

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Διαμόρφωση είναι η διαδικασία της απεικόνισης της ψηφιακής πληροφορίας σε αναλογική μορφή για τη μετάδοσή της μέσω του καναλιού
- Αποδιαμόρφωση είναι η αντίστροφη διαδικασία η οποία πραγματοποιείται από το δέκτη για την ανάκτηση της πληροφορίας
- Ο σχεδιασμός βέλτιστων αποδιαμορφωτών βασίζεται στη θεωρία ανίχνευσης (detection theory)
- Μπορεί να πραγματοποιηθεί αλλάζοντας το πλάτος, τη φάση ή τη συχνότητα ενός σήματος RF

# Ψηφιακή διαμόρφωση

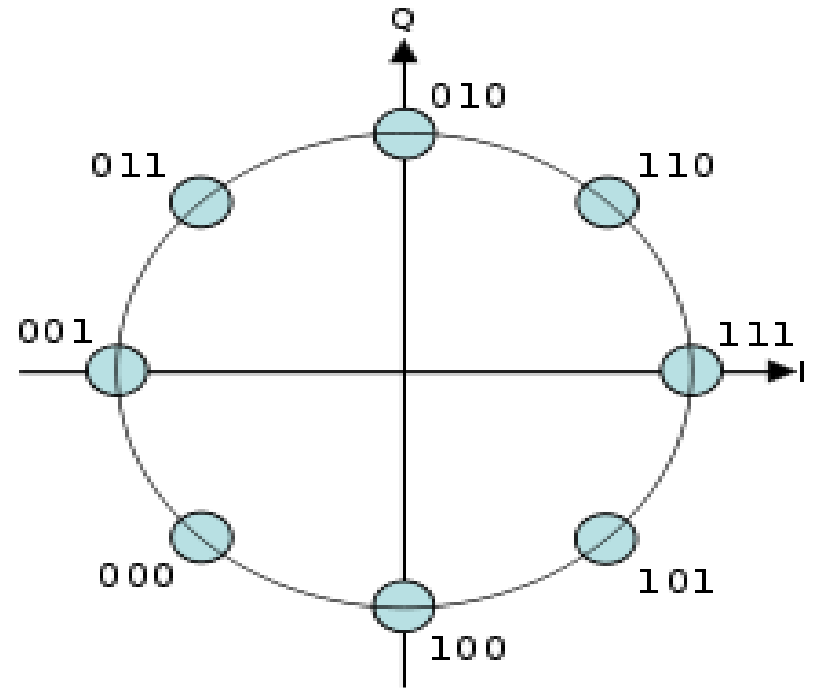
- Ο κύριος σχεδιαστικός παράγοντας είναι το διάγραμμα αστερισμών (constellation diagram)
- Ένα διάγραμμα αστερισμών είναι μία αναπαράσταση ενός σήματος το οποίο υφίσταται ψηφιακή διαμόρφωση
- Το διάγραμμα αυτό απεικονίζει το σήμα μέσω μίας συλλογής σημείων (scatter diagram) στο μιγαδικό επίπεδο σε στιγμές δειγματοληψίας των συμβόλων
- Υπό μία πιο αφηρημένη έννοια, αναπαριστά τα δυαδικά σύμβολα για συγκεκριμένη ψηφιακή διαμόρφωση σαν σημεία στο μιγαδικό επίπεδο.
- Διαγράμματα αστερισμών που προέρχονται από μετρήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναγνώριση του τύπου των παραμορφώσεων που υφίσταται ένα σήμα

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Αναπαριστώντας ένα σύμβολο σαν μιγαδικό αριθμό και διαμορφώνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος με ένα συνημιτονοειδές και ένα ημιτονοειδές φέρον αντίστοιχα, το σύμβολο μπορεί να σταλεί χρησιμοποιώντας δύο φέροντα της ίδιας συχνότητας
- Ένας σύμφωνος ανιχνευτής (coherent detector) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδιαμορφώσει τα δύο φέροντα
- Η τεχνική της χρήσης δύο ανεξάρτητων φερόντων αποτελεί τη βάση της τετραγωνικής διαμόρφωσης (quadrature modulation)
- Ο πραγματικός άξονας ονομάζεται συμφασικός άξονας (in-phase axis) και ο φανταστικός τετραγωνικός (quadrature axis)

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Ένα διάγραμμα των ιδανικών θέσεων των συμβόλων θεωρείται ως διάγραμμα αστερισμού χρησιμοποιώντας δύο φέροντα της ίδιας συχνότητας
- Το σύνολο των σημείων αυτών συνιστά το αλφάβητο διαμόρφωσης
- Στο σχήμα: 8PSK με κωδικοποίηση Gray

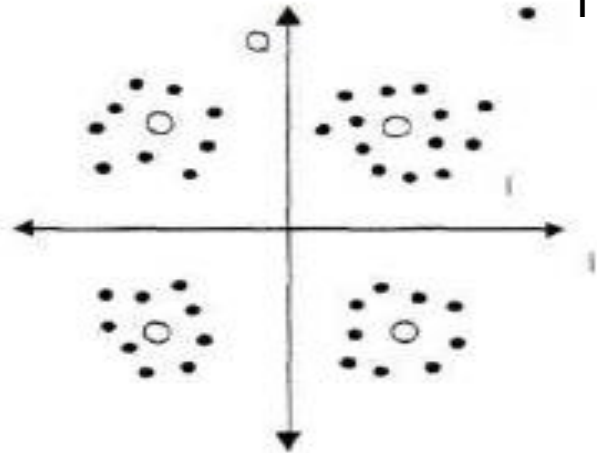


# Ψηφιακή διαμόρφωση

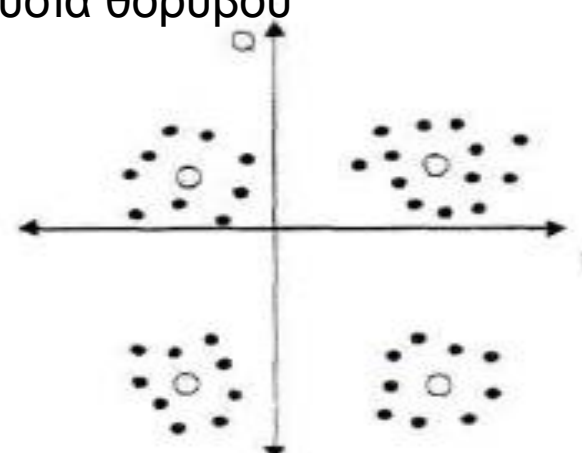
- Στη λήψη ο αποδιαμορφωτής εξετάζει το σύμβολο το οποίο είναι παραμορφωμένο από το κανάλι ή από το δέκτη
- Επιλέγει σαν εκτίμηση του συμβόλου που μεταδόθηκε το σημείο στο διάγραμμα αστερισμού η απόσταση του οποίου είναι η μικρότερη από το σημείο που αντιστοιχεί στο σύμβολο λήψης
- Λάθος εκτίμηση αν το σύμβολο στη λήψη μετακινηθεί πλησιέστερα προς άλλο σημείο του αστερισμού αντί του πραγματικού
- Εκτίμηση μεγίστης πιθανοφανείας

# Ψηφιακή διαμόρφωση

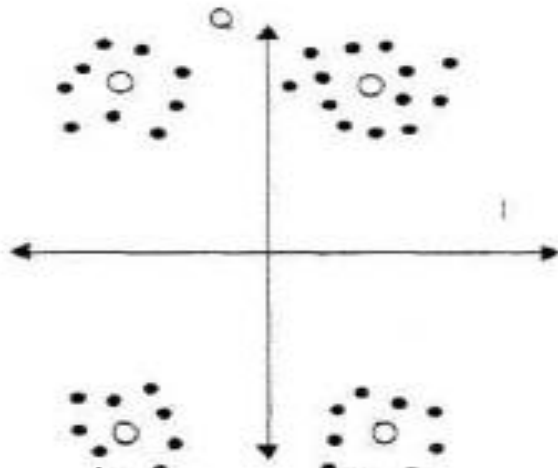
- Ιδανικές καταστάσεις
- Παρουσία θορύβου



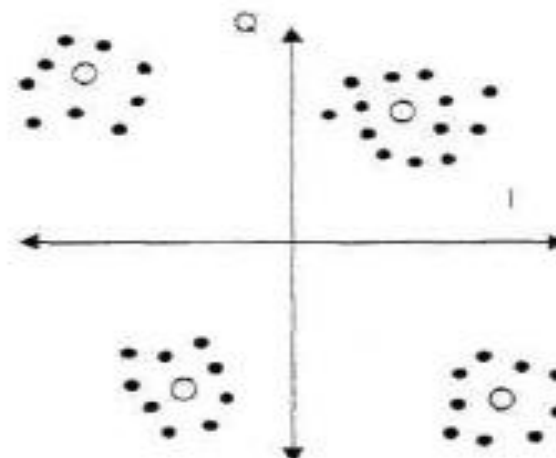
A) Ιδανικός αστερισμός QPSK



B) Ύπαρξη DC στις I και Q συνιστώσες



Γ) Η Q συνιστώσα ενισχύεται περισσότερο από την I



Γ) Η διαφορά φάσης μεταξύ I και Q δεν είναι 90 μοίρες. Παραμόρφωση πλάτους

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Η πιο σημαντική παράμετρος σε ένα διάγραμμα αστερισμού είναι η *ελάχιστη απόσταση*
- Η μικρότερη δυνατή απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία του αστερισμού
- Αντιστοιχεί στο ελάχιστο ποσό του θορύβου που απαιτείται για λανθασμένη εκτίμηση
- Η πιθανότητα εσφαλμένου bit σε κανάλι λευκού θορύβου υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης Gauss Q.
- Η πιθανότητα σφάλματος είναι συνάρτηση του λόγου της ενέργειας ενός bit προς θόρυβο ( $E_b/N_o$ ) ή της ενέργειας ενός συμβόλου προς το θόρυβο ( $E_s/N_o$ )
- Αν  $k$  ο αριθμός των bits ανά σύμβολο τότε  $E_s = kE_b$

# Ψηφιακή διαμόρφωση

Πιθανότητα εσφαλμένου bit:  $P_b \sim Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$

- Η συνάρτηση Q είναι φθίνουσα
- Μεγάλες τιμές του  $E_b/N_o$  αντιστοιχούν σε μικρές τιμές πιθανότητας σφάλματος
- Διαφορετικοί αστερισμοί χαρακτηρίζονται από διαφορετικές τιμές της ελάχιστης απόστασης για το ίδιο  $E_b/N_o$ .
- Για δεδομένο λόγο σήματος προς θόρυβο ο καλύτερος αστερισμός είναι αυτός με τη μέγιστη τιμή της ελάχιστης απόστασης



# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Η ελάχιστη απόσταση εξαρτάται από διάφορους παράγοντες
  - Από τον αριθμό των σημείων  $M$
  - Από τη μέση ισχύ  $P_{ave}$
  - Από το σχήμα του αστερισμού
- Η πιο σημαντική παράμετρος είναι ο αριθμός των σημείων του αστερισμού ο οποίος εξαρτάται από τον αριθμό των bits,  $k$ , που απαρτίζουν ένα σύμβολο  $M = 2^k$ .
- Η μέση ισχύς  $P_{ave}$  αυξάνει ή μειώνει το μέγεθος του αστερισμού ανάλογα με την ισχύ μετάδοσης
  - Για δίκαιη σύγκριση ανάμεσα σε διαφορετικούς αστερισμούς η ισχύς κανονικοποιείται στη μονάδα.
  - Η μέση ισχύς δίνεται από τη σχέση:

$$P_{ave} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |c_k|^2$$

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Σημαντική παράμετρος που επηρεάζει την ελάχιστη απόσταση είναι το σχήμα του αστερισμού
- Παραδοσιακοί αστερισμοί είναι μονοδιάστατοι ή διδιάστατοι
- Τα σημεία μπορούν πρακτικά να ανήκουν σε οποιοδήποτε σχήμα.
- Για καλές επιδόσεις οι σχεδιαστές μεριμνούν για τα ακόλουθα:
  - Όλα τα σημεία του αστερισμού έχουν το ίδιο πλάτος
  - Βελτίωση της ελάχιστης απόστασης
  - Λύση προβλήματος βελτιστοποίησης
  - Για διδιάστατη περίπτωση έχουμε κυκλικούς αστερισμούς

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Σύμφωνη (coherent) διαμόρφωση: Απαιτείται η ύπαρξη σήματος αναφοράς το οποίο είναι συγχρονισμένο ως προς τη φάση (phase synchronized) με το φέρον του σήματος στον πομπό
  - Τα σύμβολα διαμόρφωσης μεταφέρονται *σύγχρονα*
- Το αντίθετο ισχύει για σήματα μή σύγχρονης διαμόρφωσης (non coherent).
- Η σύγχρονη διαμόρφωση βελτιώνει τις επιδόσεις του συστήματος αλλά απαιτεί μεγαλύτερη πολυπλοκότητα στο υλικό του δέκτη
- Η επίδοση των συστημάτων σύμφωνης διαμόρφωσης είναι μεγάλη όταν χρησιμοποιούνται αστερισμοί μεγάλου μεγέθους

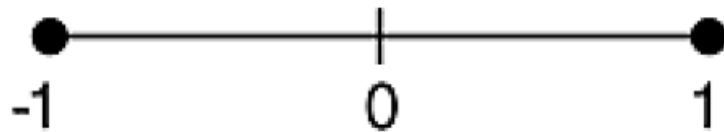
# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Διαμόρφωση πλάτους (Amplitude Shift Keying, ASK):
  - Η πληροφορία μεταδίδεται μεταβάλλοντας το πλάτος του σήματος
  - Ένα φέρον συχνότητας  $\omega_c$  πολλαπλασιάζεται με τα πλάτη  $A_k$  τα οποία επιλέγονται από το σύνολο  $\{A_1, \dots, A_m\}$
  - Ανάλογα με το ποια bits μεταδίδονται επιλέγονται τα αντίστοιχα σύμβολα από το σύνολο  $\{A_1, \dots, A_m\}$

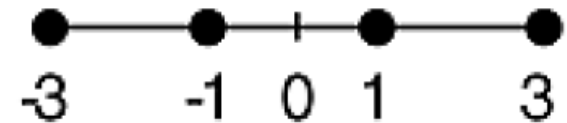
$$s(t) = A_k \cos(\omega_c t)$$

# Ψηφιακή διαμόρφωση

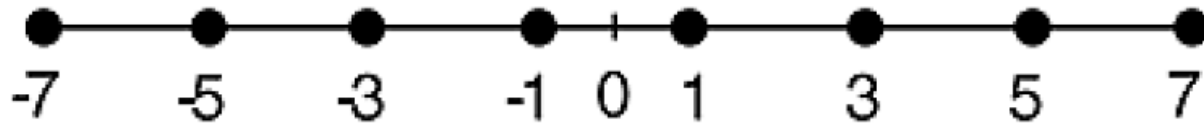
ASK modulations, (a) 2-ASK, (b) 4-ASK, (c) 8-ASK.



(a)



(b)



(c)

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Όλες οι διαμορφώσεις έχουν την ίδια ελάχιστη απόσταση  $d_{\min}^2 = 4$ .
- Η μέση ισχύς των αστερισμών δεν είναι ίση
- Για να είναι δίκαιη η σύγκριση ανάμεσα σε διαφορετικούς αστερισμούς η ελάχιστη απόσταση κανονικοποιείται ως προς τη μέση ισχύ.

# Ψηφιακή διαμόρφωση

Table 3.1. Distance Properties of ASK Modulations

<i>Modulation</i>	$P_{ave}$	$d_{min}^2$ <i>Normalized</i>	<i>SNR Increase</i>
2-ASK	1	4	–
4-ASK	5	$\frac{4}{5}$	6.99 dB
8-ASK	21	$\frac{4}{21}$	6.23 dB

- Για κάθε επιπρόσθετο bit απαιτείται αύξηση κατά 6dB προκειμένου να διατηρηθεί το ίδιο BER
- Για αυτό το λόγο μεγάλοι αστερισμοί ASK χρησιμοποιούνται σπάνια στην πράξη

# Ψηφιακή διαμόρφωση

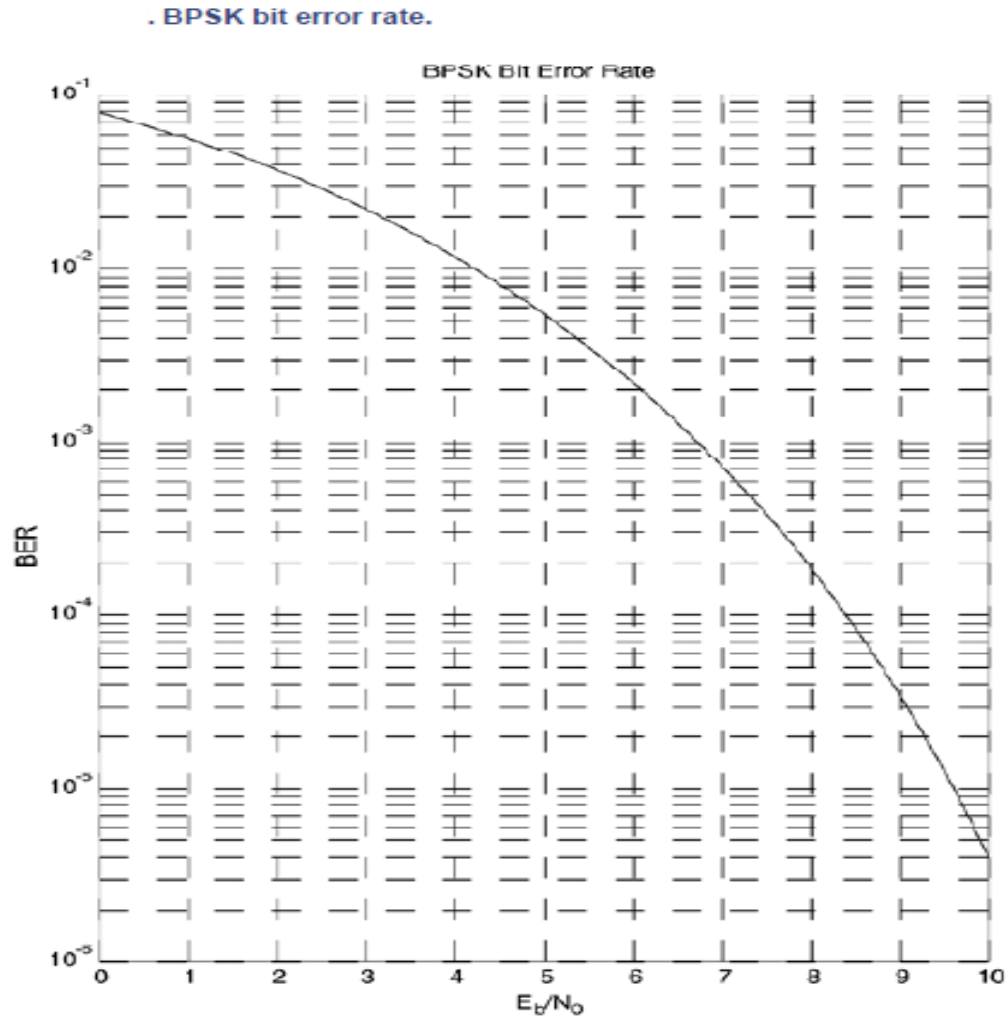
- Η 2-ASK είναι ισοδύναμη με τη BPSK
- Η πιθανότητα εσφαλμένων bit δίνεται από την σχέση

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Χρήσιμα σημεία αναφοράς για προσομοιώσεις: Στα 8dB έχουμε πιθανότητα σφάλματος  $2e-4$ , στα 9.6dB έχουμε πιθανότητα σφάλματος  $1e-5$
- Όσο αυξάνει ο αριθμός των σημείων του αστερισμού οι αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα εσφαλμένων bit γίνονται πιο πολύπλοκες
  - Χρήση εκφράσεων για την πιθανότητα εσφαλμένου συμβόλου ή προσεγγιστικές εκφράσεις



# Ψηφιακή διαμόρφωση



# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Για M-αδική ASK η πιθανότητα εσφαλμένων συμβόλων δίνεται από τη σχέση (1)
- Η αντίστοιχη πιθανότητα εσφαλμένων bits δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση (2)

$$P_s = 2 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{A^2}{2N_0}} \right) \quad (1)$$

$$P_b \approx \frac{P_s}{\log_2 M} = \frac{P_s}{k} \quad (2)$$

- Η σχέση (2) είναι προσεγγιστική γιατί υποθέτει ότι σε ένα εσφαλμένο σύμβολο περιέχεται μόνο ένα εσφαλμένο bit
- Χρησιμοποιώντας κωδικοποίηση Gray, για τα περισσότερα εσφαλμένα σύμβολα έχουμε μόνο ένα εσφαλμένο bit
- Η προσέγγιση είναι ικανοποιητική για υψηλούς λόγους σήματος προς θόρυβο

# Ψηφιακή διαμόρφωση

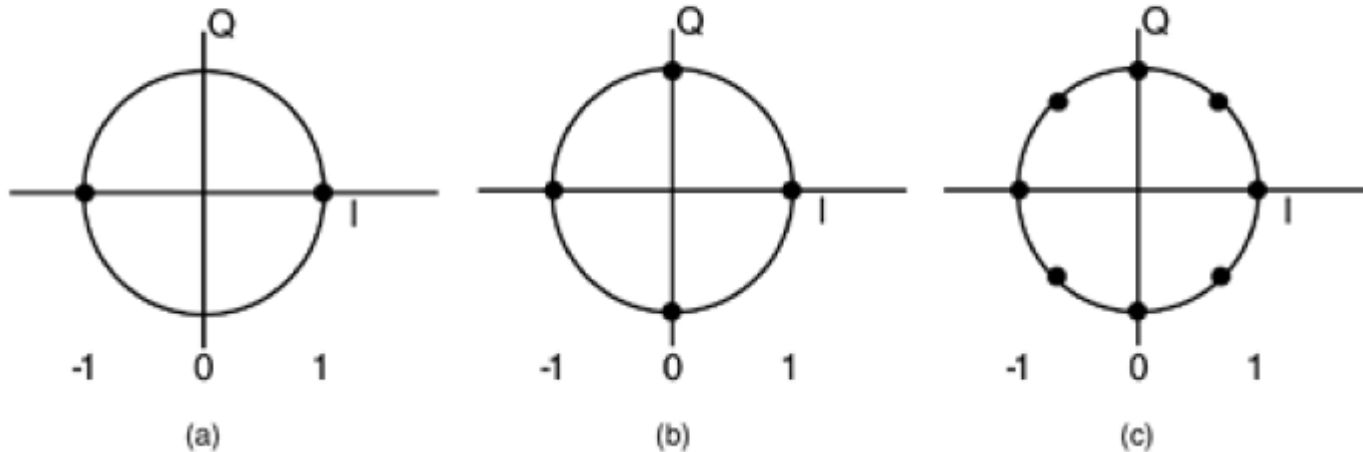
- Με διαμόρφωση φάσης (Phase Shift Keying, PSK) μεταδίδεται πληροφορία αλλάζοντας τη φάση του φέροντος
- Το πλάτος παραμένει σταθερό
- Οι διαμορφώσεις PSK ονομάζονται διαμορφώσεις σταθερού πλάτους (constant amplitude)

$$s(t) = \cos(\omega_c t + \phi_k)$$

- Το κύριο πλεονέκτημα είναι η διατήρηση σταθερού Peak-to-Average Power Ratio (πρακτικά ίσο με τη μονάδα)
- Απλοποιείται η σχεδίαση του υποσυστήματος RF
- Οι διαμορφώσεις PSK ονομάζονται διαμορφώσεις σταθερού πλάτους (constant amplitude)

# Ψηφιακή διαμόρφωση

The three smallest PSK modulations, (a) BPSK, (b) QPSK, (c) 8-PSK.



- Οι διαμορφώσεις PSK είναι διδιάστατες
  - Χρησιμοποιούν συμφασική και ορθογωνική συνιστώσα
- Λόγω της δεύτερης διάστασης η συμπεριφορά του  $d_{min}$  βελτιώνεται όσο αυξάνει ο αριθμός των σημείων του αστερισμού

# Ψηφιακή διαμόρφωση

Distance Properties of PSK Modulations			
<i>Modulation</i>	$P_{ave}$	$d_{min}^2$ Normalized	<i>SNR Increase</i>
BPSK	1	4.00	–
QPSK	1	2.00	3.00 dB
8-PSK	1	0.5858	5.33 dB
16-PSK	1	0.1522	5.85 dB

- Η αύξηση του απαιτούμενου SNR από BPSK σε QPSK είναι μόνο 3dB συγκρινόμενη με τα 6.99dB του ASK
- Όσο ο αριθμός των σημείων αυξάνει η αύξηση φθάνει τα 6dB που αντιστοιχούν στο ASK
- Οφείλεται στο ότι παρά το γεγονός ότι η PSK είναι δισδιάστατη διαμόρφωση έχει ένα βαθμό ελευθερίας
- Δεν αξιοποιείται βέλτιστα το μιγαδικό επίπεδο για την τοποθέτηση των σημείων
- Διαμορφώσεις πάνω από 8PSK σπάνια χρησιμοποιούνται στην πράξη

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Για BPSK και QPSK η πιθανότητα εσφαλμένων bit μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς όπως δείξαμε στα προηγούμενα
- Η BPSK και η QPSK χαρακτηρίζονται από την ίδια πιθανότητα εσφαλμένων bits
- Η πιθανότητα εσφαλμένων συμβόλων για διαμόρφωση QPSK δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$P_s = 2Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)\left[1 - \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)\right] \quad (3)$$

- Για υψηλή τάξη διαμόρφωσης έχουμε την ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση:

$$P_s = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \quad (4)$$

- Η πιθανότητα εσφαλμένων bits μπορεί να υπολογιστεί όπως και στην περίπτωση της ASK διαιρώντας την πιθανότητα εσφαλμένων συμβόλων με τον αριθμό των bits ανά σύμβολο  $k = \log_2 M$

# Ψηφιακή διαμόρφωση

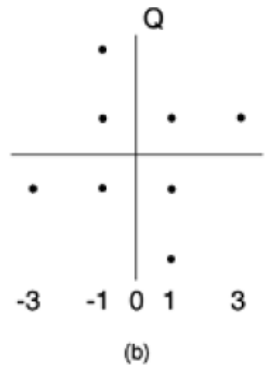
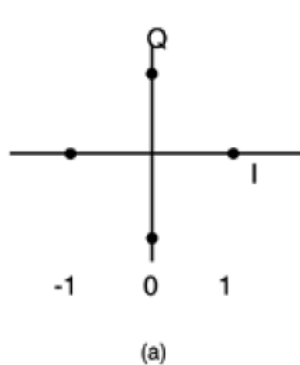
Τετραγωνική διαμόρφωση πλάτους (Quadrature Amplitude Modulation, QAM). Μεταβάλλεται το πλάτος και η φάση του σήματος

$$s(t) = I_k \cos(\omega_c t) - Q_k \sin(\omega_c t) = A_k \cos(\omega_c t + \phi_k)$$

$$A_k = \sqrt{I_k^2 + Q_k^2}$$

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{Q_k}{I_k}\right)$$

QAM constellations, (a) QPSK, (b) 8-QAM, (c) 16-QAM.



# Ψηφιακή διαμόρφωση

Distance Properties of QAM Modulations			
<i>Modulation</i>	$P_{ave}$	$d_{min}^2$ <i>Normalized</i>	<i>SNR Increase</i>
QPSK	1	2.00	–
8-QAM	6	0.67	4.77 dB
16-QAM	10	0.40	2.22 dB
32-QAM	20	0.20	3.01 dB

- Η μετάβαση από QPSK σε 8QAM έχει σαν αποτέλεσμα απότομη μείωση της ελάχιστης απόστασης
  - Για το συγκεκριμένο παράδειγμα 8QAM που χρησιμοποιήσαμε είναι δυνατό να έχουμε βελτιωμένη ελάχιστη απόσταση
- Η μετάβαση από 16QAM σε 32QAM έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του SNR κατά 3dB για να διατηρηθεί σταθερή η πιθανότητα εσφαλμένων bit
- Η αύξηση του SNR κατά 3dB για κάθε επιπρόσθετο bit ανά σύμβολο αποτελεί κανόνα για τις διαμορφώσεις QAM



# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Η πιθανότητα εσφαλμένων συμβόλων για διαμόρφωση M-QAM όπου M τετράγωνο ακέραιου αριθμού, υπολογίζεται θεωρώντας τον αστερισμό σαν υπέρθεση δύο αστερισμών ASK

$$P_s \approx 4 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left( \sqrt{\frac{3E_s}{(M-1)N_0}} \right)$$

- Η πιθανότητα εσφαλμένων bits εξαρτάται από τον τρόπο που ανατίθενται τα bits σε κάθε σύμβολο
- Επειδή ο τρόπος αυτός έχει σημαντική επίδραση στην πιθανότητα σφάλματος πρέπει να πραγματοποιηθεί με βέλτιστο τρόπο

# Ψηφιακή διαμόρφωση

(a) QAM natural order and (b) Gray coded labeling schemes.

3	2	1	0
0011	0010	0001	0000
7	6	5	4
0111	0110	0101	0100
11	10	9	8
1011	1010	1001	1000
15	14	13	12
1111	1110	1101	1100

(a)

2	6	14	10
0010	0110	1110	1010
3	7	15	11
0011	0111	1111	1011
1	5	13	9
0001	0101	1101	1001
0	4	12	8
0000	0100	1100	1000

(b)

- Ο φυσικός τρόπος ανάθεσης bits αναθέτει τους δεκαδικούς αριθμούς 0-15 με συμβατικό τρόπο
- Προβληματικός για τον εξής λόγο:
  - Έστω ότι μεταδόθηκε το σύμβολο 1 αλλά στη λήψη προκύπτει το σύμβολο 2
  - 1-> (0001), 2-> (0010)
  - Ένα εσφαλμένο σύμβολο αντιστοιχεί σε 2 εσφαλμένα bits
  - Η κωδικοποίηση Gray λύνει το πρόβλημα αυτό

# Ψηφιακή διαμόρφωση

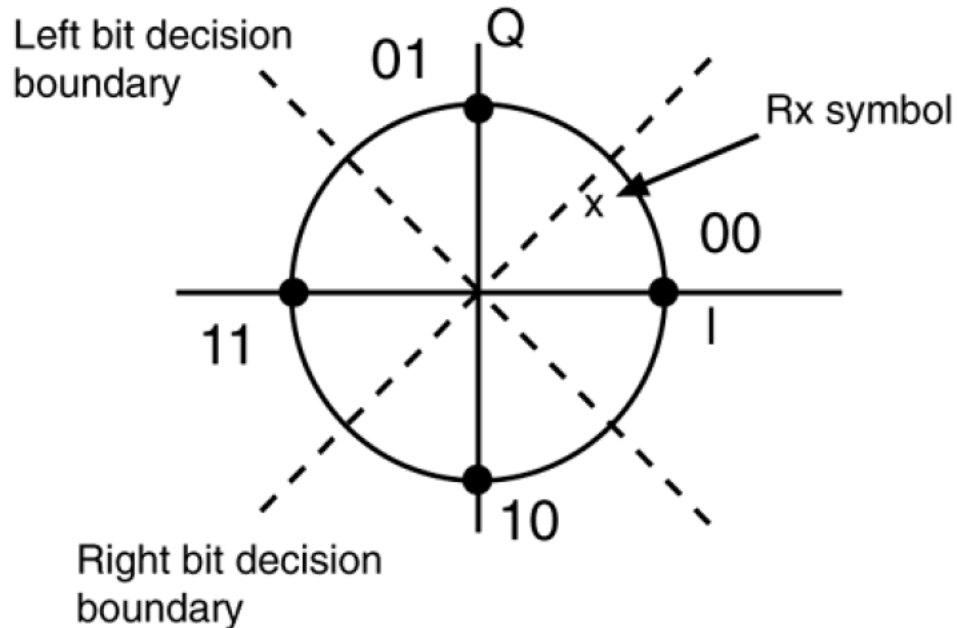
- Η διαδικασία της ανίχνευσης είναι σημαντική για ένα ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα
  - Καθορίζεται η ακολουθία των bits η οποία μεταδόθηκε με τη μεγαλύτερη δυνατή πιθανότητα
- Διακρίνουμε δύο είδη ανίχνευσης: Σκληρή (hard detection) και απαλή (soft detection)
- Η σκληρή ανίχνευση δίνει οριστική απάντηση αν μεταδόθηκε 0 ή 1
  - Η έξοδος του συνεπώς είναι μία ακολουθία μηδενικών και άσσων

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Ένας τέτοιος αποδιαμορφωτής καθορίζεται από τον αριθμό των δυνατών εισόδων στον διαμορφωτή, στην πλευρά του πομπού
- Αν ο αριθμός των δυνατών εισόδων είναι ίσος με τον αριθμό των δυνατών εξόδων τότε στον αποδιαμορφωτή τότε ο αποδιαμορφωτής χρησιμοποιεί σκληρή ανίχνευση
- Αν ο αριθμός των εξόδων στον αποδιαμορφωτή είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των δυνατών εισόδων το σύστημα χρησιμοποιεί απαλή ανίχνευση

# Ψηφιακή διαμόρφωση

Hard decision boundaries for QPSK constellation.



- Παράδειγμα: Θεωρούμε τον δέκτη QPSK του σήματος
- Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφανείας, χωρισμός του αστερισμού σε περιοχές απόφασης
- Σκληρή απόφαση: Μεταδόθηκε το σύμβολο 00

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Στην απαλή ανίχνευση ο αποδιαμορφωτής δίνει στην έξοδο «απαλά» bits
  - Δίνει επιπρόσθετη πληροφορία σχετικά με την αξιοπιστία της απόφασης σχετικά με το αν το bit που εστάλη είναι ίσο με μηδέν ή ένα
- Στην προηγούμενη εικόνα το σύμβολο που ελήφθη είναι πολύ κοντά στο σύνορο απόφασης ανάμεσα στα σύμβολα 00 και 01
- Για να αλλάξει το αριστερό bit σε 1 θα πρέπει να μετακινηθούμε αρκετά μακριά από το σύνορο απόφασης
- Το σύμβολο είναι αρκετά μακριά από το καθορισμένο όριο άρα η απόφαση ότι το αριστερό bit είναι 0 είναι αξιόπιστη
- Το δεξιό bit μπορεί να είναι 1 αν το σύμβολο είναι πάνω από το σύνορο απόφασης αντί ακριβώς από κάτω του

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Για να πραγματοποιηθεί μία τέτοια μετάβαση δεν απαιτείται μεγάλο ποσό θορύβου
  - Η απόφαση σχετικά με το δεξιό bit είναι λιγότερο αξιόπιστη
- Για να μεταδοθεί η πληροφορία σχετικά με το βαθμό αξιοπιστίας της απόφασης τα απαλά bits έχουν διαφορετικές απόλυτες τιμές
  - μεγάλη απόλυτη τιμή για το αριστερό bit
  - μικρή για το δεξιό
- Το πρόσημο κάθε απόφασης καθορίζει αν το bit που μεταδόθηκε είναι ίσο με μηδέν ή ένα
- Η απόλυτη τιμή είναι ίση με την απόσταση από το σύνορο απόφασης

# Ψηφιακή διαμόρφωση

- **Μή σύμφωνες αποδιαμορφώσεις:**
  - Σύστημα δεν διατηρεί κλείδωμα φάσης ανάμεσα στον πομπό και στον δέκτη
  - Δεν γνωρίζουν τις αλλαγές του πλάτους του μεταδιδόμενου συμβόλου λόγω της επίδρασης του καναλιού
  - Συμβατικές διαμορφώσεις τύπου ASK, PSK και QAM δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν γιατί απαιτούν η φάση και το πλάτος του συμβόλου λήψης να βρίσκονται πολύ κοντά στη φάση και στο πλάτος του συμβόλου μετάδοσης
  - Η λύση είναι να χρησιμοποιηθεί διαφορετική διαμόρφωση πλάτους ή φάσης
  - Κωδικοποιούνται οι μεταβολές φάσης ή οι μεταβολές πλάτους και φάσης κατά τη μετάδοση από ένα σύμβολο στο επόμενο
  - Εισάγεται μνήμη και ο αποδιαμορφωτής χρειάζεται δύο διαδοχικά σύμβολα για τη λήψη αποφάσεων



# Ψηφιακή διαμόρφωση

- Η μή σύμφωνη διαμόρφωση φάσης (Differential Phase Shift Keying, DPSK) αλλάζει τη φάση ενός φέροντος από την τρέχουσα κατάσταση ανάλογα με τα bits που μεταδίδονται
  - Η διαδικασία της κωδικοποίησης στο επίπεδο bits περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση

$$b_n = d_n \oplus d_{n-1}$$

- Εναλλακτικά μπορεί να περιγραφεί από την ακόλουθη σχέση

$$s(t) = \cos(\omega_c t + \Delta\phi_n + \phi)$$