

ΨΣ003 – Φυσική Κυκλώματα συνεχούς

Γιάννης Λιαπέρδος

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Σχολή Οικονομίας και Τεχνολογίας
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων



Περιεχόμενα

- 1 Συνεχής τάση/ρεύμα
- 2 Κανόνες Kirchhoff
- 3 Κυκλώματα RC

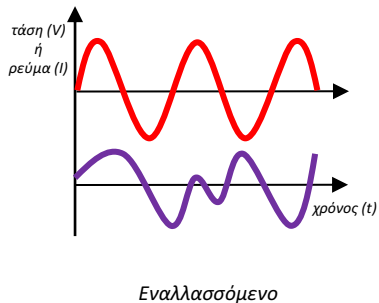
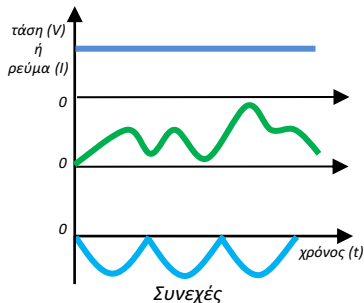
DC/AC τάση/ρεύμα

- Ποια είναι η διαφορά μεταξύ του *συνεχούς (DC – Direct Current)* και του *εναλλασσόμενου (AC – Alternating Current)* ρεύματος;



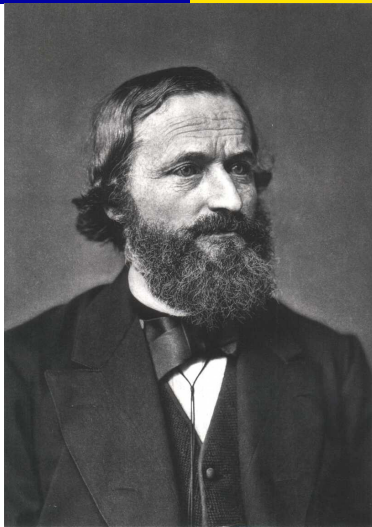
DC/AC τάση/ρεύμα

- Ποια είναι η διαφορά μεταξύ του συνεχούς (DC – Direct Current) και του εναλλασσόμενου (AC – Alternating Current) ρεύματος;



Περιεχόμενα

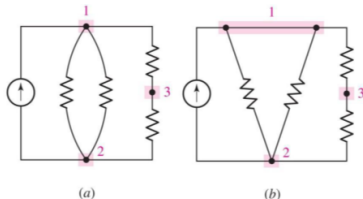
- 1 Συνεχής τάση/ρεύμα
- 2 Κανόνες Kirchhoff**
- 3 Κυκλώματα RC



Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887)

Ορολογία

- Κόμβος (node)
 - Το σημείο στο οποίο συνδέονται δύο ή περισσότερα στοιχεία (π.χ. κόμβος 1, κόμβος 2, κόμβος 3)
- Διαδρομή (path)
 - Το μονοπάτι μέσω κόμβων οι οποίοι δεν επαναλαμβάνονται (π.χ. $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$)
- Βρόχος (loop)
 - Μια κλειστή διαδρομή (π.χ. $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$)
- Κλάδος (branch)
 - Ένα απλό μονοπάτι που περιέχει ένα στοιχείο και τους κόμβους στα δύο άκρα του (π.χ. $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$)

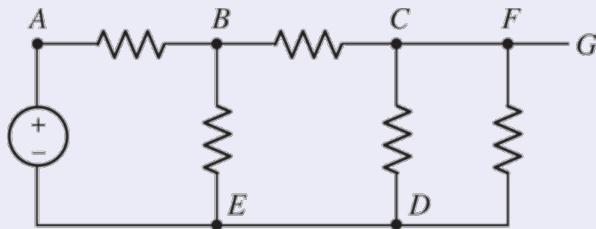


Ορολογία

Παράδειγμα 3.1

Για το κύκλωμα του σχήματος:

- Βρείτε τον αριθμό των στοιχείων του κυκλώματος
- Αν κινηθούμε από το B στο D μέσω του C, έχουμε σχηματίσει μια διαδρομή ή/και έναν βρόχο;
- Αν κινηθούμε ως εξής: $E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E$, έχουμε σχηματίσει μια διαδρομή ή/και έναν βρόχο;



1ος κανόνας Kirchhoff (KCL)

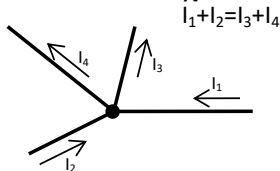
- Το αλγεβρικό άθροισμα του φορτίου σε ένα σύστημα παραμένει σταθερό (αρχή της διατήρησης του φορτίου)
- Το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε οποιονδήποτε κόμβο ενός κυκλώματος είναι μηδενικό:

$$\sum_{n=1}^N I_n = 0, \text{ όπου } N \text{ ο αριθμός των κλάδων που συνδέονται στον}$$

συγκεκριμένο κόμβο

$$\sum_{n_i=1}^{N_i} I_{n_i} = \sum_{n_o=1}^{N_o} I_{n_o}, \text{ όπου } N_i \text{ και } N_o \text{ ο αριθμός των εισρχόμενων και}$$

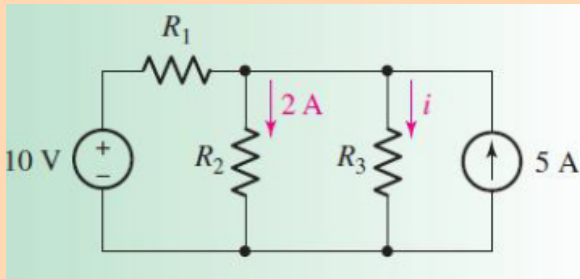
εξερχόμενων ρευμάτων, αντίστοιχα



1ος κανόνας Kirchhoff (KCL)

Άσκηση 5.1

Αν η πηγή τάσης παρέχει ρεύμα 3A, να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη R_3 .

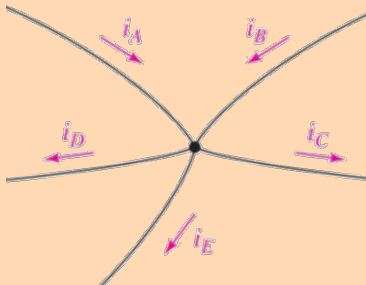


1ος κανόνας Kirchhoff (KCL)

Άσκηση 5.2

Για τον κόμβο του σχήματος, υπολογίστε:

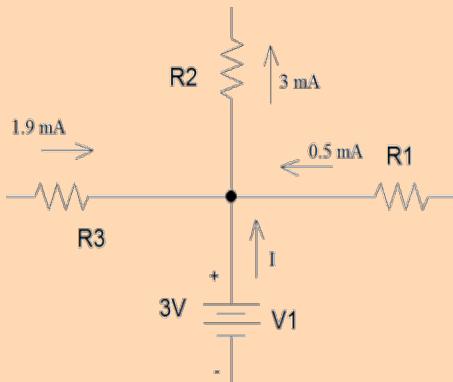
- Το i_B , αν $i_A = 1A$, $i_D = 2A$, $i_C = 3A$ και $i_E = 4A$.
- Το i_E , αν $i_A = 1A$, $i_B = 1A$, $i_C = 1A$ και $i_D = 1A$.



1ος κανόνας Kirchhoff (KCL)

Άσκηση 5.3

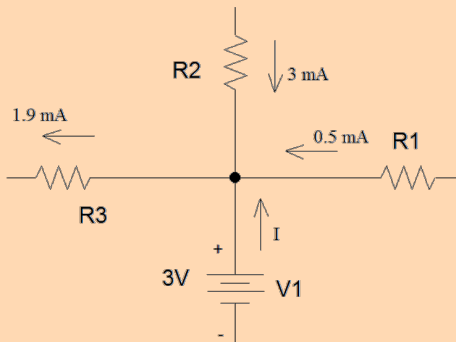
Να υπολογιστεί το ρεύμα που παρέχει η πηγή τάσης και να προσδιοριστεί αν αυτή παράγει ή καταναλώνει ηλεκτρική ισχύ.



1ος κανόνας Kirchhoff (KCL)

Άσκηση 5.4

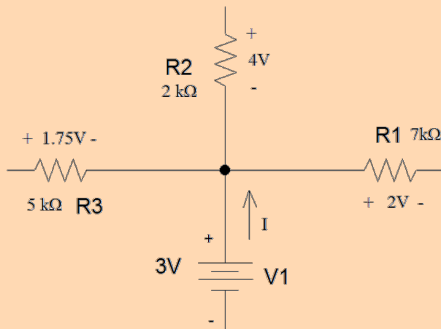
Να υπολογιστεί το ρεύμα που παρέχει η πηγή τάσης και να προσδιοριστεί αν αυτή παράγει ή καταναλώνει ηλεκτρική ισχύ.



1ος κανόνας Kirchhoff (KCL)

Άσκηση 5.5

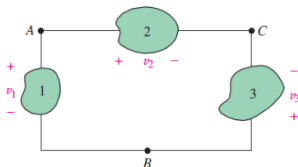
Να υπολογιστεί το ρεύμα που παρέχει η πηγή τάσης και να προσδιοριστεί αν αυτή παράγει ή καταναλώνει ηλεκτρική ισχύ.



2ος κανόνας Kirchhoff (KVL)

- Το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό, επομένως το έργο που απαιτείται για να διατρέξει ένα ηλεκτρικό φορτίο οποιονδήποτε βρόχο ενός κυκλώματος είναι μηδενικό (αρχή της διατήρησης της ενέργειας)
- Το αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσης διατρέχοντας οποιονδήποτε βρόχο είναι μηδενικό:

$$\sum_{n=1}^N V_n = 0, \text{ όπου } N \text{ ο αριθμός των κλάδων που περιλαμβάνονται στον συγκεκριμένο βρόχο}$$



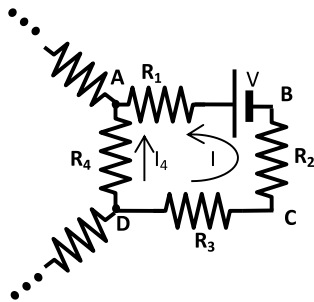
$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

$$v_1 - v_2 + v_3 = 0$$



2ος κανόνας Kirchhoff (KVL)

- Πρόσημα πτώσεων τάσης:
 - Για τους αντιστάτες, θετικές όταν διατρέχουμε τον βρόχο με φορά αντίρροπη της φοράς του ρεύματος
 - Για τις πηγές τάσης, θετικές όταν συναντούμε τον αρνητικό πόλο της πηγής
- Παράδειγμα:



$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A:$

$$IR_1 - V + IR_2 + IR_3 - I_4R_4 = 0$$

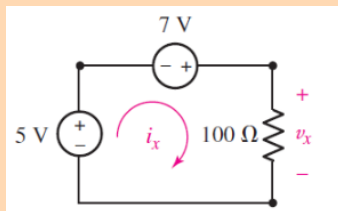
$B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B:$

$$V - IR_1 + I_4R_4 - IR_3 - IR_2 = 0$$

2ος κανόνας Kirchhoff (KVL)

Άσκηση 5.6

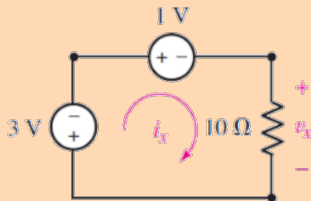
Για το κύκλωμα του σχήματος να προσδιορίσετε την τάση v_x και το ρεύμα i_x .



2ος κανόνας Kirchhoff (KVL)

Άσκηση 5.7

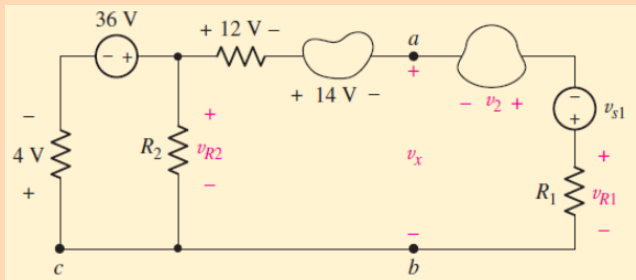
Για το κύκλωμα του σχήματος να προσδιορίσετε την τάση v_x και το ρεύμα i_x .



2ος κανόνας Kirchhoff (KVL)

Άσκηση 5.8

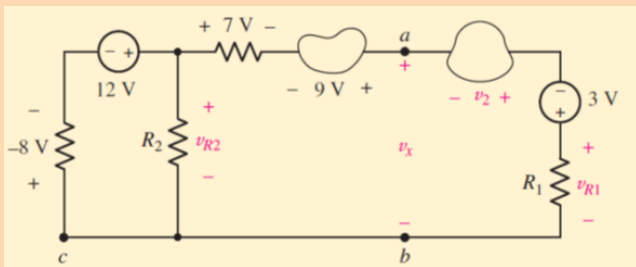
Για το κύκλωμα του σχήματος να προσδιορίσετε τις τάσεις v_{R2} και v_x .



2ος κανόνας Kirchhoff (KVL)

Άσκηση 5.9

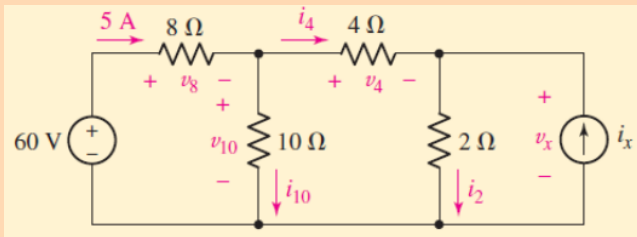
Για το κύκλωμα του σχήματος να προσδιορίσετε (α) την τάση v_{R2} και (β) την τάση v_x αν $v_{R1} = 1V$.



2ος κανόνας Kirchhoff (KVL)

Άσκηση 5.10

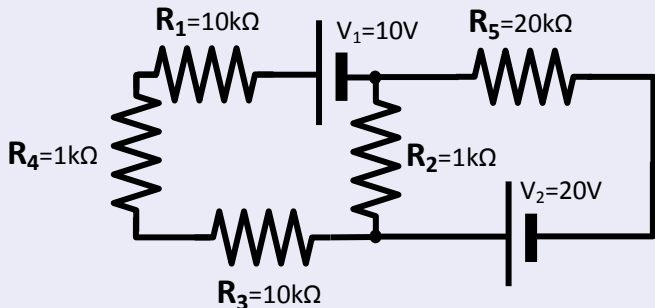
Για το κύκλωμα του σχήματος να προσδιορίσετε την τάση v_x .



Επίλυση κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

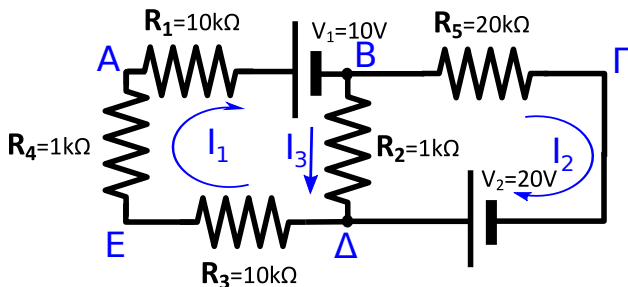
Παράδειγμα 3.2

Για το κύκλωμα του σχήματος να προσδιορίσετε τις φορές και τις εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τους αντιστάτες.



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

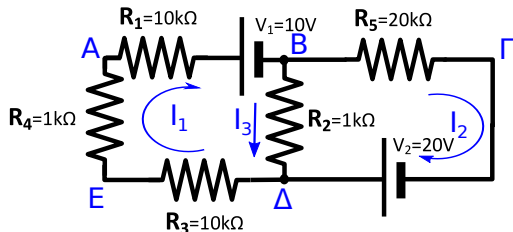
Στο κύκλωμα έχουμε τα ρεύματα του σχήματος, οι φορές των οποίων επιλέγονται τυχαία. Τα ρεύματα αυτά αποτελούν και τους αγνώστους του προβλήματός μας, οπότε θα πρέπει να βρούμε τρεις εξισώσεις που να τα περιλαμβάνουν ώστε να μπορούμε να τα προσδιορίσουμε επακριβώς.



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Ο 1ος κανόνας του Kirchhoff, εφαρμοζόμενος για κάποιον κόμβο του κυκλώματος (π.χ. τον Β) μας δίνει:

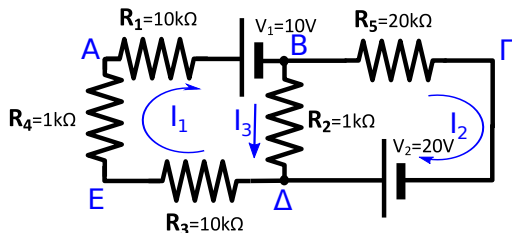
$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff, εφαρμοζόμενος για τον βρόχο ABΔΕΑ μας δίνει:

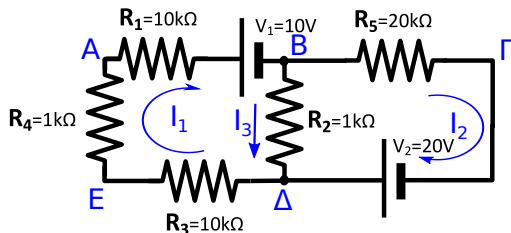
$$-I_1 R_1 - V_1 - I_3 R_2 - I_1 R_3 - I_1 R_4 = 0 \quad (2)$$



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff, εφαρμοζόμενος για τον βρόχο ΒΔΓΒ μας δίνει:

$$-I_3R_2 - V_2 + I_2R_5 = 0 \quad (3)$$



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Έχουμε, επομένως, το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ (R_1 + R_3 + R_4)I_1 + R_2I_3 = -V_1 \\ R_5I_2 - R_2I_3 = V_2 \end{cases} \quad (4)$$

Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Θα λύσουμε το προηγούμενο σύστημα εξισώσεων με τη μέθοδο των οριζουσών (μέθοδος Cramer).

Το σύστημα γράφεται με μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 + R_3 + R_4 & 0 & R_2 \\ 0 & R_5 & -R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Η ορίζουσα D του συστήματος έχει ως εξής:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 + R_3 + R_4 & 0 & R_2 \\ 0 & R_5 & -R_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{1} & \overset{\oplus}{-1} & \overset{\oplus}{-1} & \overset{0}{1} & \overset{-R_2 R_5}{-1} \\ R_1 + R_3 + R_4 & 0 & R_2 & R_1 + R_3 + R_4 & 0 \\ 0 & R_5 & -R_2 & 0 & R_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 + R_3 + R_4 & 0 & R_2 \\ 0 & R_5 & -R_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -R_5(R_1 + R_3 + R_4) - R_2 R_5 - R_2(R_1 + R_3 + R_4)$$

Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Η ορίζουσα D_1 που αντιστοιχεί στο ρεύμα I_1 έχει ως εξής:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -V_1 & 0 & R_2 \\ V_2 & R_5 & -R_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -R_2 V_2 + R_5 V_1 + R_2 V_1 = -R_2 V_2 + (R_2 + R_5) V_1$$



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Η ορίζουσα D_2 που αντιστοιχεί στο ρεύμα I_2 έχει ως εξής:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 + R_3 + R_4 & -V_1 & R_2 \\ 0 & V_2 & -R_2 \end{vmatrix} =$$

$$= R_2 V_1 - V_2(R_1 + R_3 + R_4) - R_2 V_2$$



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Η ορίζουσα D_3 που αντιστοιχεί στο ρεύμα I_3 έχει ως εξής:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 + R_3 + R_4 & 0 & -V_1 \\ 0 & R_5 & V_2 \end{vmatrix} =$$

$$= R_5 V_1 + (R_1 + R_3 + R_4) V_2$$



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Είναι, επομένως:

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-R_2 V_2 + (R_2 + R_5) V_1}{-R_5(R_1 + R_3 + R_4) - R_2 R_5 - R_2(R_1 + R_3 + R_4)}$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{R_2 V_1 - V_2(R_1 + R_3 + R_4) - R_2 V_2}{-R_5(R_1 + R_3 + R_4) - R_2 R_5 - R_2(R_1 + R_3 + R_4)}$$

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{R_5 V_1 + (R_1 + R_3 + R_4) V_2}{-R_5(R_1 + R_3 + R_4) - R_2 R_5 - R_2(R_1 + R_3 + R_4)}$$



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{-1k \cdot 20 + (1k + 20k)10}{-20k(10k + 10k + 1k) - 1k \cdot 20k - 1k(10k + 10k + 1k)} = \\
 &= \frac{-20k + 210k}{-420k^2 - 20k^2 - 21k^2} = \frac{190k}{-461k^2} = -412.15\mu\text{A}
 \end{aligned}$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει πως η φορά του ρεύματος I_1 είναι αντίθετη αυτής που υποθέσαμε



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Όμοια:

$$\begin{aligned}
 I_2 = \frac{D_2}{D} &= \frac{1k \cdot 10 - 20(10k + 10k + 1k) - 1k \cdot 20}{-20k(10k + 10k + 1k) - 1k \cdot 20k - 1k(10k + 10k + 1k)} = \\
 &= \frac{10k - 420k - 20k}{-420k^2 - 20k^2 - 21k^2} = \frac{-430k}{-461k^2} = 932.76 \mu\text{A}
 \end{aligned}$$



Παράδειγμα επίλυσης κυκλώματος με τους κανόνες του Kirchhoff

Όμοια:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{20k \cdot 10 + (10k + 10k + 1k)20}{-20k(10k + 10k + 1k) - 1k \cdot 20k - 1k(10k + 10k + 1k)} = \\
 &= \frac{200k + 420k}{-420k^2 - 20k^2 - 21k^2} = \frac{620k}{-461k^2} = -1.35mA
 \end{aligned}$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει πως η φορά του ρεύματος I_3 είναι αντίθετη αυτής που υποθέσαμε

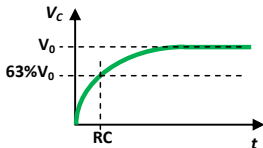
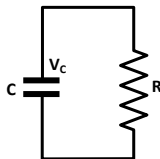
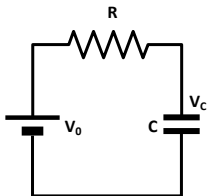


Περιεχόμενα

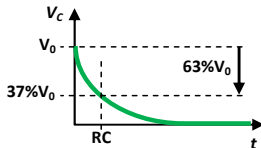
- 1 Συνεχής τάση/ρεύμα
- 2 Κανόνες Kirchhoff
- 3 Κυκλώματα RC**

Φόρτιση/εκφόρτιση πυκνωτή

- Κυκλώματα φόρτισης/εκφόρτισης πυκνωτή μέσω αντίστασης και σχετικές καμπύλες



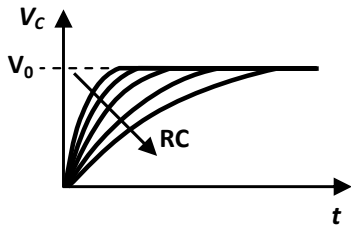
Φόρτιση



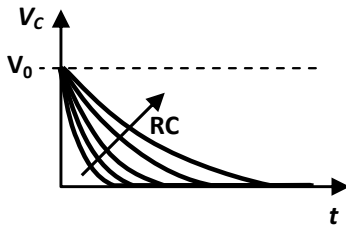
Εκφόρτιση

Φόρτιση/εκφόρτιση πυκνωτή

- Καμπύλες φόρτισης/εκφόρτισης πυκνωτή μέσω αντίστασης για διαφορετικές τιμές της σταθεράς χρόνου (RC)



Φόρτιση

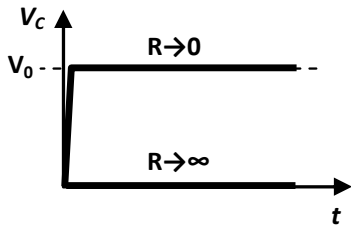


Εκφόρτιση

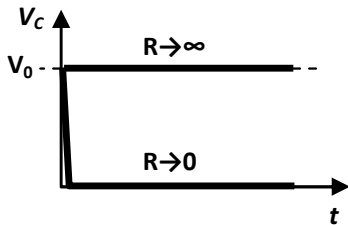


Φόρτιση/εκφόρτιση πυκνωτή

- Καμπύλες φόρτισης/εκφόρτισης πυκνωτή μέσω αντίστασης για ακραίες τιμές της αντίστασης (R)

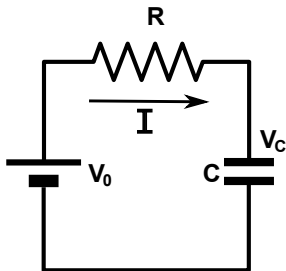


Φόρτιση



Εκφόρτιση

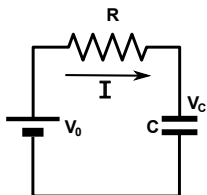
Κύκλωμα φόρτισης πυκνωτή



$$V_C = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



Απόδειξη της σχέσης $V_c = V_o \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$



Ισχύουν:

$$V_o - IR = V_c \Rightarrow V_o - V_c = IR$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$C = \frac{Q}{V_c} \Rightarrow Q = CV_c \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_c}{dt}$$

Απόδειξη της σχέσης $V_c = V_o \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 V_o - V_c &= RC \frac{dV_c}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{RC} = \frac{dV_c}{V_o - V_c} \Rightarrow \int_0^t \frac{dt}{RC} = \int_0^{V_c} \frac{dV_c}{V_o - V_c} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{1}{RC}t = - \int_0^{V_c} \frac{d(V_o - V_c)}{V_o - V_c} \Rightarrow \frac{1}{RC}t = \int_{V_c}^0 \frac{d(V_o - V_c)}{V_o - V_c} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{1}{RC}t = \int_{u=V_o-V_c}^{u=V_o} \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{1}{RC}t = \ln u \Big|_{V_o-V_c}^{V_o} \Rightarrow \frac{1}{RC}t = \ln V_o - \ln(V_o - V_c) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{1}{RC}t = \ln \frac{V_o}{V_o - V_c} \Rightarrow e^{t/RC} = \frac{V_o}{V_o - V_c} \Rightarrow (V_o - V_c)e^{t/RC} = V_o \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{V_o - V_c}{V_o} = e^{-t/RC} \Rightarrow 1 - \frac{V_c}{V_o} = e^{-t/RC} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{V_c}{V_o} = 1 - e^{-t/RC} \Rightarrow V_c = V_o(1 - e^{-t/RC})
 \end{aligned}$$



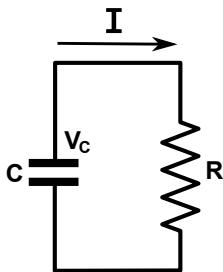
Απόδειξη της σχέσης $I = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

Άσκηση 5.11

Να αποδείξετε ότι το ρεύμα φόρτισης πυκνωτή C από πηγή τάσης V_0 μέσω αντίστασης R δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Κύκλωμα εκφόρτισης πυκνωτή



Αποδεικνύονται, παρόμοια:

$$V_C = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Φόρτιση/εκφόρτιση πυκνωτή

Άσκηση 5.12

Πυκνωτής χωρητικότητας $20\mu\text{F}$ φορτίζεται με τη βοήθεια πηγής σταθερής τάσης 100V μέσω αντίστασης $10\text{k}\Omega$. Να υπολογιστούν:

- 1 η σταθερά χρόνου του κυκλώματος
- 2 η τάση στα άκρα της αντίστασης και το ρεύμα μετά την πάροδο δύο σταθερών χρόνου από την έναρξη της φόρτισης
- 3 η ενέργεια που έχει μεταφερθεί από την πηγή στον πυκνωτή τη χρονική στιγμή 2τ



Φόρτιση/εκφόρτιση πυκνωτή

Άσκηση 5.13

Πυκνωτής χωρητικότητας $100\mu\text{F}$ φορτίζεται με τη βοήθεια πηγής σταθερής τάσης 1V μέσω αντίστασης $20\text{k}\Omega$. Να βρεθούν οι τιμές των ακόλουθων μεγεθών κατά τη χρονική στιγμή έναρξης της φόρτισης:

- 1 τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή
- 2 φορτίο του πυκνωτή
- 3 τάση στα άκρα της αντίστασης
- 4 ρεύμα φόρτισης
- 5 ρυθμός αύξησης του φορτίου του πυκνωτή

