η ανίσωση αληθεύει, όταν

$$-1 < x < 0 \quad \text{ή} \quad 2 < x < 3.$$

2. Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x^2-3x+2 > 0$$
$$x^2-5x-50 < 0$$
$$x^2-2x-15 > 0.$$

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε τριωνύμου χωριστά:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		10		$+\infty$
$x^2-5x-50$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2-2x-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Τα συμπεράσματα αυτά τα συνοψίζουμε στον επόμενο πίνακα :

x	$-\infty$		-5		-3		1		2		5		10		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2-5x-50$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2-2x-15$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Οι ανισώσεις συναληθεύουν, όταν τα τριώνυμα είναι, κατά τη σειρά που δόθηκαν, θετικό, αρνητικό, θετικό $(+, -, +)$, που συμβαίνει στις στήλες των διαστημάτων $(-5, -3)$ και $(5, 10)$. Δηλαδή, όταν

$$-5 < x < -3 \quad \text{ή} \quad 5 < x < 10.$$

3. Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η ανίσωση

$$(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6>0$$

αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για να είναι το τριώνυμο $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6$ πάντοτε θετικό, θα πρέπει $\Delta'<0$ και $\alpha>0$, δηλαδή να συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$\left.\begin{aligned}(2\lambda-3)^2-(\lambda-2)(5\lambda-6)&<0\\ \lambda-2&>0\end{aligned}\right\}\quad \text{ή}\quad \left.\begin{aligned}-\lambda^2+4\lambda-3&<0\\ \lambda-2&>0.\end{aligned}\right\}$$

Έχουμε τον πίνακα

λ	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$-\lambda^2+4\lambda-3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\lambda-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

από τον οποίο προκύπτει ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $\lambda>3$.

Άρα η ανίσωση $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6>0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν $\lambda>3$.

Ασκήσεις 25, 26, 27, 28, 29.

Μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$

8.10 Έστω $\mathcal{C}$ η γραφική παράσταση της f ως προς σύστημα αναφοράς Oxy. Τότε η εξίσωση $y=f(x)$ της $\mathcal{C}$, σύμφωνα με την (1) της § 8.6, γράφεται:

$$y=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha} \tag{1}$$

$$\text{ή}\quad y+\frac{\Delta}{4\alpha}=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Αν τώρα θέσουμε $x=X+\frac{-\beta}{2\alpha}$ και $y=\Psi+\frac{-\Delta}{4\alpha}$, η (1) γίνεται

$$\Psi=\alpha X^2 \tag{2}$$

ως προς νέο σύστημα αναφοράς το O'XΨ (§ 7.4), που έχει αρχή το $O'\left(\frac{-\beta}{2\alpha},\frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονες X'X, Ψ'Ψ, αντιστοίχως παράλληλους προς τους x'x, y'y.

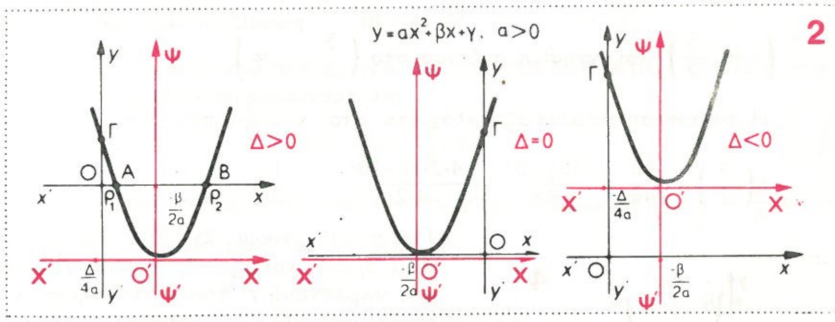
Η (2) όμως (§ 7.8) είναι εξίσωση παραβολής, η οποία έχει κορυφή το O' και άξονα συμμετρίας τον Ψ'Ψ. Επομένως και η (1) ως προς το αρχικό

σύστημα Oxy θα είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή το $O'\left(\frac{-\beta}{2\alpha},\frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία Ψ'Ψ με εξίσωση $x=\frac{-\beta}{2\alpha}$. Έτσι, αν λάβουμε υπόψη τα συμπεράσματα της § 7.15 και αναχθούμε συγχρόνως στο αρχικό σύστημα αναφοράς Oxy, θα έχουμε τα εξής:

1. $\alpha>0$. Τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{-\beta}{2\alpha}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{-\beta}{2\alpha},+\infty\right)$. Άρα στο $x=\frac{-\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει (§ 7.10) ελάχιστο, που είναι ίσο με $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)=\frac{-\Delta}{4\alpha}$. Για $x=0$ έχουμε $y=\gamma$ και το $y=0$, όταν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Άρα η $\mathcal{C}$ τέμνει τον Oy στο σημείο Γ(0, γ) και τον Ox στα σημεία που έχουν ως τετμημένες τις ρίζες ρ_1,ρ_2 της $f(x)=0$. Επομένως ο άξονας των τετμημένων έχει με τη $\mathcal{C}$:

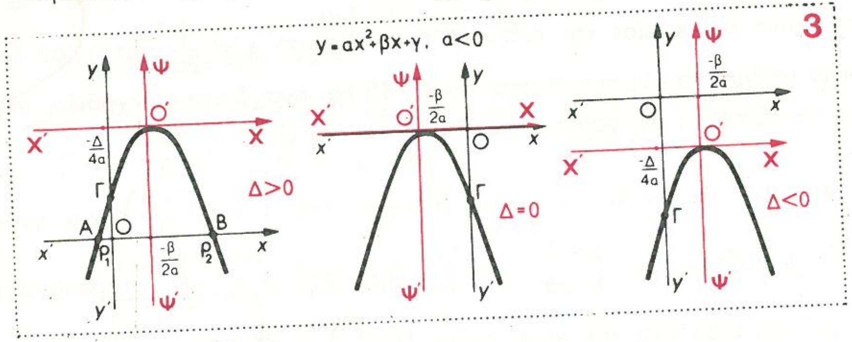
- Δύο κοινά σημεία, τα $A(\rho_1,0)$ και $B(\rho_2,0)$, αν $\Delta>0$.
- Ένα κοινό σημείο, το $O'\left(\frac{-\beta}{2\alpha},0\right)$, αν $\Delta=0$.
- κανένα κοινό σημείο, αν $\Delta<0$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 2.



2. $\alpha<0$. Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{-\beta}{2\alpha}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{-\beta}{2\alpha},+\infty\right)$. Άρα στο $x=\frac{-\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει μέγιστο, που είναι ίσο με $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)=\frac{-\Delta}{4\alpha}$. Η γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ της f τέμνει όπως και στην περίπτωση 1 τον Oy στο σημείο Γ(0, γ) και

τον Οx στα σημεία που έχουν ως τετμημένη τις ρίζες της $f(x) = 0$. Τα παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 3.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Από την προηγούμενη ανάλυση (σχ. 2 και 3) προκύπτουν τα εξής:

1. Το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι ετερόσημο του α, όταν $\Delta > 0$ και $\rho_1 < x < \rho_2$.
2. Η παραβολή με εξίσωση $y = \alpha x^2$ είναι «ίση» με την παραβολή που έχει εξίσωση $y = \alpha x^2+\beta x+\gamma$. Οι δύο παραβολές διαφέρουν μόνο ως προς τη θέση της κορυφής τους.

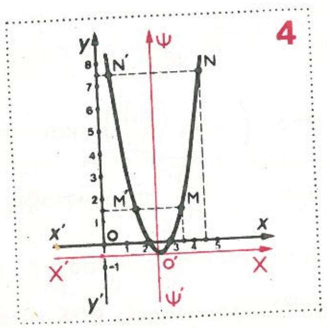
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2-10x+12$.

Επειδή $\alpha = 2 > 0$ και $\frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{5}{2}$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{5}{2}$, που είναι:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha} = \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} = \frac{4\cdot 2\cdot 12-10^2}{4\cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$



Για $y = 0$, έχουμε $2x^2-10x+12 = 0$, με ρίζες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 3$. Άρα η γραφική της παράσταση $\mathcal{C}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία A(2, 0) και B(3, 0).

Για $x = 0$, έχουμε $y = 12$. Άρα η $\mathcal{C}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ(0, 12).

Επειδή $\frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{5}{2}$, η $\mathcal{C}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = \frac{5}{2}$.

Στη $\mathcal{C}$ ανήκουν π.χ. και τα σημεία M και N με συντεταγμένες αντιστοίχως (Παρ. 2)

$$x = \frac{5}{2} + 1 = 3{,}5, \qquad y = -\frac{1}{2} + 2.1^2 = 1{,}5$$

και $$x = \frac{5}{2} + 2 = 4{,}5, \qquad y = -\frac{1}{2} + 2.2^2 = 7{,}5.$$

καθώς και τα συμμετρικά τους M', N' ως προς την ευθεία $x = \frac{5}{2}$.

Με τα παραπάνω συμπεράσματα κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως (σχ. 4).

Άσκηση 30.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Εξισώσεις με περισσότερους από έναν αγνώστους

8.11 Στα επόμενα αναφερόμαστε σε εξισώσεις με δύο ή περισσότερους αγνώστους $x, y, \ldots, z$ (§ 1.6 Σημ.) που είναι μεταβλητές **πραγματικές.** Κάθε τέτοια εξίσωση, επειδή μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμη με δεύτερο μέλος 0, παίρνει τη μορφή $\sigma(x, y, \ldots, z) = 0$. Συνήθως το πρώτο μέλος $\sigma(x, y, \ldots, z)$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και ο βαθμός του **ως προς τους αγνώστους** λέγεται και **βαθμός της εξισώσεως.** Π.χ. η εξίσωση $\alpha x+\beta y = \gamma$ είναι α' βαθμού με δύο αγνώστους. Η εξίσωση $xy+zx = 2z+3$ είναι β' βαθμού με τρεις αγνώστους κ.ο.κ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση $\quad \alpha x+\beta y = \gamma \qquad$ **(1)**

- Αν ένας από τους συντελεστές α, β είναι διαφορετικός από το 0, π.χ. ο β, η (1) είναι ισοδύναμη της

$$y = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}x$$

της οποίας λύσεις είναι όλα τα ζεύγη της μορφής $(x, \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}x)$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

- Αν $\alpha = \beta = 0$, τότε:

αν $\gamma \neq 0$, η (1) δεν έχει λύση (αδύνατη)

αν $\gamma = 0$, η (1) αληθεύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (ταυτότητα).

Συστήματα εξισώσεων

8.12 Ένα σύστημα εξισώσεων είναι **σύζευξη** εξισώσεων (§ 1.10 Σημ.). Η επίλυσή του, δηλαδή η εύρεση του συνόλου των λύσεων που επαληθεύουν **όλες** τις εξισώσεις του, γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλα ισοδύναμα συστήματα και τελικά σε σύστημα με λύσεις γνωστές.

Γι' αυτή τη μετατροπή συχνά αντικαθιστούμε μια εξίσωση του συστήματος με άλλη ισοδύναμή της (Κ. Αντ. § 1.27).

Ειδικότερα, όπως είναι γνωστό και από τα γυμνασιακά μαθήματα, εφαρμόζουμε κυρίως τις ακόλουθες μεθόδους.

- **Μέθοδος αντικαταστάσεως.**

Λύνουμε μια εξίσωση $\sigma(x, y, \ldots, z) = 0$ του συστήματος ως προς έναν άγνωστο, π.χ. τον x, δηλαδή τη μετατρέπουμε σε ισοδύναμη της μορφής $x = \sigma_1(y, \ldots, z)$ και αντικαθιστούμε σε άλλη εξίσωσή του $\varphi(x, y, \ldots, z) = 0$ τό x μέ $\sigma_1(y, \ldots, z)$.

Τα συστήματα π.χ.

$$\begin{cases} \sigma(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \begin{cases} x = \sigma_1(y) \\ \varphi(\sigma_1(y), y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

είναι ισοδύναμα.

Πράγματι, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\sigma(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \sigma_1(\beta)$.

Αν λοιπόν (α, β) είναι λύση του (1), έχουμε $\{\alpha = \sigma_1(\beta)$ **και** $\varphi(\alpha, \beta) = 0\}$. Άρα $\varphi(\sigma_1(\beta), \beta) = 0$ και το (α, β) ειναι λύση του (2).

Αντιστρόφως, αν (α, β) είναι λύση του (2), είναι $\{\alpha = \sigma_1(\beta)$ **και** $\varphi(\sigma_1(\beta), \beta) = 0\}$.

Άρα $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ και το (α, β) είναι λύση του (1).

- **Μέθοδος αντίθετων συντελεστών.**

Από τις εξισώσεις $\sigma(x, y, \ldots, z) = 0$ και $\varphi(x, y, \ldots, z) = 0$ του συστήματος σχηματίζουμε ένα *γραμμικό συνδυασμό* τους

$$\lambda\sigma(x, y, \ldots, z) + \mu\varphi(x, y, \ldots, z) = 0$$

με *συντελεστές* $\lambda, \mu \neq 0$, με τον οποίο αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις αυτές.

Τα συστήματα π.χ.

$$\begin{cases} \sigma(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \begin{cases} \sigma(x, y) = 0 \\ \lambda\sigma(x, y) + \mu\varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

είναι ισοδύναμα.

Πράγματι, αν (α, β) είναι λύση του (1), έχουμε $\sigma(\alpha, \beta) = 0$ **και** $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Άρα $\lambda\sigma(\alpha, \beta) + \mu\varphi(\alpha, \beta) = 0$ και το (α, β) είναι λύση του συστήματος (2). Αντιστρόφως, αν (α, β) είναι λύση του (2), έχουμε $\sigma(\alpha, \beta) = 0$ **και** $\lambda\sigma(\alpha, \beta) + \mu\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Άρα $\mu\varphi(\alpha, \beta) = 0$ και επειδή $\mu \neq 0$, είναι $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ και το (α, β) είναι λύση του (1).

Συνήθως οι συντελεστές λ και μ εκλέγονται έτσι, ώστε στην εξίσωση $\lambda\sigma(x, y) + \mu\varphi(x, y) = 0$ να μηδενίζεται ο συντελεστής του ενός από τους αγνώστους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 & (1) \\ 2x + y - z = 5 & (2) \\ x - y - 2z = 1 & (3) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε την (1) με το γραμμικό συνδυασμό των (1) και (3) που έχει συντελεστές -1 και 1, δηλαδή με την εξίσωση

$$y - 5z = 1 \qquad (1^*)$$

Επίσης αντικαθιστούμε την (2) με το γραμμικό συνδυασμό των (1) και (2) που έχει συντελεστές -2 και 1, δηλαδή με την εξίσωση

$$5y - 7z = 5 \qquad (2^*)$$

Μπορούμε τώρα να λύσουμε το σύστημα των (1*) και (2*) με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως. Έχουμε δηλαδή

$$\begin{cases} y - 5z = 1 \\ 5y - 7z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5z + 1 \\ 5y - 7z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5z + 1 \\ 5\cdot(5z + 1) - 7z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5z + 1 \\ 25z + 5 - 7z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5z + 1 \\ 18z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5z + 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Οπότε από την (1) παίρνουμε

$$x = 2\cdot 1 - 3\cdot 0 = 2.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $(2, 1, 0)$.

Συστήματα εξισώσεων α' βαθμού με δύο αγνώστους

8.13 Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma & (1) \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' & (2) \end{cases}$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Οι συντελεστές $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ είναι όλοι 0. Τότε (§ 8.11 Εφ.)

1. αν ένας από τους γ, γ' είναι διαφορετικός από το 0, τότε μια από τις εξισώσεις του, άρα και το σύστημα, δεν έχει λύση.
2. αν $\gamma = \gamma' = 0$, το σύστημα αληθεύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

II. Ένας τουλάχιστο από τους $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ δεν είναι 0, π.χ. $\alpha \neq 0$.

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως:

Η (1) γράφεται ισοδύναμα :

$$x = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha} \qquad (3)$$

και αντικαθιστώντας το x στην (2) έχουμε

$$\alpha'\left(\frac{\gamma - \beta y}{\alpha}\right) + \beta' y = \gamma' \qquad \text{ή}$$

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)y = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \qquad (4)$$

οπότε (§ 2.21):

1. αν $\alpha\beta'-\alpha'\beta \neq 0$, έχουμε $y = \dfrac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ (5)

και από την (3) βρίσκουμε $x = \dfrac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ (6)

2. αν $\alpha\beta'-\alpha'\beta = 0$, τότε:

i. αν $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma \neq 0$, η (4) δεν έχει λύση, άρα ούτε και το σύστημα έχει λύση

ii. αν $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma = 0$, η (4) αληθεύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (τα ζεύγη $\left(\dfrac{\gamma-\beta y}{\alpha}, y\right)$, που προκύπτουν από την (3)).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Στα ίδια συμπεράσματα θα καταλήγαμε, αν υποθέταμε $\alpha' \neq 0$ Εξάλλου υποθέτοντας $\beta \neq 0$ ή $\beta' \neq 0$ και εργαζόμενοι ομοίως καταλήγουμε σε παρόμοια συμπεράσματα (Στις περιπτώσεις, **II2**, i και ii αντί για $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma$ εμφανίζεται ο αριθμός $\gamma\beta'-\gamma'\beta$).

2. Ο αριθμός $\mathbf{D = \alpha\beta'-\alpha'\beta}$ μπορεί να παρασταθεί σχηματικά $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ και λέγεται **ορίζουσα** των α, β, α' β'. Ομοίως θέτουμε

$$\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \quad \text{καί} \quad \mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma.$$

Παρατηρούμε ότι, αν έστω και μια από τις ορίζουσες D, D_x D_y δεν είναι 0, τότε οπωσδήποτε ένας από τους α, α', β, β' δεν είναι 0 (Περίπτ. **II**).

Ειδικότερα:

- αν $\mathbf{D \neq 0}$ (Περίπτ. **II1**), το σύστημα έχει τη μοναδική λύση, σύμφωνα με τις (5) και (6),

$$x = \frac{D_1}{D} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

- αν $\mathbf{D = 0}$ και $(\mathbf{D_1 \neq 0}$ ή $\mathbf{D_y \neq 0})$ (Περίπτ. **II2i**), το σύστημα δεν έχει λύση.

Για τις άλλες ειδικότερες περιπτώσεις που μελετήσαμε είναι $\mathbf{D = D_x = D_y = 0}$ και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις εκτός της περιπτώσεως **II** : $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$ και γ ή $\gamma' \neq 0$ που το σύστημα δεν έχει λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 \\ x - \lambda y = \lambda^4 \end{cases}$

Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta'-\alpha'\beta = \lambda(-\lambda)-1(-1) = -\lambda^2+1 = -(\lambda+1)(\lambda-1)$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta'-\gamma'\beta = -\lambda\lambda^2-(-1)\lambda^4 = -\lambda^3+\lambda^4 = \lambda^3(\lambda-1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma'-\alpha'\gamma = \lambda\lambda^4-1.\lambda^2 = \lambda^5-\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3-1) =$$
$$= \lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

Είναι $D = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2+1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1$ ή $\lambda = -1)$

Άρα:

- αν $\lambda \neq 1$ **και** $\lambda \neq -1$, το σύστημα έχει μια λύση, την

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda^3(\lambda-1)}{-(\lambda+1)(\lambda-1)} = -\frac{\lambda^3}{\lambda+1}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}{-(\lambda+1)(\lambda-1)} = -\frac{\lambda^2(\lambda^2+\lambda+1)}{\lambda+1}$$

- αν $\lambda = 1$, τότε $D = D_x = D_y = 0$ και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Πράγματι για $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x-y = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

που είναι ισοδύναμο με την $x-y = 1$.

Άρα λύσεις του συστήματος είναι όλα τα ζεύγη της μορφής $(x, x-1)$.

- αν $\lambda = -1$, τότε $D = 0$ και $D_y \neq 0$, και το σύστημα δεν έχει λύση. Πράγματι για $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -x-y = 1 \\ x+y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x+y = -1 \\ x+y = 1, \end{matrix}$$

που προφανώς δεν έχει λύση (αδύνατο).

Αξιοσημείωτες εφαρμογές

8.14 Για τη λύση των συστημάτων που ακολουθούν, εφαρμόζονται βασικά οι μέθοδοι αντικαταστάσεως και γραμμικού συνδυασμού της § 8.12. Σε ορισμένες περιπτώσεις εισάγονται «βοηθητικοί άγνωστοι», με εξισώσεις που εκφράζουν απλή εξάρτηση των βοηθητικών με τους αρχικούς αγνώστους του συστήματος. Έτσι η εύρεση των τιμών των βοηθητικών αγνώστων οδηγεί άμεσα στη λύση του συστήματος.

1. **Να λυθεί το σύστημα:**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} & (1) \\ 2x-5y+6z = 38 & (2) \end{cases}$$

Αν $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} = t$, θα είναι $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 5t$ (3)

και η (2) γίνεται

$$2.2t-5.3t+6.5t = 38 \Leftrightarrow 4t-15t+30t = 38 \Leftrightarrow 19t = 38 \Leftrightarrow t = 2,$$

οπότε από τις (3) έχουμε:

$$x = 2.2 = 4, \quad y = 3.2 = 6, \quad z = 5.2 = 10.$$

2. **Να λυθεί το σύστημα :**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2\dfrac{1}{6} & (1) \\ x+y = 5 & (2) \end{cases}$$

Προφανώς πρέπει $xy \neq 0$, οπότε, αν $\dfrac{x}{y} = t$ (3)

η (1) γίνεται $t + \dfrac{1}{t} = 2\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(t = \dfrac{2}{3} \text{ ή } t = \dfrac{3}{2}\right)$

και λόγω της (3), $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$ ή $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$ (4)

Επομένως, αν αντικαταστήσουμε την (1) με την (4), το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \text{ ή } \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} \\ x+y=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x+y=5 \end{array}\right. \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} \\ x+y=5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3}y \\ x+y=5 \end{array}\right. \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}y \\ x+y=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3}y \\ \dfrac{2}{3}y + y = 5 \end{array}\right. \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}y \\ \dfrac{3}{2}y + y = 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3}y \\ y=3 \end{array}\right. \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}y \\ y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y=3 \end{array}\right. \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y=2 \end{array}\right.$$

3. Να λυθεί το σύστημα: $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x^2 - 3y^2 - 2x + y = 30} \\ \mathbf{x - y = 3} \end{array}\right.$

Έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2-3y^2-2x+y=30 \\ x-y=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2-3y^2-2x+y=30 \\ x=3+y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(3+y)^2-3y^2-2(3+y)+y=30 \\ x=3+y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -y^2+11y-18=0 \\ x=3+y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=9 \text{ ή } y=2 \\ x=3+y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=9 \end{array}\right. \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}\right.$$

4. Να λυθεί το σύστημα: $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x^2+y^2=625} \\ \mathbf{x+y=35} \end{array}\right.$

Είναι $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=625 \\ x+y=35 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+y)^2-2xy=625 \\ x+y=35 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 35^2-2xy=625 \\ x+y=35 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} xy=300 \\ x+y=35 \end{array}\right.$$

Στο τελευταίο σύστημα οι άγνωστοι x και y είναι ρίζες της εξισώσεως

$$\omega^2 - 35\omega + 300 = 0$$

Είναι $\omega_{1,2} = \dfrac{-35 \pm \sqrt{1225-1200}}{2} = \dfrac{35 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow \omega_1 = 20 \\ \searrow \omega_2 = 15 \end{array}$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι ($x = 20$ **και** $y = 15$) **ή** ($x = 15$ **και** $y = 20$).

Ασκήσεις 31, 32, 33, 34.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $1 - \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{1-x} - 6$ **β)** $\dfrac{x+5}{x-5} + \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{10}{3}$ **γ)** $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \dfrac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2}$

δ) $\dfrac{\alpha^2}{(x-\alpha)^2} - \dfrac{\beta^2}{(x+\beta)^2} = 0, \quad \alpha \neq \pm\beta$ **ε)** $|2x+6| = -x^2+x-4$

2. Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις

α) $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\mu\nu = 0$

β) $(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2)x^2 + 6\beta^2 x - (\alpha^2 - \alpha\beta - 2\beta^2) = 0$

γ) $\alpha x^2 - (\alpha+2\beta)x + \beta = 0$

έχουν πάντοτε ρίζες στο $\mathbb{R}$.

3. Αν $\alpha^2+\beta^2 < \gamma^2$ και $\beta \neq 0$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $(\alpha^2+\beta^2)x^2 - 2\alpha\gamma x - \beta^2 + \gamma^2 = 0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

4. Δίνονται οι εξισώσεις

$$x^2 + (\alpha - 3\beta)x + \alpha\beta = 0$$
$$x^2 + (\alpha - 5\beta)x + 4\beta^2 = 0$$

Να δειχθεί ότι, αν η μία από αυτές έχει ρίζες ίσες, τότε θα έχει και η άλλη ρίζες ίσες.

5. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $4\,\eta\mu^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\eta\mu x + \sqrt{3} = 0$

β) $\varepsilon\varphi^2 x - (\sqrt{3}+1)\varepsilon\varphi x + \sqrt{3} = 0$

γ) $(x+1)^2 - 9\,|x+1| - 10 = 0$

6. Στις παρακάτω εξισώσεις για ποιες τιμές του λ έχουμε: 1) ρίζες άνισες. 2) ρίζες ίσες 3) καμία ρίζα.

α) $8x^2 - (\lambda-1)x - \lambda - 7 = 0$ **β)** $\lambda x^2 + (\lambda-1)x - 2\lambda = 0$

7. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ μήκους 2α. Επάνω στην ΑΒ να βρεθεί ένα σημείο Γ τέτοιο ώστε, αν κατασκευάσουμε μέσα στο ημικύκλιο ΑΒ ημικύκλια με διαμέτρους ΑΓ και ΒΓ, η επιφάνεια που περιέχεται μεταξύ αυτών να είναι ισοδύναμη με κύκλο ακτίνας $\dfrac{\alpha}{2}$.

8. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξισώσεως $x^2 - 2x + (\lambda - 1) = 0$, να βρεθεί ο λ έτσι, ώστε να έχουμε

$$3x_1^3 + 8x_1x_2^2 + 8x_1^2x_2 + 3x_2^3 = 192.$$

$x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + x_2^3 = \lambda + 4$

$x^2+x+3=0$

9. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, να βρεθεί η εξίσωση της οποίας οι ρίζες είναι $\rho_1=\frac{x_1}{x_2}$ και $\rho_2=\frac{x_2}{x_1}$.

10. Ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη θερμοκρασία σε μια πόλη, αν το άθροισμα τους είναι $+4^0$ C και το γινόμενό τους -12^0 C.

11. Να δειχθεί ότι από τα ζεύγη των θετικών αριθμών που έχουν σταθερό γινόμενο, ελάχιστο άθροισμα έχουν αυτοί που είναι ίσοι.

12. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδό.

13. Να υπολογιστεί η τιμή του k, όταν η μια ρίζα της εξισώσεως $4x^2+kx+6=0$ είναι ίση με -2. Το ίδιο για την εξίσωση $x^2-3x+k^2-7k=0$.

14. Να βρεθεί το πρόσημο των ριζών των εξισώσεων:

α) $2x^2-7x-13=0$ β) $6x^2+5x+1=0$ γ) $7x^2-5x=0$

15. Να βρεθεί το πρόσημο των ριζών της εξισώσεως:

$$3x^2-7x-k^2=0$$

16. Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε η εξίσωση $x^2-3x+\lambda-1=0$ να έχει

α) δύο ρίζες ετερόσημες β) δύο ρίζες ίσες γ) δύο ρίζες θετικές.

17. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

α) $\frac{(x^2-\alpha^2)(x^2+\alpha^2)}{2x^2+\alpha x-3\alpha^2}$ β) $\frac{(x-\alpha)^2-\beta^2}{x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2}$ γ) $\frac{(x^2+3x-4)^2-(x^2-x)^2}{(x^3-1)-(x^2+x-2)}$

18. Για ποιες τιμές του λ τα τριώνυμα

α) $f(x)=x^2-6\lambda x+9\lambda^2-3\lambda+5$

β) $g(x)=4x^2-(3\lambda-1)x+\lambda^2-2$

γίνονται τετράγωνα πρωτοβάθμιων πολυωνύμων.

19. Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $x^2-5x+\lambda^2$ είναι ίσο με $(x-1)(x-4)$.

20. Να δειχθεί ότι για $\beta\neq\gamma$ το τριώνυμο $f(x)=x^2-(\beta+\gamma)x+\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2$ είναι πάντοτε θετικό.

21. Να δειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ το κλάσμα $\frac{x^2+5x+10}{-x^2+6x-9}$ παίρνει αρνητικές τιμές.

22. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συναρτήσεως f με $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+8}$

23. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y, αν $x^2+y^2=6x-8y$.

24. Να συγκριθούν οι αριθμοί 1 και 4 με τις ρίζες του τριωνύμου $f(x)=2x^2-8x+4$ χωρίς να βρεθούν οι ρίζες του.

25. Να λυθούν οι ανισώσεις

α) $(1-x)(x^2-10x+21)(-x^2+x-5)<0$

β) $\frac{(x-1)(x^2-9x+20)}{x^2-x+1}>0$

γ) $|-x^2+x-4|>2x+6$.

26. Να λυθούν τα συστήματα

α) $x-2>0$
$6x^2+5x+1>0$
$-x^2+5x-6<0$

β) $\frac{x-1}{2x+1}>0$
$(x^2-4)(x^2+2x+4)<0$

27. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση $x^2-2(\lambda-3)x+\lambda^2-1=0$ έχει

α) δύο ρίζες αρνητικές β) δύο ρίζες ετερόσημες γ) δύο ρίζες αντίστροφες.

28. Να δειχθεί ότι δεν μπορεί να είναι $2<\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}<6$.

29. Να οριστεί ο x, ώστε οι αριθμοί x^2+x+1, $2x+1$ και x^2+1 να είναι μέτρα πλευρών τριγώνου.

30. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x)=3x^2+5x+2$

β) f με $f(x)=-x^2+3x-4$

γ) f με $f(x)=4x^2-4x+1$.

31. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases}(\lambda-2)x+\lambda y=2\lambda\\ 3x+(\lambda+2)y=12\end{cases}$ β) $\begin{cases}(1-\lambda)x-2\lambda y=2\\ 2\lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-4\end{cases}$

32. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases}x^2+xy=6\\ 2x+3y=7\end{cases}$ β) $\begin{cases}2x^2+3y^2-4x+y=14\\ 2y-x=2\end{cases}$

33. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases}x^2+y^2=73\\ xy=24\end{cases}$ β) $\begin{cases}x+y+xy=23\\ xy(x+y)=120\end{cases}$

34. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=62\\ x^2-y^2+x-y=50\end{cases}$ β) $\begin{cases}xy=\frac{2}{3}\\ yz=\frac{1}{15}\\ zx=\frac{2}{5}\end{cases}$

360
120
480

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. α) Πρέπει $x-1 \neq 0$. Μετά τις πράξεις βρίσκουμε την εξίσωση $x^2-7x+6=0$, ή οποία έχει ρίζες τη $\rho_1=1$, που απορρίπτεται και τη $\rho_2=6$, που είναι δεκτή.

β) Πρέπει $(x-5)(x+5) \neq 0$, δηλαδή $x \neq \pm 5$. Μετά τις πράξεις βρίσκουμε την εξίσωση $x^2-100=0$, η οποία έχει ρίζες $\rho_1=10$ και $\rho_2=-10$.

γ) Μετά τις πράξεις βρίσκουμε την εξίσωση:
$(\alpha^2-\beta^2)x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2=0$, η οποία, όταν $\alpha=\pm\beta$, είναι πρωτοβάθμια με ρίζα $x=0$. Όταν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq \pm\beta$, έχει ρίζες $\rho_1=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ και $\rho_2=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

δ) Πρέπει $(x-\alpha)(x-\beta) \neq 0$, δηλαδή $x \neq \alpha$ και $x \neq -\beta$. Μετά τις πράξεις βρίσκουμε την εξίσωση $(\alpha-\beta)x^2+2\alpha\beta x=0$, η οποία έχει ρίζες $\rho_1=0$, $\rho_2=-\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}$.

ε) Αν είναι $x \geqslant -3$, έχουμε την εξίσωση $x^2+x+10=0$, που δεν έχει ρίζες.
Αν είναι $x \leqslant -3$, έχουμε την εξίσωση $x^2-3x-2=0$, η οποία έχει ρίζες
$\rho_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ και $\rho_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, που απορρίπτονται.

2. Βρίσκουμε τη διακρίνουσα κάθε εξισώσεως και αποδεικνύουμε ότι είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν.

3. Η διακρίνουσα της εξισώσεως είναι $\Delta=4\beta^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)<0$.

4. Οι δύο εξισώσεις έχουν ίσες διακρίνουσες.

5. α) Αν θέσουμε $\eta\mu x=y$, έχουμε: $4y^2-2(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ με $y \in [-1, +1]$ κτλ.

β) Αν θέσουμε $\varepsilon\varphi x=y$, έχουμε: $y^2-(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ κτλ.

γ) Επειδή είναι $(x+1)^2=|x+1|^2$ (§ 3.14), αν θέσουμε $|x+1|=y$, έχουμε: $y^2-9y-10=0$ $y \in \mathbb{R}_+$ κτλ.

6. α) Αν $\lambda \neq -15$, η εξίσωση έχει ρίζες άνισες. Αν $\lambda=-15$, η εξίσωση έχει ρίζες ίσες.

β) Η εξίσωση έχει ρίζες άνισες για κάθε τιμή του λ.

7. Αν θέσουμε $A\Gamma=x$, τότε είναι $B\Gamma=2\alpha-x$, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση $x^2-2\alpha x+\alpha^2=0$.

8. Έχουμε $3(x_1^3+x_2^3)+8x_1x_2(x_1+x_2)=192$ ή
$3(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]+8x_1x_2(x_1+x_2)=192$.
Στην παράσταση αυτή θέτουμε $x_1+x_2=2$ και $x_1x_2=\lambda-1$ κτλ.

9. Έχουμε $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, οπότε είναι:
$\rho_1+\rho_2=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$ και $\rho_1\rho_2=\dfrac{x_1x_2}{x_2x_1}=1$ κτλ.

10. Η μέγιστη και η ελάχιστη θερμοκρασία θα είναι ρίζες της εξισώσεως
$x^2-4x-12=0$.

11. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 3 της § 8.4.

12. Ομοίως με την 11.

13. Η πρώτη εξίσωση, επειδή έχει ρίζα το -2, γίνεται $4(-2)^2+k(-2)+6=0$. Ομοίως εργαζόμαστε και για τη δεύτερη εξίσωση.

14. Εργαζόμαστε όπως στα παραδείγματα της § 8.5.

15. Εξετάζουμε το πρόσημο του $\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

16. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 1 της § 8.5.

17. Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή κάθε κλάσματος με τη βοήθεια του τύπου $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$.

18. Πρέπει η διακρίνουσα κάθε τριωνύμου να είναι ίση με μηδέν.

19. Είναι $x^2-5x+\lambda^2=(x-\rho_1)(x-\rho_2)=(x-1)(x-4)$ κτλ.

20. Είναι $\alpha=1>0$ και $\Delta<0$.

21. Είναι $x^2+5x+10>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x^2+6x-9<0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{3\}$.

22. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 4 της § 8.7

23. Θεωρούμε την εξίσωση πρώτα με άγνωστο τον x, οπότε πρέπει $\Delta \geqslant 0$ και βρίσκουμε $-9 \leqslant y \leqslant 1$. Ομοίως και για τον y.

24. Βρίσκουμε ότι $2f(1)<0$ κτλ.

25. α) Εξετάζουμε το πρόσημο καθενός παράγοντα κτλ.

β) Επειδή είναι $x^2-x+1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την $(x-1)(x^2-9x+20)>0$.

γ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $-x^2+x-4<0$, η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την $-(-x^2+x-4)>2x-6$.

26. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2 της § 8.9.

27. α) Πρέπει $\dfrac{\gamma}{\alpha}>0$, $\Delta>0$, $-\dfrac{\beta}{\alpha}<0$

β) Πρέπει $\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$

γ) Πρέπει $\Delta>0$, $\dfrac{\gamma}{\alpha}=1$

28. Θέτουμε $y=\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ και αποδεικνύουμε ότι $y \notin (2, 6)$.

29. Ο x είναι η λύση του συστήματος των ανισώσεων

$$x^2+x+1 < (2x+1)+(x^2+1)$$
$$2x+1 < (x^2+x+1)+(x^2+1)$$
$$x^2+1 < (x^2+x+1)+(2x+1).$$

30. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή της § 8.10.

31. **α)** Για $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 4$ το σύστημα έχει τη λύση $x = \dfrac{2\lambda}{\lambda+1}$, $y = \dfrac{6}{\lambda+1}$

Για $\lambda = -1$ το σύστημα δεν έχει λύση

Για $\lambda = 4$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

β) Για $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq \dfrac{1}{3}$ το σύστημα έχει τη λύση

$$x = \frac{2(\lambda^2-3\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}, \quad y = \frac{-\lambda^2+\lambda-4}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}$$

Για $\lambda = -1$ ή $\lambda = \dfrac{1}{3}$ το σύστημα είναι αδύνατο.

32. **α)** Οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$(x = 2 \text{ και } y = 1) \text{ ή } \left(x = -9 \text{ και } y = \frac{25}{3}\right)$$

β) Οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$(x = 2 \text{ και } y = 2) \text{ ή } \left(x = -\frac{20}{11} \text{ και } y = \frac{1}{11}\right)$$

33. **α)** Οι λύσεις του συστήματος είναι:

$(x = 8$ και $y = 3)$ ή $(x = 3$ και $y = 8)$ ή $(x = -8$ και $y = -3)$

ή $(x = -3)$ και $y = -8)$

β) Οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$(x = 5 \text{ και } y = 3) \text{ ή } (x = 3 \text{ και } y = 5) \text{ ή } \left(x = \frac{15+\sqrt{193}}{2},\ y = \frac{15-\sqrt{193}}{2}\right)$$

$$\text{ή } \left(x = \frac{15-\sqrt{193}}{2} \text{ και } y = \frac{15+\sqrt{193}}{2}\right)$$

34. **α)** Οι λύσεις του συστήματος είναι: $(x=-8$ και $y=-3)$ ή $(x=-8$ και $y = 2)$ ή $(x = 7$ και $y=-3)$ ή $(x = 7$ και $y = 2)$

β) Οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$\left(x = 2 \text{ και } y = \frac{1}{3} \text{ και } z = \frac{1}{5}\right) \text{ ή } \left(x = -2 \text{ και } y = -\frac{1}{3} \text{ και } z = -\frac{1}{5}\right)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Είναι οι: α (ψευδής), β (αληθής), δ (αληθής). Η γ δεν είναι λογική πρόταση.

2. Απλή η β. Σύνθετες είναι οι α (όχι p), γ(αν p_1 τότε q) και δ (p και q).

3. **α)** Έχουμε:
p: ο α είναι ρητός αριθμός.
q: ο β είναι ακέραιος αριθμός.
r: το άθροισμα α+β είναι ρητός αριθμός.
Άρα: Αν (p και q), τότε r.

β) Η πρόταση p: «Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες ή διχοτομούν τις γωνίες του» είναι σύνθετη και έχει μορφή p_1 ή p_2, όπου:
p_1: οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες.
p_2: οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομούν τις γωνίες του.
q: το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
Άρα: Αν (p_1 ή p_2), τότε q.

γ) Έχουμε: p: $\alpha\beta = 0$ q: $\alpha = 0$ r: $\beta = 0$
Άρα: Αν όχι p, τότε (όχι q ή όχι r).

δ) Έχουμε:
p: ο α είναι πολλαπλάσιο του 5.
q: το άθροισμα α+β είναι πολλαπλάσιο του 5.
r: ο β είναι πολλαπλάσιο του 5.
Άρα: Αν (p και q), τότε r.

ε) p: το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
q_1: οι διαγώνιές του είναι κάθετες.
q_2: οι διαγώνιές του διχοτομούν τις γωνίες του.
Άρα: Αν όχι p, τότε (όχι q_1 ή όχι q_2).

στ) Έχουμε:
p_1: ο α είναι άρτιος αριθμός
p_2: ο β είναι άρτιος αριθμός
q_1: ο α είναι περιττός αριθμός
q_2: ο β είναι περιττός αριθμός
r: το άθροισμα α+β είναι άρτιος αριθμός.
Άρα: Αν (p_1 και p_2) ή (q_1 και q_2), τότε r.

4. α και δ, γ και ε.

5. $A = \{12,24\}$.

6. $G = \{(3,2), (5,2), (5,4), (7,2), (7,4), (7,6)\}$.

7. Βλέπε υποδείξεις.

8. Το σύνολο αλήθειας του p(x) είναι το $\{2,4,6,\ldots,20\}$ και του q(x) το $\{5,10,15,20\}$.
Άρα τα σύνολα αλήθειας των $\overline{p}(x)$, $\overline{q}(x)$, $p(x) \wedge q(x)$ και $p(x) \vee q(x)$ είναι αντιστοίχως τα:
$\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$
$\{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17,18,19\}$
$\{10,20\}$
$\{2,4,5,6,8,10,12,14,15,16,18,20\}$.

9. Έστω p: $k = \lambda + 1$ και q : $k = \lambda$. Επειδή η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής, οι συνεπαγωγές $p \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $q \Rightarrow q$ είναι αντιστοίχως (α), (ψ), (α), (α).
Επίσης οι ισοδυναμίες $p \Leftrightarrow p$, $p \Leftrightarrow q$, $q \Leftrightarrow p$, $q \Leftrightarrow q$ είναι (α), (ψ), (ψ), (α).

10. Σύμφωνα με την § 1.18 θα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα αλήθειας

p	q	r	$p \wedge q \wedge r$	$p \vee q \vee r$
α	α	α	α	α
α	α	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α
ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ

11. **α)** $\exists\, x \in \mathbb{Z}$, x είναι πρώτος (αληθής).
β) $\forall x$, x είναι ρόμβος [Ω: το σύνολο των τετραπλεύρων] (ψευδής).
γ) $\forall x$, (δύο διάμεσοι του x είναι ίσες) $\Rightarrow$ (το x είναι ισοσκελές) [Ω: το σύνολο των τριγώνων] (αληθής).
δ) $\forall\, x \in \mathbb{N}$, (x διαιρείται με το 4) $\Leftrightarrow$ (x λήγει σε 0) (ψευδής).

12. **α)** Το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού μη μηδενικού είναι θετικός αριθμός (αληθής).
β) Υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο είναι αρνητικός αριθμός (ψευδής).
γ) Αν οι διαγώνιες παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του, τότε αυτό είναι ρόμβος (αληθής).
δ) Αν οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και αντιστρόφως.

13. Για τις προτάσεις α και β της ασκ. 12 έχουμε (§ 1.22):
α) $\exists\, x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 \not> 0$, δηλ. $\exists\, x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 \leq 0$ (ψευδής).
β) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 \not< 0$, δηλ. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ (αληθής).
Ομοίως για τις προτάσεις α και β της ασκ. 11 έχουμε: (Βλ. Άσκ. 11).
α) $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, x δεν είναι πρώτος, δηλ. κάθε ακέραιος δεν είναι πρώτος (ψευδής).
β) $\exists\, x$, x δεν είναι ρόμβος, δηλ. υπάρχει τετράπλευρο που δεν είναι ρόμβος (αληθής).

14. **α)** Για κάθε $x \in A$ η p(x) είναι αληθής. Και αφού ισχύει η συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$, θα είναι και η q(x) αληθής, άρα θα είναι και $x \in B$, δηλ. $A \subseteq B$.
β) Αντιστρόφως αν:
i) $x \in A$, τότε $x \in B$ και οι p(x) και q(x) είναι αληθείς.
Άρα και η $p(x) \Rightarrow q(x)$ είναι αληθής.
ii) $x \notin A$, τότε p(x) ψευδής. Άρα η $p(x) \Rightarrow q(x)$ αληθής.
Συνεπώς $\forall x$, $p(x) \Rightarrow q(x)$.

15. α)

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \Rightarrow p$
α	α	α
ψ	ψ	α

β)

p	$p \vee p$	$p \vee p \Rightarrow p.$
α	α	α
ψ	ψ	α

16. α)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
α	α	α	α	α
α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α

β)

$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
α	α	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	α

γ)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
α	α	α	α
α	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	α

δ)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow q$
α	α	α	α
α	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	α

ε)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
α	α	α	α
α	ψ	α	α
ψ	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α

στ)

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}] \Rightarrow \bar{p}$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	α

ζ)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \Rightarrow p$
α	α	α	α	α
α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α

η)

$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$
α	α	α
ψ	α	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	α

17. α)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α	α	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α	α	α	α	α

β)

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$	$[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	α	α	α
α	ψ	α	α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	α	α	α	α
ψ	ψ	α	ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

γ)

$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$	$[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α

δ)

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
α	α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	α	α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	ψ	α	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

ε)

$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

18 Επειδή $p \Leftrightarrow q$ είναι $(p \Rightarrow q)$ και $(q \Rightarrow p)$, ο λ.τ. $\overline{p \Leftrightarrow q}$ είναι ισοδύναμος (Νόμος De Morgan) με $\overline{p \Rightarrow q}$ ή $\overline{q \Rightarrow p}$ και σύμφωνα με την εφαρμογή της § 1.27 είναι ισοδύναμος με τον λ.τ. $(p \wedge \bar{q})$ ή $(q \wedge \bar{p})$.

19. Για την πρόταση γ της ασκ. 12 παρατηρούμε ότι η άρνηση της συνεπαγωγής που περιέχει είναι ισοδύναμη (§ 1.27 Εφ.) με: «Οι διαγώνιες του x διχοτομούν τις γωνίες του και το x δεν είναι ρόμβος». Άρα η άρνηση της γ ισοδυναμεί (§ 1.22) με:
$\exists$ x, οι διαγώνιες του x διχοτομούν τις γωνίες του και το x δεν είναι ρόμβος (ψευδής).
Ομοίως βρίσκουμε ότι η άρνηση της γ της ασκ. 11 ισοδυναμεί με:
« Υπάρχει τρίγωνο με δύο ίσες διαμέσους το οποίο δεν είναι ισοσκελές (ψευδής)».
Εφαρμόζοντας ομοίως την άσκηση 18, η άρνηση της δ της ασκ. 12 ισοδυναμεί με:
$\exists$ x, (x είναι ισόπλευρο και δεν είναι ισογώνιο) ή (x είναι ισογώνιο και δεν είναι ισόπλευρο) (ψευδής).
Ομοίως βρίσκουμε ότι η άρνηση της δ της ασκ. 11 είναι ισοδύναμη με:
« Υπάρχει φυσικός αριθμός που διαιρείται με το 4 και δε λήγει σε 0 ή λήγει σε μηδέν και δε διαιρείται με το 4» (αληθής).

20. Υποθέτουμε ότι ο x είναι άρτιος. Τότε $x=2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $x^2 = xx = (2\nu)(2\nu) = 2(2\nu^2)$.
Άρα ο x^2 άρτιος.

21. Η αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή είναι:
x περιττός $\Rightarrow$ x^2 περιττός, η οποία ισχύει (§ 1.29 Παράδ.).

22. Η αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή είναι:
x άρτιος $\Rightarrow$ x^2 άρτιος, η οποία ισχύει (Άσκ. 20).

23. Η αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή είναι:
ΑΒΓΔ ορθογώνιο $\Rightarrow$ ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγωνίους, η οποία ισχύει.

24. i) Υποθέτουμε ότι $\alpha+\rho = \omega$, ρητός. Τότε έχουμε
$\alpha = \omega-\rho$, άρα α ρητός, ως διαφορά δύο ρητών (άτοπο).
Άρα $\alpha+\rho$ άρρητος.

ii) Όμοια.

iii) Υποθέτουμε $\alpha\rho = \omega$ ρητός. Τότε, επειδή $\rho \neq 0$, έχουμε

$\alpha = \dfrac{\omega}{\rho}$, άρα α ρητός, ως πηλίκο δύο ρητών (άτοπο).

Άρα αρ άρρητος.

iv) Όπως η iii.

v) Όπως η i.

25. Η ισότητα ισχύει για $\nu = 2$, επειδή $1+3 = 2^2$.
Υποθέτουμε ότι αληθεύει η p_ν: $1+3+\ldots+(2\nu-1) = \nu^2$.
Τότε
$$\begin{aligned} 1+3+\ldots+(2\nu-1)+[2(\nu+1)-1] &= \nu^2+[2(\nu+1)-1] \\ &= \nu^2+2\nu+2-1 \\ &= \nu^2+2\nu+1 \\ &= (\nu+1)^2. \end{aligned}$$

Άρα αποδείχτηκε η $p_{\nu+1}$.

26. Ισχύει για $\nu = 2$, επειδή $3^3+2.3 = 27+6 = 33 = \text{πολ } 3$.
Υποθέτουμε ότι αληθεύει η p_ν: $\nu^3+2\nu = \text{πολ } 3$.
Τότε
$$\begin{aligned} (\nu+1)^3+2(\nu+1) &= \nu^3+3\nu^2+3\nu+1+2\nu+2 \\ &= \nu^3+2\nu+3(\nu^2+\nu+1) \\ &= \text{πολ } 3+\text{πολ } 3 = \text{πολ } 3. \end{aligned}$$

Άρα αποδείχτηκε η $p_{\nu+1}$.

27. Η ισότητα ισχύει για $\nu = 2$, επειδή
$$1^2+2^2 = \frac{2(2+1)\,(2.2+1)}{6}.$$

Υποθέτουμε ότι αληθεύει η p_ν: $1^2+2^2+\ldots+\nu^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)}{6}$.

Τότε
$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\ldots+\nu^2+(\nu+1)^2 &= \frac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)}{6} + (\nu+1)^2 \\ &= \frac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)+6(\nu+1)^2}{6} \\ &= \frac{(\nu+1)\,[\nu(2\nu+1)+6(\nu+1)]}{6} \\ &= \frac{(\nu+1)\,(2\nu^2+\nu+6\nu+6)}{6} \\ &= \frac{(\nu+1)\,(2\nu^2+7\nu+6)}{6} \\ &= \frac{(\nu+1)\,(\nu+2)\,(2\nu+3)}{6} \\ &= \frac{(\nu+1)\,(\nu+2)\,[2(\nu+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

Άρα αποδείχτηκε η $p_{\nu+1}$.

28. Η ισότητα ισχύει για $\nu = 2$, επειδή
$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3} = \frac{2}{3} \quad \text{(αληθής).}$$

Υποθέτουμε ότι αληθεύει η p_ν: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{\nu}{\nu+1}$.

Τότε
$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\frac{1}{(\nu+1)\,(\nu+2)} &= \frac{\nu}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)\,(\nu+2)} \\ &= \frac{\nu^2+2\nu+1}{(\nu+1)\,(\nu+2)} \\ &= \frac{\nu+1}{\nu+2}. \end{aligned}$$

Άρα αποδείχτηκε η $p_{\nu+1}$.

29. Ισχύει για $\nu = 0$, γιατί $3^0 \geq 1+2.0$.
Υποθέτοντας ότι αληθεύει η $3^\nu \geq 1+2\nu$, θα δείξουμε ότι ισχύει η $3^{\nu+1} \geq 1+2(\nu+1)$.
Πράγματι είναι:
$3^{\nu+1} = 3.3^\nu = 3^\nu+2.3^\nu \geq 1+2\nu+2.1 = 1+2(\nu+1)$.

30. Η αποδεικτέα ισχύει για $\nu = 2$, γιατί
$$1+\alpha = \frac{\alpha^2-1}{\alpha-1} = \frac{(\alpha+1)\,(\alpha-1)}{\alpha-1} = \alpha+1 \quad (\alpha \neq 1 \Rightarrow \alpha-1 \neq 0).$$

Υποθέτοντας ότι αληθεύει η $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1} = \dfrac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1}$, (1)

θα δείξουμε ότι ισχύει η
$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}+\alpha^\nu = \frac{\alpha^{\nu+1}-1}{\alpha-1}.$$

Πράγματι, προσθέτοντας το α^ν και στα δύο μέλη της (1), έχουμε:

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}+\alpha^\nu = \frac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1}+\alpha^\nu$$
$$= \frac{\alpha^\nu-1+\alpha^\nu(\alpha-1)}{\alpha-1}$$
$$= \frac{\alpha^\nu-1+\alpha^{\nu+1}-\alpha^\nu}{\alpha-1} = \frac{\alpha^{\nu+1}-1}{\alpha-1}.$$

Δηλαδή αληθεύει η $p_{\nu+1}$.

31. Αποδεικνύουμε την πρόταση για $\nu = 3$, δηλ. ότι το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου με τρεις πλευρές (τριγώνου) είναι $2.3-4 = 2$ ορθές (αληθής). Υποθέτοντας τώρα ότι το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου με ν πλευρές είναι $2\nu-4$ ορθές, θα δείξουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου με $\nu+1$ πλευρές είναι $2(\nu+1)-4$ ορθές. Αν χωρίσουμε το πολύγωνο με τις $\nu+1$ πλευρές σ' ένα ν-γωνο και ένα τρίγωνο, τότε το άθροισμα των γωνιών του $(\nu+1)$–γώνου θα είναι $2\nu-4+2 = 2(\nu+1)-4$ ορθές. Δηλ. αληθεύει η $p_{\nu+1}$.

32. Για $\nu = 3$ είναι $\frac{3(3-3)}{2} = 0$ (αληθής).

Υποθέτοντας ότι το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές είναι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$, θα αποδείξουμε ότι το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με $\nu+1$ πλευρές είναι:

$$\frac{(\nu+1)(\nu+1-3)}{2} = \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{2}.$$

Αν χωρίσουμε το $(\nu+1)$–γωνο σ' ένα ν–γωνο και ένα τρίγωνο ΑΒΓ με κοινή πλευρά τη ΒΓ, τότε το πλήθος των διαγωνίων του είναι:

$\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ του ν–γώνου

1 η κοινή πλευρά ΒΓ του ν–γώνου και τριγώνου.

$\nu-2$ οι διαγώνιες που άγονται από την κορυφή Α.

Άρα το άθροισμα των διαγωνίων είναι:

$$\frac{\nu(\nu-3)}{2}+1+\nu-2 = \frac{\nu(\nu-3)}{2}+\nu-1 = \frac{\nu(\nu-3)+2(\nu-1)}{2} = \frac{\nu^2-3\nu+2\nu-2}{2}$$
$$= \frac{\nu^2-\nu-2}{2} = \frac{\nu^2-2\nu+\nu-2}{2} = \frac{\nu(\nu-2)+(\nu-2)}{2} = \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{2}.$$ Αληθεύει δηλ. η $p_{\nu+1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1. Είναι $[-(-x)]+[-(-y)]+[-(x+y)] = x+y+(-x)+(-y) = [x+(-x)]+[y+(-y)] = 0$.

2. Επειδή $-(-x) = x$, είναι $x+[-[-(-x)]] = x+(-x) = 0$.

3. Επειδή είναι αντίθετοι, θα έχουμε $x+y+z+(-x)+(-y)+\omega = 0$ ή $[x+(-x)]+[y+(-y)]+z+\omega = 0$ ή $0+0+z+\omega = 0$ ή $z+\omega = 0$. Η τελευταία μας λέει ότι z και ω είναι αντίθετοι αριθμοί, δηλαδή $z = -\omega$.

4. Αρκεί να δείξουμε ότι $x+y = 0$. Είναι $x+y = (\alpha+\beta)+[(-\gamma)+(-\delta)]+[(-\alpha)+\gamma]+[(-\beta)+\delta] = \alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)+(-\alpha)+\gamma+(-\beta)+\delta = [\alpha+(-\alpha)]+[\beta+(-\beta)]+[\gamma+(-\gamma)]+[\delta+(-\delta)] = 0+0+0+0 = 0$.

5. α) $(x+y)-z = (x+y)+(-z) = [x+(-z)]+y = (x-z)+y$

β) $(x-y)-z = [x+(-y)]+(-z) = x+[(-y)+(-z)] = x-(y+z)$

$(x-y)-z = [x+(-y)]+(-z) = [x+(-z)]+(-y) = (x-z)-y.$

6. α) Έστω ότι ισχύει: $x \neq y$ και $x-z = y-z$. Τότε θα είναι:

$x-z = y-z \Rightarrow [x+(-z)]+z = [y+(-z)]+z \Rightarrow x+[(-z)+z] = y+[(-z)+z]$
$\Rightarrow x+0 = y+0 \Rightarrow x = y$ που είναι άτοπο.

β) $x = y$ καί $z = \varphi \Rightarrow x=y$ και $-z = -\varphi \Rightarrow x+(-z) = y+(-\varphi) \Rightarrow x-z=y-\varphi.$

7. $A = -\frac{6}{7}\alpha^2\beta\gamma^5 2\alpha^4\beta^3\gamma^4\left(-\frac{5}{6}\right)\alpha\beta^2\gamma^5 = \left\{\left(-\frac{6}{7}\right).2\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}$
$(\alpha^2\alpha^4\alpha)\ (\beta\beta^3\beta^2)\ (\gamma^5\gamma^4\gamma^5) = \left\{2.\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\alpha^7\beta^6\gamma^{14} = \frac{10}{7}\alpha^7\beta^6\gamma^{14}.$

$B = (-3)x^2yz^7 4x^4y^3z(-1)xy^5 = [(-3).4(-1)](x^2x^4x)\ (yy^3y^5)\ (z^7z)$
$= [4(-3)\ (-1)]\ x^7\ y^9\ z^8 = 12x^7y^9z^8.$

$\Gamma = [[(-2)xy^2z^3)]^3]^4 = [(-2)xy^2z^3]^{12} = (-2)^{12}x^{12}(y^2)^{12}(z^3)^{12} = 4096\ x^{12}\,y^{24}\,z^{36}.$

8. α) Είναι: $(x^2+3x)\ (x^2+6x+9) = x^2x^2+x^2 6x+x^2 9+3xx^2+3x6x+3x9$
$= x^4+6x^3+9x^2+3x^3+18x^2+27x = x^4+9x^3+27x^2+27x =$
$= x(x^3+9x^2+27x+27) = x(x+3)^3.$

β) Είναι: $x^2y^2+(x+y)^2(x^2+y^2) = x^2y^2+(x^2+y^2+2xy)\ (x^2+y^2) =$
$x^2y^2+x^4+x^2y^2+x^2y^2+y^4+2x^3y+2xy^3 = x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3$
$= (x^2)^2+(y^2)^2+(xy)^2+2x^2y^2+2y^2(xy)+2(xy)x^2 = (x^2+y^2+xy)^2.$

9. $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) = (x+\alpha)[(x+\beta)(x+\gamma)] = (x+\alpha)\ (x^2+\gamma x+\beta x+\beta\gamma) =$
$= x^3+\gamma x^2+\beta x^2+\beta\gamma x+\alpha x^2+\alpha\gamma x+\alpha\beta x+\alpha\beta\gamma = x^3+(\alpha x^2+\beta x^2+\gamma x^2)+(\alpha\beta x$
$+\beta\gamma x+\gamma\alpha x)+\alpha\beta\gamma = x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma.$

10. α) $(x-1)^2(x+1)^2 = [(x-1)(x+1)]^2 = (x^2-1)^2 = x^4-2x^2+1$

β) $(-7x+1)^2-(7x-3)^2 = [(-7x+1)+(7x-3)][(-7x+1)-(7x-3)]$
$= (-7x+1+7x-3)(-7x+1-7x+3) = -2(-14x+4) = 4(7x-2)$

γ) $(x^2-2\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2 = x^4-4\alpha x^2+4\alpha^2+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = x^4-4\alpha x^2+5\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

δ) $(2\alpha\beta+\gamma)^2-(\gamma-\delta)^2 = [(2\alpha\beta+\gamma)+(\gamma-\delta)]\ [(2\alpha\beta+\gamma)-(\gamma-\delta)] =$
$= (2\alpha\beta+\gamma+\gamma-\delta)\ (2\alpha\beta+\gamma-\gamma+\delta) = (2\alpha\beta+2\gamma-\delta)\ (2\alpha\beta+\delta)$

ε) $(\alpha x+\beta y)^2-(\alpha x-\beta y)^2 = [(\alpha x+\beta y)+(\alpha x-\beta y)]\ [(\alpha x+\beta y)-(\alpha x-\beta y)] =$
$= (\alpha x+\beta y+\alpha x-\beta y)\ (\alpha x+\beta y-\alpha x+\beta y) = 2\alpha x.2\beta y = 4\alpha\beta xy.$

11. α) $(3x-2)\ [4x-3+2(x-1)+x+1] = (3x-2)\ (4x-3+2x-2+x+1) =$
$= (3x-2)\ (7x-4)$

β) $x^6-8 = (x^2)^3-2^3 = (x^2-2)\ [(x^2)^2+x^2.2+2^2] = (x^2-2)\ (x^4+2x^2+4).$

12. Από το πρώτο μέλος έχουμε $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{xy} = \left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)y+\right.$
$\left.\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{y}\right\}\frac{1}{x}\,\frac{1}{y} = \left(xy+\frac{1}{x}y+x\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}$
$= xy\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\,y\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}+x\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}$

$$=\left(x\frac{1}{x}\right)\left(y\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)\left(y\frac{1}{y}\right)+\left(x\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\frac{1}{y}\right)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2y^2}.$$

13. **α)** Είναι:

$$\frac{1}{x}(x+x^2)+\frac{1}{y}(y+y^2)+\frac{1}{z}(z+z^2)+(-x)+(-y)+(-z)=$$

$$\frac{1}{x}x+\frac{1}{x}xx+\frac{1}{y}y+\frac{1}{y}yy+\frac{1}{z}z+\frac{1}{z}zz-x-y-z=$$

$$1+x+1+y+1+z-x-y-z=3.$$

β) Είναι: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=(xyz).0$

$$\Leftrightarrow xyz\frac{1}{x}+xyz\frac{1}{y}+xyz\frac{1}{z}=0$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0.$$

14. Από το θεώρημα 11 έχουμε: $(x+y)(x+z)=0 \Rightarrow x+y=0$ ή $x+z=0$. Από την ισότητα $x+y=0$ προκύπτει ότι ο x είναι αντίθετος του y και από την $x+z=0$ ότι ο x είναι αντίθετος του z.

15. Αν x $(x\neq 0)$ είναι ο ζητούμενος αριθμός, θα έχουμε: $x=\frac{1}{x} \Leftrightarrow xx=x\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

16. **α)** $(x-1)(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $x-2=0$ ή $x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ ή $x=3$.

β) $x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-2=0$ ή $x+2=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ ή $x=-2$.

γ) $x^3-2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0$ $\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

δ) $x^4-16=0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $x+2=0$ ή $x^2+4=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$. (Είναι πάντοτε $x^2+4\neq 0$).

ε) $(x-1)^2-(3-2x)^2=0 \Leftrightarrow [(x-1)+(3-2x)][(x-1)-(3-2x)]=0 \Leftrightarrow (2-x)(3x-4)=0 \Leftrightarrow 2-x=0$ ή $3x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=\frac{4}{3}$.

17. **α)** $(x+y):z=(x+y)\frac{1}{z}=x\frac{1}{z}+y\frac{1}{z}=(x:z)+(y:z)$

β) $(x-y):z=[x+(-y)]\frac{1}{z}=x\frac{1}{z}+(-y)\frac{1}{z}=x\frac{1}{z}-y\frac{1}{z}=(x:z)-(y:z)$

γ) $(xy):z=(xy)\frac{1}{z}=x\,y\frac{1}{z}=\left(x\frac{1}{z}\right)y=(x:z)y.$

$(xy):z=xy\frac{1}{z}=x\left(y\frac{1}{z}\right)=x(y:z).$

δ) $(x:y):z=\left(x\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z}=x\left(\frac{1}{y}\frac{1}{z}\right)=x\frac{1}{yz}=x:(yz).$

$(x:y):z=\left(x\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z}=x\frac{1}{y}\frac{1}{z}=\left(x\frac{1}{z}\right)\frac{1}{y}=(x:z):y$

18. **α)** $(xy):x=(xy)\frac{1}{x}=xy\frac{1}{x}=\left(x\frac{1}{x}\right)y=1y=y$

β) $(x:y)y=\left(x\frac{1}{y}\right)y=xy\frac{1}{y}=x\left(y\frac{1}{y}\right)=x1=x$

γ) $x:(yz)=x\frac{1}{yz}=x\left(\frac{1}{y}\frac{1}{z}\right)=\left(x\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z}=(x:y):z.$

19. **α)** $x=y \Leftrightarrow x\frac{1}{z}=y\frac{1}{z} \Leftrightarrow x:z=y:z$ (Θεώρ. 12).

β) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής αρκεί να αποδείξουμε $x:z\neq y:z \Leftrightarrow x\neq y$, δηλαδή $x:z=y:z \Leftrightarrow x=y$ που ισχύει ('Ασκ. 19α).

20. **α)** Είναι $\frac{x}{y}-\frac{z}{\varphi}=\frac{x\varphi}{y\varphi}+\left(\frac{-zy}{\varphi y}\right)=\frac{1}{y\varphi}x\varphi+\frac{1}{y\varphi}(-zy)=\frac{1}{y\varphi}[x\varphi+(-zy)]$

$=\frac{1}{y\varphi}(x\varphi-yz)=\frac{x\varphi-yz}{y\varphi}.$

β) $\frac{x}{y}:\frac{z}{\varphi}=\frac{x}{y}\;\frac{1}{\frac{z}{\varphi}}=\frac{x}{y}\;\frac{\varphi}{z}=\frac{x\varphi}{yz}.$

21. **α)** $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow y\varphi\frac{x}{y}=y\varphi\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi\left(y\frac{x}{y}\right)=y\left(\varphi\frac{z}{\varphi}\right) \Leftrightarrow \varphi x=yz$

β) $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow x\varphi=yz \Leftrightarrow x\varphi\frac{1}{z\varphi}=yz\frac{1}{z\varphi} \Leftrightarrow \frac{x}{z}=\frac{y}{\varphi}$

γ) $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow x\varphi=yz \Leftrightarrow x\varphi\frac{1}{xz}=yz\frac{1}{xz} \Leftrightarrow \frac{\varphi}{z}=\frac{y}{x}$

δ) $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \frac{x}{y}+1=\frac{z}{\varphi}+1 \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{y}=\frac{z}{\varphi}+\frac{\varphi}{\varphi}$

$\Leftrightarrow \frac{x+y}{y}=\frac{z+\varphi}{\varphi}$

ε) Έστω $\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi}=\lambda$. Τότε $\frac{x}{y}=\lambda \Leftrightarrow x=y\lambda$ (1) και $\frac{z}{\varphi}=\lambda \Leftrightarrow$ $z=\varphi\lambda$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε $x+z=y\lambda+\varphi\lambda=(y+\varphi)\lambda$ ή $\frac{x+z}{y+\varphi}=\lambda=\frac{x}{y}=\frac{z}{\varphi}$

στ) Όπως και η ε.

22. **α)** $5y^{-2}x^3z^0=5\frac{1}{y^2}x^31=5x^3\frac{1}{y^2}=\frac{5x^3}{y^2}$

β) $\frac{2x^3\,y^{-2}}{3x^{-2}y^3}=\frac{2}{3}\;\frac{x^3}{x^{-2}}\;\frac{y^{-2}}{y^3}=\frac{2}{3}\;x^{3-(-2)}y^{-2-3}=\frac{2}{3}\;x^5y^{-5}=\frac{2x^5}{3y^5}$

γ) $=\frac{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}{(\gamma\delta)^{-1}}=\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\gamma\delta}}=\frac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}{\frac{1}{\gamma\delta}}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}:\frac{1}{\gamma\delta}=\frac{(\alpha+\beta)\gamma\delta}{\alpha\beta}$

δ) $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{xy(x^2+y^2)}{x^2y^2(x+y)} = \frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$

ε) Θέτουμε $x^{-1}=y$, οπότε $x^{-2}=y^2$ και $x^{-3}=y^3$. Έχουμε:

$$\frac{1+x^{-1}+x^{-2}}{1-x^{-3}} = \frac{1+y+y^2}{1-y^3} = \frac{1+y+y^2}{(1-y)(1+y+y^2)} = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-x^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}.$$

23. α) $\left(-\frac{3}{4}x^2y^{-5}z^5\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} x^{-6}y^{15}z^{-15} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^3}\frac{1}{x^6}y^{15}\frac{1}{z^{15}}$

$= -\frac{64y^{15}}{27x^6z^{15}}$

β) $\frac{-7xy^5z^3}{8x^4y^5z^2} = \frac{-7}{8}x^{-3}y^0z^1 = -\frac{7}{8}\frac{1}{x^3}1z = -\frac{7z}{8x^3}$

γ) $= -\frac{\frac{2}{3}xy^3}{\frac{5}{4}x^4y^3z^4} + \frac{4x^4y^2z}{\frac{5}{4}x^4y^3z^4} - \frac{5x^3z^5}{\frac{5}{4}x^4y^3z^4} = -\frac{8}{15x^3z^4}+\frac{16}{5yz^3}-\frac{4z}{xy^3}.$

24. α) $(3x+5)^2-(9x^2-25)+6x+10=0 \Leftrightarrow 9x^2+30x+25-9x^2+25+6x+10=0$

$\Leftrightarrow 36x+60=0 \Leftrightarrow 36x=-60 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$

β) $3x(2x-1)+1-4x^2-(2x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 6x^2-3x+1-4x^2-2x^2+x$

$-3x+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow -10x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

γ) $\frac{x+2}{3}-\frac{2x+1}{2}=\frac{2x-3}{6}-x \Leftrightarrow 6\left(\frac{x+2}{3}-\frac{2x+1}{2}\right)=6\left(\frac{2x-3}{6}-x\right)$

$\Leftrightarrow 2(x+2)-3(2x+1)=2x-3-6x \Leftrightarrow 0x=-4$ (αδύνατη).

δ) Βρίσκουμε $x=\frac{53}{16}$. ε) Γίνεται $0x=-6$ (αδύνατη).

25. α) Αν $\lambda^2-9\neq 0$ ή $\lambda\neq\pm3$, έχει μια ρίζα, την $x=\frac{\lambda^2+3\lambda}{\lambda^2-9}=\frac{\lambda(\lambda+3)}{(\lambda+3)(\lambda-3)}$

$=\frac{\lambda}{\lambda-3}$. Αν $\lambda=-3$, η εξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή είναι ταυτότητα.
Αν $\lambda=3$, η εξίσωση γίνεται $0.x=18$, δηλαδή είναι αδύνατη.

β) Η εξίσωση γίνεται $3\lambda x+3x-2x=5\lambda+5-4$ ή $(3\lambda+1)x=5\lambda+1$. Αν $3\lambda+1\neq0$, ή $\lambda\neq-\frac{1}{3}$ έχει μια ρίζα, την $x=\frac{5\lambda+1}{3\lambda+1}$. Αν $3\lambda+1=0$ ή $\lambda=-\frac{1}{3}$, η εξίσωση γίνεται $0x=-\frac{2}{3}$, δηλαδή είναι αδύνατη.

γ) Αν $\lambda^2-1\neq0$ ή $\lambda\neq\pm1$, έχουμε ρίζα την $x=\frac{\lambda(\lambda+2)}{\lambda-1}$. Αν $\lambda=-1$, η εξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή είναι ταυτότητα. Αν $\lambda=1$, έχουμε $0x=6$, δηλαδή είναι αδύνατη.

δ) Η εξίσωση γίνεται $(\lambda-2)x=\lambda^2-8\lambda-8$. Αν $\lambda-2\neq0$, ή $\lambda\neq2$ έχει μια ρίζα, την $x=\frac{\lambda^2-8\lambda-8}{\lambda-2}$. Αν $\lambda-2=0$ ή $\lambda=2$, τότε γίνεται $0x=-20$ (αδύνατη).

26. α) Η εξίσωση γίνεται $(\lambda-1)x=\lambda+2\mu-7$. Αν $\lambda-1\neq0$, ή $\lambda\neq1$ έχει μια ρίζα, την $x=\frac{\lambda+2\mu-7}{\lambda-1}$. Αν $\lambda=1$, τότε το δεύτερο μέλος γίνεται $2\mu-6$ το οποίο μηδενίζεται, όταν $\mu=3$. Έτσι, όταν $\lambda=1$ και $\mu=3$, η εξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή είναι ταυτότητα. Ενώ, όταν $\lambda=1$, $\mu\neq3$, η εξίσωση γίνεται $0x=2\mu-6\neq0$ δηλαδή είναι αδύνατη.

β) Η εξίσωση γίνεται $3(\lambda-\mu)x=2\lambda-4$. Αν $\lambda-\mu\neq0$, ή $\lambda\neq\mu$ έχει μια ρίζα, την $x=\frac{2(\lambda-2)}{3(\lambda-\mu)}$. Αν $\lambda=\mu=2$, η εξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή είναι ταυτότητα και αν $\lambda=\mu\neq2$, είναι αδύνατη.

γ) Η εξίσωση γίνεται $2\lambda x=\lambda^2$. Αν $\lambda\neq0$, η εξίσωση έχει μία ρίζα, την $x=\frac{\lambda}{2}$. Αν $\lambda=0$, η εξίσωση γίνεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

27. Είναι: $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha+\beta=-\gamma$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\alpha+\beta)^3=(-\gamma)^3\\
&\Rightarrow \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\gamma^3\\
&\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\
&\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(-\gamma)\\
&\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma
\end{aligned}$$

α) Επειδή $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$, θα είναι σύμφωνα με τα παραπάνω: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

β) Είναι $\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)=\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta+\gamma\alpha-\beta\gamma=0$. Άρα έχουμε $\alpha^3(\beta-\gamma)^3+\beta^3(\gamma-\alpha)^3+\gamma^3(\alpha-\beta)^3=3\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

28. Αφού πάρουμε τα αναπτύγματα σύμφωνα με τις γνωστές ταυτότητες, βρίσκουμε: $A^2+B^2-\Gamma^2=-4x^2-12y^2+38xy$ και $AB+B\Gamma+\Gamma A=11x^2-11y^2-13xy$.

29. Από την άσκηση 21(ε) έχουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. Οπότε είναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. Αν τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, παίρνουμε $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2$. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2$.

30. α) Από την $y^2=1$ έχουμε $y=\pm1$. Οπότε για $y=1$ η πρώτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $x^2-3=6$ ή $x^2=9$, δηλαδή $x=\pm3$. Ενώ για $y=-1$ θα έχουμε $x^2+3=6$ ή $x^2=3$, που είναι αδύνατη στο $\mathbb{Q}$. Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι ($x=3$ **και** $y=1$) **ή** ($x=-3$ **και** $y=1$).

β) Έχουμε $(y-3)(y-5)=0 \Leftrightarrow y-3=0$ **ή** $y-5=0 \Leftrightarrow y=3$ **ή** $y=5$. Για $y=3$ η πρώτη δίνει $x=-16$ και για $y=5$ δίνει $x=-18$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. α) $\alpha>\beta>\gamma \Rightarrow \alpha-\beta>0$ και $\beta-\gamma>0$ και $\gamma-\alpha<0 \Rightarrow (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)<0$

β) Αρκεί $(x^3+y^3)-(x^2y+xy^2)\geq0$ (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)\geq0 \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2-xy)\geq0 \Leftrightarrow (x+y)(x^2-2xy+y^2)\geq0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2\geq0$ που ισχύει αφού $x+y>0$ και $(x-y)^2\geq0$.

γ) Αρκεί $x^3-(2x^2-x+2)>0$ (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow x^3-2x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x^2(x-2)+(x-2)>0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+1)>0$ που ισχύει αφού $x-2>0$ και $x^2+1>0$.

2. α) $(x+y)^2\geq 4xy \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-4xy\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$ που ισχύει.

β) Αρκεί $(\alpha+\beta+\gamma)^2-\alpha(\beta+\gamma-\alpha)-\beta(\gamma+\alpha-\beta)-\gamma(\alpha+\beta-\gamma)\geq 0$ (1).
Αλλά (1) $\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma+\alpha^2-\beta\gamma-\alpha\beta+\beta^2-\alpha\gamma-\beta\gamma+\gamma^2\geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2\geq 0$ που ισχύει.

γ) Αρκεί $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha(\beta+\gamma)\geq 0$(1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2\geq 0$, που ισχύει.

3. $x<1<y \Leftrightarrow (x-1<0$ **και** $y-1>0)$. Αλλά $xy-x-y+1<0 \Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)<0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)<0$, που αληθεύει, αφού $x-1$ και $y-1$ είναι ετερόσημοι.

4. α) Επειδή $\alpha^2+1>0$, είναι: $\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\leq 1 \Leftrightarrow (\alpha^2+1)\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\leq \alpha^2+1$
$\Leftrightarrow 2\alpha\leq \alpha^2+1 \Leftrightarrow 0\leq \alpha^2+1-2\alpha \Leftrightarrow 0\leq(\alpha-1)^2$, που αληθεύει.

β) Αφού α,β θετικοί, θα είναι και $1+\alpha$, $1+\beta$, $1+\alpha+\beta$ θετικοί. Άρα:
$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow (1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\beta)\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\beta) \Leftrightarrow (1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)<\alpha(1+\beta)(1+\alpha+\beta)+\beta(1+\alpha)(1+\alpha+\beta) \Leftrightarrow \alpha+\beta+\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2<\alpha+\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta+\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$
$\Leftrightarrow 0<2\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ που ισχύει, αφού α,β είναι θετικοί.

5. $0<y<\omega \Rightarrow \frac{1}{y}>\frac{1}{\omega}\Rightarrow -\frac{1}{y}<-\frac{1}{\omega}$. Την τελευταία ανισότητα προσθέτουμε κατά μέλη με την $x<z$ και έχουμε: $x-\frac{1}{y}<z-\frac{1}{\omega}$.

6. α) Είναι $\beta=1-\alpha$, οπότε: $\alpha\beta\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow \alpha(1-\alpha)\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow \alpha-\alpha^2\leq\frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow 4\alpha-4\alpha^2\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq 1+4\alpha^2-4\alpha \Leftrightarrow 0\leq(1-2\alpha)^2$, που είναι αληθής.

β) Είναι: $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\geq 9 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}\geq 9$
$\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}\geq 9 \Leftrightarrow \frac{1+1}{\alpha\beta}\geq 9-1 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha\beta}\geq 8 \Leftrightarrow \frac{2}{8}\geq\alpha\beta$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\geq\alpha\beta$, που αποδείχτηκε (Άσκ. 6α).

7. α) $\beta>0 \Leftrightarrow \beta>-\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta>\alpha-\beta$.

β) Επειδή α,β,γ,δ είναι θετικοί, θα έχουμε: $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta \Rightarrow \alpha\gamma<\beta\delta$
$\Rightarrow \frac{\alpha\gamma}{\gamma\delta}<\frac{\beta\delta}{\gamma\delta}\Rightarrow \frac{\alpha}{\delta}<\frac{\beta}{\gamma}$.

8. Επειδή x,y θετικοί με $x>y$ και $k>0$, είναι $x^k>y^k>0$. (1)
Επίσης επειδή $\alpha>\beta>0$ και $\lambda<0$, είναι $\beta^\lambda>\alpha^\lambda>0$. (2)
Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε: $x^k\beta^\lambda>y^k\alpha^\lambda$.

9. α) Είναι: $\lambda x>x+2 \Leftrightarrow \lambda x-x>2 \Leftrightarrow (\lambda-1)x>2$.

i) Για $\lambda-1>0$ ή $\lambda>1$ έχουμε $x>\frac{2}{\lambda-1}$.

ii) Για $\lambda-1=0$ ή $\lambda=1$ έχουμε την $0x>2$ που δεν έχει λύση.

iii) Για $\lambda-1<0$ ή $\lambda<1$ έχουμε $x<\frac{2}{\lambda-1}$ επειδή διαιρούμε με αρνητικό.

β) Επειδή Ε.Κ.Π (2,4,6) = 12, έχουμε: $12\left(\frac{x-\lambda}{2}+\frac{2x+3}{4}\right)>\frac{\lambda x}{6}\cdot 12$
$\Leftrightarrow 6(x-\lambda)+3(2x+3)>2\lambda x \Leftrightarrow 6x-6\lambda+6x+9>2\lambda x \Leftrightarrow 12x-2\lambda x>6\lambda-9$
$\Leftrightarrow 2(6-\lambda)x>6\lambda-9$.

i) Για $6-\lambda>0$ ή $\lambda<6$ έχουμε $x>\frac{6\lambda-9}{2(6-\lambda)}$.

ii) Για $6-\lambda=0$ ή $\lambda=6$ έχουμε την $2x.0>36-9$, που δεν έχει λύση.

iii) Για $6-\lambda<0$ ή $\lambda>6$ έχουμε $x<\frac{6\lambda-9}{2(6-\lambda)}$.

γ) Επειδή Ε.Κ.Π (2,5,10) =10, έχουμε: $10\left(\frac{\lambda(x-2)}{2}-\frac{2x-\lambda}{5}\right)<10\left(\frac{x}{10}-\frac{2}{5}\right)$
$\Leftrightarrow 5\lambda(x-2)-2(2x-\lambda)<x-4 \Leftrightarrow 5\lambda x-10\lambda-4x+2\lambda<x-4$
$\Leftrightarrow 5\lambda x-4x-x<10\lambda-2\lambda-4 \Leftrightarrow 5\lambda x-5x<8\lambda-4 \Leftrightarrow 5(\lambda-1)x<4(2\lambda-1)$.

i) Για $\lambda-1>0$ ή $\lambda>1$ έχουμε $x<\frac{4(2\lambda-1)}{5(\lambda-1)}$.

ii) Για $\lambda-1=0$ ή $\lambda=1$ έχουμε την $5x\,.\,0<4$, που αληθεύει.

iii) Για $\lambda-1<0$ ή $\lambda<1$ έχουμε $x>\frac{4(2\lambda-1)}{5(\lambda-1)}$.

10. α) $(2x+3>x$ **και** $x-5<4) \Leftrightarrow (2x-x>-3$ **και** $x<5+4)$
$\Leftrightarrow (x>-3$ **και** $x<9) \Leftrightarrow -3<x<9$.

β) $(x(x+2)-(x+1)x>2$ **και** $2x(x-1)<x(2x-3)+3)$
$\Leftrightarrow (x^2+2x-x^2-x>2$ **και** $2x^2-2x<2x^2-3x+3)$
$\Leftrightarrow (x>2$ **και** $2x^2-2x-2x^2+3x<3) \Leftrightarrow (x>2$ **και** $x<3)$
$\Leftrightarrow 2<x<3$.

11. $\alpha<\beta<\gamma \Leftrightarrow (\alpha-\beta<0$ **και** $\beta-\gamma<0$ **και** $\gamma-\alpha>0)$. Άρα:
$|\alpha-\beta|=-(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$, $|\beta-\gamma|=-(\beta-\gamma)=\gamma-\beta$ καί $|\gamma-\alpha|=\gamma-\alpha$.
Οπότε: $A=3(\beta-\alpha)+2(\gamma-\beta)-4(\gamma-\alpha)=3\beta-3\alpha+2\gamma-2\beta-4\gamma+4\alpha=\alpha+\beta-2\gamma$.

12. α) Επειδή Ε.Κ.Π (2,3,4) = 12, είναι:
$12\left(\frac{3|x|+1}{2}+\frac{2|x|-1}{3}\right)=\frac{|x|+2}{4}\cdot 12 \Leftrightarrow 6(3|x|+1)+4(2|x|-1)=3(|x|+2)$
$\Leftrightarrow 18|x|+6+8|x|-4=3|x|+6 \Leftrightarrow 18|x|+8|x|-3|x|=-6+4+6$
$\Leftrightarrow 23|x|=4 \Leftrightarrow |x|=\frac{4}{23}\Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{23}$

β) $(2|x|-5)-(4|x|-3)=7|x|-1 \Leftrightarrow 2|x|-5-4|x|+3=7|x|-1$
$\Leftrightarrow 2|x|-4|x|-7|x|=5-3-1 \Leftrightarrow -9|x|=1 \Leftrightarrow |x|=-\frac{1}{9}$ αδύνατον αφού $|x|\geq 0$.
Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

γ) Γνωρίζουμε ότι, αν $|x|=|\alpha|$, τότε $x=\pm\alpha$. Άρα θα είναι:
$|3x-1|=|x-3| \Leftrightarrow 3x-1=\pm(x-3)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $3x-1=x-3 \Leftrightarrow 3x-x=1-3 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$.

ii) $3x-1=-(x-3) \Leftrightarrow 3x-1=-x+3 \Leftrightarrow 3x+x=1+3 \Leftrightarrow 4x=4 \Leftrightarrow x=1$.

13. Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες $|x-y| < \alpha$ και $|y-\omega| < \alpha$ και έχουμε: $|x-y|+|y-\omega| < 2\alpha$ (1). Επειδή όμως $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ για $\alpha = x-y$ και $\beta = y-\omega$, θα είναι: $|(x-y)+(y-\omega)| \leq |x-y|+|y-\omega|$ $\Rightarrow |x-\omega| \leq |x-y|+|y-\omega|$. (2)
Από τις (1) και (2) έχουμε: $|x-\omega| < 2\alpha$.

14. Θα αποδείξουμε πρώτα την ανισότητα $||x|-|y|| \leq |x+y|$ (1). Επειδή και τα δύο μέλη της είναι θετικοί αριθμοί, θα είναι: (1) $\Leftrightarrow ||x|-|y||^2 \leq |x+y|^2$
$\Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x||y| \leq x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow$
$x^2+y^2-2|xy| \leq x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow -2|xy| \leq 2xy \Leftrightarrow |xy| \geq -xy$ που ισχύει.
Από τις προηγούμενες ισοδυναμίες προκύπτει ότι, για να ισχύει η ισότητα $||x|-|y|| = |x+y|$, πρέπει $|xy| = -xy$, που ισχύει όταν $xy \leq 0$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται και η ανισότητα $|x+y| \leq |x|+|y|$. Το ίσον ισχύει, όταν $xy \geq 0$.

15. Επειδή $|x|\,|y| > 0$, είναι: $\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2 \Leftrightarrow |x|\,|y| \left(\frac{|x|}{|y|} + \frac{|y|}{|x|}\right)$ $\geq 2|x|\,|y| \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2 \geq 2|x|\,|y| \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x|\,|y| \geq 0 \Leftrightarrow (|x|-|y|)^2 \geq 0$, που είναι αληθής.

16. Επειδή οι λ,μ,ν είναι θετικοί, θα είναι και ο $\lambda+\mu+\nu$ θετικός. Άρα η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε είναι ισοδύναμη με την ανισότητα: $(\lambda+\mu+\nu)\alpha < \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma < (\lambda+\mu+\nu)\gamma$ (1). Αλλά (1)$\Leftrightarrow \lambda\alpha+\mu\alpha+\nu\alpha < \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma < \lambda\gamma+\mu\gamma+\nu\gamma \Leftrightarrow (\lambda\alpha+\mu\alpha+\nu\alpha < \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ **και** $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma < \lambda\gamma+\mu\gamma+\nu\gamma)$
$\Leftrightarrow (\mu\alpha+\nu\alpha < \mu\beta+\nu\gamma$ (2) **και** $\lambda\alpha+\mu\beta < \lambda\gamma+\mu\gamma$ (3)).
Η (2) αποδεικνύεται ως εξής:
$\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow (\alpha < \beta$ **και** $\alpha < \gamma) \Rightarrow (\mu\alpha < \mu\beta$ **και** $\nu\alpha < \nu\gamma) \Rightarrow \mu\alpha+\nu\alpha < \mu\beta+\nu\gamma$.
Ομοίως για την (3) έχουμε $(\alpha < \beta < \gamma) \Rightarrow (\alpha < \gamma$ **και** $\beta < \gamma)$
$\Rightarrow (\lambda\alpha < \lambda\gamma$ **και** $\mu\beta < \mu\gamma) \Rightarrow \lambda\alpha+\mu\beta < \lambda\gamma+\mu\gamma$.

17. Είναι $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{(x-y)(x^2+y^2)-(x+y)(x^2-y^2)}{(x+y)(x^2+y^2)}$
$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2)+(x+y)(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]}{(x+y)(x^2+y^2)}$$
$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2-x^2-y^2-2xy)}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{(y-x)2xy}{(x+y)(x^2+y^2)} \leq 0$$
αφού $x \geq y > 0$. Άρα $\frac{x-y}{x+y} \leq \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Αν $x=y$, ισχύει το ίσον.

18. **α)** Είναι το πρώτο ερώτημα της 6.
β) $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-2\alpha\beta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2} \geq 2\alpha\beta$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq \alpha\beta$ που είναι η (α).
γ) Αποδείξαμε ότι $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2}$ (1). Αλλά: (1)$\Leftrightarrow(\alpha^2+\beta^2)^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^4+\beta^4+$
$2\alpha^2\beta^2 \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^4+\beta^4+2(\alpha\beta)^2 \geqslant \frac{1}{4}$ (2). Αν $\alpha\beta > 0$ και στη (2) αντί του $\alpha\beta$ θέσουμε το $\frac{1}{4}$, η ανισότητα ενισχύεται και έχουμε: $\alpha^4+\beta^4+2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}$
$\Rightarrow \alpha^4+\beta^4 \geqslant \frac{1}{4}-\frac{1}{8} \Rightarrow \alpha^4+\beta^4 \geqslant \frac{1}{8}$. Αν $\alpha\beta \leqslant 0$, θα είναι $\alpha \geqslant 1$ ή $\beta \geqslant 1$ (αφού $\alpha+\beta = 1$) και η αποδεικτέα είναι προφανής.

19. Σύμφωνα με την § 3.11, Εφ. 6 πρέπει να είναι
$(2x-3y+1 = 0$ **και** $3x-5y+2 = 0)$ (1).
Αλλά: (1) $\Leftrightarrow (2x-3y = -1$ **και** $3x-5y = -2) \Leftrightarrow (x = \frac{3y-1}{2}$ **και** $3\,\frac{3y-1}{2}$ $-5y = -2) \Leftrightarrow (x = \frac{3y-1}{2}$ **και** $3(3y-1)-10y = -4) \Leftrightarrow (x = \frac{3y-1}{2}$ **και** $9y-3-10y = -4) \Leftrightarrow (x = \frac{3y-1}{2}$ **και** $y = 1) \Leftrightarrow (x = 1$ **και** $y = 1)$.

20. **α)** $\left(2x-1 \leq x \leq \frac{x+3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(2x-1 \leq x\right.$ **και** $\left.x \leq \frac{x+3}{2}\right) \Leftrightarrow (2x-x \leq 1$ **και** $2x-x \leq 3) \Leftrightarrow (x \leq 1$ **και** $x \leq 3) \Leftrightarrow x \leq 1$.
β) $[(3x-2)(x-2) = 0$ **και** $2x-4 \leq -3x)] \Leftrightarrow [(3x-2 = 0$ **ή** $x-2 = 0)$ **και** $2x+3x \leq 4] \Leftrightarrow [(x = \frac{2}{3}$ **ή** $x = 2)$ **και** $x \leq \frac{4}{5})]$. Άρα $x = \frac{2}{3}$.

21. **α)** $\frac{2|x|-3}{4} < \frac{|x|+1}{3} \Leftrightarrow 12\,\frac{2|x|-3}{4} < 12\,\frac{|x|+1}{3} \Leftrightarrow 3(2|x|-3) < 4(|x|+1)$
$\Leftrightarrow 6|x|-9 < 4|x|+4 \Leftrightarrow 6|x|-4|x| < 9+4 \Leftrightarrow 2|x| < 13 \Leftrightarrow |x| < \frac{13}{2}$
$\Leftrightarrow -\frac{13}{2} < x < \frac{13}{2}$.
β) $3(|x|-1)+2(|x|-2) > 2 \Leftrightarrow 3|x|-3+2|x|-4 > 2 \Leftrightarrow 5|x| > 3+4+2 \Leftrightarrow 5|x| > 9$
$\Leftrightarrow |x| > \frac{9}{5} \Leftrightarrow \left(x < -\frac{9}{5}\right.$ **ή** $\left.x > \frac{9}{5}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. Επειδή $3 > 0$ είναι $f(3) = 5.3-4 = 15-4 = 11$. Για $x=-2$ και $x=0$ έχουμε: $f(-2) = -(-2)^2 = -4$ και $f(0) = -0^2 = 0$.

2. Είναι $f(-1) = (-1-1)^2 = 4$, $f(1) = \beta.1^2+2 = \beta+2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}-1\right)^2$ $= \frac{9}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha\,\frac{1}{2}+3 = \frac{\alpha}{2}+3$, $f(2) = \beta.2^2+2 = 4\beta+2$,
$f\left(\frac{1}{4}\right) = \alpha\,\frac{1}{4}+3 = \frac{\alpha}{4}+3$ και $f(-2) = (-2-1)^2 = 9$.
Άρα επειδή $f(-1) = f(1)$, έχουμε $4 = \beta+2$ ή $\beta = 2$. Ομοίως επειδή $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, έχουμε $\frac{9}{4} = \frac{\alpha}{2}+3$ ή $9=2\alpha+12$ ή $\alpha = -\frac{3}{2}$.
Οπότε $f(2)-2f\left(\frac{1}{4}\right)+f(-2) = 4\beta+2-2\left(\frac{\alpha}{4}+3\right)+9 = 4\beta+2-\frac{\alpha}{2}-6+9$
$$= 4\beta-\frac{\alpha}{2}+5 = 4.2-\frac{-\frac{3}{2}}{2}+5 = 8+\frac{3}{4}+5 = 13\,\frac{3}{4}.$$

3. Είναι $f(-1) = (-1)^3-(-1)+5 = -1+1+5 = 5$, $f(0) = 0^3-0+5 = 5$ και $f(1) = 1^3-1+5 = 5$.

4. Είναι $f(-3) = (-3)^3-8(-3) = -27+24 = -3$, $f(0) = 0$ και $f(3) = 3^3-8.3 = 27-24 = 3$.

5. Βρίσκουμε τα γραφήματα G_1, G_2 των f_1 και f_2. Είναι.
$f_1(1) = 3$, $f_1(2) = 9$ και $f_1(3) = 19$. Άρα $G_1 = \{(1,3), (2,9), (3,19)\}$ και επειδή
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$, ή f_1^{-1} είναι συνάρτηση με γράφημα $G_1^{-1} = \{(3,1),$
$(9,2), (19,3)\}$.
Ομοίως $f_2(-1) = 3$, $f_2(1) = 3$, $f_2(2) = 6$ και $f_2(3) = 11$. Άρα $G_2 = \{(-1,3),$
$(1,3), (2,6), (3,11)\}$ και επειδή τα -1 και 1 έχουν την ίδια εικόνα το 3, η f_2^{-1}.
δεν είναι συνάρτηση και έχει γράφημα $G_2^{-1} = \{(3,-1),(3,1), (6,2), (11,3)\}$.

6. α) Πρέπει $(2x+5)^2-(x+1)^2 \neq 0$. (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow [(2x+5)-(x+1)][(2x+5)$
$+(x+1)] \neq 0 \Leftrightarrow (2x+5-x-1)(2x+5+x+1) \neq 0 \Leftrightarrow (x+4)(3x+6) \neq 0$
$\Leftrightarrow 3(x+4)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow (x+4 \neq 0$ **και** $x+2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq -4$
και $x \neq -2)$. Άρα πεδίο ορισμού της f_1 είναι τό $\mathbb{R}-\{-4,-2\}$ και $f_1(x)$

$$= \frac{x+4}{3(x+4)(x+2)} = \frac{1}{3(x+2)}.$$

β) Πρέπει $4x^3+16x^2+12x \neq 0$ (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow 4x(x^2+4x+3) \neq 0 \Leftrightarrow$
$4x(x+1)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0$ **και** $x+1 \neq 0$ **και** $x+3 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 0$ **και**
$x \neq -1$ **και** $x \neq -3)$. Άρα πεδίο ορισμού της f_2 είναι τό $\mathbb{R}-\{-3,-1,0\}$ και

$$f_2(x) = \frac{(6x+8x^2)(x+3)}{2.4x(x+1)(x+3)} \text{ ή } f_2(x) = \frac{2x(3+4x)\ (x+3)}{4.2x(x+1)(x+3)} \text{ ή } f_2(x) = \frac{4x+3}{4(x+1)}.$$

γ) Πρέπει $(2x+5)(7-x)+4x^2-25 \neq 0$ (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow (2x+5)(7-x)+$
$+(2x-5)(2x+5) \neq 0 \Leftrightarrow (2x+5)(7-x+2x-5) \neq 0 \Leftrightarrow$
$(2x+5)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow (2x+5 \neq 0$ **και** $x+2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq -\frac{5}{2}$ **και**
$x \neq -2)$. Άρα πεδίο ορισμού της f_3 είναι το $\mathbb{R}-\left\{-2, -\frac{5}{2}\right\}$ και

$$f_3(x) = \frac{(x+2)[(2x+1)^2-16]}{(2x+5)(x+2)} \text{ ή } f_3(x) = \frac{(x+2)[(2x+1)+4][(2x+1)-4]}{(2x+5)(x+2)}$$

$$\text{ή } f_3(x) = \frac{(x+2)(2x+5)(2x-3)}{(2x+5)(x+2)} = 2x-3.$$

δ) Πρέπει $(x^2-9 \neq 0$ **και** $x^2-6x+9 \neq 0)$ (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow [(x+3)(x-3) \neq 0$
και $(x-3)^2 \neq 0] \Leftrightarrow (x-3 \neq 0$ **και** $x+3 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 3$ **και** $x \neq -3)$. Άρα
πεδίο ορισμού της f_4 είναι το $\mathbb{R}-\{-3,+3\}$ και

$$f_4(x) = \frac{(x-5)(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{-4(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{x-5}{x-3} - \frac{4}{x-3} = \frac{x-9}{x-3}.$$

7. α) Είναι $f(0) = 0+2 = 2$, $f(1) = 1+2 = 3$, $g(0) = 0^2+2 = 2$, $g(1) = 1^2+2 = 3$.
Άρα $\forall\, x \in E$, $f(x) = g(x)$, οπότε $f = g$.
β) Επειδή $x+2 \neq x^2+2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0,1\}$, συμπεραίνουμε ότι δεν είναι
$f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f \neq g$.

8. Πρέπει $x^2-3x+2 \neq 0$ (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow (x-1 \neq 0$ **και**
$x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 1$ **και** $x \neq 2)$. Άρα πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{1,2\}$ και

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = x,$$ δηλαδή η f είναι ταυτοτική συνάρτηση.

9. Για τους πραγματικούς αριθμούς $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$ ισχύει:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x) = g(x)+h(x)$ ή
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f+h)(x) = (g+h)(x)$. Άρα: $f = g \Leftrightarrow f+h = g+h$.

10. Έχουμε $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 3+7 = 10$, $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = -4$ και
$(-3f+5g)(x) = -3f(x)+5g(x) = -3.3+5.7 = -9+35 = 26$.

11. Επειδή $(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x)$ έχουμε:
για $x < 1$ $\quad (f_1+f_2)(x) = (2x-1)+(-x^2-2x+5) = -x^2+4$
για $1 \leq x < 3$ $\quad (f_1+f_2)(x) = (x^2+2x+3)+(-x^2-2x+5) = 8$
για $3 \leq x \leq 5$ $\quad (f_1+f_2)(x) = (x^2+2x+3)+(x-1) = x^2+3x+2$
για $5 < x \leq 7$ $\quad (f_1+f_2)(x) = (2x-1)+(x-1) = 3x-2$
για $7 < x$ $\quad (f_1+f_2)(x) = (2x-1)+(-x^2-2x+5) = -x^2+4$.

Άρα:

$$(f_1+f_2)(x) = \begin{cases} -x^2+4 & x < 1 \text{ ή } x > 7 \\ 8 & x \in [1,3) \\ x^2+3x+2 & x \in [3,5] \\ 3x-2 & x \in (5,7] \end{cases}$$

και είναι σταθερή στο διάστημα $[1,3)$.

12. Για τους πραγματικούς αριθμούς k, $f(x)$, $g(x)$ ισχύει:
$kf(x)+kg(x) = k[f(x)+g(x)]$ και επειδή $f(x)+g(x) = (f+g)(x)$ θα είναι:
$kf(x)+kg(x) = k(f+g)(x)$. Άρα $kf+kg = k(f+g)$.
Για $k = -1$ έχουμε: $-(f+g) = -f-g$.

13. Είναι $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (2x+5)+(x+4) = 3x+9$
$(3f+2g)(x) = (3f)(x)+(2g)(x) = 3f(x)+2g(x) = 3(2x+5)+2(x+4)$
$= 6x+15+2x+8 = 8x+23$ και
$(3f-2g)(x) = (3f)(x)-(2g)(x) = 3f(x)-2g(x) = 3(2x+5)-2(x+4)$
$= 6x+15-2x-8 = 4x+7$.

14. Είναι $(5f+7g)(x) = (5f)(x)+(7g)(x) = 5f(x)+7g(x) = 5.5+7.7 = 74$
και $(5f-7g)(x) = 5f(x)-7g(x) = 25-49 = -24$.

15. Είναι $((-f)g)(x) = (-f)(x)\,g(x) = -f(x)\,g(x)$ και
$(-fg)(x) = -f(x)\,g(x)$.. Άρα $(-f)g = -f\,g$.

16. Για τους πραγματικούς αριθμούς $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$ ισχύει:
$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x)\,h(x) = g(x)\,h(x)$. Άρα και $f = g \Rightarrow fh = gh$.

17. α) Πρέπει $x+1 \neq 0$ ή $x \neq -1$. Άρα $A = \mathbb{R}-\{-1\}$
β) Πρέπει ακόμη και $f(x) \neq 0$ ή $x-3 \neq 0$ ή $x \neq 3$. Άρα $A' = \mathbb{R}-\{-1,3\}$

18. Πρέπει $(f_1(x) \neq 0$ **και** $f_2(x) \neq 0)$ (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow (x+1 \neq 0$ **και** $x^2-1 \neq 0)$
$\Leftrightarrow [x+1 \neq 0$ **και** $(x+1)(x-1) \neq 0] \Leftrightarrow (x+1 \neq 0$ **και** $x-1 \neq 0) \Leftrightarrow$
$(x \neq -1$ **και** $x \neq 1)$. Άρα το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ είναι το $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$$\text{και } \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)(x) = \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{x-1+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}.$$

Όμοια για την $\frac{f_1}{f_2}$ πρέπει $f_2(x) \neq 0$ (1). Όμως (1) $\Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow$
$(x+1)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq -1$ **και** $x \neq 1)$. Άρα το πεδίο ορισμού της $\frac{f_1}{f_2}$ είναι το

$$\mathbb{R}-\{-1,1\} \text{ και } \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}.$$

19. Πρέπει $g(x) \neq 0$ (1). Αλλά (1)$\Leftrightarrow x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0$ **και** $x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 0$ **και** $x \neq 2)$. Άρα το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $\mathbb{R}-\{0,2\}$ και

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3-x^2-2x}{x^2-2x} = \frac{x(x^2-x-2)}{x(x-2)} = \frac{x(x-2)(x+1)}{x(x-2)} = x+1.$$

20. Αρκεί να δείξουμε την αντίστοιχη ισότητα για τους πραγματικούς αριθμούς $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ και $f_4(x)$. Δηλ. την ισότητα $(2x+3)^3-1 = 2(x+1)[4(x+2)^2-(2x+3)]$ ή την $[(2x+3)-1][(2x+3)^2+(2x+3)+1] = 2(x+1)[4(x^2+4x+4)-2x-3]$ ή την $(2x+2)(4x^2+12x+9+2x+3+1) = 2(x+1)(4x^2+16x+16-2x-3)$ ή την $2(x+1)(4x^2+14x+13) = 2(x+1)(4x^2+14x+13)$ που είναι προφανής.

21. Εκτελούμε τις πράξεις και έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3-3x^2+3x-1-2(x^2+2x+1)+(x^4+x^2+1-2x^3+2x^2-2x)-x^2-1 \\ &= x^3-3x^2+3x-1-2x^2-4x-2+x^4+x^2+1-2x^3+2x^2-2x-x^2-1 \\ &= x^4-x^3-3x^2-3x-3. \end{aligned}$$

22. **α)** Θα κάνουμε πράξεις στο β' μέλος και θα καταλήξουμε στο α'.

Έτσι έχουμε: $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma] \\ &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma) \\ &= \alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2-\alpha^2\beta-\alpha^2\gamma-\alpha\beta\gamma+\alpha^2\beta+\beta^3+\beta\gamma^2-\alpha\beta^2-\alpha\beta\gamma-\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma \\ &\quad +\gamma^3-\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma^2-\beta\gamma^2 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+\gamma)^3 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^3 = (\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3 \\ &= \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3 \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)[\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2] \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2) \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)[\alpha(\beta+\gamma)+\gamma(\beta+\gamma)] \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha). \end{aligned}$$

23. Επειδή $f(2) = 0$, το $f(x)$ διαιρείται με το $x-2$ και αν κάνουμε τη διαίρεση, βρίσκουμε πηλίκο x^2-9. Άρα $f(x) = (x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3)$.
Το $f(x)$ παραγοντοποιείται και πιο απλά ως εξής:
$f(x) = x^2(x-2)-9(x-2) = (x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3)$.

24. **α)** Από την άσκ. 22α παρατηρούμε ότι, αν $\alpha+\beta+\gamma = 0$, τότε και $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = 0$ ή $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.
Έχουμε τώρα $(x-1)+(x-2)+(3-2x) = x-1+x-2+3-2x = 0$. Άρα $f(x) = (x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3 = 3(x-1)(x-2)(3-2x)$.

β) Είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)^2-4(x^2-5x+6)^2 \\ &= [(x-2)(x+2)]^2-4[(x-2)(x-3)]^2 \\ &= (x-2)^2(x+2)^2-4(x-2)^2(x-3)^2 \\ &= (x-2)^2[(x+2)^2-4(x-3)^2] \\ &= (x-2)^2[(x+2)-2(x-3)][(x+2)+2(x-3)] \\ &= (x-2)^2(8-x)(3x-4). \end{aligned}$$

25. Τα πεδία ορισμού των f_1 και f_2 είναι αντιστοίχως $\mathbb{R}-\{2\}$ και $\mathbb{R}-\{-3,1\}$. Άρα το πεδίο ορισμού της f_1+f_2 είναι το $\mathbb{R}-\{-3,1,2\}$ και $(f_1+f_2)(x)$

$$= f_1(x)+f_2(x) = \frac{3x+1}{x-2} + \frac{5x-4}{(x-1)(x+3)} = \frac{(3x+1)(x-1)(x+3)+(5x-4)(x-2)}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \ldots = \frac{3x^3+12x^2-21x+5}{(x-2)(x-1)(x+3)}.$$

26. Τα πεδία ορισμού των f_1 και f_2 είναι αντιστοίχως $\mathbb{R}-\{0,1\}$ και $\mathbb{R}-\{0,2\}$. Άρα το πεδίο ορισμού της f_1+f_2 είναι το $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$ και $(f_1+f_2)(x)$

$$= f_1(x)+f_2(x) = \frac{3x+2}{x(x-1)} + \frac{4}{x(x-2)} = \frac{(3x+2)(x-2)+4(x-1)}{x(x-1)(x-2)} = \ldots = \frac{3x^2-8}{x(x-1)(x-2)}.$$

27. Τα πεδία ορισμού των f_1 και f_2 είναι αντιστοίχως $\mathbb{R}-\{2\}$ και $\mathbb{R}-\{1,3\}$. Άρα το πεδίο ορισμού των f_1+f_2 και f_1f_2 είναι το $\mathbb{R}-\{1,2,3\}$ και

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = \frac{3x+1}{x-2} + \frac{5x-4}{(x-1)(x-3)}$$
$$= \frac{(3x+1)(x-1)(x-3)+(5x-4)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \ldots = \frac{3x^3-6x^2-9x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x) = \frac{3x+1}{x-2}\cdot\frac{5x-4}{(x-1)(x-3)} = \frac{(3x+1)(5x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

28. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{-3,-1,1\}$ στο οποίο είναι $x^2-1 \neq 0$ και $x^2+2x-3 \neq 0$. Άρα για $x \in \mathbb{R}-\{-3,-1,1\}$

είναι
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \frac{6}{x^2+2x-3} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} - \frac{6}{(x+3)(x-1)} = \frac{(x+2)(x+3)-6(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \ldots = \frac{x}{(x+1)(x+3)}.$$

29. Είναι
$$f_1(x) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2x}} = \frac{\frac{x^3-8}{2x^3}}{\frac{4+x^2+2x}{4x^2}} = \frac{4x^2(x-2)(x^2+2x+4)}{2x^3(x^2+2x+4)} = \frac{2(x-2)}{x}$$

$$f_2(x) = \frac{9x^2-4\alpha^2}{\frac{x-\alpha}{\alpha-2x}-1} = \frac{(3x-2\alpha)(3x+2\alpha)}{\frac{x-\alpha-\alpha+2x}{\alpha-2x}} = \frac{(3x-2\alpha)(3x+2\alpha)(\alpha-2x)}{3x-2\alpha} = (3x+2\alpha)(\alpha-2x).$$

30. Πρέπει $(x-3)(x+2) \neq 0$ (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow (x-3 \neq 0$ **και** $x+2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 3$ **και** $x \neq -2)$.
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{-2,3\}$.
Επειδή όμως $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \neq 0$, το $\mathbb{R}-\{-2,3\}$ θα είναι και πεδίο ορισμού της $g = \frac{1}{f}$ με $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{(x-3)(x+2)}{x^2+1}$.

31. α) Σύμφωνα με την § 3.11 Εφ. 6, η εξίσωση $(x+2)^2+(x^2+5x+6)^2=0$ ισοδυναμεί με $(x+2=0$ **και** $x^2+5x+6=0)$ (1). Αλλά (1) $\Leftrightarrow (x+2=0$
και $(x+2)(x+3)=0) \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2.$

β) $(x-1)^2(x^2-4)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)(x+2)(x^2+2)=0$ (1). Αλλά επειδή $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2+2 \neq 0$ θα είναι: (1) $\Leftrightarrow (x-1=0$ ή $x-2=0$ ή $x+2=0)$
$\Leftrightarrow (x=1$ ή $x=2$ ή $x=-2)$.

γ) $(x-3)^2-(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow$
$(x-3)[(x-3)-(x-1)]=0 \Leftrightarrow (x-3)(-2)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$

32. α) $x^3+3x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow (x^3+1)+3x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)+3x$
$(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1+3x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+1)=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^3=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$

β) $(x-1)^2+(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1+x+1)=0$
$\Leftrightarrow (x-1)\,2x=0 \Leftrightarrow (x-1=0$ ή $x=0) \Leftrightarrow (x=1$ ή $x=0)$.

γ) $2x^3-2x=x^2-1 \Leftrightarrow 2x^3-2x-(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-1)-(x^2-1)=0$
$\Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1=0$ ή $x+1$
$=0$ ή $2x-1=0) \Leftrightarrow \left(x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=\dfrac{1}{2}\right).$

33. α) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x^2-2x}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x(x-2)}=0$ (1). Πρέπει:
$x(x-2) \neq 0$ ή $(x \neq 0$ **και** $x \neq 2)$. Η (1) $\Leftrightarrow (x-2)^2+4x-8=0 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2+4(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2+4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$ και επειδή
$x-2 \neq 0$ θα είναι $x+2=0$, δηλαδή $x=-2$.

β) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{2(x+2)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{2(x+2)}.$ (1)
Πρέπει $(x+1)(x+2) \neq 0$ (2). Αλλά (2) $\Leftrightarrow (x+1 \neq 0$ **και** $x+2 \neq 0)$
$\Leftrightarrow (x \neq -1$ **και** $x \neq -2)$.
Οπότε: (1) $\Leftrightarrow 2-2(x+2)=(x+1)^2 \Leftrightarrow 2-2x-4=x^2+2x+1$
$\Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)=0$ και επειδή $x+1 \neq 0$, θα είναι
$x+3=0$, δηλαδή $x=-3$.

34. α) $\dfrac{(x+1)^3}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow [(x+1)^3(x-2) \geq 0$ **και** $x-2 \neq 0]$ (1). Αλλά $(x+1)^2 \geq 0$ οπότε:
$\Leftrightarrow [(x+1)^2(x+1)\cdot(x-2) \geq 0$ **και** $x-2 \neq 0] \Leftrightarrow [(x+1 \geq 0$ **και** $x-2>0)$ ή
(1) $\Leftrightarrow [(x+1)(x-2) \geq 0$ **και** $x-2 \neq 0]$
$(x+1 \leq 0$ **και** $x-2<0)] \Leftrightarrow (x>2$ ή $x \leq -1)$.
$\Leftrightarrow [(x \geq -1$ **και** $x>2)$ ή $(x \leq -1$ **και** $x<2)] \Leftrightarrow (x>2$ ή $x \leq -1)$.

β) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow [(x-1)^2(x+1)(x+3) \leq 0$ **και** $x+3 \neq 0]$ (1).
Επειδή όμως είναι $(x-1)^2 \geq 0$, η (1) ισοδυναμεί με $(x=1)$ ή
$[(x+1)(x+3) \leq 0$ **και** $x+3 \neq 0]$.
Αλλά $[(x+1)(x+3) \leq 0$ **και** $x+3 \neq 0]$
$\Leftrightarrow (x+1 \leq 0$ **και** $x+3>0)$ (2) ή $(x+1 \geq 0$ **και** $x+3<0)$ (3).
Το σύστημα (3) είναι αδύνατο, αφού πάντα $x+3>x+1$, ενώ το
(2) $\Leftrightarrow (x \leq -1$ και $x>-3) \Leftrightarrow -3<x \leq -1$. Άρα η λύση της ανισώσεως είναι: $-3<x \leq -1$ ή $x=1$.

35. $1<\dfrac{1+x}{1-x}<2 \Leftrightarrow \left(1<\dfrac{1+x}{1-x} \text{ και } \dfrac{1+x}{1-x}<2\right) \Leftrightarrow \left(0<\dfrac{1+x}{1-x}-1 \text{ και } \dfrac{1+x}{1-x}-2<0\right)$

$$\Leftrightarrow \left(0<\frac{1+x-(1-x)}{1-x} \text{ και } \frac{1+x-2(1-x)}{1-x}<0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(0<\frac{2x}{1-x} \text{ και } \frac{3x-1}{1-x}<0\right)$$

$$\Leftrightarrow [x(1-x)>0 \text{ και } (3x-1)(1-x)<0] \qquad (1)$$

Είναι: $x(1-x)>0 \Leftrightarrow [(x>0$ **και** $1-x>0)$ ή $(x<0$ **και** $1-x<0)]$
$\Leftrightarrow [(x>0$ **και** $x<1)$ ή $(x<0$ **και** $x>1)]$
$\Leftrightarrow 0<x<1$ (2)

Είναι: $(3x-1)(1-x)<0 \Leftrightarrow [(3x-1<0$ **και** $1-x>0)$ ή $(3x-1>0$ **και** $1-x<0)]$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(x<\frac{1}{3} \text{ και } x<1\right) \text{ ή } \left(x>\frac{1}{3} \text{ και } x>1\right)\right.$$

$$\Leftrightarrow x<\frac{1}{3} \text{ ή } x>1 \qquad (3)$$

Οι (2) και (3) συναληθεύουν για $0<x<\dfrac{1}{3}$.

36. Είναι: $f_1(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{x^2}}{\dfrac{\alpha}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\alpha}}=\dfrac{\dfrac{x^3+\alpha^3}{\alpha x^2}}{\dfrac{\alpha^2-\alpha x+x^2}{\alpha x^2}}=\dfrac{x^3+\alpha^3}{\alpha^2-\alpha x+x^2}$

$$=\frac{(x+\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2)}{\alpha^2-\alpha x+x^2}=x+\alpha.$$

$$f_2(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}=\frac{x}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1+1}{x-1}}}=\frac{x}{1-\dfrac{x-1}{x}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{x-x+1}{x}}=\frac{x^2}{1}=x^2.$$

37. α) $\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{2-x}=\dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{1}{x+2}$ (1)
Πρέπει να είναι $(x-2)(x+2) \neq 0$, δηλαδή $(x-2 \neq 0$ **και** $x+2 \neq 0)$ ή
$(x \neq 2$ **και** $x \neq -2)$.
Οπότε έχουμε: (1) $\Leftrightarrow 2x+(x-1)(x+2)=x-2 \Leftrightarrow 2x+(x-1)(x+2)-x+2=0$
$\Leftrightarrow x+2+(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow (x+2)(1+x-1)=0.$
$\Leftrightarrow (x+2)x=0$ και επειδή $x+2 \neq 0$, θα είναι $x=0$.

β) $\dfrac{x^2}{x+1}+1=\dfrac{1}{x+1}+2x$ (1). Πρέπει $x+1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq -1$, οπότε
έχουμε: (1) $\Leftrightarrow x^2+x+1=1+2x(x+1) \Leftrightarrow x^2+x-2x(x+1)=0$
$\Leftrightarrow x(x+1)-2x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2x)=0.$
$\Leftrightarrow (x+1)(-x)=0$ και επειδή $x+1 \neq 0$, θα είναι $x=0$.

38. α) $\frac{(x-2)^2(x+1)}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow [(x-2)^2(x+1)(x-3) \geq 0$ **και** $x-3 \neq 0]$ (1).

Επειδή όμως είναι $(x-2)^2 \geq 0$, η (1) ισοδυναμεί με $(x=2)$ ή $[(x+1)(x-3) \geq 0$ **και** $x-3 \neq 0]$.

Αλλά: $[(x+1)(x-3) \geq 0$ **και** $x-3 \neq 0]$

$\Leftrightarrow [x+1 \geq 0$ **και** $x-3 > 0)$ ή $(x+1 \leq 0$ **και** $x-3 < 0)]$

$\Leftrightarrow [(x \geq -1$ **και** $x > 3)$ ή $(x \leq -1$ **και** $x < 3)]$

$\Leftrightarrow (x > 3$ ή $x \leq -1)$

β) $\frac{x+2}{2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow [(x+2)(2x-3) \leq 0$ **και** $2x-3 \neq 0]$

$\Leftrightarrow [x+2 \leq 0$ **και** $2x-3 > 0)$ ή $(x+2 \geq 0$ **και** $2x-3 < 0)]$

$\Leftrightarrow \left[\left(x \leq -2 \text{ και } x > \frac{3}{2}\right) \text{ ή } \left(x \geq -2 \text{ και } x < \frac{3}{2}\right)\right]$

$\Leftrightarrow -2 \leq x < \frac{3}{2}$.

γ) $\frac{3x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+3) > 0 \Leftrightarrow [(3x-1 > 0$ **και** $x+3 > 0)$ ή

$(3x-1 < 0$ **και** $x+3 < 0)$

$\Leftrightarrow [(x > \frac{1}{3}$ **και** $x > -3)$ ή $(x < \frac{1}{3}$ **και** $x < -3)]$

$\Leftrightarrow (x > \frac{1}{3}$ ή $x < -3)$.

39. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f_1(x) = f_2(x)f_3(x)$ για $x \neq -1, 3$.

Είναι $f_1(x) = (x-2)^2(2x+1) - (x-2)^2(2x-5)$
$= (x-2)^2[(2x+1)-(2x-5)] = 6(x-2)^2$.

$$f_2(x) = \frac{2(x^2-5x+6)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2(x-2)}{x+1}$$

$f_3(x) = (x+2)(x-2)(x+1) - (x-2)(x-1)(x+1)$
$= (x-2)(x+1)[(x+2)-(x-1)] = 3(x-2)(x+1)$.

Άρα $f_2(x)f_3(x) = \frac{2(x-2)}{x+1}3(x-2)(x+1) = 6(x-2)^2 = f_1(x)$.

40. $5 > \frac{2x-1}{x+3} > 3 \Leftrightarrow \left(5 > \frac{2x-1}{x+3} \text{ και } \frac{2x-1}{x+3} > 3\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 > \frac{2x-1}{x+3} - 5 \text{ και } \frac{2x-1}{x+3} - 3 > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 > \frac{2x-1-5(x+3)}{x+3} \text{ και } \frac{2x-1-3(x+3)}{x+3} > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 > \frac{-3x-16}{x+3} \text{ και } \frac{-x-10}{x+3} > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 < \frac{3x+16}{x+3} \text{ και } \frac{x+10}{x+3} < 0\right)$

$\Leftrightarrow [0 < (3x+16)(x+3)$ **και** $(x+10)(x+3) < 0]$ (1)

Είναι: $(3x+16)(x+3) > 0 \Leftrightarrow [(3x+16 > 0$ **και** $x+3 > 0)$ ή $(3x+16 < 0$ **και** $x+3 < 0)] \Leftrightarrow \left\{\left(x > -\frac{16}{3} \text{ και } x > -3\right) \text{ ή } \left(x < -\frac{16}{3} \text{ και } x < -3\right)\right\}$

$\Leftrightarrow \left(x > -3 \text{ ή } x < -\frac{16}{3}\right)$. (1)

Είναι: $(x+10)(x+3) < 0 \Leftrightarrow (x+10 > 0$ **και** $x+3 < 0)$ (επειδή είναι $x+10 > x+3$)

$\Leftrightarrow (x > -10$ **και** $x < -3)$

$\Leftrightarrow -10 < x < -3$ (2)

Οι (1) και (2) συναληθεύουν για $-10 < x < -\frac{16}{3}$.

41. α) Επειδή όλα τα διαφορετικά υπόλοιπα των διαιρέσεων είναι οι αριθμοί 0,1,2, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\{0,1,2\}$.

β) Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων 2 : 3, 18 : 3, 19 : 3 και 22 : 3 είναι αντίστοιχα οι αριθμοί 2,0,1,1. Άρα θα έχουμε:
$f(2) = 2$, $f(18) = 0$, $f(19) = 1$ και $f(22) = 1$.

γ) Αν πάρουμε $\alpha = 28$ και $\beta = 25$, θα έχουμε $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 1$ και $f(\alpha-\beta) = f(28-25) = f(3) = 0$.

δ) Αν πάρουμε $\alpha = 12$, $\beta = 18$ και $\gamma = 5$, θα έχουμε:
$f(\alpha) = f(12) = 0$ και $f(\beta) = f(18) = 0$ και $f(\alpha+\beta) = f(12+18) = f(30) = 0$.
Επίσης $f(\alpha\gamma) = f(12.5) = f(60) = 0$ και $f(\alpha+\gamma) = f(12+5) = f(17) = 2 = f(5) = f(\gamma)$.

42. Αν $\nu = 2\rho$ με $\rho \in \mathbb{N}$ ισχύει: $f(2\rho) = (-1)^{2\rho}.2 + (-1)^{2\rho+1}.3 = 2-3 = -1$ και $g(2\rho) = -1$. Δηλαδή $f(\nu) = g(\nu)$ για κάθε ν άρτιο (1).
Έστω τώρα $\nu = 2\rho+1$ με $\rho \in \mathbb{N}$, τότε $f(2\rho+1) = (-1)^{2\rho+1}.2 + (-1)^{2\rho+2}.3 = -2+3 = 1$ και $g(2\rho+1) = 1$. Άρα $f(\nu) = g(\nu)$ για κάθε ν περιττό (2).
Από τις (1) και (2) έχουμε $\forall x \in \mathbb{N}, f(\nu) = g(\nu)$. Άρα $f = g$.
Αν $k = 2\rho$, τότε $g(k)+g(k+1) = g(2\rho)+g(2\rho+1) = -1+1 = 0$.
Αν $k = 2\rho+1$, τότε $g(k)+g(k+1) = g(2\rho+1) + g(2\rho+2) = 1-1 = 0$
Άρα $g(k)+g(k+1) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

43. Είναι $f_1(x) = (x+1)^2$ και $f_2(x) = (x-1)(x+1)$. Επομένως έχουμε:
$(f_1^4 - f_2^4)(x) = f_1^4(x) - f_2^4(x) = [f_1^2(x) - f_2^2(x)][f_1^2(x) + f_2^2(x)]$
$= [f_1(x) - f_2(x)][f_1(x) + f_2(x)][f_1^2(x) + f_2^2(x)]$
$= [(x+1)^2 - (x-1)(x+1)][(x+1)^2 + (x-1)(x+1)][(x+1)^4 + (x-1)^2(x+1)^2]$
$= (x+1)[(x+1)-(x-1)](x+1)[(x+1)+(x-1)](x+1)^2[(x+1)^2+(x-1)^2]$
$= (x+1)^4(x+1-x+1)(x+1+x-1)(x^2+2x+1+x^2-2x+1)$
$= (x+1)^4\, 2(2x)(2x^2+2) = (x+1)^4\, 4x2(x^2+1)$
$= 8x(x^2+1)f_1^2(x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

1. α) Αν $x = 0{,}3232\ldots32\ldots$, θα είναι $100x = 32{,}3232\ldots32\ldots = 32 + x$ ή $x = \dfrac{32}{99}$.

β) Αν $x = 2{,}34545\ldots45\ldots$, θα είναι $10x = 23{,}4545\ldots45\ldots$ και $1000x = 2345{,}4545\ldots45\ldots$ Άρα $1000x - 10x = 2345 - 23$ ή $x = \dfrac{129}{55}$.

γ) Ο αριθμός $-32{,}52699\ldots9\ldots$ είναι το μοναδικό στοιχείο των διαστημάτων: $[-32{,}527,\ -32{,}526]$, $[-32{,}527,\ -32{,}5269]$, ... $[-32{,}527,\ -32{,}52699\ldots9\ldots]$..., δηλαδή ο αριθμός $-32{,}527$.

2. α) Αν x είναι η τετραγωνική ρίζα του 7, τότε $x^2 = 7$. Έστω k_1 ένας ακέραιος τέτοιος, ώστε $\dfrac{k_1}{10} \leqslant x < \dfrac{k_1+1}{10}$ ή $k_1 \leqslant 10x < k_1 + 1$. Επειδή όμως $k_1 \leqslant 10x < k_1 + 1 \iff k_1^2 \leqslant 100x^2 < (k+1)^2$ και $100x^2 = 100.7 = 700$, οι διαδοχικοί ακέραιοι k_1, k_1+1 είναι οι 26 και 27, αφού $26^2 \leqslant 700 < 27^2$. Επομένως η ζητούμενη προσέγγιση είναι $\dfrac{k_1}{10} = 2{,}6$ (με έλλειψη) και $\dfrac{k_1+1}{10} = \dfrac{26+1}{10} = 2{,}7$ (με υπεροχή).

β) Αν εργαστούμε όπως παραπάνω, βρίσκουμε ότι η ζητούμενη προσέγγιση $\dfrac{1}{10}$ είναι $\dfrac{17}{10} = 1{,}7$ (με έλλειψη) και $\dfrac{17+1}{10} = 1{,}8$ (με υπεροχή).

3. Είναι: **α)** $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$, **β)** $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$, **γ)** $\sqrt[3]{\dfrac{125}{512}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{8}\right)^3} = \dfrac{5}{8}$,

δ) $\sqrt{0{,}0009} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{100}\right)^2} = \dfrac{3}{100}$, **ε)** $\sqrt[3]{\dfrac{64x^6y^9}{125}} = \dfrac{4x^2y^3}{5}$.

4. α) Είναι $A = \dfrac{|x|}{x}$. Άρα

$$A = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

β) Είναι $A = |x-1| + |x-3|$, οπότε:

- αν $x \leqslant 1$, τότε $x-1 \leqslant 0$ καί $x-3 \leqslant 0$. Άρα $B = -(x-1)-(x-3) = -2x+4$.
- αν $1 < x \leqslant 3$, τότε $x-1 > 0$ και $x-3 \leqslant 0$. Άρα $B = x-1-x+3 = 2$
- αν $x > 3$, τότε $x-1 > 0$ και $x-3 > 0$. Άρα $B = x-1+x-3 = 2x-4$.

5. Έχουμε:

α) $\sqrt{36x^4 + 12x^2 + 1} = \sqrt{(6x^2+1)^2} = 6x^2 + 1$, αφού $6x^2 + 1 > 0$

β) $\sqrt{\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{9}{25}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{5}$,

αφού $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{5} > 0$

γ) $\sqrt{\dfrac{x^4}{25y^2} + 1 + \dfrac{25y^2}{4x^4}} = \sqrt{\left(\dfrac{x^2}{5y} + \dfrac{5y}{2x^2}\right)^2} = \left|\dfrac{x^2}{5y} + \dfrac{5y}{2x^2}\right|$.

6. α) Πρέπει να είναι $x+3 \geqslant 0$ **και** $2x-1 \geqslant 0$, δηλαδή $x \geqslant \dfrac{1}{2}$. Για $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ όμως έχουμε:

$\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} \iff x+3 = 2x-1 \iff x = 4$, που είναι λύση παραδεκτή.

β) Πρέπει να είναι $x-2 \geqslant 0$ ή $x \geqslant 2$. Για $x \geqslant 2$ όμως έχουμε:

$4 - \sqrt{x-2} = 0 \iff 4 = \sqrt{x-2} \iff 16 = x-2 \iff x = 18$, που είναι λύση παραδεκτή.

γ) Πρέπει να είναι $x-2 \geqslant 0$ **και** $2x+3 \geqslant 0$, δηλαδή $x \geqslant 2$. Για $x \geqslant 2$ όμως έχουμε: $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3} \iff x-2 = 2x+3 \iff x = -5$ που αποκλείεται, αφού $-5 < 2$.

δ) Πρέπει να είναι $-3x+5 \geqslant 0$ **και** $x-7 \geqslant 0$, δηλαδή $x \leqslant \dfrac{5}{3}$ **και** $x \geqslant 7$. Οι ανισώσεις όμως αυτές δε συναληθεύουν για καμιά τιμή του x. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

7. Έχουμε:

α) $\sqrt{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$

β) $\sqrt[9]{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

γ) $\sqrt[8]{(\sqrt{5} - 2)^4} = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$

8. Είναι:

α) $\sqrt{19600} = \sqrt{4 \cdot 49 \cdot 100} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 7 \cdot 10 = 140$

β) $\sqrt[3]{27 \cdot 64 \cdot 343} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{7^3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$

γ) $\sqrt[5]{32 \cdot 243 \cdot 3125} = \sqrt[5]{32}\,\sqrt[5]{243}\,\sqrt[5]{3125} = \sqrt[5]{2^5}\,\sqrt[5]{3^5}\,\sqrt[5]{5^5} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

9. Έχουμε:

α) $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8} = \sqrt[4]{(2\alpha\beta^2)^4} = 2|\alpha|\beta^2$

β) $\sqrt{108x^5y^6} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 x^5 y^6} = 2 \cdot 3x^2|y^3|\sqrt{3x} = 6x^2|y|^3\sqrt{3x}$

γ) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}} = \sqrt{\sqrt[4]{3^5\sqrt[5]{3}}} = \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{3^{26}}}} = \sqrt[40]{3^{26}} = \sqrt[20]{3^{13}}$

δ) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha\sqrt[4]{\beta^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{\alpha^4\beta^2}}} = \sqrt[24]{\alpha^4\beta^2} = \sqrt[12]{\alpha^2|\beta|}$

10. Είναι:

α) $\sqrt[5]{\alpha^2}\,\sqrt[15]{\alpha^4}=\sqrt[15]{\alpha^6}\,\sqrt[15]{\alpha^4}=\sqrt[15]{\alpha^{10}}=\sqrt[3]{\alpha^2}$

β) $\sqrt[12]{\alpha^7}\,\sqrt[20]{\alpha^3}\,\sqrt[15]{\alpha^2}=\sqrt[60]{\alpha^{35}\,\alpha^9\,\alpha^8}=\sqrt[60]{\alpha^{52}}=\sqrt[15]{\alpha^{13}}$

γ) $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}\,\sqrt[5]{\dfrac{1}{6}}=\sqrt[30]{2^{15}\,3^{10}\,\dfrac{1}{6^6}}=\sqrt[30]{\dfrac{2^{15}\,3^{10}}{2^6.3^6}}=\sqrt[30]{2^9\,3^4}$

11. Έχουμε:

α) $\sqrt[12]{\alpha^5}:\sqrt[4]{\alpha}=\sqrt[12]{\alpha^5}:\sqrt[12]{\alpha^3}=\sqrt[12]{\alpha^{5-3}}=\sqrt[6]{\alpha}$

β) $\sqrt[9]{\alpha^8}:\sqrt[6]{\alpha^5}=\sqrt[18]{\alpha^{16}:\alpha^{15}}=\sqrt[18]{\alpha}$

γ) $\sqrt[15]{3^{10}}:\sqrt[10]{3^3}=\sqrt[30]{3^{20}:3^9}=\sqrt[30]{3^{11}}$

12. Έχουμε:

α) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{18}=\sqrt{2^2.2}+\sqrt{2^4.2}-\sqrt{3^2.2}=2\sqrt{2}+2^2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

β) $3\sqrt{32}-2\sqrt{50}=12\sqrt{2}-10\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

γ) $-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{54}=-\sqrt[3]{2^3.2}+\sqrt[3]{5^3.3}-\sqrt[3]{3^3.2}=-2\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{2}$
$=-5\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{3}$

δ) $8\sqrt{20}+3\sqrt{80}-2\sqrt{500}=8\sqrt{2^2.5}+3\sqrt{2^4.5}-2\sqrt{5.10^2}=(16+12-20)\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

13. Είναι:

α) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2-2\sqrt{3}.\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=|\sqrt{3}-\sqrt{2}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

β) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{4+5-2.2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$

γ) $\sqrt{54+14\sqrt{5}}=\sqrt{49+5+2.7\sqrt{5}}=\sqrt{(7+\sqrt{5})^2}=7+\sqrt{5}$

14. Έχουμε:

α) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$

β) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\dfrac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1}=2-\sqrt{3}$

γ) $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{(x-\sqrt{x^2+1})^2}{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}=\dfrac{x^2+x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}}{x^2-x^2-1}$
$=-2x^2+2x\sqrt{x^2+1}-1$

δ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$

15. Έχουμε:

α) $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{8-3}+\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{8-3}=\dfrac{2\sqrt{8}}{5}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$

β) $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3}=\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^3}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^3}=$

$=\dfrac{(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3}{[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^3}=\dfrac{2\cdot 2^3+6\cdot 2\cdot(\sqrt{3})^2}{1}=16+36=52.$

16. Αν $x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, τότε θα έχουμε:

$x^2=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}=8-2\sqrt{16-12}=4.$ Και επειδή $x>0$, $x=\sqrt{4}=2$.

17. Έστω $\alpha\neq\alpha'$. Τότε θα είναι $\alpha+\sqrt{\beta}=\alpha'+\sqrt{\beta'}\ \Rightarrow$

$\sqrt{\beta}=\alpha'-\alpha+\sqrt{\beta'}\ \Rightarrow\ (\sqrt{\beta})^2=(\alpha'-\alpha+\sqrt{\beta'})^2\ \Rightarrow$

$\sqrt{\beta'}=\dfrac{\beta-\beta'-(\alpha'-\alpha)^2}{2(\alpha'-\alpha)}$. Άρα $\sqrt{\beta'}$ ρητός ως πηλίκο δύο ρητών. Αυτό όμως είναι άτοπο. Επομένως $\alpha=\alpha'$, οπότε και $\beta=\beta'$.

18. Είναι:

α) $27^{-\frac{5}{6}}.3^{2,5}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{27^5}}\cdot\sqrt{3^5}=\dfrac{1}{\sqrt{3^6}}\cdot\sqrt{3^5}=1$

β) $(6,25)^{-\frac{3}{4}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{100}{625}\right)^3}\cdot 5^3=\sqrt[4]{\left(\dfrac{10}{25}\right)^6}\cdot 5^3=\sqrt{\dfrac{10^3}{5^6}}\cdot 5^3=10\sqrt{10}.$

19. Είναι:

$A=\left(\alpha^{-\frac{3}{2}}\,\beta\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\,\beta\,\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^3=\left(\alpha^{-2}\,\beta^2\,\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^3=\alpha^{-6}\,\beta^6\,\alpha^2=\alpha^{-4}\,\beta^6.$

Οπότε για $\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $\beta=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ έχουμε:

$A=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6=\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^4\dfrac{1}{(\sqrt[3]{2})^6}=\dfrac{2^4}{2^2}\cdot\dfrac{1}{2^2}=1.$

20. Αν θέσουμε $\alpha^{\frac{1}{3}} = k,\ \beta^{\frac{1}{3}} = \lambda$, θα έχουμε:

α) $(k+\lambda)(k^2-k\lambda+\lambda^2) = k^3+\lambda^3 = \left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \alpha+\beta$

β) $(k-\lambda)(k^2+k\lambda+\lambda^2) = k^3-\lambda^3 = \left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \alpha-\beta.$

21. Έχουμε:

α) $\left(7^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right) = \left[\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]\left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-1^2\right]$

$= (7-6)(x-1) = x-1$

β) $-2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right) = -2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}+2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} = -2\alpha\sqrt{\beta}+2\beta\sqrt{\alpha}$

γ) $2\sqrt{6}\left(3^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{6}+12^{\frac{1}{2}}\right) = 2\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-2\sqrt{6}+\sqrt{12}) =$

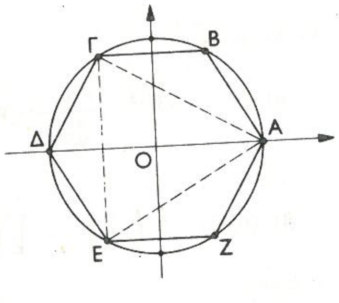
$= 2\sqrt{18}-4.6+2\sqrt{6.12} = 6\sqrt{2}-24+12\sqrt{2} = 18\sqrt{2}-24.$

δ) $\left(5.6^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(5.6^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$

$= 5^2.6+5+2.5.6^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}}-\left(5^2.6+5-2.5.6^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}}\right) = 20\sqrt{30}.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

1. α) Έστω το κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Οι κορυφές του χωρίζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο (με αρχή Α) σε 6 ίσα τόξα, με μήκος $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Επομένως,



στο Α απεικονίζονται οι αριθμοί $0 + 2k\pi$

» Β » » » $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

» Γ » » » $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

» Δ » » » $\pi + 2k\pi$

» Ε » » » $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

» Ζ » » » $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

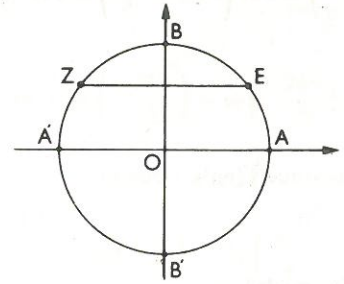
β) Οι κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΓΕ χωρίζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε 3 ίσα τόξα με μήκος $\frac{2\pi}{3}$. Επομένως,

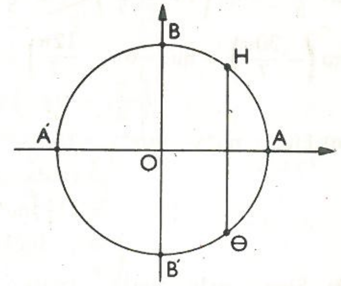
στο Α απεικονίζονται οι αριθμοί $0 + 2k\pi$

» Γ » » » $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

» Ε » » » $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

2. α) Έστω η χορδή ΕΖ // ΑΑ'. Αν στο σημείο Ε απεικονίζεται ο αριθμός x, τότε στο Ζ θα απεικονίζεται ο $\pi - x$.



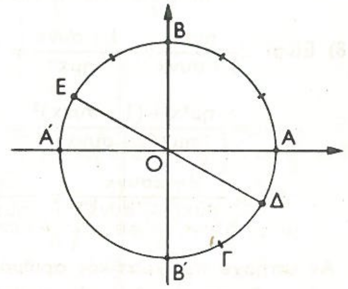


Άρα οι εικόνες των αριθμών $2k\pi + x$ και $2k\pi + \pi - x$, $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουν χορδές παράλληλες προς τον άξονα ΑΑ'.

β) Ομοίως, έστω η χορδή ΗΘ // ΒΒ', οπότε, αν στο σημείο Η απεικονίζεται ο αριθμός x, τότε στο Θ θα απεικονίζεται ο $-x$.

Άρα οι εικόνες των αριθμών $2k\pi + x$ και $2k\pi - x$, $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουν χορδές παράλληλες προς τον άξονα ΒΒ'.

3. Οι εικόνες των αριθμών $\frac{5\pi}{3}$ και $-\frac{\pi}{3}$ συμπίπτουν στο σημείο Γ, των αριθμών $\frac{5\pi}{6}$ και $-\frac{7\pi}{6}$ στο σημείο Ε και των αριθμών $-\frac{\pi}{6}$ και $\frac{11\pi}{6}$ στο σημείο Δ.



Άρα οι εικόνες των αριθμών:

$\frac{5\pi}{6}$ και $-\frac{\pi}{6}$ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία Ε και Δ

$-\frac{7\pi}{6}$ και $\frac{11\pi}{6}$ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία Ε και Δ.

4. Αφού το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $-\frac{5}{13}$, y, συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{5}{13} \quad \text{και} \quad \eta\mu x = y.$$

Άρα $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ και επειδή είναι $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ έχουμε $\eta\mu x = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε τις τιμές των συνx και ημx στην παράσταση Α, θά έχουμε:

$$A = \frac{\left[2\left(-\frac{12}{13}\right)-3\left(-\frac{5}{13}\right)\right]-\left[\left(-\frac{12}{13}\right)^2-\left(-\frac{5}{13}\right)^2\right]}{2\left(-\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)} = -\frac{59}{30}.$$

5. Είναι :

$$\eta\mu\frac{23\pi}{5}=\eta\mu\left(4\pi+\frac{3\pi}{5}\right)=\eta\mu\frac{3\pi}{5},\quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{-28\pi}{5}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-6\pi+\frac{2\pi}{5}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5},$$

$$\eta\mu\left(-\frac{30\pi}{7}\right)=\eta\mu\left(-6\pi+\frac{12\pi}{7}\right)=\eta\mu\frac{12\pi}{7}.$$

6. **α)** Είναι: $\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^6x=(\eta\mu^2x)^3+(\sigma\upsilon\nu^2x)^3$

$$=(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)^3-3\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)$$
$$=1^3-3\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x\,.\,1$$
$$=1-3\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x$$

β) Είναι: $\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x=(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x)=$

$$=1\cdot(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x)$$
$$=\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x$$
$$=1-\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x$$
$$=1-2\sigma\upsilon\nu^2x$$

γ) Είναι: $\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2x=\eta\mu^2x(1-\eta\mu^2\varphi)-\eta\mu^2\varphi(1-\eta\mu^2x)$

$$=\eta\mu^2x-\eta\mu^2x\,\eta\mu^2\varphi-\eta\mu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2x=\eta\mu^2x-\eta\mu^2\varphi.$$

δ) Είναι: $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\dfrac{\eta\mu x\,.\,\eta\mu x}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}+\dfrac{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}$

$$=\frac{\eta\mu^2x+(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{\eta\mu^2x+1+2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}$$

$$=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{2}{\eta\mu x}$$

7. Αν υπήρχε πραγματικός αριθμός x τέτοιος, ώστε $\eta\mu x=0$ **και** $\sigma\upsilon\nu x=0$, τότε $\eta\mu^2x=0$ **και** $\sigma\upsilon\nu^2x=0$, οπότε $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=0$, που είναι άτοπο, γιατί $\forall\, x,\ \eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$.

8. Επειδή $\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}+\frac{25}{169}=1$, οι αριθμοί $\frac{12}{13}$ και $\frac{-5}{13}$ μπορεί να είναι τιμές των συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο στον ίδιο αριθμό x και επειδή οι $\frac{12}{13}$ και $\frac{-5}{13}$ είναι ετερόσημοι, το αντίστοιχο τόξο θα λήγει στο β' ή δ' τεταρτημόριο.

9. Για $x=\frac{\pi}{3}$ έχουμε : $A=\dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}+\sigma\varphi\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\frac{\sqrt3}{2}+\frac12}{\sqrt3+\frac{\sqrt3}{3}}=\dfrac{\sqrt3\,(\sqrt3+1)}{8}$

Για $x=\frac{\pi}{4}$ έχουμε : $A=\dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\sigma\varphi\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}}{1+1}=\dfrac{\sqrt2}{2}$

Για $x=\frac{\pi}{6}$ έχουμε : $A=\dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}+\sigma\varphi\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\frac12+\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt3}{3}+\sqrt3}=\dfrac{\sqrt3\,(\sqrt3+1)}{8}.$

10. Είναι : $\varepsilon\varphi\left(-\frac{23\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\left(-\frac{24\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\left(-4\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\varepsilon\varphi\left(-2\cdot2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{17\pi}{4}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\varphi\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sigma\varphi\left(2\cdot2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\varphi\frac{\pi}{4}=1.$$

11. Είναι : $\eta\mu\frac{13\pi}{6}=\eta\mu\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac12$

$$\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-4\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sigma\upsilon\nu\left(-2.2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{19\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{18\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(3.2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\sqrt3$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\varphi\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\varphi\frac{\pi}{6}=\sqrt3$$

Άρα: $A=\dfrac{\frac12+\frac{\sqrt2}{2}}{\sqrt3+\sqrt3}=\dfrac{\sqrt2+1}{4\sqrt3}=\dfrac{\sqrt3\,(\sqrt2+1)}{12}$

12. Είναι: $\sigma\upsilon\nu^2x=1-\eta\mu^2x=1-\left(\frac{12}{15}\right)^2=1-\frac{144}{225}=\frac{81}{225}$ και επειδή είναι $0<x<\frac{\pi}{2}$, θα είναι $\sigma\upsilon\nu\,x=\sqrt{\frac{81}{225}}=\frac{9}{15}$, οπότε $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu\,x}=\frac43$ και $\sigma\varphi x=\frac{1}{\varepsilon\varphi\,x}=\frac34$.

Επομένως

$$A=\frac{2\cdot\frac43-3\,\frac{9}{15}+2\cdot\frac34}{5\cdot\frac{12}{15}}=\frac{71}{120}.$$

13. **α)** Είναι $\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu\,x}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}$$

β) Είναι : $ημx\ συνx(1+εφx)\ (1+σφx) =$

$$= ημx\ συνx\ (1+εφx+σφx+εφx\ σφx)$$
$$= ημx\ συνx\ (1+εφx+σφx+1)$$
$$= ημx\ συνx\ (2+εφx+σφx)$$
$$= 2ημx\ συνx+ημx\ συνx\ εφx+ημx\ συνx\ σφx$$
$$= 2ημx\ συνx+ημx\ συνx\ \frac{ημx}{συνx}+ημx\ συν\ x\ \frac{συνx}{ημx}$$
$$= 2ημxσυνx+ημ^2x+συν^2x = 2ημxσυνx+1 = 1+2ημxσυνx$$

14. α) Για $t=1$ είναι $h = 50+20\ ημ\frac{\pi}{4} = 50+20\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 64{,}14$ cm

$t=2$ είναι $h = 50+20\ ημ\ 2\frac{\pi}{4} = 50+20\ ημ\frac{\pi}{2} = 70$ cm

$t=4$ είναι $h = 50+20\ ημ\ 4\frac{\pi}{4} = 50+20\ ημ\ \pi = 50$ cm

$t=6$ είναι $h = 50+20\ ημ\ 6\frac{\pi}{4} = 50+20\ ημ\frac{3\pi}{2} = 30$ cm

$t=9$ είναι $h = 50+20\ ημ\ 9\frac{\pi}{4} = 50+20\ ημ\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = 64{,}14$ cm.

β) Το μέγιστο ύψος είναι 70 cm και το ελάχιστο 30 cm.

15. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $υ = (ΑΓ)εφ\ α$ ή

$(ΑΓ) = υ\ σφ\ α$ (1)

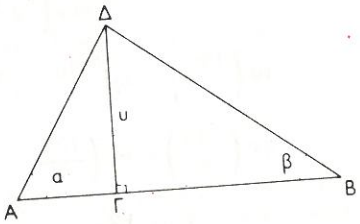
Ομοίως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ έχουμε $υ = (ΒΓ)εφ\ β$ ή

$(ΒΓ) = υ\ σφ\ β$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε

$(ΑΓ)+(ΒΓ) = υ\ (σφ\ α+σφ\ β)$ ή

$$υ = \frac{(ΒΑ)}{σφα+σφβ}.$$

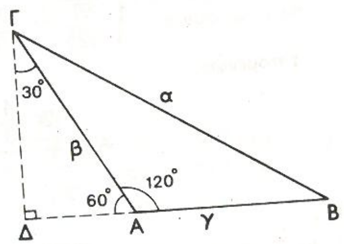


16. α) Αν Δ είναι η ορθή προβολή της κορυφής Γ στην πλευρά ΑΒ, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ θα έχουμε:

$$(ΔΑ) = βημ30^0 = \frac{β}{2} \quad \text{και}$$
$$(ΔΓ) = βημ60^0 = \frac{β\sqrt{3}}{2}.$$

Επομένως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ θα έχουμε:

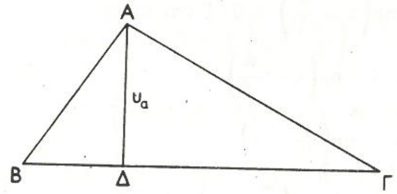
$$εφΒ = \frac{(ΓΔ)}{(ΒΔ)} = \frac{\frac{β\sqrt{3}}{2}}{γ+\frac{β}{2}} = \frac{β\sqrt{3}}{2γ+α}.$$



β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε:

$$α^2 = \left(γ+\frac{β}{2}\right)^2+\left(\frac{β\sqrt{3}}{2}\right) = γ^2+\frac{β^2}{4}+βγ+\frac{3β^2}{4} = β^2+γ^2+βγ.$$

17. α) Είναι $Α+Β+Γ = 180^0$ και $\frac{Α}{2}+\frac{Β}{2}+\frac{Γ}{2} = 90^0$. Άρα



$$ημΑ = ημ[180^0-(Β+Γ)] = ημ(Β+Γ)$$
$$συνΑ = συν[180^0-(Β+Γ)] = -συν(Β+Γ)$$
$$ημ\frac{Α}{2} = ημ\left(90^0-\frac{Β+Γ}{2}\right) = συν\frac{Β+Γ}{2}$$
$$συν\frac{Α}{2} = συν\left(90^0-\frac{Β+Γ}{2}\right) = ημ\frac{Β+Γ}{2}$$

β) Είναι $υ_α = β\ ημ\ Γ$. Άρα το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι:

$$Ε = \frac{1}{2}α\cdot υ_α = \frac{1}{2}α\ β\ ημΓ.$$

γ) Επειδή $Α = 90^0$, θα είναι $Β+Γ = 90^0$ και $συνΒ = συν(90^0-Γ) = ημΓ$. Επομένως η βασική σχέση $ημ^2Β+συν^2Β = 1$ γίνεται $ημ^2Β+ημ^2Γ = 1$.

18. Είναι: $f(\pi+x) = 2\ συν^2(\pi+x)+3ημ(\pi+x)συν(\pi+x)+5ημ^2(\pi+x)+1$

$$= 2(-συνx)^2+3(-ημx)\ (-συνx)+5(-ημx)^2+1$$
$$= 2συν^2x+3ημx\ συνx+5ημ^2x+1 = f(x)$$
$$g(\pi+x) = 2\ εφ(\pi+x)-3σφ(\pi+x)+2$$
$$= 2\ εφx-3σφx+2 = g(x)$$
$$φ\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 4εφ\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4σφ\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1$$
$$= 4\ σφx+4εφx-1 = φ(x)$$
$$φ(\pi+x) = 4εφ(\pi+x)+4σφ(\pi+x)-1$$
$$= 4εφx+4σφx-1 = φ(x)$$
$$φ\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = 4εφ\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+4σφ\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-1$$
$$= 4σφx+4εφx-1 = φ(x)$$

19. α) Είναι: $ημ(270^0+θ)+ημ(180^0+θ)+ημ(90^0+θ)+ημθ$

$$= -συνθ+(-ημθ)+συνθ+ημθ = 0.$$

β) Είναι $εφ1^0εφ2^0εφ3^0\cdots εφ89^0 = (εφ1^0\ εφ89^0)(εφ2^0\ εφ88^0)\cdots(εφ45^0\ σφ45^0)$

$$= (εφ1^0σφ1^0)(εφ2^0σφ2^0)\cdots(εφ45^0σφ45^0).$$
$$= 1\,.\,1\,.\,1\,.\,.\,.\,1 = 1$$

γ) Επειδή $ημ(180^0-θ) = ημθ$, $σφ(90^0-θ) = εφθ$ και $συνθ > 0$, θα έχουμε τις ισοδυναμίες :

$$ημ(180^0-θ)σφ(90^0-θ) > 2-2συνθ \Leftrightarrow ημθ\ εφθ > 2-2συνθ$$
$$\Leftrightarrow ημ^2θ > 2συνθ-2συν^2θ \Leftrightarrow 1-2συνθ+συν^2θ > 0 \Leftrightarrow (1-συνθ)^2 > 0,$$

που είναι αληθής.

20. Είναι:

$$Α = \frac{εφ(\pi-θ)συν(2\pi+θ)\ συν\left(\frac{\pi}{2}+θ\right)}{ημ(\pi+θ)συν(-θ)\ σφ\left(\frac{\pi}{2}-θ\right)} = \frac{-εφθσυνθ(-ημθ)}{-ημθσυνθεφθ} = -1.$$

21. α) Έχουμε:

$$\text{ημ}^2 2x-\text{ημ}^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\text{ημ}2x+\text{ημ}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[\text{ημ}2x-\text{ημ}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}2x+\text{ημ}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \text{ ή } \text{ημ}2x-\text{ημ}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$ Είναι όμως:

$$\text{ημ}2x+\text{ημ}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \text{ημ}2x=-\text{ημ}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}2x=\text{ημ}\left[-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right] \Leftrightarrow \text{ημ}2x=\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[2x=2k\pi+\frac{\pi}{3}-x, \text{ ή } 2x=(2k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{3}-x\right), \ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[3x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \text{ ή } x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}, \ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x=\frac{2\pi}{3}k+\frac{\pi}{9} \text{ ή } x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}, \ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x=\frac{(6k+1)\pi}{9} \text{ ή } x=\frac{2(3k+1)\pi}{3}, \ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\text{ημ}2x-\text{ημ}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \text{ημ}2x=\text{ημ}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[2x=2k\pi+x-\frac{\pi}{3} \text{ ή } 2x=(2k+1)\pi-\left(x-\frac{\pi}{3}\right), \ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x=2k\pi-\frac{\pi}{3} \text{ ή } 3x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3}, \ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x=\frac{(6k-1)\pi}{3} \text{ ή } x=\frac{2(3k+2)\pi}{9}, \ k\in\mathbb{Z}\right]$$

β) Επειδή $\text{ημ}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\text{συν}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ η εξίσωση γράφεται:

$$\text{συν}^2 3x-\text{συν}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\text{συν}3x+\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\text{συν}3x-\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\text{συν}3x+\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ ή } \text{συν}3x-\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\right].$$

Είναι όμως:

$$\text{συν}3x+\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\text{συν}(3x)$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{συν}(\pi-3x) \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm(\pi-3x) \ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-3x \text{ ή } x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\pi+3x, \ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(4x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \text{ ή } -2x=2k\pi-\pi-\frac{\pi}{4}, \ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16} \text{ ή } x=-k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, \ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{8k\pi+3\pi}{16} \text{ ή } x=-\frac{8k\pi-5\pi}{16}, \ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}3x-\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \text{συν}\,3x=\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x=2k\pi\pm\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(3x=2k\pi+x+\frac{\pi}{4} \text{ ή } 3x=2k\pi-x-\frac{\pi}{4}, \ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \text{ ή } 4x=2k\pi-\frac{\pi}{4}, \ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=k\pi+\frac{\pi}{8} \text{ ή } x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{16}, \ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{(8k+1)\pi}{8} \text{ ή } x=\frac{(8k-1)\pi}{16}, \ k\in\mathbb{Z}\right)$$

22. α) Είναι: $\text{εφ}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{σφ}x \Leftrightarrow \text{εφ}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{εφ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}-x, \quad k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x=\frac{(4k+1)\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

β) Είναι: $\text{ημ}5x=\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \text{ημ}5x=\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}5x=\text{ημ}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[5x=2k\pi+\frac{\pi}{6}-x \text{ ή } 5x=2k\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{6}-x\right), \ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{(12k+1)\pi}{36} \text{ ή } x=\frac{(12k+5)\pi}{24}, \ k\in\mathbb{Z}\right).$$

23. α) Επειδή $\frac{\sqrt{2}}{2}=\text{ημ}\frac{\pi}{4}$, η εξίσωση γράφεται :

$$\text{ημ}3x=\text{ημ}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(3x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \text{ ή } 3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}, \ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{(8k+1)\pi}{12} \quad (1) \quad \text{ή} \quad x=\frac{(8k+3)\pi}{12} \quad (2) \quad k\in\mathbb{Z}\right).$$

Πρέπει όμως να είναι $0\leqslant\frac{(8k+1)\pi}{12}\leqslant 2\pi$ ή $-1\leqslant k\leqslant\frac{23}{8}$.

Άρα πρέπει $k=0,1,2$. Επομένως οι ρίζες της (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ θα είναι $\frac{\pi}{12}$, $\frac{9\pi}{12}$ καί $\frac{17\pi}{12}$.

Ομοίως πρέπει να είναι:

$0\leqslant\frac{(8k+3)\pi}{12}\leqslant 2\pi$ ή $-\frac{3}{8}\leqslant k\leqslant\frac{21}{8}$. Άρα πρέπει $k=0, 1, 2$. Επομένως οι ρίζες της (2) στο διάστημα $[0,2\pi]$ θα είναι $\frac{\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$ και $\frac{19\pi}{12}$.

β) Επειδή $\frac{\sqrt{3}}{3} = \varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{6}$, η εξίσωση γράφεται:

$$\varepsilon\varphi\,2x = \varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{(6k+1)\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Πρέπει όμως να είναι $0 \leqslant \frac{(6k+1)\pi}{12} \leqslant 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ή $-\frac{1}{6} \leqslant k \leqslant \frac{23}{6}$.

Άρα πρέπει $k = 0, 1, 2, 3$.

Επομένως οι ρίζες της εξισώσεως στο διάστημα $[0, 2\pi]$ θα είναι:

$$\frac{\pi}{12},\ \frac{17\pi}{12},\ \frac{13\pi}{12} \text{ και } \frac{19\pi}{12}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

1. Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ των x_1, x_2 είναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1^3+5x_1^2+6)-(x_2^3+5x_2^2+6)}{x_1-x_2} = \frac{x_1^3-x_2^3+5(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+5(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)[x_1^2+x_1x_2+x_2^2+5(x_1+x_2)]}{x_1-x_2} = (x_1+x_2)^2-x_1x_2+5(x_1+x_2).$$

Άρα ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ -1, 2 είναι:

$$\lambda = (-1+2)^2-(-1)\cdot 2+5(-1+2) = 1+2+5 = 8.$$

Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ 3 και 5 είναι:

$$\lambda = (3+5)^2-3.5+5(3+5) = 8^2-15+5.8 = 64-15+40 = 89.$$

Ο λόγος μεταβολής της g μεταξύ των x_1, x_2 είναι:

$$\lambda = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^2}+2x_1+5\right)-\left(\frac{1}{x_2^2}+2x_2+5\right)}{x_1-x_2} = \frac{\frac{1}{x_1^2}+2x_1-\frac{1}{x_2^2}-2x_2}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2}-2(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1-x_2)\left(-\frac{x_1+x_2}{x_1^2x_2^2}+2\right)}{x_1-x_2} = 2-\frac{x_1+x_2}{x_1^2x_2^2}.$$

Άρα ο λόγος μεταβολής της g μεταξύ $-1, 2$ είναι:

$$\lambda = 2-\frac{-1+2}{(-1)^2\cdot 2^2} = 2-\frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

Ο λόγος μεταβολής της g μεταξύ 3, 5 είναι:

$$\lambda = 2-\frac{3+5}{3^2.5^2} = 2-\frac{8}{225} = \frac{442}{225}.$$

2. Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_+$, τότε ο λόγος μεταβολής της συναρτήσεως f μεταξύ των x_1, x_2 θα είναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^3}+1\right)-\left(\frac{1}{x_2^3}+1\right)}{x_1-x_2} = \frac{\frac{1}{x_2^3}+1-\frac{1}{x_2^3}-1}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x_1^3}-\frac{1}{x_2^2}}{x_1-x_2} = \frac{\frac{x_2^3-x_1^3}{x_1^3x_2^3}}{x_1-x_2} = \frac{x_2^3-x_1^3}{x_1^3x_2^3(x_1-x_2)} = \frac{(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)}{x_1^3x_2^3(x_1-x_2)}$$

$$= -\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{x_1^3x_2^3} < 0, \text{ αφού για } 0 < x_1 < x_2 \text{ είναι } \frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{x_1^3x_2^3} > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*_+$.

3. Για τη συνάρτηση f, επειδή

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{αν } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad |1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{αν } x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{αν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -3x+1, & \text{αν } x \leqslant 0 \\ 1-x, & \text{αν } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{αν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Άρα

- $x_1 < x_2 \leqslant 0$, έχουμε $\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(-3x_1+1)-(-3x_2+1)}{x_1-x_2}$

$$= \frac{-3x_1+1+3x_2-1}{x_1-x_2} = \frac{-3(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = -3, < 0$$

  και η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα

- αν $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, έχουμε

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(1-x_1)-(1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{1-x_1-1+x_2}{x_1-x_2} = \frac{-(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = -1 < 0$$

  και η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

- αν $1 \leqslant x_1 < x_2$, έχουμε $\lambda = \frac{(x_1-1)-(x_2-1)}{x_1-x_2} = \frac{x_1-1-x_2+1}{x_1-x_2} = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_2} = 1 > 0$

  και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Για τη συνάρτηση g, επειδή $|x-1| = \begin{cases} 1-x, & \text{αν } x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{αν } x \geqslant 1 \end{cases}$

έχουμε:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \leqslant 1 \\ 1, & \text{αν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Άρα η g είναι σταθερή για $x \leqslant 1$ και για $x \geqslant 1$.

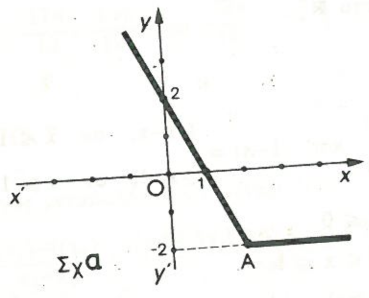
4. **α)** Για τη συνάρτηση f, επειδή $|x-2| = \begin{cases} 2-x, & \text{αν } x \leq 2 \\ x-2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

έχουμε: $$f(x) = \begin{cases} -2x+2, & \text{αν } x \leq 2 \\ -2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

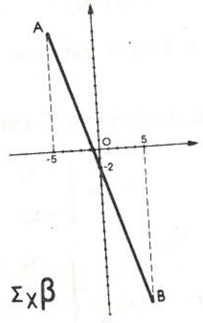
Δηλαδή η f είναι της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ και έχουμε:

- αν $x \leq 2$, τότε $\alpha = -2$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα,
- αν $x \geq 2$, τότε $\alpha = 0$. Άρα η f είναι σταθερή.

Στο σχήμα α έχουμε τη γραφική παράσταση της f, που αποτελείται από δύο ημιευθείες με κοινή αρχή Α.



Σχα



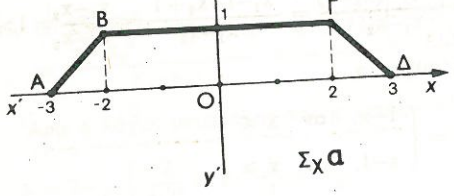
Σχβ

β) Η συνάρτηση g είναι ομοπαραλληλική με $\alpha = -3 < 0$. Άρα είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-5, +5]$. Στο σχήμα β έχουμε τη γραφική παράσταση της g, που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

5. **α)** Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ και έχουμε:

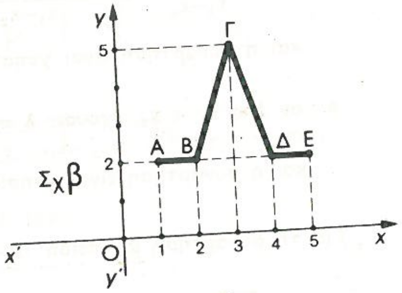
- αν $-3 \leq x \leq -2$, τότε $\alpha = 1 > 0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα
- αν $-2 < x < 2$, τότε $\alpha = 0$. Άρα η συνάρτηση είναι σταθερή
- αν $2 \leq x \leq 3$, τότε $\alpha = -1 < 0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο σχήμα α και αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ.



Σχα

Σχβ



β) Η συνάρτηση g είναι της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ και έχουμε:

- αν $1 \leq x < 2$, τότε $\alpha = 0$. Άρα η συνάρτηση είναι σταθερή
- αν $2 \leq x < 3$, τότε $\alpha = 3 > 0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα

- αν $3 \leq x < 4$, τότε $\alpha = -3 < 0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα
- αν $4 \leq x < 5$, τότε $\alpha = 0$. Άρα η συνάρτηση είναι σταθερή.

Η γραφική της παράσταση, που δίνεται στο σχήμα β, αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ.

6. Όπως φαίνεται στο σχήμα (σελ. 99), οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ και Δ είναι αντιστοίχως (1, 1), (2, 3), (5, 3) και (6, 0), ενώ η γραφική παράσταση αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΒΓ και ΓΔ. Από το σχήμα ακόμη διαπιστώνεται ότι η συνάρτηση, που είναι προφανώς της μορφής f με $f(x) = \alpha x + \beta$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1, 2], σταθερή στο [2, 5] και γνησίως φθίνουσα στο [5, 6].

Για τον καθορισμό των α και β χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η ΑΒ διέρχεται από τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3), οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta \\ 3 &= 2\alpha + \beta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2 &= 2\alpha + 2\beta \\ 3 &= 2\alpha + \beta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \text{ και } (\alpha = 2 \ \textbf{και} \ \beta = -1)$$

Άρα στο [1,2] η τιμή f(x) της συναρτήσεως είναι:

$$f(x) = 2x - 1.$$

Ομοίως για το ΓΔ, επειδή Γ(5,3) και Δ(6,0) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 5\alpha + \beta \\ 0 &= 6\alpha + \beta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow (\alpha = -3 \ \textbf{και} \ \beta = 18).$$

Άρα η τιμή της f στο x είναι: $$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ 3, & \text{αν } 2 \leq x \leq 5 \\ -3x+18, & \text{αν } 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

7. **α)** Η ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας δύο ευθειών $y = \alpha_1 x + \beta_1$ (1) και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ (2) είναι $\alpha_1 = \alpha_2$.

Εδώ έχουμε: $\alpha_1 = 2\lambda + 1$ και $\alpha_2 = 5\lambda - 1$.

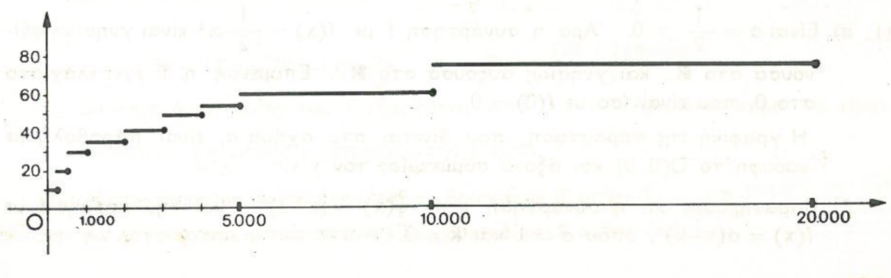
Άρα $2\lambda + 1 = 5\lambda - 1 \Leftrightarrow 2\lambda - 5\lambda = -1 - 1 \Leftrightarrow -3\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$

β) Η ικανή και αναγκαία συνθήκη καθετότητας των ευθειών (1) και (2) είναι:

$$\alpha_1 \alpha_2 = -1$$

Άρα $$\begin{aligned} (2\lambda + 1)(5\lambda - 1) = -1 &\Leftrightarrow 10\lambda^2 + 5\lambda - 2\lambda - 1 = -1 \\ &\Leftrightarrow 10\lambda^2 + 3\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(10\lambda + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\lambda = 0 \ \text{ ή } \ \lambda = -\frac{3}{10}\right) \end{aligned}$$

8. Η γραφική παράσταση αυτής της συναρτήσεως, που είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση, δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



9. α) Η f ορίζεται στο σύνολο $\mathbb{R}_1-\{0\} = \mathbb{R}_1^*$ και ισχύει:

$$\forall x \in \mathbb{R}_1^*,\ f(-x) = \frac{1}{-x} + \varepsilon\varphi(-x) = -\frac{1}{x} - \varepsilon\varphi x = -\left(\frac{1}{x} + \varepsilon\varphi x\right) = -f(x).$$

Άρα η συνάρτηση είναι περιττή στο $\mathbb{R}_1^*$.

β) Για τη g ισχύει:

$$\forall x,\ g(-x) = (-x)^3 + \eta\mu(-x) = -x^3 - \eta\mu x = -(x^3+\eta\mu x) = -g(x)$$

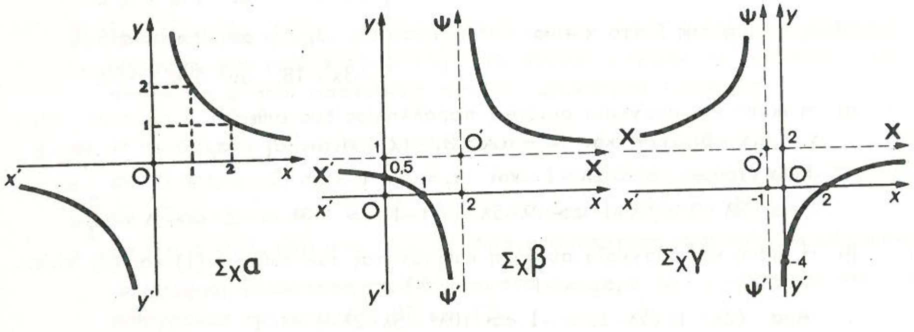
Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

10. α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $y=\frac{\alpha}{x}$ με $\alpha = 2 > 0$.

Άρα (§ 7.14) η γραφική της παράσταση θα είναι υπερβολή (σχ. α) με κέντρο συμμετρίας το O(0, 0) και ασύμπτωτες τους άξονες x'x και y'y.

β) Αν θέσουμε $y-1=\Psi$ και $x-2=X$, η $y=\frac{1}{x-2}+1$ (1) γίνεται $\Psi=\frac{1}{X}$ (2).

Επομένως η γραφική παράσταση της (1) θα είναι (§ 7.14 και 7.13) υπερβολή με κέντρο το O'(2, 1) και ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 2$ και $y = 1$. Η υπερβολή αυτή τέμνει τους άξονες x'x και y'y αντιστοίχως στα σημεία (1, 0) και $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (σχ. β).



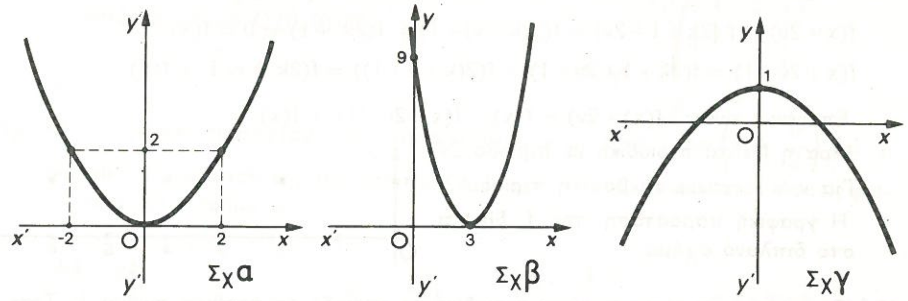
γ) Η εξίσωση $y=\frac{2x-4}{x+1}$ γράφεται $y=\frac{2(x+1)-6}{x+1}=2-\frac{6}{x+1}$. Οπότε, αν εργαστούμε όπως και στην 10 β, βρίσκουμε ότι η γραφική παράσταση της φ είναι υπερβολή με ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-1$ και $y=2$ και κέντρο το (−1 2). Η υπερβολή αυτή (σχ. γ) τέμνει τον άξονα y'y στο (0, −4) και τον x'x στο (2, 0).

11. α) Είναι $\alpha=\frac{1}{2}>0$. Άρα η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_-$ και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_+$. Επομένως η f έχει ελάχιστο στο 0, που είναι ίσο με $f(0)=0$.

Η γραφική της παράσταση, που δίνεται στο σχήμα α, είναι παραβολή με κορυφή το O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον y'y.

β) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση φ με $\varphi(x)=(x-3)^2$ είναι της μορφής f με $f(x)=\alpha(x-k)^2$, όπου $\alpha=1$ και $k=3$.

Αν λοιπόν εργαστούμε όπως στην § 7.19, διαπιστώνουμε ότι η $y=(x-3)^2$ είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή το σημείο O'(3,0) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=3$. Η παραβολή αυτή, επειδή $\alpha = < 0$, έχει ελάχιστο στο $x=3$, που είναι ίσο με $f(3)=(3-3)^2=0$. Η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα β.



γ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=-\frac{x^2}{3}+1$, είναι της μορφής f με $f(x)=\alpha x^2+k$, όπου $\alpha=-\frac{1}{3}$ και $k=1$.

Αν λοιπόν εργαστούμε όπως στην § 7.20, διαπιστώνουμε ότι η $y=-\frac{1}{3}x^2+1$ είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή το σημείο O' (0, 1) και άξονα συμμετρίας τον y'y. Η παραβολή αυτή, επειδή $\alpha=-\frac{1}{3}<0$, έχει μέγιστο στο $x=0$ που είναι ίσο με $f(0)=-\frac{1}{3}\cdot 0^2+1=1$. Η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα γ.

12. α) Για την f ισχύει: $\forall x,\ f(-x)=\alpha(-x)^4+\beta(-x)^2+\gamma=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=f(x)$

Άρα η f είναι άρτια συνάρτηση.

β) Για την g ισχύει: $\forall x,\ g(-x)=(-x)^2+\sigma\upsilon\nu(-x)=x^2+\sigma\upsilon\nu x=g(x)$.

Άρα η g είναι άρτια συνάρτηση.

13. α) Έστω T η περίοδος της συναρτήσεως f. Τότε θα είναι: $f(x+T)=f(x)$

οπότε: $f(x+T)=f(x) \Rightarrow \eta\mu\, 3(x+T)=\eta\mu 3x$

$$\Rightarrow 3(x+T)=2k\pi+3x \qquad (1)$$

$$ή \quad 3(x+T)=(2k+1)\pi-3x \qquad (2)$$

Από την (1) για $k=1$ έχουμε $T=\frac{2\pi}{3}$. Από την (2) έχουμε

$$3x+3T=(2k+1)\pi-3x \quad ή \quad T=\frac{(2k+1)\pi-6x}{3}$$

Η τιμή όμως αυτή του T εξαρτάται από το x. Άρα δεν μπορεί να είναι περίοδος. Επομένως η περίοδος της f είναι $T=\frac{2\pi}{3}$.

β) Αν εργαστούμε όπως στην (13α), βρίσκουμε $T=4\pi$.

γ) Αν εργαστούμε όπως στην (13α), βρίσκουμε $T=6\pi$.

14. Παρατηρούμε ότι, αν ο x είναι άρτιος, είναι δηλαδή της μορφής $2k$, $k \in \mathbb{Z}$, θα είναι:

$f(x+2\nu) = f(2k+2\nu) = f(2(k+\nu)) = f(2\kappa') = 1 = f(x)$

$f(x+2\nu+1) = f(2k+2\nu+1) = f(2(k+\nu)+1) = f(2k'+1) = 0 \neq f(x)$,

ενώ, αν ο x είναι περιττός, είναι δηλαδή της μορφής $2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, θα είναι

$f(x+2\nu) = f(2k+1+2\nu) = f(2(k+\nu)+1) = f(2k'+1) = 0 = f(x)$

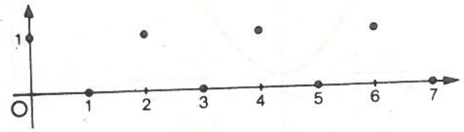
$f(x+2\nu+1) = f(2k+1+2\nu+1) = f(2(k+\nu+1)) = f(2k'') = 1 \neq f(x)$.

Επομένως είναι: $f(x)+2\nu) = f(x)$, $f(x+2\nu+1) \neq f(x)$.

Άρα η f είναι περιοδική με περίοδο 2ν.

Για $\nu = 1$ έχουμε τη βασική περίοδο 2.

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο διπλανό σχήμα.



15. Έστω ότι η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο το σταθερό αριθμό Τ. Τότε έχουμε:

$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \eta\mu[(x+T)^2-2(x+T)+5] = \eta\mu(x^2-2x+5)$

$\Rightarrow (x+T)^2-2(x+T)+5 = 2k\pi+x^2-2x+5$ (1)

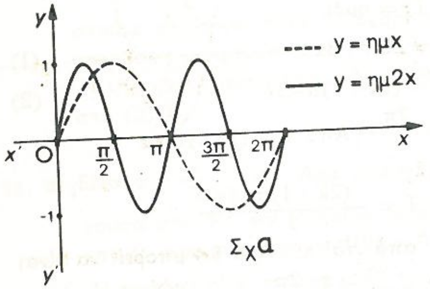
ή $(x+T)^2-2(x+T)+5 = (2k+1)\pi-(x^2-2x+5)$ (2)

Από τη σχέση (1) ή (2) παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του x έχουμε και διαφορετική τιμή του Τ. Άρα ο Τ δεν είναι σταθερός. Επομένως δεν μπορεί να είναι περίοδος και συνεπώς η f δεν μπορεί να είναι περιοδική συνάρτηση.

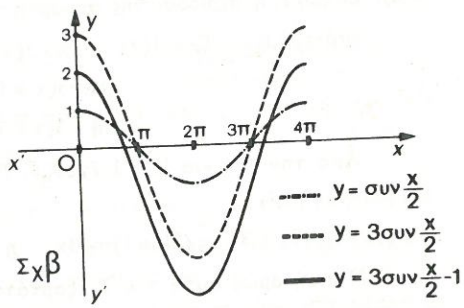
16. **α)** Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $y = \eta\mu 2x$ είναι περιοδική με περίοδο π (§ 7.21 Εφαρ. 2). Η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα α.

β) Κάνουμε διαδοχικά τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$, $3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$, $3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-1$ (σχ. β).

Παρατηρούμε ότι η περίοδος της $y = \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$ είναι 4π.



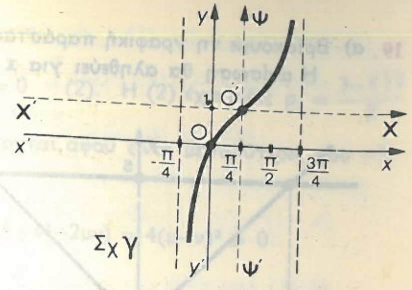
Σχα



Σχβ

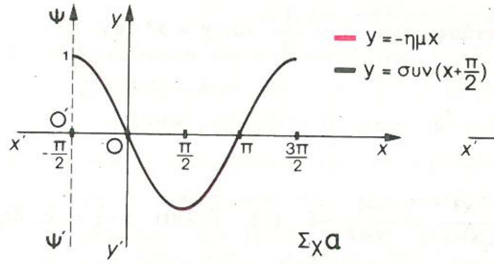
γ) Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $x-\frac{\pi}{4} = X$ και $y-1 = \Psi$, η $y = \varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ (1) γίνεται $\Psi = \varepsilon\varphi X$. Άρα η γραφική παράσταση της (1) (§ 7.4 και 7.24)

έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = \frac{3\pi}{4}$ και $x = -\frac{\pi}{4}$, κέντρο συμμετρίας το $O'\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ και περνάει από το σημείο $O(0, 0)$ (Σχ. γ).

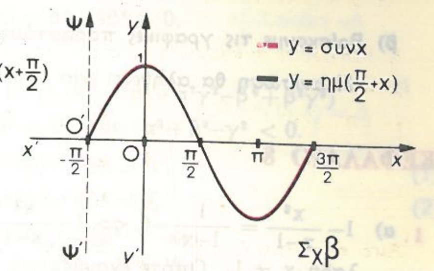


Σχγ

17. **α)** Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f με $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ και η γραφική παράσταση της συναρτήσεως g με $g(x) = -\eta\mu x$ συμπίπτουν, όπως φαίνεται στο σχήμα α.



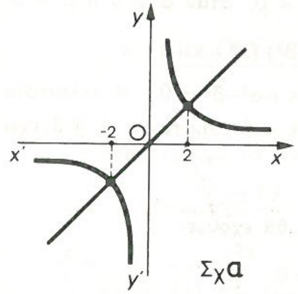
Σχα



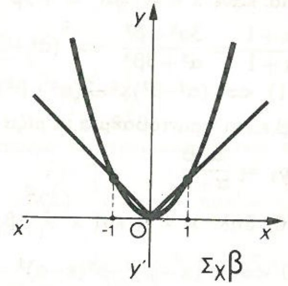
Σχβ

β) Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ και της g με $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ συμπίπτουν, όπως διαπιστώνεται στο σχήμα β.

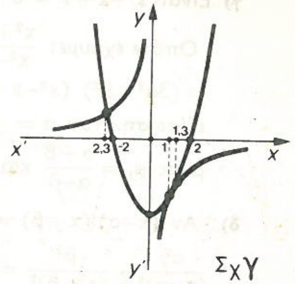
18. **α)** Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \frac{4}{x}$ και $y = x$. Οι τετμημένες των σημείων τομής τους, δηλαδή οι -2, $+2$ (σχ. α), είναι οι λύσεις της εξισώσεως.



Σχα



Σχβ

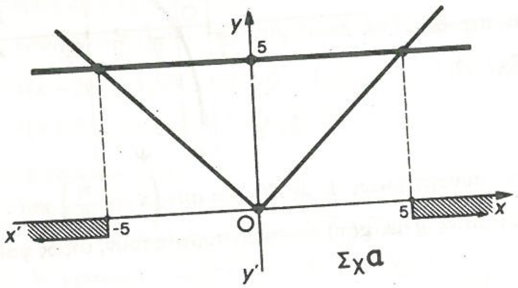


Σχγ

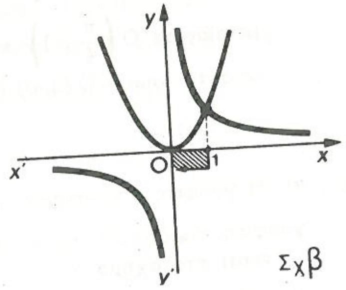
β) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=x^2$ και $y=|x|$ (σχ. β). Οι τετμημένες των σημείων τομής τους, δηλαδή οι -1, $+1$, είναι οι λύσεις της εξισώσεως.

γ) Βρίσκουμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y = x^2-4$ και $y = -\frac{3}{x}$ (σχ. γ). Οι τετμημένες των σημείων τομής της είναι οι λύσεις της εξισώσεως.

19. α) Βρίσκουμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y=|x|$ και $y=5$ (σχ. α). Η ανίσωση θα αληθεύει για $x<-5$ ή $x>5$.



Σχα



Σχβ

β) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των $y=\frac{1}{x}$ και $y=x^2$ (σχ. β).
Η ανίσωση θα αληθεύει για $0<x<1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

1. α) $1-\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1-x}-6 \Leftrightarrow 1-\frac{x^2}{x-1}=\frac{-1}{x-1}-6$ (1). Πρέπει $x-1\neq 0$, δηλαδή $x\neq 1$. Οπότε έχουμε:
(1) $\Leftrightarrow (x-1)-x^2=-1-6(x-1) \Leftrightarrow -x^2+7x-6=0$.
Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $\rho_1=1$, που απορρίπτεται, και $\rho_2=6$.

β) $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{10}{3}$ (1). Πρέπει $x-5\neq 0$ και $x+5\neq 0$, δηλαδή $x\neq 5$ και $x\neq -5$
Τότε έχουμε: (1) $\Leftrightarrow 3(x+5)^2+3(x-5)^2=10(x+5)(x-5)$
$\Leftrightarrow 4x^2-400=0 \Leftrightarrow x^2-100=0$, οπότε $\rho_1=10$ και $\rho_2=-10$.

γ) Είναι $x^2-x+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha^2+3\beta^2\neq 0$, όταν $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$.
Οπότε έχουμε: $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2} \Leftrightarrow (\alpha^2+3\beta^2)(x^2+x+1)=$
$=(3\alpha^2+\beta^2)(x^2-x+1) \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2=0$. Η τελευταία εξίσωση, όταν $\alpha=\pm\beta$, είναι πρωτοβάθμια με ρίζα $x=0$ και, όταν $\alpha\neq\pm\beta$, έχει ρίζες $\rho_1=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ και $\rho_2=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

δ) Αν $(x-\alpha)(x+\beta)\neq 0$, δηλ. $x\neq\alpha$ και $x\neq-\beta$, θα έχουμε:
$\frac{\alpha^2}{(x-\alpha)^2}-\frac{\beta^2}{(x+\beta)^2}=0 \Leftrightarrow \alpha^2(x+\beta)^2-\beta^2(x-\alpha)^2=0$
$\Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)x^2+2\alpha\beta(\alpha+\beta)x=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)x^2+2\alpha\beta x=0$. Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $\rho_1=0$ και $\rho_2=-\frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}$.

ε) Αν $2x+6\geq 0$ ή $x\geq -3$, έχουμε:
$2x+6=-x^2+x-4 \Leftrightarrow x^2+x+10=0$ (1).
Η (1) δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$, αφού $\Delta=1^2-4.1.10=-39<0$.

Αν $2x+6<0$ ή $x<-3$, έχουμε:
$-(2x+6)=-x^2+x-4 \Leftrightarrow x^2-3x-2=0$ (2). Η (2) έχει ρίζες $\rho_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ και $\rho_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, οι οποίες απορρίπτονται, αφού είναι μεγαλύτερες του -3.

2. α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα
$$\Delta=4\lambda^2-4(\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\mu\nu)=4(\mu^2+\nu^2-2\mu\nu)=4(\mu-\nu)^2\geq 0$$
β) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα
$$\Delta=9\beta^4+(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2)(\alpha^2-\alpha\beta-2\beta^2)$$
$$=9\beta^4+[(\alpha^2-2\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2]=9\beta^4+\alpha^4+4\beta^4-4\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2$$
$$=9\beta^4+\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta^2+4\beta^4=(3\beta^2-\alpha^2)^2+\alpha^2\beta^2+4\beta^4\geq 0$$
γ) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα
$$\Delta=(\alpha+2\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2+4\beta^2\geq 0.$$

3. Η διακρίνουσα της εξισώσεως είναι
$$\Delta=4\alpha^2\gamma^2-4(\alpha^2+\beta^2)(-\beta^2+\gamma^2)=4\alpha^2\gamma^2-4(-\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2-\beta^4+\beta^2\gamma^2)$$
$$=4\beta^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)<0 \quad \text{αφού} \quad \beta^2>0 \quad \text{και} \quad \alpha^2+\beta^2-\gamma^2<0.$$

4. Αν είναι Δ_1 η διακρίνουσα της $x^2+(\alpha-3\beta)x+\alpha\beta=0$ (1)
και Δ_2 η διακρίνουσα της $x^2+(\alpha-5\beta)x+4\beta^2=0$, (2)
τότε έχουμε: $\Delta_1=(\alpha-3\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2-10\alpha\beta+9\beta^2$ και
$\Delta_2=(\alpha-5\beta)^2-16\beta^2=\alpha^2-10\alpha\beta+9\beta^2$, δηλαδή $\Delta_1=\Delta_2$.
Οπότε, αν $\Delta_1=0$, τότε $\Delta_2=0$ και αντιστρόφως.

5. α) Αν θέσουμε ημ$x=y$, τότε η εξίσωση γίνεται
$4y^2-2(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ με $y\in[-1,1]$. Αυτή έχει ρίζες
$$\rho_{1,2}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2-4\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3+1+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3+1-2\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1\pm(\sqrt{3}-1)}{4}\left\langle \begin{array}{l}\rho_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \rho_2=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$
Τώρα έχουμε να λύσουμε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις
$$\text{ημ}x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1) \quad \text{και} \quad \text{ημ}x=\frac{1}{2} \quad (2)$$
Αλλά: (1) $\Leftrightarrow$ ημ$x=$ ημ$\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$

Επίσης: (2) $\Leftrightarrow$ ημ$x=$ ημ$\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$

β) Αν θέσουμε εφ$x=y$, έχουμε: $y^2-(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ με ρίζες $\rho_1=1$ και $\rho_2=\sqrt{3}$.

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτουν τα συστήματα

$$\left.\begin{matrix} x+y = 8 \\ xy = 15 \end{matrix}\right\} \ (3) \quad \text{και} \quad \left.\begin{matrix} x+y = 15 \\ xy = 8 \end{matrix}\right\} \ (4)$$

Από το σύστημα (3) βρίσκουμε $(x = 5 \textbf{ και } y = 3)$ **ή** $(x = 3 \textbf{ και } y = 5)$

Από το σύστημα (4) βρίσκουμε $\left(x = \frac{15+\sqrt{193}}{2} \textbf{ και } y = \frac{15-\sqrt{193}}{2}\right)$ **ή**

$$\left(x = \frac{15-\sqrt{193}}{2} \textbf{ και } y = \frac{15+\sqrt{193}}{2}\right)$$

34. α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος και έχουμε:
$2x^2+2x = 112 \Leftrightarrow 2x^2+2x-112 = 0 \Leftrightarrow x^2+x-56 = 0 \Leftrightarrow (x = -8 \textbf{ ή } x = 7)$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος και έχουμε:
$2y^2+2y = 12 \Leftrightarrow 2y^2+2y-12 = 0 \Leftrightarrow y^2+y-6 = 0 \Leftrightarrow (y = -3 \textbf{ ή } y = 2)$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι:
$(x = -8 \textbf{ και } y = -3)$ **ή** $(x = -8 \textbf{ και } y = 2)$ ή $(x = 7 \textbf{ και } y = -3)$ **ή**
$(x = 7 \textbf{ και } y = 2)$

β) Πολλαπλασιάζουμε τις εξισώσεις του συστήματος κατά μέλη και έχουμε:

$$x^2y^2z^2 = \frac{4}{225} \Leftrightarrow xyz = \pm\frac{2}{15} \Leftrightarrow xyz = \frac{2}{15} \ (1) \quad \text{ή} \quad xyz = -\frac{2}{15} \ (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη την (1) με καθεμιά εξίσωση παίρνουμε:

$$z = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad x = 2.$$

Ομοίως από την (2) παίρνουμε:

$$z = -\frac{1}{5}, \quad y = -\frac{1}{3}, \quad x = -2.$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$\left(x = 2 \textbf{ και } y = \frac{1}{3} \textbf{ και } z = \frac{1}{5}\right) \textbf{ ή } \left(x = -2 \textbf{ και } y = -\frac{1}{3} \textbf{ και } z = -\frac{1}{5}\right)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.036
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.072
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.111
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.150
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.192
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	7.7880	0.6157	1.280
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.327
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.376
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.428
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.483
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.540
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.600
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.664
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.732
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.804
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.881
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.963
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.050
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.145
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.246
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.356
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.475
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.605
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.747
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.904
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.078
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.271
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.487
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2586	3.732
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.011
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.332
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.705
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.145
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.671
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.314
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.115
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.514
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.43
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.30
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.08
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.64
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.29
45°	0.7071	0.7071	1.000				

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

σελ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 5

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ 6

1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 9

Προτάσεις. Αληθείς προτάσεις. Απλές και σύνθετες προτάσεις. Προτασιακοί τύποι.

ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ 13

Άρνηση. Σύζευξη. Διάζευξη. Συνεπαγωγή. Ισοδυναμία. Γενίκευση συζεύξεως και διαζεύξεως. Καθολικός ποσοδείκτης. Συνεπαγωγές καθολικά αληθείς. Ισοδύναμοι π.τ. Υπαρξιακός ποσοδείκτης. Αρνήσεις.

ΛΟΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ 21

Έννοια του λογικού τύπου. Ταυτολογίες. Νόμοι λογικής. Δύο βασικοί κανόνες.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ 25

Η απόδειξη γενικά. Ευθεία απόδειξη. Απαγωγή σε άτοπο. Αντιθετοαντιστροφή. Διάκριση περιπτώσεων. Επαγωγή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 31

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 34

2. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟ ΣΩΜΑ 35

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ 37

Γενικά. Πρόσθεση. Πολλαπλασιασμός.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ 38

Αντιμεταθετικότητα. Προσεταιριστικότητα. Γενίκευση αθροίσματος. Ουδέτερο στοιχείο. Ύπαρξη αντιθέτου. Νόμος της διαγραφής στην πρόσθεση. Η αφαίρεση στο $\mathbb{R}$.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ 44

Αντιμεταθετικότητα. Προσεταιριστικότητα. Γενίκευση γινομένου. Δυνάμεις. Επιμεριστικότητα. Ουδέτερο στοιχείο. Ύπαρξη αντιστρόφου. Νόμος της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό. Διαίρεση. Δύναμη με εκθέτη ακέραιο. Λύση της εξισώσεως $\alpha x+\beta=0$. Γενικές εφαρμογές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 60

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 63

3. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΩΜΑ 65

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ 67

Γενικά. Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί. Ανισότητες. Νόμος τριχοτομίας. Κανόνας των προσήμων.

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ 70

Μεταβατικότητα. Η φυσική διάταξη στο $\mathbb{R}$.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ 71

Γενικά. Διάταξη και πρόσθεση. Διάταξη και πολλαπλασιασμός. Διάταξη και δυνάμεις. Λύση των ανισώσεων $\alpha x+\beta \gtrless 0$. Έννοια διαστήματος.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ 78

Ορισμός. Απόλυτη τιμή αθροίσματος. Απόλυτη τιμή γινομένου. Γενικές Εφαρμογές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 82

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 84

4. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 85

ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ 87

Έννοια διμελούς σχέσεως. Ισότητα διμελών σχέσεων. Αντιστροφή διμελών σχέσεων.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 90

Έννοια συναρτήσεως. Ειδικές συναρτήσεις. Είδη συναρτήσεων. Αντίστροφη συνάρτηση.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 94

Έννοια της πραγματικής συναρτήσεως. Ίσες συναρτήσεις. Περιορισμός και επέκταση συναρτήσεως.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ 96

Γενικά. Πρόσθεση συναρτήσεων. Πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί συνάρτηση. Πολλαπλασιασμός συναρτήσεων.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 103

Έννοια πολυωνυμικής συναρτήσεως. Ανάπτυγμα και παραγοντοποίηση. Έννοια ρητής συναρτήσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ... 107

Εφαρμογές στη λύση εξισώσεων. Εφαρμογές στη λύση ανισώσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 109

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 114

5. ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ 117

ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΚΙΒΩΤΙΣΜΟΥ 119

Αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Αξίωμα κιβωτισμού.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 121

Αξίωμα Αρχιμήδη. Διάστημα με άκρα $+\infty$, $-\infty$. Δεκαδικές προσεγγίσεις αριθμού. Η μέτρηση ευθυγράμμων τμημάτων. Γινόμενο τμήματος επί πραγματικό αριθμό. Λόγος δύο τμημάτων. Μέτρηση τόξων ή γωνιών. Τετραγωνική ρίζα. Διάκριση $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$.

ΡΙΖΕΣ ΤΑΞΕΩΣ ν 127

Ορισμός. Άμεσες συνέπειες του ορισμού. Ρίζα άλλης ρίζας. Γινόμενο ριζών. Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$ στο $\mathbb{R}$. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 134

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 137

6. ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 139

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ 141

Αλγεβρική τιμή διανύσματος. Άξονας. Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς στο επίπεδο. Ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ 145

Μονάδες μετρήσεως τόξων (γωνιών). Αλγεβρική τιμή (προσανατολισμένου) τόξου. Τριγωνομετρικός κύκλος. Κανονική απεικόνιση του $\mathbb{R}$ στον C.

ΚΥΚΛΙΚΕΣ (Ή ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 150

Σύστημα αναφοράς προσαρτημένο στον C. Οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο. Πρόσημο ημx και συνx. Το βασικό θεώρημα. Ημίτονο και συνημίτονο των αριθμών $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$. Οι συναρτήσεις εφαπτομένη και συνεφαπτομένη. Άξονας εφαπτομένων και συνεφαπτομένων. Σχέση συν, εφ, και ημ, σφ. Τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξου ή γωνίας. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΞΩΝ ΜΕ ΕΙΔΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ Ή ΔΙΑΦΟΡΑ 163

Γενικά. Αντίθετα τόξα. Τόξα με το ίδιο συνημίτονο. Παραπληρωματικά τόξα. Τόξα με το ίδιο ημίτονο. Συμπληρωματικά τόξα. Τόξα που έχουν διαφορά π. Τόξα με την ίδια εφαπτομένη ή συνεφαπτομένη.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 171

Έννοια της τριγωνομετρικής εξισώσεως. Η εξίσωση συνx = α. Η εξίσωση ημx = α. Η εξίσωση εφx = α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 175

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 179

7. ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ 181

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ 183

Γραφική παράσταση συναρτήσεως και η εξίσωσή της. Αλλαγή συστήματος αναφοράς.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ 186

Μονότονες συναρτήσεις. Λόγος μεταβολής συναρτήσεως. Μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x)=\alpha x+\beta$. Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας. Συνάρτηση μονότονη κατά τμήματα. Μέγιστο και ελάχιστο συναρτήσεως.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y = \frac{\alpha}{x}$ 194

Γενική μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$. Μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = \frac{1}{x}$.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y = \alpha x^2$, ... 199

Γενική μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$. Μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = x^2$. Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = \alpha(x-k)^2$ $\alpha \neq 0$. Η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\alpha x^2+k$.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ 202

Περιοδικές συναρτήσεις. Μελέτη της συναρτήσεως ημίτονο. Η συνάρτηση συνημίτονο. Η συνάρτηση εφαπτομένη. Η συνάρτηση συνεφαπτομένη.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ.............. 209

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 211

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 213

8. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ 215

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ 217

Γενικά. Λύση της εξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, Άθροισμα και γινόμενο ριζών. Πρόσημο ριζών.

ΤΡΙΩΝΥΜΟ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ 228

Μορφές τριωνύμου δεύτερου βαθμού. Πρόσημο τριωνύμου. Ανισώσεις δεύτερου βαθμού. Ανισώσεις ειδικής μορφής. Μελέτη της συναρτήσεως f με $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 241

Εξισώσεις με περισσότερους αγνώστους. Συστήματα εξισώσεων. Συστήματα εξισώσεων α' βαθμού με δύο αγνώστους. Αξιοσημείωτες εφαρμογές

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 247

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 250

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 253

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 254

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 260

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 265

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 269

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 278

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 282

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 290

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 298

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ 309