

07-11-2025

Outline

Επανάληψη

Κανόνες Kirchhoff - Κομβική ανάλυση

Ασκήσεις

Topic

Επανάληψη

Κανόνες Kirchhoff - Κομβική ανάλυση

Ασκήσεις

Επανάληψη - Κλαδικά ρεύματα Kirchhoff

- Εντοπίζετε κόμβους και κλάδους.
- Κάνετε δυνατές απλοποιήσεις.
- Σχεδιάζετε ρεύματα κλάδων.
- Εφαρμόζετε κανόνα ρευμάτων Kirchhoff σε όλους τους κόμβους.
- Εφαρμόζετε κανόνα τάσεων Kirchhoff στους ελάχιστους βρόχους (οφθαλμούς).
- Λύνετε το γραμμικό σύστημα ανεξαρτήτων εξισώσεων.
- Από τα ρεύματα κλάδων μπορείτε να υπολογίσετε τα υπόλοιπα.

Topic

Επανάληψη

Κανόνες Kirchhoff - Κομβική ανάλυση

Ασκήσεις

Ανάλυση Kirchhoff με τάσεις κόμβων

- Εντοπίζετε κόμβους και κλάδους.
- Κάνετε όποιες απλοποιήσεις μπορείτε χωρίς να *σκεπάσετε* τα στοιχεία ή τους κόμβους που χρειάζεστε για τη λύση.
- Επιλέξτε ένα κόμβο σαν κόμβο αναφοράς (γείωση).
- Για όλους τους άλλους κόμβους εφαρμόσετε κανόνα ρευμάτων Kirchhoff θεωρώντας ότι τα ρεύματα που εξέρχονται έχουν θετικό πρόσημο και τα ρεύματα που εισέρχονται αρνητικό.
- Δεν σχεδιάζετε ρεύματα. Τα εκφράζετε συναρτήσει της τάσης του κάθε κόμβου.
- Καταλήγετε σε σύστημα μικρότερης τάξης από τη μέθοδο κλαδικών ρευμάτων το οποίο λύνετε με όποιον τρόπο θέλετε για τις κομβικές τάσεις.
- Από τις τάσεις μπορείτε να υπολογίσετε όλα τα κλαδικά ρεύματα καθώς και την ισχύ που καταναλώνει ή παράγει το κάθε στοιχείο.

Θεμελιώδες θεώρημα τοπολογίας δικτύων

$$b = l + n - 1$$

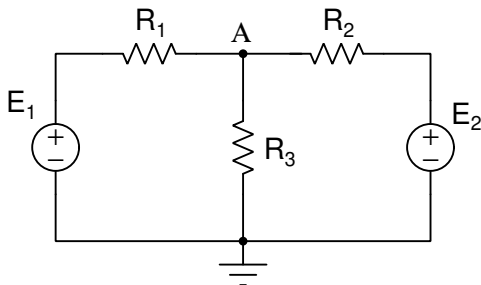
όπου:

b : (branch) κλάδος

l : (loop) ανεξάρτητος βρόχος

n : (node) κόμβος

Παράδειγμα



$$\frac{V_A - E_1}{R_1} + \frac{V_A - E_2}{R_2} + \frac{V_A}{R_3} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Παράδειγμα συνέχεια

Νούμερα: $E_1 = 12\text{V}$, $E_2 = 9\text{V}$, $R_1 = 2\text{k}\Omega$, $R_2 = 4\text{k}\Omega$, $R_3 = 3\text{k}\Omega$

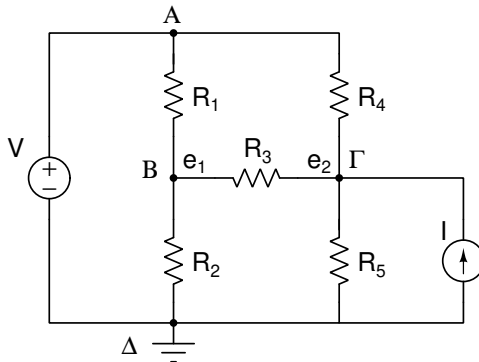
$$V_A = 7.6154 \text{ V}$$

$$I_1 = 2.19231 \text{ mA}$$

$$I_2 = 0.34615 \text{ mA}$$

$$I_3 = 2.53846 \text{ mA}$$

Παράδειγμα 2-1



Παράδειγμα 2-2

$$\left. \begin{aligned} \frac{e_1 - V}{R_1} + \frac{e_1 - e_2}{R_3} + \frac{e_1}{R_2} &= 0 \\ \frac{e_2 - e_1}{R_3} + \frac{e_2 - V}{R_4} + \frac{e_2}{R_5} - I &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - e_2 \frac{1}{R_3} &= \frac{V}{R_1} \\ -e_1 \frac{1}{R_3} + e_2 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) &= I + \frac{V}{R_4} \end{aligned} \right\}$$

Παράδειγμα 2-3

Με αριθμούς

$$V = 20 \text{ V}, I_1 = 3 \text{ mA}, R_1 = 2 \text{ k}\Omega, R_2 = 1.5 \text{ k}\Omega$$
$$R_3 = 0.5 \text{ k}\Omega, R_4 = 1 \text{ k}\Omega, R_5 = 3 \text{ k}\Omega$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{0.5} \right) - e_2 \frac{1}{0.5} &= \frac{20}{2} \\ -e_1 \frac{1}{0.5} + e_2 \left(\frac{1}{0.5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) &= 3 + \frac{20}{1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$e_1 = 12.10 \text{ V} \quad e_2 = 14.16 \text{ V}$$

Topic

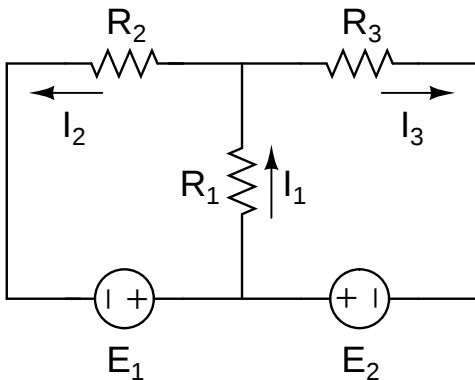
Επανάληψη

Κανόνες Kirchhoff - Κομβική ανάλυση

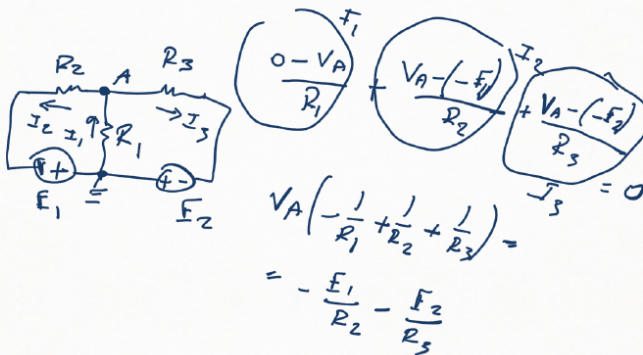
Ασκήσεις

Άσκηση

Να γίνει πλήρη ανάλυση στο παρακάτω κύκλωμα όταν $E_1 = 9\text{ V}$, $E_2 = 18\text{ V}$, $R_1 = 500\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $R_3 = 1.2\text{ k}\Omega$.

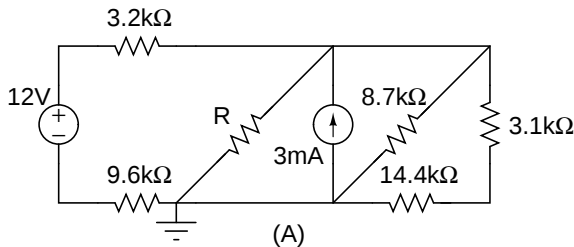


Λύση



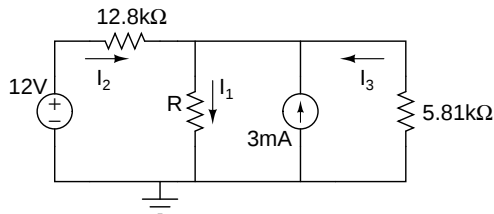
Άσκηση

Να βρεθεί η τιμή της αντίστασης R στο κύκλωμα (A) έτσι ώστε η τάση στα άκρα της να είναι 9 V.



Άσκηση 2

Απλοποιώντας εν σειρά και παράλληλες αντιστάσεις έχουμε



όπου με κανόνες Kirchhoff

$$I_2 - I_1 + 3 + I_3 = 0$$

$$12.8I_2 + 9 - 12 = 0 \Rightarrow I_2 = 0.234 \text{ mA}$$

$$5.81I_3 + 9 = 0 \Rightarrow I_3 = -1.55 \text{ mA}$$

$$I_1 = 3 + I_2 + I_3 = 1.685 \text{ mA} \Rightarrow R = \frac{9}{1.685} = 5.34 \text{ k}\Omega$$

Άσκηση 3

Με κομβική ανάλυση

$$\frac{V-12}{12.8} + \frac{V}{R} - 3 + \frac{V}{5.81} = 0$$

$$\frac{V}{R} = 3 - \frac{V-12}{12.8} - \frac{V}{5.81}$$

$$R = \frac{V}{3 - \frac{V-12}{12.8} - \frac{V}{5.81}}$$

```
octave:1> V=9
```

```
V = 9
```

```
octave:2> 3-(V-12)/12.8-V/5.81
```

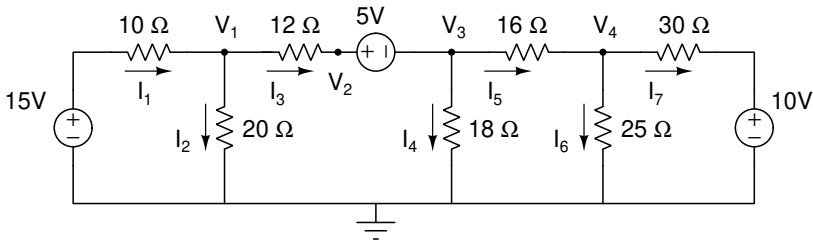
```
ans = 1.6853
```

```
octave:3> V/ans
```

```
ans = 5.3402
```

Άσκηση

Να βρεθούν τα κλαδικά ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα καθώς και οι τάσεις V_1 , V_2 , V_3 , V_4 .



Άσκηση 2

$$\frac{V_1 - 15}{10} + \frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_2}{12} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{12} + \frac{V_3}{18} + \frac{V_3 - V_4}{16} = 0$$

$$\frac{V_4 - V_3}{16} + \frac{V_4}{25} + \frac{V_4 - 10}{30} = 0$$

$$V_2 - V_3 = 5$$

Άσκηση 3

$$V_1 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} \right) - \frac{V_2}{12} = \frac{15}{10}$$

$$-\frac{V_1}{12} + \frac{V_2}{12} + V_3 \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{16} \right) - \frac{V_4}{16} = 0$$

$$-\frac{V_3}{16} + V_4 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} \right) = \frac{10}{30}$$

$$V_2 - V_3 = 5$$

Άσκηση 4

$$V_1 = 9.267 \text{ V}$$

$$V_2 = 7.948 \text{ V}$$

$$V_3 = 2.948 \text{ V}$$

$$V_4 = 3.811 \text{ V}$$

Άσκηση 5

$$I_1 = \frac{15 - V_1}{10} = 0.573\text{A}$$

$$I_2 = \frac{V_1}{20} = 0.463\text{A}$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{12} = 0.110\text{A}$$

$$I_4 = \frac{V_3}{18} = 0.164\text{A}$$

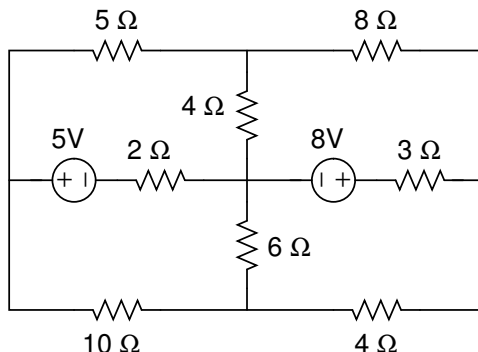
$$I_5 = \frac{V_3 - V_4}{16} = -0.0539\text{A}$$

$$I_6 = \frac{V_4}{25} = 0.152\text{A}$$

$$I_7 = \frac{V_4 - 10}{30} = -0.206\text{A}$$

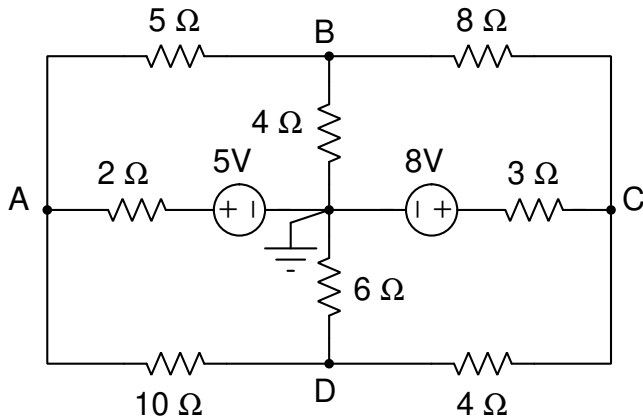
Άσκηση

Να γίνει πλήρης ανάλυση στο παρακάτω κύκλωμα.



- Κατάστρωση εξισώσεων Kirchhoff με κλαδικά ρεύματα και τάσεις κόμβων.
- Δοκιμάστε να λύσετε τα συστήματα που προκύπτουν.
- Επιβεβαίωση με octave και LTspice.

Άσκηση 2



Άσκηση 3

$$\frac{V_A - 5}{2} + \frac{V_A - V_B}{5} + \frac{V_A - V_D}{10} = 0$$

$$\frac{V_B - V_A}{5} + \frac{V_B}{4} + \frac{V_B - V_C}{8} = 0$$

$$\frac{V_C - V_B}{8} + \frac{V_C - 8}{3} + \frac{V_C - V_D}{4} = 0$$

$$\frac{V_D}{6} + \frac{V_D - V_A}{10} + \frac{V_D - V_C}{4} = 0$$

Άσκηση 4

$$V_A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) - V_B \frac{1}{5} - V_D \frac{1}{10} = \frac{5}{2}$$

$$-V_A \frac{1}{5} + V_B \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) - V_C \frac{1}{8} = 0$$

$$-V_B \frac{1}{8} + V_C \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - V_D \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$$

$$-V_A \frac{1}{10} - V_C \frac{1}{4} + V_D \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \right) = 0$$

Άσκηση 5

$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ -0.2V_A + 0.575V_B - 0.125V_C + 0V_D &= 0 \\ 0V_A - 0.125V_B + 0.708V_C - 0.25V_D &= 2.67 \\ -0.1V_A + 0V_B - 0.25V_C + 0.517V_D &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Μέθοδο απαλοιφής Gauss

$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ 0V_A + 0.525V_B - 0.125V_C - 0.025V_D &= 0.625 \\ 0V_A - 0.125V_B + 0.708V_C - 0.25V_D &= 2.67 \\ 0V_A - 0.025V_B - 0.25V_C + 0.504V_D &= 0.312 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Άσκηση 6

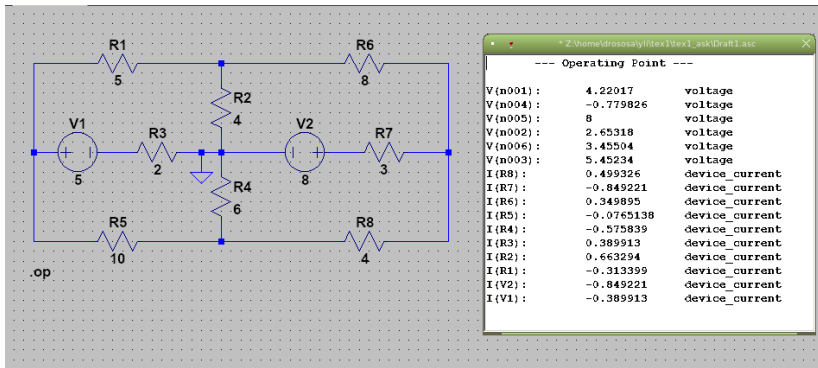
$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ 0V_A + 0.525V_B - 0.125V_C - 0.025V_D &= 0.625 \\ 0V_A - 0V_B + 0.638V_C - 0.256V_D &= 2.81 \\ 0V_A - 0V_B - 0.256V_C + 0.503V_D &= 0.342 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ 0V_A + 0.525V_B - 0.125V_C - 0.025V_D &= 0.625 \\ 0V_A - 0V_B + 0.638V_C - 0.256V_D &= 2.81 \\ 0V_A - 0V_B - 0V_C + 0.406V_D &= 1.40 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Άσκηση 7

	με 3 σημ [Volt]	ακρίβεια [Volt]
V_D	3.45	3.45504
V_C	5.79	5.45234
V_B	2.73	2.65318
V_A	4.24	4.22017

Άσκηση 8



Άσκηση 9

$$A = \begin{bmatrix} 1/2+1/5+1/10 & -1/5 & 0 & -1/10; & -1/5 & 1/5+1/4+1/8 & -1/8 & 0; \\ 0 & -1/8 & 1/8+1/3+1/4 & -1/4; & -1/10 & 0 & -1/4 & 1/6+1/10+1/4 \end{bmatrix}$$

$$b = [5/2; 0; 8/3; 0]$$

$$V = \text{inv}(A) * b$$

$$A =$$

0.80000	-0.20000	0.00000	-0.10000
-0.20000	0.57500	-0.12500	0.00000
0.00000	-0.12500	0.70833	-0.25000
-0.10000	0.00000	-0.25000	0.51667

$$b =$$

2.50000
0.00000
2.66667
0.00000

$$V =$$

4.22017
2.65318
5.45234
3.45504

Παλιές εξεταστικές

- Φεβρουάριος 2024