

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 01

Α. Δροσόπουλος

11-10-2022

1 Θεμελιώδεις έννοιες

1 Θεμελιώδεις έννοιες

- Ηλεκτρικά κυκλώματα είναι οι δομές που χρησιμοποιούμε για να «δουλέψουμε» με ηλεκτρική ενέργεια.
- Ενέργεια - τι είναι;
- Φορτίο - τι είναι;
- Μάζα - τι είναι;

Όλα τα παραπάνω είναι οντότητες που τις αποδεχόμαστε για να εξηγήσουμε αυτά που βλέπουμε γύρω μας.

- Ατομικό μοντέλο ύλης.
- Από πειραματικά δεδομένα, διακρίνουμε δύο είδη φορτίου, θετικό και αρνητικό - ομώνυμα απωθούνται - ετερώνυμα έλκονται
- Ιδιότητες Φορτίου - Κβάντωση, Διατήρηση, Αναλλοίωτο
- Ηλεκτρικές ιδιότητες σωμάτων - Αγωγοί, Μονωτές, Ημιαγωγοί, Υπεραγωγοί

- Όλα τα ηλεκτρικά φαινόμενα αναπτύσσονται από τις δυνάμεις που εξασκούνται μεταξύ φορτίων
- Πεδίο δυνάμεων
- Ηλεκτρικό πεδίο
- Μαγνητικό πεδίο

Εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

Νόμος Faraday

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t)$$

Νόμος διαρεύματος Ampère

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)$$

Νόμος Gauss

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

Ανυπαρξία μεμονωμένου
μαγνητικού φορτίου

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = 0$$

Συνέχεια

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{και} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Καταστατικές εξισώσεις

- Μοντέλο - τι είναι για μας τους μηχανικούς;
- Απλοποιημένη ή ιδανική αναπαράσταση της πραγματικότητας που μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε χρήσιμα πράγματα.
- Τι μας ενδιαφέρει εμάς;
- Η πληθώρα ηλεκτρικών συσκευών γύρω μας που λειτουργούν με ηλεκτρική ενέργεια μιλάει μόνη της.
- Υπό ορισμένες προϋποθέσεις - διακριτά στοιχεία - μας αρκούν τάση, ρεύμα και ισχύ - αλγεβρικές εξισώσεις αντί Maxwell.

[glowing pickle](#) By Elfi von Fliegenpilz

Ηλεκτρική τάση μεταξύ δύο σημείων 1 και 2 ηλεκτροστατικού πεδίου ορίζεται το πηλίκο του έργου που παράγεται ή δαπανάται από το πεδίο κατά την μετακίνηση δοκιμαστικού φορτίου q από το πρώτο σημείο στο δεύτερο, δια του φορτίου.

$$V_{12} = \frac{W_{12}}{q} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Το φυσικό νόημα που εκφράζει αυτή η σχέση είναι ότι υπάρχει «τάση» μεταξύ φορτίων να «αλληλοεξουδετερώνονται». Πιο σωστά: Να δημιουργούν ουδέτερες ηλεκτρικά δομές.

Μονάδα της ηλεκτρικής τάσης είναι το Volt (V).

- Υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία.
- Δημιουργούν γύρω τους ηλεκτρικό πεδίο (και μαγνητικό αν κινούνται).
- Το ηλεκτρικό πεδίο (και το μαγνητικό όταν υπάρχει) εξασκεί δυνάμεις στα φορτία που τα «σπρώχνει» να αλληλοεξουδετερωθούν.
- Αυτές οι δυνάμεις συσχετίζονται με το μέγεθος της ηλεκτρικής τάσης.

Ηλεκτρικό ρεύμα

Ηλεκτρικό ρεύμα = προσανατολισμένη κίνηση ηλεκτρικών φορτίων

Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος σε κάποιον αγωγό είναι η ποσότητα του φορτίου που περνά στη μονάδα του χρόνου από μια διατομή του αγωγού κάθετη προς την κατεύθυνσή του. Όταν η τάση ή το πεδίο που προκαλεί την κίνηση των φορτίων μεταβάλλονται στο χρόνο, ορίζουμε την στιγμιαία τιμή της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος ως

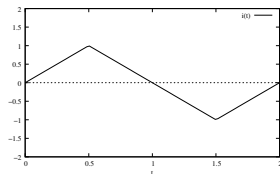
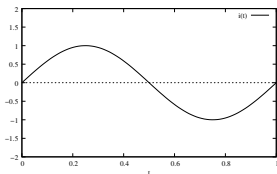
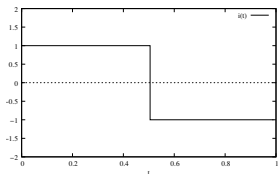
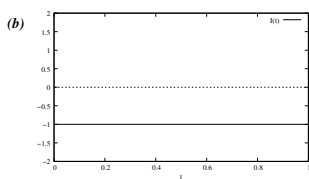
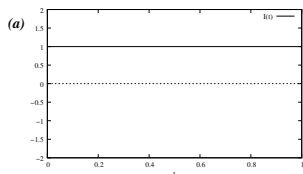
$$i = \frac{dq}{dt}$$

Όταν όμως έχουμε συνθήκες σταθερού ρεύματος τότε $I = \frac{Q}{t}$

Συμβατική φορά ρεύματος. Θετική φορά = κίνηση θετικών φορτίων

Μονάδα του ηλεκτρικού ρεύματος είναι το Ampere (A).

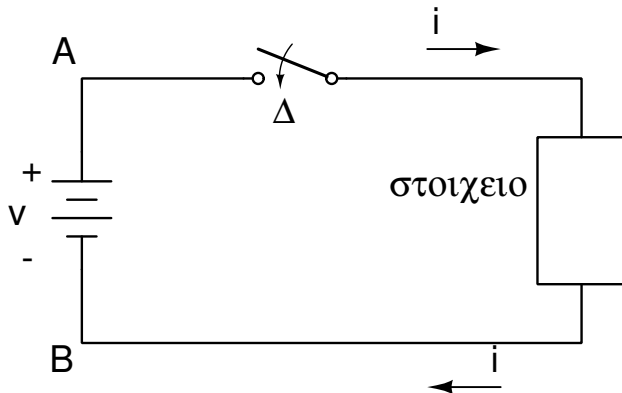
Συνεχές / Εναλλασσόμενο



Σχήμα: Παραδείγματα κυματομορφών ρεύματος στο χρόνο.

- Προϋποθέσεις για την δημιουργία ηλεκτρικού ρεύματος είναι:
 - + Να υπάρχουν φορτία ελεύθερα να κινηθούν.
 - + Να υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο / τάση που να ασκεί δυνάμεις στα ελεύθερα φορτία έτσι ώστε αυτά να κάνουν προσανατολισμένη κίνηση.
- πυκνότητα ρεύματος J

$$J = \frac{I}{S}$$



Σχήμα: Απλό μοντέλο κυκλώματος.

$$W_{AB} = q V_{AB}$$

$$dw = v \cdot dq$$

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = v \cdot i \quad P = V \cdot I$$

$$W = \int_0^t p dt = \int_0^t v \cdot i dt \quad W = P \cdot t = V \cdot I \cdot t$$

Μονάδα ισχύος Watt (W)

Μονάδα ενέργειας Joule (J) ή κιλοβατώρα (kWh)

$$1 \text{ kWh} = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ hour} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ sec} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

- Εάν περνάει ρεύμα μέσα από τους ακροδέκτες ενός στοιχείου, η τάση στα άκρα του είναι ανάλογη με το ρεύμα που το διαρρέει (νόμος Ohm).
- συντελεστής αναλογίας R η ωμική αντίσταση του στοιχείου

$$V = I \cdot R \quad \text{και} \quad R = \frac{V}{I} \quad \text{και} \quad I = \frac{V}{R}$$

- Μονάδα ωμικής αντίστασης το ohm και συμβολίζεται με Ω

$$P = V \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

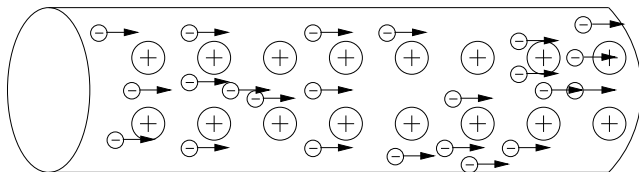
Το αντίστροφο της αντίστασης R ονομάζεται αγωγιμότητα

$$G = \frac{1}{R}$$

και έχει μονάδα το Siemens (S), όπου $1 \text{ S} = 1/\Omega$. Αν η αντίσταση δείχνει την «δυσκολία» στην κίνηση φορτίων, η αγωγιμότητα δείχνει το αντίθετο, την «ευκολία».

Με την αγωγιμότητα, ο νόμος του Ohm γίνεται

$$V = \frac{I}{G} \qquad I = V \cdot G \qquad G = \frac{I}{V}$$



$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

- ρ είναι η ειδική αντίσταση του υλικού και δεν εξαρτάται από τα γεωμετρικά στοιχεία του αγωγού αλλά από το ίδιο το υλικό και τη θερμοκρασία
- Μονάδα μέτρησης $\Omega \cdot m$
- Συχνά χρησιμοποιούνται και τα $\Omega \cdot cm$ ή $\Omega \cdot mm^2/m$

Επίδραση θερμοκρασίας

Φαινόμενο Joule

$$Pt = VIt = I^2 \cdot R \cdot t$$

Σε πρώτη προσέγγιση, η σχετική μεταβολή της αντίστασης είναι ανάλογη με τη μεταβολή της θερμοκρασίας

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \alpha \cdot \Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{R - R_0}{R_0} = \alpha \cdot \Delta\theta \quad \Rightarrow$$

$$R = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta\theta) \quad \Rightarrow \quad R = R_0 \left[1 + \alpha \cdot (\theta - \theta_0) \right]$$

όπου θ_0 , R_0 είναι η αρχική θερμοκρασία και αρχική αντίσταση αντίστοιχα, και θ , R η τελική θερμοκρασία και τελική αντίσταση αντίστοιχα.

Πίνακας: Θεμελιώδεις SI μονάδες

φυσικό μέγεθος	μονάδα	σύμβολο
μήκος	metre	m
μάζα	kilogram	kg
χρόνος	second	s
ένταση ηλ. ρεύματος	ampère	A
θερμοκρασία	kelvin	K
φωτεινή ένταση	candela	cd
ποσότητα ύλης	mole	mol

SI brochure p. 132

Πίνακας: Βασικά μεγέθη στα Κυκλώματα

μέγεθος	σύμβολο μεγέθους	μονάδα	σύμβολο μονάδας
φορτίο	q, Q	Coulomb	C
ρεύμα	i, I	Ampère	A
τάση	v, V	Volt	V
ισχύς	p, P	Watt	W
ενέργεια	w, W	Joule	J

Πίνακας: Προθέματα μονάδων SI

όνομα	σύμβολο	δύναμη του 10
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

- Σύστημα μονάδων SI
- Νούμερα πολύ μεγάλα ή πολύ μικρά
- Δυνάμεις του 10
- floating point, scientific, engineering notation
- σημαντικά ψηφία
- Ασκήσεις set1.pdf

Άσκηση 1.6

Κυλινδρικός αγωγός με διάμετρο $d = 2.5 \text{ mm}$ διαρρέεται από συνεχές ρεύμα $I = 5 \text{ A}$. Ζητούνται:

- Η ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου που περνάει από μια διατομή του αγωγού σε χρόνο $t = 3 \text{ min}$.
- Ο αριθμός των ελευθέρων ηλεκτρονίων που περνάνε από την ίδια διατομή στον ίδιο χρόνο.
- Η πυκνότητα ρεύματος.

Δίδεται το φορτίο του ηλεκτρονίου $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Άσκηση 1.6 - Λύση

Έχουμε

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = I \cdot t = 5 \cdot 3 \cdot 60 = 900 \text{ C}$$

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{900}{1.6 \times 10^{-19}} = 5.625 \times 10^{21} \text{ ηλεκτρόνια}$$

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{(\pi/4) d^2} = \frac{4 \cdot I}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 5}{\pi (2.5 \times 10^{-3})^2} = 1.019 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

Άσκηση 1.6 - Λύση

```
octave:1> d=2.5e-3; I=5; t=3*60; e=1.6e-19;
```

```
octave:2> Q=I*t
```

```
Q = 900
```

```
octave:3> N=Q/e
```

```
N = 5.6250e+21
```

```
octave:4> S=pi*d^2/4
```

```
S = 4.9087e-06
```

```
octave:5> J=I/S
```

```
J = 1.0186e+06
```

Άσκηση 1.7

Κυλινδρικό σύρμα από χρωμονικελίνη με διάμετρο $d = 1.8 \text{ mm}$, μήκος $\ell = 2.3 \text{ m}$ και ειδική αντίσταση $\rho = 100 \text{ } \mu\Omega \cdot \text{cm}$, τροφοδοτείται από πηγή σταθερής τάσης $V = 18 \text{ V}$. Ποια είναι η ένταση και η πυκνότητα του ρεύματος που το διαρρέει;

Άσκηση 1.7 - Λύση

Η διατομή του σύρματος είναι

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1.8 \times 10^{-3})^2}{4} = 2.545 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Η αντίσταση είναι

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = 100 \times 10^{-6} \times 10^{-2} \frac{2.3}{2.545 \times 10^{-6}} = 0.904 \ \Omega$$

και

$$I = \frac{U}{R} = \frac{18}{0.904} = 19.915 \text{ A}$$

$$J = \frac{I}{S} = \frac{19.915}{2.545 \times 10^{-6}} = 7.825 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

Άσκηση 1.7 - Λύση

```
octave:6> d=1.8e-3; ell=2.3; rho=100*1e-6*1e-2; V=18;
octave:7> S=pi*d^2/4 % διατομή σύρματος
S = 2.5447e-06
octave:8> R=rho*ell/S % αντίσταση
R = 0.9038
octave:9> I=V/R % ρεύμα
I = 19.915
octave:10> J=I/S % πυκνότητα ρεύματος
J = 7.8261e+06
```

Άσκηση 1.8

Ποιά είναι η διατομή και το μήκος ενός σύρματος, από το οποίο είναι κατασκευασμένη μια αντίσταση, όταν καταναλώνει ισχύ $P = 2.3 \text{ kW}$ σε δίκτυο με τάση 220 V ; Η ειδική αντίσταση του σύρματος είναι $\rho = 1.7 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ και η επιτρεπόμενη πυκνότητα ρεύματος είναι $J = 3.5 \text{ A/mm}^2$.

Άσκηση 1.8 - Λύση

Έχουμε: $P = U \cdot I \Rightarrow I = P/U = 2.3 \times 10^3 / 220 = 10.455 \text{ A}$.

Επίσης: $R = U/I = 220/10.455 = 21.043 \text{ } \Omega$.

$$J = \frac{I}{S} \Rightarrow S = \frac{I}{J} = \frac{10.455}{3.5 \times 10^6} = 2.987 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Και,

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \Rightarrow \ell = \frac{S \cdot R}{\rho} = \frac{2.987 \times 10^{-6} \cdot 21.043}{1.7 \times 10^{-6}} = 36.975 \text{ m}$$

Άσκηση 1.8 - Λύση

```
octave:11> P=2.3e3; V=220; rho=1.7*(1e-3)^2; J=3.5/(1e-3)^2;
octave:12> I=P/V % ρεύμα
I = 10.455
octave:13> R=V/I % αντίσταση
R = 21.043
octave:14> S=I/J % διατομή αγωγού
S = 2.9870e-06
octave:15> ell=R*S/rho % μήκος αγωγού
ell = 36.975
```


Άσκηση 1.9

Λαμπτήρας πυρακτώσεως λειτουργεί σε τάση $V = 220 \text{ V}$. Όταν ο λαμπτήρας βρίσκεται στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας (θερμική ισορροπία), μέσα από το νήμα του περνάει ρεύμα $I = 200 \text{ mA}$. Να βρεθούν:

- Η αντίσταση του λαμπτήρα στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας.
- Η αντίσταση του λαμπτήρα σε θερμοκρασία 20°C , αν η θερμοκρασία λειτουργίας είναι 2225°C και ο θερμοκρασιακός συντελεστής $\alpha = 0.005^\circ\text{C}^{-1}$.
- Η ένταση I_0 , όταν ο λαμπτήρας πρωτοσυνδεθεί και βρίσκεται ακόμα σε θερμοκρασία δωματίου 20°C . Τι παρατηρείτε σε σχέση με την μόνιμη κατάσταση λειτουργίας;

Άσκηση 1.9 - Λύση

Η αντίσταση του λαμπτήρα στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας είναι $R = U/I = 220/(200 \times 10^{-3}) = 1100 \Omega$, και έχουμε

$$R = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta\theta) \Rightarrow R_0 = \frac{R}{1 + \alpha \cdot \Delta\theta} = \frac{1100}{1 + 0.005 \cdot (2225 - 20)} = 91.476 \Omega$$

$$I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{220}{91.476} = 2.405 \text{ A}$$

Παρατηρούμε ότι όταν πρωτοσυνδεθεί ο λαμπτήρας η αντίστασή του είναι $R/R_0 = 12.025$ φορές μικρότερη από την αντίσταση στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας και η ένταση ρεύματος $I_0/I = 12.025$ φορές μεγαλύτερη.

Άσκηση 1.9 - Λύση

```
octave:16> V=220; I=200e-3; T0=20; T=2225; a=0.005;
octave:17> R=V/I % αντίσταση στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας
R = 1100
octave:18> R0=R/(1+a*(T-T0)) % αντίσταση στην αρχική θερμοκρασία
R0 = 91.476
octave:19> I0=V/R0 % ρεύμα στην αρχική θερμοκρασία
I0 = 2.4050
octave:20> R/R0
ans = 12.025
octave:21> I0/I
ans = 12.025
```

Άσκηση 1.16

Δίδεται χάλκινος αγωγός μήκους $\ell = 30 \text{ cm}$, διατομής $S = 82 \text{ mm}^2$ και ειδικής αντίστασης $\rho_{20^\circ\text{C}} = 0.0175 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ σε θερμοκρασία 20°C . Ποια είναι η αντίσταση του αγωγού στις θερμοκρασίες 20°C και 45°C αντίστοιχα όταν ο θερμοκρασιακός συντελεστής είναι $\alpha = 0.004 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$;

Άσκηση 1.16 - Λύση

Η αντίσταση στους 20 °C είναι:

$$R_{20} = \rho_{20} \frac{\ell}{S} = 0.0175 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \frac{0.30 \text{ m}}{82 \text{ mm}^2} = 6.402 \times 10^{-5} \Omega$$

Η αντίσταση στους 45 °C είναι:

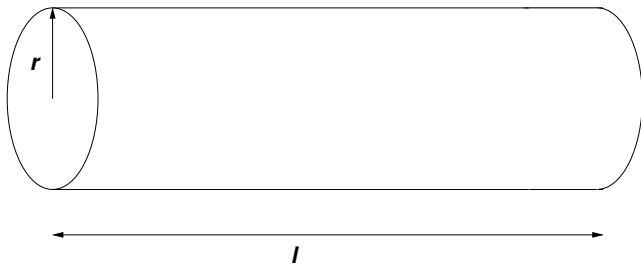
$$R_{45} = R_{20}[1 + \alpha_{20}(45 - 20)] = 6.402 \times 10^{-5}[1 + 0.004 \cdot 25] = 1.1 R_{20} = 7.043 \times 10^{-5} \Omega$$

Άσκηση 1.16 - Λύση

```
octave:22> ell=30e-2; S=82*(1e-3)^2; rho20=0.0175*(1e-3)^2;  
           T0=20; T=45; a=0.004;  
octave:23> R20=rho20*ell/S % αντίσταση στους 20 C  
R20 = 6.4024e-05  
octave:24> R45=R20*(1+a*(T-T0)) % αντίσταση στους 45  
R45 = 7.0427e-05
```

Άσκηση 1.17

Το παρακάτω σχήμα παριστά τμήμα ενός ηλεκτρικού αγωγού με ειδική αντίσταση $\rho = 1.78 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ και θερμοκρασιακό συντελεστή $\alpha = 3.89 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Δίδονται $r = 0.85 \text{ cm}$ και $\ell = 2.5 \text{ m}$. Ποια είναι η ηλεκτρική του αντίσταση; Πώς μεταβάλλεται αυτή (απόλυτος μεταβολή και σχετική %) όταν η θερμοκρασία αυξηθεί κατά $70 \text{ }^\circ\text{C}$;



Άσκηση 1.17 - Λύση

Η ηλεκτρική αντίσταση είναι:

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = 1.78 \times 10^{-8} \frac{2.5}{\pi \cdot 0.85^2 \cdot 10^{-4}} = 1.96 \times 10^{-4} \Omega$$

Με τη μεταβολή της θερμοκρασίας

$$R(\theta_2) = R(\theta_1)(1 + \alpha\Delta\theta) = 1.96 \times 10^{-4}(1 + 3.89 \times 10^{-3}70) = 2.494 \times 10^{-4} \Omega$$

Η απόλυτος μεταβολή είναι

$$\Delta R = R(\theta_2) - R(\theta_1) = (2.494 - 1.96) \times 10^{-4} = 0.534 \times 10^{-4} \Omega$$

και η % σχετική

$$\frac{\Delta R}{R(\theta_1)} \cdot 100 = \frac{0.534 \times 10^{-4}}{1.96 \times 10^{-4}} \cdot 100 = 27.24\%$$

Άσκηση 1.17 - Λύση

```
octave:25> rho=1.78e-8; a=3.89e-3; r=0.85e-2; ell=2.5; DT=70;
octave:26> S=pi*r^2 % διατομή
S = 2.2698e-04
octave:27> R=rho*ell/S % αντίσταση
R = 1.9605e-04
octave:28> R2=R*(1+a*DT) % αντίσταση στην μεγαλύτερη θερμοκρασία
R2 = 2.4944e-04
octave:29> DR = R2-R % η απόλυτος μεταβολή
DR = 5.3385e-05
octave:30> DR*100/R % η σχετική μεταβολή
ans = 27.230
```

Για κάποια κατασκευή που πρέπει να κάνετε έχετε τις παρακάτω προδιαγραφές για σύρμα χαλκού με ειδική αντίσταση $\rho = 1.678 \mu\Omega \cdot \text{cm}$. Υπολογίστε τις αντίστοιχες ηλεκτρικές αντιστάσεις.

Πίνακας: Προδιαγραφές

AWG gauge	διάμετρος mm	μήκος m
3	5.827	500
7	3.665	700
14	1.628	2200

Άσκηση - Λύση

```
octave:31> rho=1.678e-8; d=[5.827 3.665 1.628]*1e-3;  
           ell=[500 700 2200];
```

```
octave:32> R=rho*ell./(pi*d.^2/4) % οι αντιστάσεις
```

```
R =
```

```
0.3146    1.1134   17.7344
```