

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 12

Α. Δροσόπουλος

27-11-2024

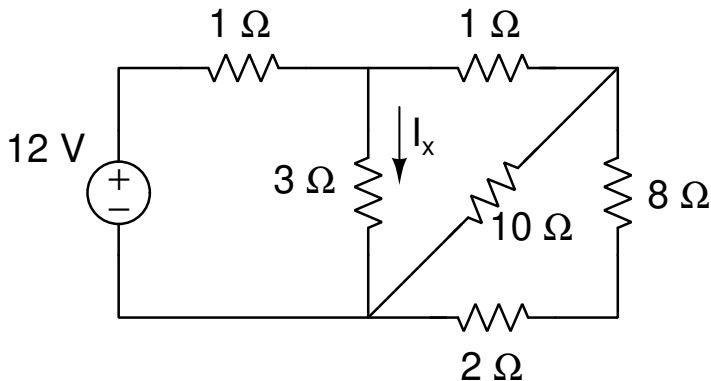
- 1 Ασκήσεις
- 2 Επανάληψη μιγαδικών

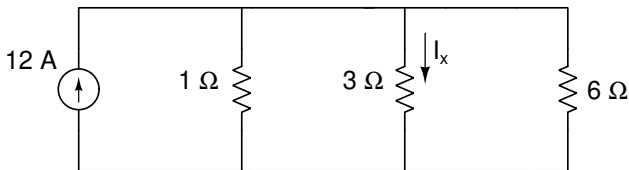
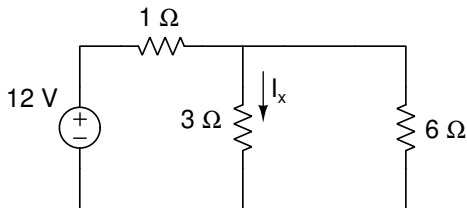
1 Ασκήσεις

2 Επανάληψη μιγαδικών

Άσκηση 10

Να βρεθεί το I_x .



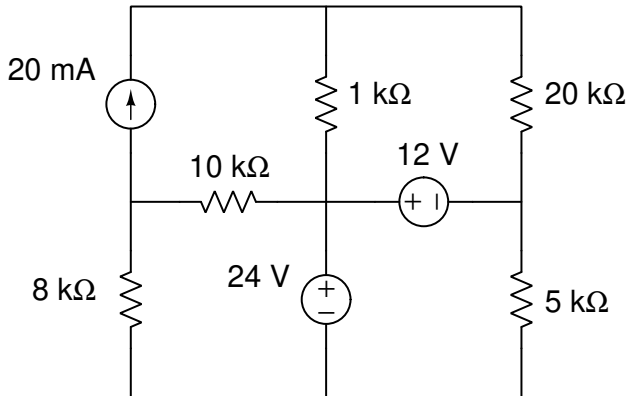


$$R = 1 \parallel 3 \parallel 6 = 0.667 \, \Omega$$

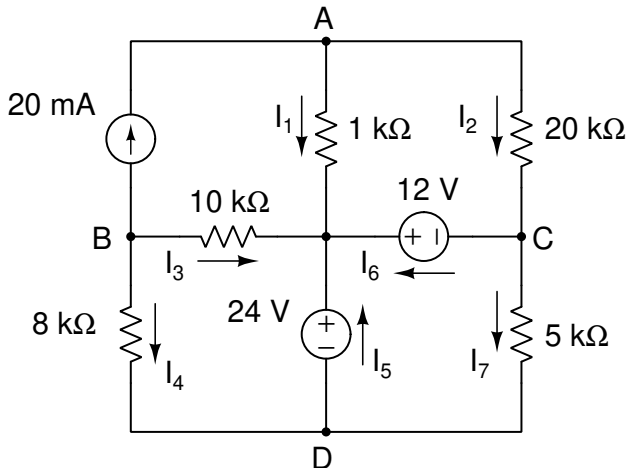
$$V = 12R = 8 \, \text{V} \quad I_x = \frac{V}{3} = 2.667 \, \text{A}$$

Άσκηση 11

Να βρεθεί η ισχύς που καταναλώνεται στην $5\text{ k}\Omega$.



11b - Kirchhoff κλαδικά ρεύματα



$$\begin{aligned}
 \text{A: } & 20 - I_1 - I_2 = 0 \\
 \text{B: } & -20 - I_3 - I_4 = 0 \\
 \text{C: } & I_2 - I_6 - I_7 = 0 \\
 \text{D: } & I_4 - I_5 + I_7 = 0 \\
 & -I_1 + 20I_2 = 12 \\
 & 10I_3 - 8I_4 = -24 \\
 & 5I_7 = 24 - 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= 20 \\
 I_3 + I_4 &= -20 \\
 I_2 - I_6 - I_7 &= 0 \\
 I_4 - I_5 + I_7 &= 0 \\
 -I_1 + 20I_2 &= 12 \\
 10I_3 - 8I_4 &= -24 \\
 5I_7 &= 12
 \end{aligned}$$

```
octave:5> A=[1 1 0 0 0 0 0; 0 0 1 1 0 0 0; 0 1 0 0 0 -1 -1; 0 0 0 1 -1 0 1;
-1 20 0 0 0 0 0; 0 0 10 -8 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 5]
```

```
A =
```

```

    1    1    0    0    0    0    0
    0    0    1    1    0    0    0
    0    1    0    0    0   -1   -1
    0    0    0    1   -1    0    1
   -1   20    0    0    0    0    0
    0    0   10   -8    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    5
```

```
octave:6> b=[20; -20; 0; 0; 12; -24; 12]
```

```
b =
```

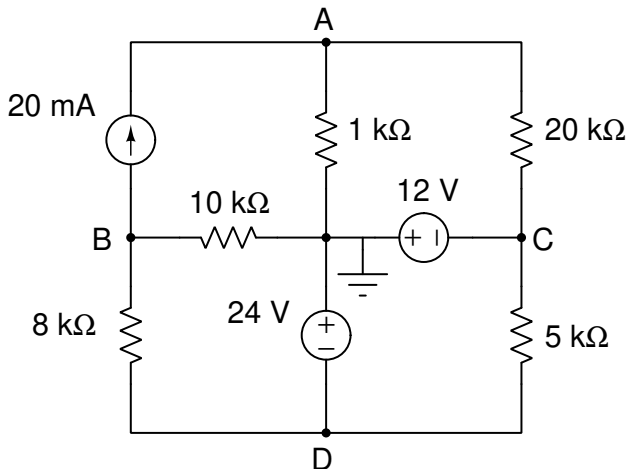
```

    20
   -20
     0
     0
    12
   -24
    12
```

```
octave:7> I=inv(A)*b
I =
    18.47619
     1.52381
   -10.22222
    -9.77778
    -7.37778
    -0.87619
     2.40000
octave:8> P=5*I(7)^2
P =   28.800
```

$$P_5 = 5I_7^2 = 28.8 \text{ mW}$$

11f - Kirchhoff κομβική ανάλυση



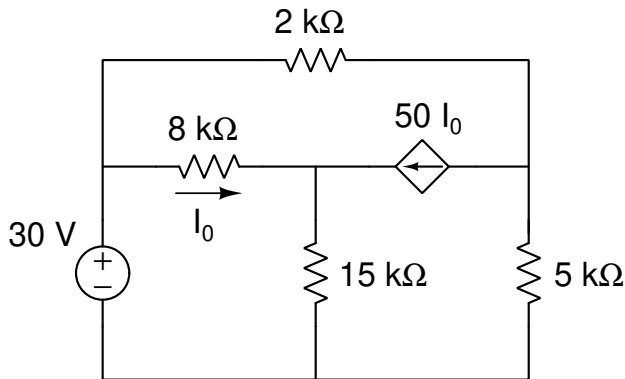
$$\begin{aligned} \text{A: } & -20 + V_A/1 + (V_A - V_C)/20 = 0 \\ \text{B: } & 20 + V_B/10 + (V_B - V_D)/8 = 0 \\ \text{C: } & V_C = -12 \\ \text{D: } & V_D = -24 \end{aligned}$$

$$V_{CD} = V_C - V_D = -12 + 24 = 12 \text{ V}$$

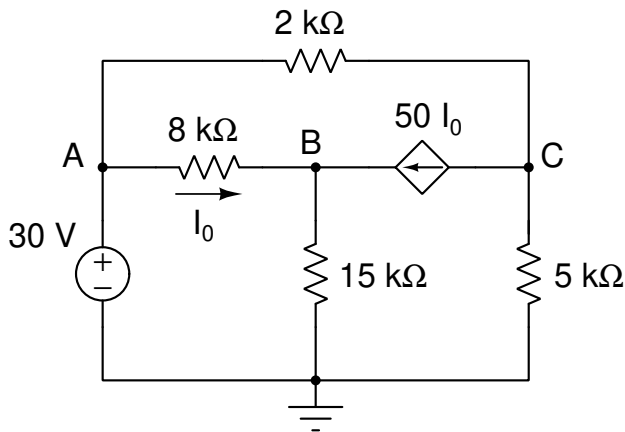
$$P_5 = V_{CD}^2/5 = 28.8 \text{ mW}$$

Άσκηση 12

Να βρεθεί η ισχύς που καταναλώνεται στην $5\text{ k}\Omega$.



12b - Kirchhoff κομβική ανάλυση



$$\text{B:} \quad -I_0 - 50I_0 + \frac{V_B}{15} = 0$$

$$\text{C:} \quad \frac{V_C - 30}{2} + 50I_0 + \frac{V_C}{5} = 0$$

$$\frac{30 - V_B}{8} = I_0$$

```
octave:10> Vb=(51*30/8)/(51/8+1/15)
```

```
Vb = 29.690
```

```
octave:11> I0=(30-Vb)/8
```

```
I0 = 0.038810
```

```
octave:12> Vc=(15-50*I0)/(1/2+1/5)
```

```
Vc = 18.656
```

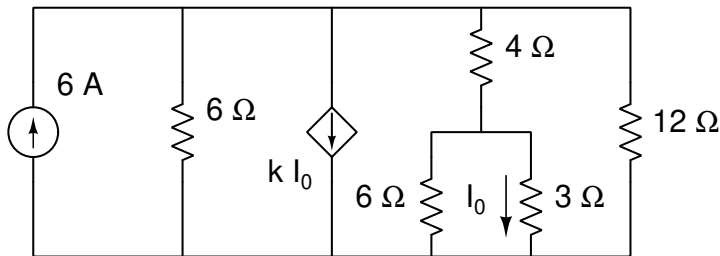
```
octave:13> P=Vc^2/5
```

```
P = 69.613
```

$$P = 69.6 \text{ mW}$$

Άσκηση 13

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου k έτσι ώστε η ισχύς που δίνει η πηγή 6 A να είναι 108 W .



Με κομβική ανάλυση

$$-6 + \frac{V}{6} + kI_0 + \frac{V}{6} + \frac{V}{12} = 0$$

$$V_3 = \frac{2}{4+2} V = \frac{V}{3}$$

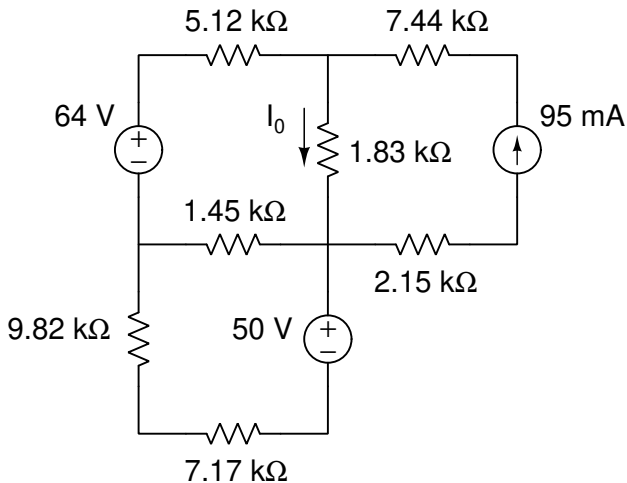
$$I_0 = \frac{V}{3 \cdot 3} = \frac{V}{9}$$

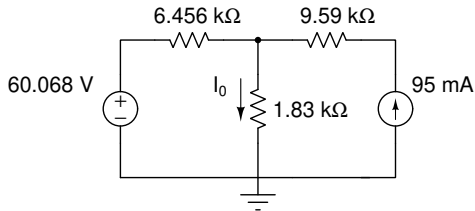
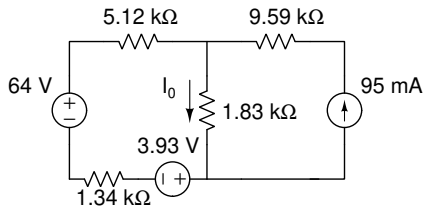
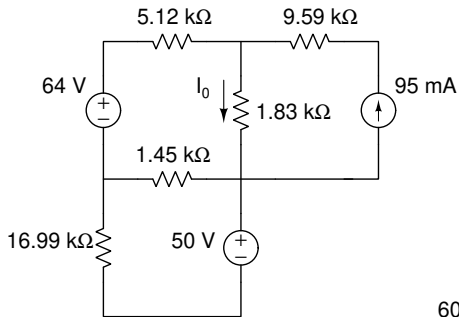
$$P = 6V = 108 \Rightarrow V = 18 \text{ V}$$

$$k = \frac{6 - V(1/6 + 1/6 + 1/12)}{V/9} = -0.75$$

Άσκηση 14

Να βρεθεί το I_0 .



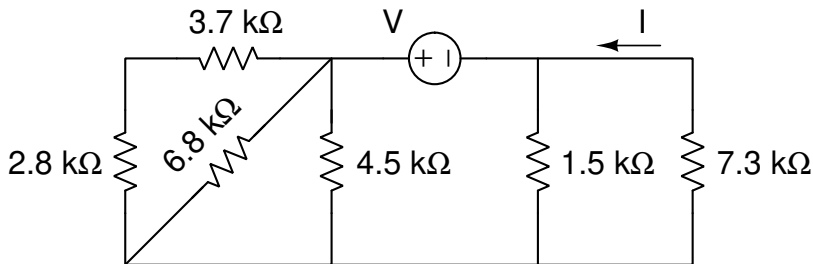


```
octave:20> I1=50/16.99
I1 = 2.9429
octave:21> r1=16.99*1.45/(16.99+1.45)
r1 = 1.3360
octave:22> V1=I1*r1
V1 = 3.9317
octave:23> r2=5.12+r1
r2 = 6.4560
octave:24> V2=64-V1
V2 = 60.068
octave:25> V = (95+V2/r2)/(1/r2+1/1.83)
V = 148.72
octave:26> I0=V/1.83
I0 = 81.268
```

$$I_0 = 81.3 \text{ mA}$$

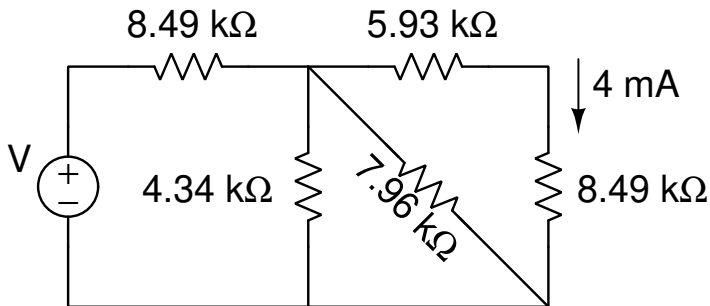
Άσκηση 4.7

Εάν $I = 8 \text{ mA}$ να βρεθεί η τάση V στο κύκλωμα.



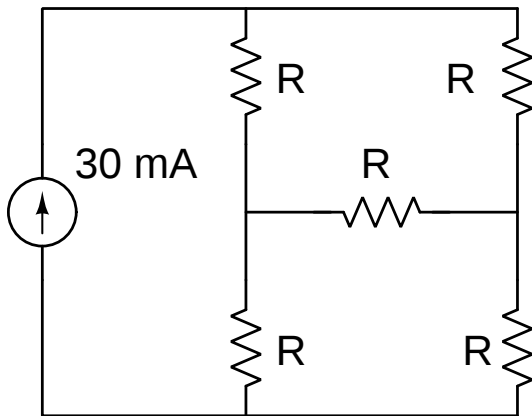
Άσκηση 4.8

Να υπολογιστεί η τάση V στο κύκλωμα.

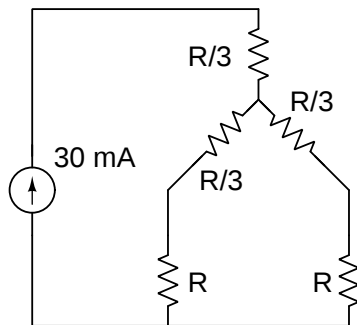


Άσκηση 2

Για ποια τιμή R θα δώσει η πηγή ρεύματος ισχύ 800 mW ;



Άσκηση 2b



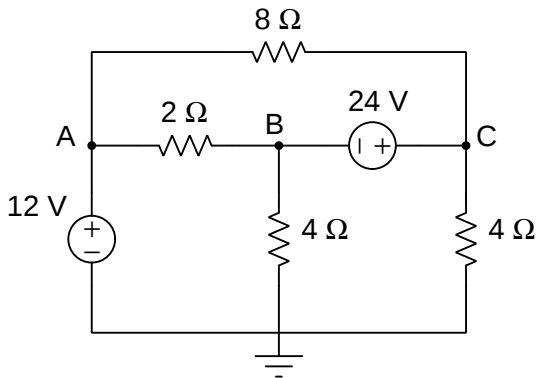
$$\frac{4}{3}R \parallel \frac{4}{3}R = \frac{2}{3}R \quad \text{και} \quad \frac{2}{3}R + \frac{1}{3}R = R$$

```
octave:7> P=800e-3; I=30e-3; R=P/I^2
```

```
R = 888.89
```

Άσκηση 3

Ποιες είναι οι τάσεις μεταξύ A, B, C και γής;



Άσκηση 3b

Με μέθοδο κόμβων (προσθέτουμε ρεύμα I_x μεταξύ B και C)

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_B - 12}{2} + \frac{V_B}{4} + I_x &= 0 \\ \frac{V_C - 12}{8} + \frac{V_C}{4} - I_x &= 0 \\ V_C - V_B &= 24 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} V_B \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + V_C \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) &= \left(\frac{12}{2} + \frac{12}{8} \right) \\ -V_B + V_C &= 24 \end{aligned}$$

Άσκηση 3c

```
octave:8> A=[1/2+1/4 1/8+1/4;-1 1]
```

```
A =
```

```
    0.75000    0.37500  
   -1.00000    1.00000
```

```
octave:9> b=[12/2+12/8; 24]
```

```
b =
```

```
    7.5000  
   24.0000
```

```
octave:10> V=inv(A)*b
```

```
V =
```

```
   -1.3333  
   22.6667
```

Άρα, $V_A = 12 \text{ V}$, $V_B = -1.33 \text{ V}$, $V_C = 22.7 \text{ V}$.

1 Ασκήσεις

2 Επανάληψη μιγαδικών

Αναπαράσταση μιγαδικών

- Καρτεσιανή μορφή

$$z = x + jy$$

όπου $j = \sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα, x είναι το πραγματικό μέρος του z και y είναι το φανταστικό μέρος του z .

$$x = \Re\{z\}$$

$$y = \Im\{z\}$$

- Ιδιότητες φανταστικής μονάδας

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = j \cdot j^2 = -j$$

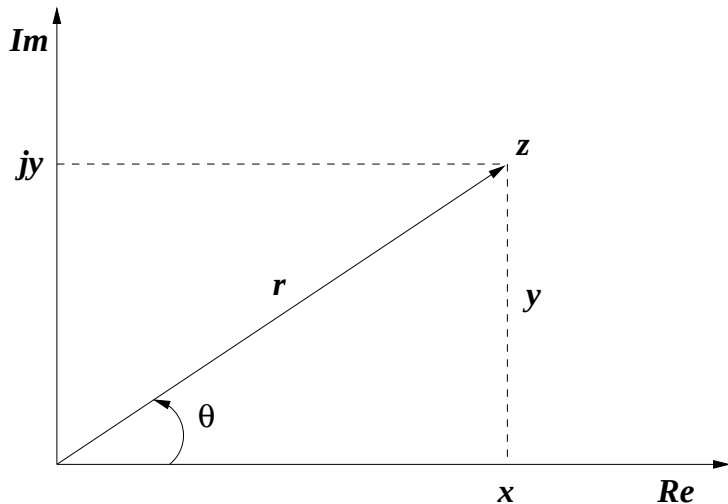
$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1$$

$$j^5 = j \cdot j^4 = j$$

$$\vdots$$

$$j^{n+4} = j^n$$

Αναπαράσταση μιγαδικών (συνέχεια 1)



Αναπαράσταση μιγαδικών (συνέχεια 2)

- Πολική μορφή

$$z = |z| \angle \theta = r \angle \theta$$

όπου

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ή

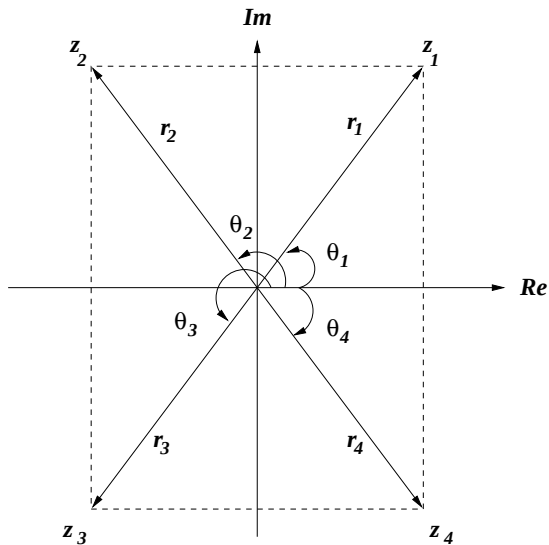
$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta$$

και

$$z = x + jy = r \angle \theta = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

- Εκθετική μορφή

$$z = re^{j\theta} = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$



Μετατροπές (συνέχεια 1)

Στην μετατροπή από καρτεσιανή σε πολική μορφή χρειάζεται προσοχή στον προσδιορισμό της σωστής τιμής της γωνίας θ ανάλογα με το τεταρτημόριο όπου βρίσκεται ο μιγαδικός αριθμός. Υπάρχουν τέσσερις δυνατότητες:

$$z = x + jy \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 1\text{o τετ}$$

$$z = -x + jy \quad \theta = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 2\text{o τετ}$$

$$z = -x - jy \quad \theta = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \theta = -180^\circ + \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 3\text{o τετ}$$

$$z = x - jy \quad \theta = 360^\circ - \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \theta = -\tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 4\text{o τετ}$$

όπου $x > 0, y > 0$.

Παράδειγμα 1

Να εκφράσετε τον $z_1 = 6 + j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_1 = 6 + j8$ ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_1 = \tan^{-1} \frac{8}{6} = 53.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_1 = 10 \angle 53.13^\circ$ και η εκθετική $z_1 = 10e^{j53.13^\circ}$.

```
>> z1=6+j*8
z1 = 6 + 8i
>> r1=sqrt(real(z1)^2 + imag(z1)^2)
r1 = 10
>> r1=abs(z1)
r1 = 10
>> theta1 = atan(imag(z1)/real(z1))*180/pi
theta1 = 53.130
>> theta1 = atan2(imag(z1),real(z1))*180/pi
theta1 = 53.130
>> theta1 = angle(z1)*180/pi
theta1 = 53.130
```

Παράδειγμα 2

Να εκφράσετε τον $z_2 = -6 + j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_2 = -6 + j8$ ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο επομένως

$$r_2 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_2 = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{8}{6} = 126.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_2 = 10 \angle 126.87^\circ$ και η εκθετική $z_2 = 10e^{j126.87^\circ}$.

```
>> z2=-6+j*8
z2 = -6 + 8i
>> r2=abs(z2)
r2 = 10
>> theta2 = atan(imag(z2)/real(z2))*180/pi
theta2 = -53.130
>> theta2 = atan2(imag(z2),real(z2))*180/pi
theta2 = 126.87
>> theta2 = angle(z2)*180/pi
theta2 = 126.87
```

Παράδειγμα 3

Να εκφράσετε τον $z_3 = -6 - j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_3 = -6 - j8$ ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_3 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_3 = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{8}{6} = 233.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_3 = 10 \angle 233.13^\circ$ και η εκθετική $z_3 = 10e^{j233.13^\circ}$. Επίσης σωστό είναι

$$\theta_3 = -180^\circ + \tan^{-1} \frac{8}{6} = -126.87^\circ$$

και πολική μορφή $z_3 = 10 \angle -126.87^\circ$ και εκθετική $z_3 = 10e^{-j126.87^\circ}$.

```
>> z3=-6-j*8
z3 = -6 - 8i
>> r3=abs(z3)
r3 = 10
>> theta3 = atan(imag(z3)/real(z3))*180/pi
theta3 = 53.130
>> theta3 = atan2(imag(z3),real(z3))*180/pi
theta3 = -126.87
>> theta3 = angle(z3)*180/pi
theta3 = -126.87
```

Παράδειγμα 4

Να εκφράσετε τον $z_4 = 6 - j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_4 = 6 - j8$ ανήκει στο τέταρτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_4 = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_4 = 360^\circ - \tan^{-1} \frac{8}{6} = 306.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_4 = 10 \angle 306.87^\circ$ και η εκθετική $z_4 = 10e^{j306.87^\circ}$. Επίσης σωστό είναι

$$\theta_4 = -\tan^{-1} \frac{8}{6} = -53.13^\circ$$

και πολική μορφή $z_4 = 10 \angle -53.13^\circ$ και εκθετική $z_4 = 10e^{-j53.13^\circ}$.

```
>> z4=6-j*8
z4 = 6 - 8i
>> r4=abs(z4)
r4 = 10
>> theta4 = atan(imag(z4)/real(z4))*180/pi
theta4 = -53.130
>> theta4 = atan2(imag(z4),real(z4))*180/pi
theta4 = -53.130
>> theta4 = angle(z4)*180/pi
theta4 = -53.130
```

AURORA SC582



■ Coordinate Conversion (Pol (x , y) , Rec (r , θ))

- Calculation results are automatically assigned to variables E and F.
- Example 1: To convert polar coordinates ($r = 2, \theta = 60^\circ$) to rectangular coordinates(x , y) (Deg).

x=1 **SHIFT** **Rec** (2 , 60) **=**

Rec(2,60) **D**
1.

y=1.732050808 **RCL** **F**

F= **D**
1.732050808

- Press **RCL** **E** to display the value of x ,or **RCL** **F** to display the value of y .
- Example 2: To convert rectangular coordinates (1, $\sqrt{3}$) to polar coordinates(r , θ) (Rad).

r=2 **Pol** (1 , $\sqrt{}$ 3) **=**

Pol(1, $\sqrt{3}$) **R**
2.

θ =1.047197551 **RCL** **F**

F= **R**
1.047197551

- Press **RCL** **E** to display the value of r or **RCL** **F** to display the value of θ .

Παράδειγμα 5

Να εκφράσετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή.

$$z_1 = 12 \angle -60^\circ, z_2 = -50 \angle 285^\circ, z_3 = 8e^{j10^\circ}, z_4 = 20e^{-j\pi/3}.$$

```
>> z1=12*exp(-j*60*pi/180)
z1 = 6.0000 - 10.3923i
>> z2=-50*exp(j*285*pi/180)
z2 = -12.941 + 48.296i
>> z3=8*exp(j*10*pi/180)
z3 = 7.8785 + 1.3892i
>> z4=20*exp(-j*pi/3)
z4 = 10.000 - 17.321i
```

Αριθμητικές πράξεις

Δυο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$ είναι ίσοι αν και μόνον αν και τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη είναι αντιστοίχως ίσα

$$x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = y_2$$

Ο συζυγής μιγαδικός του μιγαδικού αριθμού $z = x + jy = r \angle \theta = re^{j\theta}$ είναι

$$z^* = x - jy = r \angle -\theta = re^{-j\theta}$$

Δοθέντων δυο μιγαδικών αριθμών $z_1 = x_1 + jy_1$ και $z_2 = x_2 + jy_2$ το άθροισμά τους είναι

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

και η διαφορά τους

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Αριθμητικές πράξεις (συνέχεια 1)

Στην πράξη, η πρόσθεση και αφαίρεση μεταξύ μιγαδικών αριθμών γίνεται πιο απλά στην καρτεσιανή τους μορφή. Ο πολλαπλασιασμός όμως και η διαίρεση γίνονται πιο απλά στην πολική ή εκθετική τους μορφή

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

Εναλλακτικά, στην καρτεσιανή μορφή

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \left(\frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \right) \left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} \right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Άσκηση 1

Εάν $A = 2 + j5$, $B = 4 - j6$ να βρείτε, α) $A^*(A + B)$, β) $(A + B)/(A - B)$.

Εάν $A = 2 + j5$ τότε $A^* = 2 - j5$ και

$$A + B = (2 + 4) + j(5 - 6) = 6 - j$$

οπότε

$$\begin{aligned} A^*(A + B) &= (2 - j5)(6 - j) = \\ 5.385 \angle -68.2^\circ \cdot 6.083 \angle -9.46^\circ &= \\ 32.757 \angle -77.66^\circ &= 7 - j32 \end{aligned}$$

Ομοίως

$$A - B = (2 - 4) + j[5 - (-6)] = -2 + j11$$

οπότε

$$\frac{A + B}{A - B} = \frac{6 - j}{-2 + j11} = \frac{6.083 \angle -9.46^\circ}{11.18 \angle 100.305^\circ} = 0.544 \angle -109.765^\circ = -0.184 - j0.512$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων

$$\frac{(2 + j5) \cdot (8e^{j10^\circ})}{2 + j4 + 2 \angle -40^\circ} \quad \text{και} \quad \frac{j(3 - j4)^*}{(-1 + j6)(2 + j)^2}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{(2 + j5) \cdot (8e^{j10^\circ})}{2 + j4 + 2 \angle -40^\circ} &= \frac{5.385 \angle 68.2^\circ \cdot 8 \angle 10^\circ}{2 + j4 + 1.532 - j1.285} = \\ \frac{43.08 \angle 78.2^\circ}{3.532 + j2.715} &= \frac{43.08 \angle 78.2^\circ}{4.455 \angle 37.55^\circ} = 9.67 \angle 40.65^\circ = 7.34 + j6.30 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \frac{j(3 - j4)^*}{(-1 + j6)(2 + j)^2} &= \frac{j(3 + j4)}{(-1 + j6)(2 + j)(2 + j)} = \\ &= \frac{1 \angle 90^\circ \cdot 5 \angle 53.13^\circ}{6.083 \angle 99.462^\circ \cdot 2.236 \angle 26.565^\circ \cdot 2.236 \angle 26.565^\circ} = \\ &= \frac{5 \angle 143.13^\circ}{30.413 \angle 152.6^\circ} = 0.164 \angle -9.47^\circ = 0.162 - j0.027 \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια 1)

```
>> (2+j*5)*8*exp(j*10*pi/180)/(2+j*4+2*exp(-j*40*pi/180))  
ans = 7.3368 + 6.3009i  
  
>> j*conj(3-j*4) / ( (-1+j*6)*(2+j)^2 )  
ans = 0.162162 - 0.027027i
```

Χρήσιμες σχέσεις

Σχέσεις του Euler

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \text{και} \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Για $z = x + jy = r \angle \theta$ έχουμε

$$zz^* = x^2 + y^2 = r^2$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + jy} = (re^{j\theta})^{1/2} = \sqrt{r} \angle \theta/2$$

$$z^n = (x + jy)^n = r^n \angle n\theta = r^n e^{jn\theta} = r^n [\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)]$$

$$z^{1/n} = (x + jy)^{1/n} = r^{1/n} \angle \theta/n + 2\pi k/n \quad \text{όπου} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\ln(re^{j\theta}) = \ln r + \ln e^{j\theta} = \ln r + j\theta + j2k\pi \quad \text{όπου} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Προσοχή στο τελευταίο. Το μαθηματικό υπόβαθρο ([complex logarithm](#)) μπορεί να γίνει αρκετά σύνθετο.

$$e^{\pm j\pi} = -1 \quad e^{\pm j2\pi} = 1$$

$$e^{j\pi/2} = j \quad e^{-j\pi/2} = -j$$