SEARS & ZEMANSKY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ με Σύγχρονη Φυσική

3η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Τόμος Β

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΟΠΤΙΚΗ - ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

YOUNG ΚΑΙ FREEDMAN

Θ.Η. Αλεξόπουλος, ΕΜΠ
Ι.Α. Αρβανιτίδης, ΑΠΘ
Α.Α. Αργυρίου, Π. Πατρών
Ε.Α. Δρης, ΕΜΠ
Η.Σ. Ζουμπούλης, ΕΜΠ
Η.Κ. Κατσούφης, ΕΜΠ
Γ.Α. Κουρούκλης, ΑΠΘ
Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, ΕΜΠ
Μ.Ν. Πιζάνιας, Π. Πατρών
Ι.Π. Ρίζος, Π. Ιωαννίνων
Θ.Ν. Τομαράς, Π. Κρήτης
Κ. Χριστοδουλίδης, ΕΜΠ

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

3.ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL

ΕΠΙΛΟΓΗ, ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
Ηλίας Κατσούφης

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ:
Τζένη Πάλμου

Απόδοση βιβλίου στην Ελληνική γλώσσα και Επιμέλεια (αλφαβητικά):

Θ.Η. Αλεξόπουλος, *Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Ι.Α. Αρβανιτίδης, *Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Α.Α. Αργυρίου, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ε.Α. Δρης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Σ. Ζουμπούλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Κ. Κατσούφης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Γ.Α. Κουρούκλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Χημικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, *τ. Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Μ.Ν. Πιζάνιας, *Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ι.Π. Ρίζος, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων*

Θ.Ν. Τομαράς, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης*

Κ. Χριστοδουλίδης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 30

ΕΠΑΓΩΓΗ

ΕΠΑΓΩΓΗ

Ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα σε ένα πηνίο επάγει μια ΗΕΔ σε ένα άλλο γειτονικό πηνίο. Η σύζευξη των πηνίων περιγράφεται από την **αμοιβαία επαγωγή** τους. **Ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα σε πηνίο επάγει επίσης μια ΗΕΔ σε αυτό το ίδιο το πηνίο.** Ένα τέτοιο πηνίο ονομάζεται **αυτεπαγωγή**, και η σχέση του ρεύματος προς την ΗΕΔ περιγράφεται από την **επαγωγή** του πηνίου (ονομαζόμενη επίσης αυτεπαγωγή). Εάν ένα πηνίο διαρρέεται αρχικά από ρεύμα, τότε ελευθερώνεται ενέργεια όταν το ρεύμα ελαττώνεται· αυτή η ενέργεια που ελευθερώνεται ήταν αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο που προκαλούσε το ρεύμα το οποίο διέρρεε αρχικά το πηνίο.

Στο Σχ. 30.1, ένα ρεύμα i_1 στο πηνίο 1 δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο B, και κάποιες από τις (γαλάζιες) δυναμικές γραμμές διαπερνούν το πηνίο 2. Συμβολίζουμε τη μαγνητική ροή που περνά από κάθε σπείρα του πηνίου 2, που προκαλείται από το ρεύμα i_1 στο πηνίο 1, με Φ_{B2}.

Το μαγνητικό πεδίο είναι ανάλογο προς το i_1, συνεπώς η Φ_{B2} είναι επίσης ανάλογη προς το i_1. Όταν το i_1 μεταβάλλεται, η Φ_{B2} μεταβάλλεται· αυτή η μεταβαλλόμενη ροή επάγει μια ΗΕΔ $\mathcal{E}_2$ στο πηνίο 2 που δίνεται από τη σχέση, σύμφωνα με το νόμο του Faraday:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt} \qquad (30.1)$$

Θα μπορούσαμε να παραστήσουμε την αναλογία των Φ_{B2} και i_1, εισάγοντας μια σταθερά αναλογίας M_{21}, που **ονομάζεται αμοιβαία επαγωγή των δύο πηνίων,** οπότε γράφουμε:

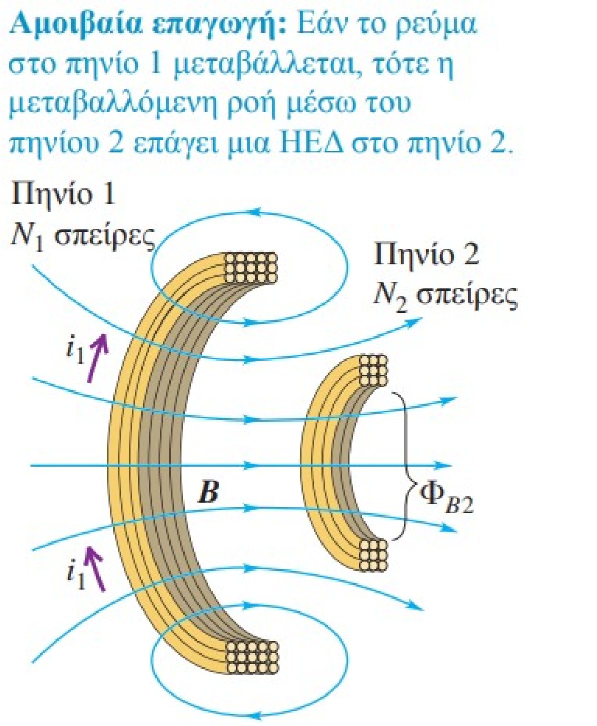
$$N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1 \qquad (30.2)$$

όπου Φ_{B2} είναι η ροή μέσω μίας μόνο σπείρας του πηνίου 2.
Οπότε ξαναγράφουμε την Εξ. (30.1) ως:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt} \qquad (30.3)$$

Δηλαδή μια μεταβολή στο ρεύμα i_1 στο πηνίο 1 επάγει μια ΗΕΔ στο πηνίο 2 που είναι ευθέως ανάλογη προς τον ρυθμό μεταβολής του i_1.

30.1 Ένα ρεύμα i_1 στο πηνίο 1 δημιουργεί μια μαγνητική ροή μέσω του πηνίου 2.



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

Μπορούμε να επαναλάβουμε τη συζήτησή μας στην αντίθετη περίπτωση, κατά την οποία ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα i_2 στο πηνίο 2 προκαλεί μια μεταβαλλόμενη ροή Φ_{B1} και μια ΗΕΔ $\mathcal{E}_1$ στο πηνίο 1. Προκύπτει ότι η αντίστοιχη σταθερά M_{12} είναι **πάντοτε ίση** με τη M_{21}, ακόμη και όταν τα δύο πηνία δεν είναι πανομοιότυπα και η ροή μέσα από αυτά δεν είναι η ίδια. Ονομάζουμε αυτήν την κοινή τιμή απλώς αμοιβαία επαγωγή, που συμβολίζεται με M χωρίς δείκτες· χαρακτηρίζει πλήρως την επαγόμενη ΗΕΔ από την αλληλεπίδραση των δύο πηνίων. Τότε:

Ρυθμός μεταβολής του ρεύματος στο πηνίο 1 — Ρυθμός μεταβολής του ρεύματος στο πηνίο 2

Επαγόμενη ΗΕΔ στο πηνίο 2 — Επαγόμενη ΗΕΔ στο πηνίο 1

Αμοιβαία επαγόμενες ΗΕΔ:

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \tag{30.4}$$

Αμοιβαία επαγωγή των πηνίων 1 και 2

Τα αρνητικά πρόσημα στις Εξ. (30.4) αντανακλούν τον **νόμο του Lenz**. Η πρώτη εξίσωση αναφέρει ότι μια μεταβολή στο ρεύμα του πηνίου 1 προκαλεί μεταβολή στη ροή μέσω του πηνίου 2, επάγοντας μια ΗΕΔ στο πηνίο 2 που αντιτίθεται στη μεταβολή της ροής· στη δεύτερη εξίσωση οι ρόλοι των δύο πηνίων εναλλάσσονται.

Από την 30.2 η αμοιβαία επαγωγή M είναι:

Σπείρες στο πηνίο 2 — Μαγνητική ροή μέσα από κάθε σπείρα του πηνίου 2 — Σπείρες στο πηνίο 1 — Μαγνητική ροή μέσα από κάθε σπείρα του πηνίου 1

Αμοιβαία επαγωγή των πηνίων 1 και 2

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \tag{30.5}$$

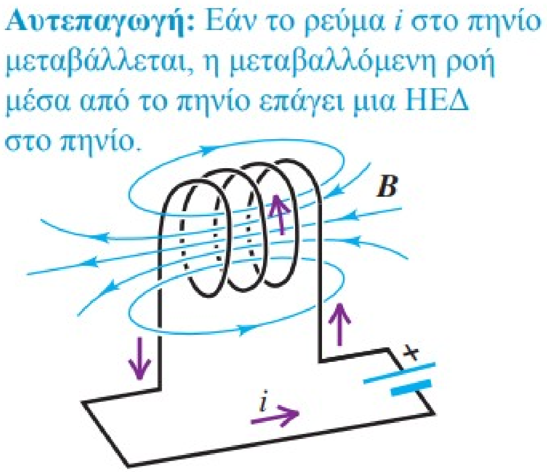
Ρεύμα στο πηνίο 1 (προκαλεί ροή μέσα από το πηνίο 2) — Ρεύμα στο πηνίο 2 (προκαλεί ροή μέσα από το πηνίο 1)

Προσοχή: Σημειώστε ότι μόνο ένα **χρονικά μεταβαλλόμενο** ρεύμα σε ένα πηνίο μπορεί να επάγει μια ΗΕΔ, και συνεπώς ένα ρεύμα, σε ένα δεύτερο πηνίο. Η μονάδα αμοιβαίας επαγωγής στο σύστημα SI ονομάζεται **henry** (χένρι, 1 H), προς τιμήν του Αμερικανού Joseph Henry (Τζόζεφ Χένρι, 1797-1878), ενός από αυτούς που ανακάλυψαν την ηλεκτρομαγνητική επαγωγή.

$$1\ \text{H} = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{V}\cdot\text{s/A} = 1\ \Omega\cdot\text{s} = 1\ \text{J/A}^2$$

ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΗΝΙΑ I

30.4 Το ρεύμα i στο κύκλωμα προκαλεί ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ στο πηνίο και ως εκ τούτου μια ροή μέσω του πηνίου.



Μια τέτοια ΗΕΔ ονομάζεται **ΗΕΔ αυτεπαγωγής**. Σύμφωνα με τον νόμο του Lenz, μια ΗΕΔ αυτεπαγωγής πάντοτε αντιτίθεται προς τη μεταβολή του ρεύματος που προκάλεσε την ΗΕΔ και έτσι τείνει να κάνει πιο δύσκολη την εμφάνιση μεταβολών στο ρεύμα. Γι’ αυτόν τον λόγο, οι ΗΕΔ αυτεπαγωγής μπορούν να έχουν μεγάλη σπουδαιότητα οποτεδήποτε υπάρχει ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα.

Κατ’ αναλογία προς την Εξ. (30.5) ορίζουμε την αυτεπαγωγή L του κυκλώματος ως:

Αριθμός σπειρών στο πηνίο

Αυτεπαγωγή (ή **επαγωγή**) ενός πηνίου

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad (30.6)$$

Ροή λόγω του ρεύματος μέσα από κάθε σπείρα του πηνίου

Ρεύμα στο πηνίο

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με την αμοιβαία επαγωγή, η αυτεπαγωγή ονομάζεται απλά **επαγωγή**.

Από τον νόμο του Faraday για ένα πηνίο με N σπείρες, η ΗΕΔ αυτεπαγωγής είναι:

$$\mathcal{E} = -Nd\Phi_B/dt$$

Αναδιατάσσοντας την Εξ. (30.6) και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο:

Επαγωγή του κυκλώματος

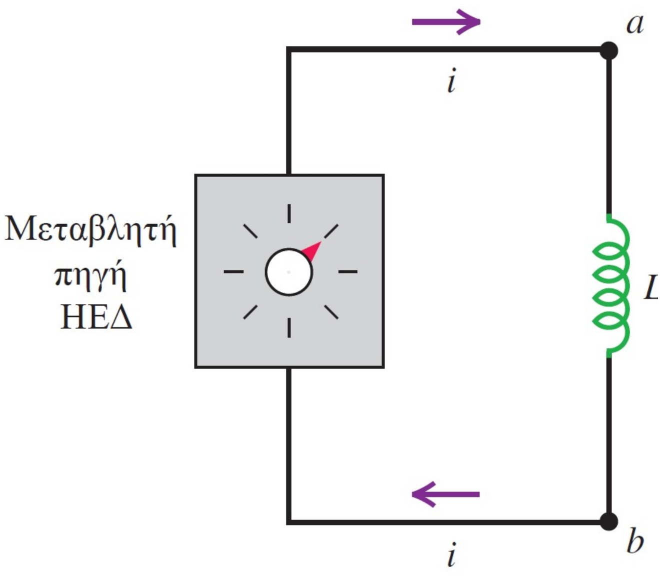
ΗΕΔ αυτεπαγωγής σε ένα κύκλωμα

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad (30.7)$$

Ρυθμός μεταβολής του ρεύματος στο κύκλωμα

Το αρνητικό πρόσημο στην Εξ. (30.7) αντανακλά τον νόμο του Lenz· σημαίνει ότι η ΗΕΔ αυτεπαγωγής σε ένα κύκλωμα αντιστέκεται σε κάθε μεταβολή του ρεύματος αυτού του κυκλώματος.

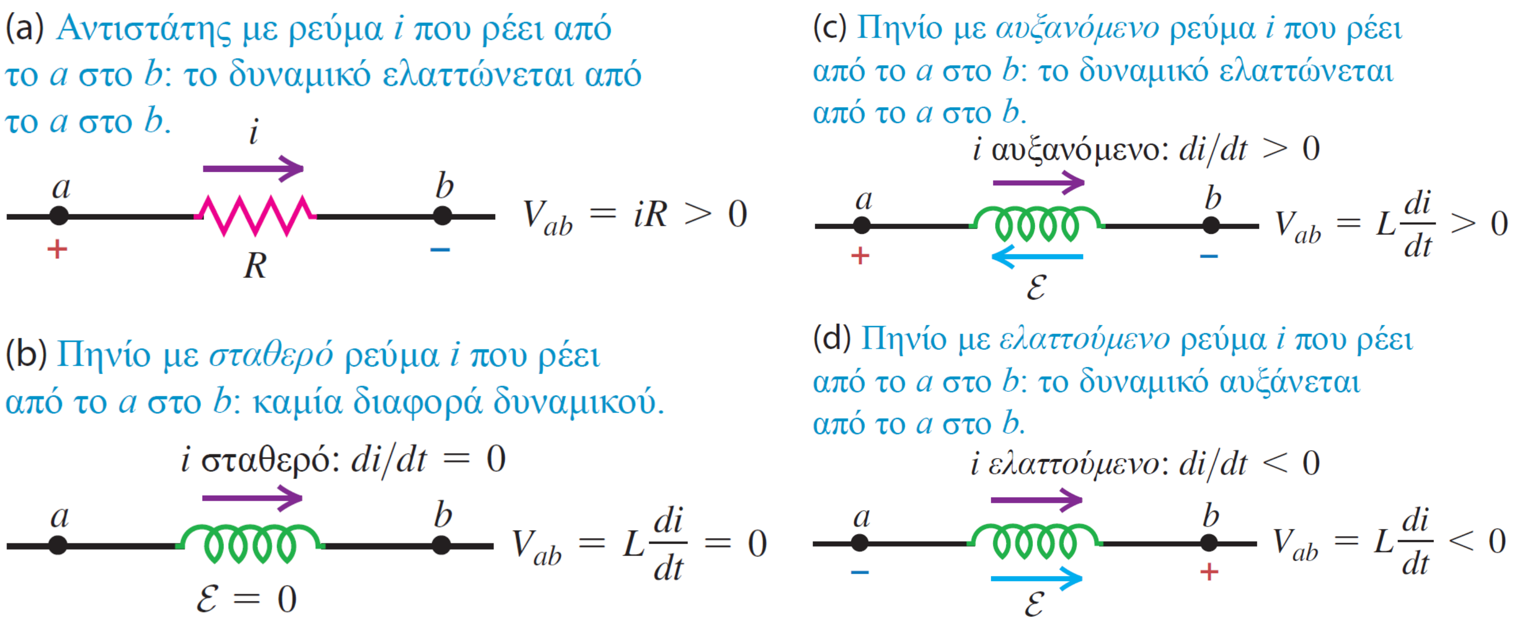
30.5 Ένα κύκλωμα που περιέχει μια πηγή ΗΕΔ και ένα πηνίο. Η πηγή είναι μεταβλητή, οπότε το ρεύμα i και ο ρυθμός μεταβολής του di/dt μπορεί να μεταβάλλονται.



Η Εξ. (30.8) δίνει τη διαφορά δυναμικού στα άκρα ενός πηνίου σε ένα κύκλωμα

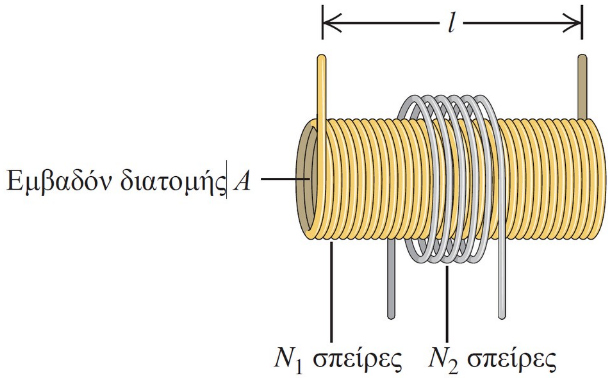
$$V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{di}{dt} \tag{30.8}$$

30.6 (a) Η διαφορά δυναμικού στα άκρα ενός αντιστάτη εξαρτάται από το ρεύμα, ενώ (b), (c), (d) η διαφορά δυναμικού στα άκρα ενός πηνίου εξαρτάται από τον ρυθμό μεταβολής του ρεύματος.



Μερικές εφαρμογές – Παραδείγματα

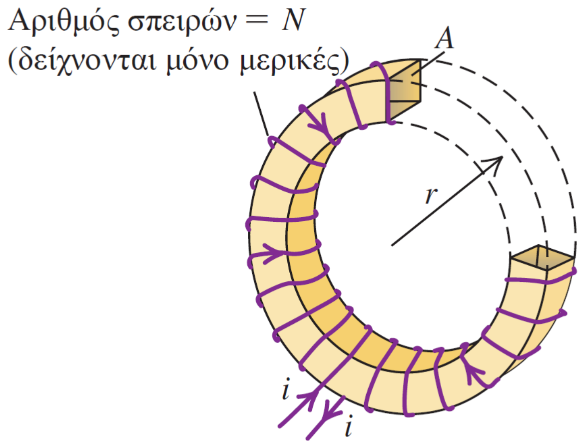
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.1
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΜΟΙΒΑΙΑΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ
Σε μια μορφή του πηνίου Tesla (μια γεννήτρια υψηλής τάσης που είναι δημοφιλής στα μουσεία επιστημών), ένα μακρύ σωληνοειδές πηνίο μήκους l και με εμβαδόν διατομής A φέρει πολύ πυκνά περιτυλιγμένες N_1 σπείρες σύρματος. Ένα πηνίο με N_2 σπείρες το περιβάλλει στο κέντρο του. Να βρείτε την αμοιβαία επαγωγή M.



Εφαρμογή Πηνία, Μετάδοση Ηλεκτρικής Ενέργειας και Κεραυνοί Εάν ένας κεραυνός χτυπήσει μέρος ενός συστήματος μετάδοσης ηλεκτρικής ενέργειας, προκαλεί ξαφνική αύξηση της τάσης που μπορεί να βλάψει τα εξαρτήματα του συστήματος καθώς και οτιδήποτε συνδέεται με αυτό το σύστημα (για παράδειγμα, τις οικιακές συσκευές). Για να ελαχιστοποιηθούν αυτές οι επιπτώσεις, ενσωματώνονται μεγάλα πηνία στο σύστημα μετάδοσης. Αυτά χρησιμοποιούν την αρχή ότι ένα πηνίο αντιστέκεται και καταστέλλει οποιαδήποτε ταχεία μεταβολή στο ρεύμα.

Υπολογισμός αυτεπαγωγής

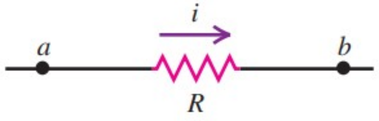
30.8 Προσδιορισμός της αυτεπαγωγής ενός πυκνά περιτυλιγμένου τοροειδούς σωληνοειδούς (δακτυλιοειδούς) πηνίου. Για σαφήνεια, μόνο μερικές σπείρες του περιτυλίγματος φαίνονται. Μέρος του τόρου έχει αποκοπεί για να φανεί η διατομή A και η ακτίνα r.



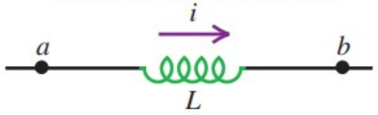
30.7 Αυτοί οι λαμπτήρες φθορισμού συνδέονται σε σειρά με ένα πηνίο, ή σταθεροποιητή, το οποίο βοηθά να διατηρείται το ρεύμα μέσω των λαμπτήρων.

30.9 Ένας αντιστάτης είναι ένα στοιχείο εντός του οποίου η ενέργεια καταναλώνεται χωρίς δυνατότητα ανάκτησης. Αντιθέτως, η ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα πηνίο το οποίο διαρρέεται από ρεύμα μπορεί να ανακτηθεί όταν το ρεύμα ελαττώνεται προς το μηδέν.

Αντιστάτης με ρεύμα i: η ενέργεια *καταναλώνεται*.



Πηνίο με ρεύμα i: η ενέργεια *αποθηκεύεται*.



30.10 Η ενέργεια που απαιτείται για την ανάφλεξη ενός μπουζί αυτοκινήτου προέρχεται από την ενέργεια μαγνητικού πεδίου που αποθηκεύεται στο πηνίο ανάφλεξης.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Αποθηκευμένη ενέργεια σε ένα πηνίο

Ο ρυθμός P με τον οποίο η ενέργεια παρέχεται προς το πηνίο (ίσος με την στιγμιαία ισχύ που παρέχεται από την εξωτερική πηγή) είναι:

$$P = V_{ab} i = L i \frac{di}{dt} \qquad \text{οπότε} \qquad dU = L i \, di$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ολική εισρέουσα ενέργεια U που απαιτείται για να δημιουργηθεί ένα τελικό ρεύμα I σε ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L εάν το αρχικό ρεύμα είναι μηδέν:

Αποθηκευμένη ενέργεια σε ένα πηνίο

$$U = L \int_0^I i \, di = \frac{1}{2} L I^2 \qquad (30.9)$$

Επαγωγή

Τελικό ρεύμα

Ολοκλήρωμα από την αρχική τιμή (μηδέν) του στιγμιαίου ρεύματος έως την τελική τιμή

Πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας

Η ενέργεια σε ένα πηνίο ουσιαστικά αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του, ακριβώς όπως η ενέργεια ενός πυκνωτή αποθηκεύεται στο ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του.

Πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας στο κενό

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (30.10)$$

Μέτρο του μαγνητικού πεδίου

Μαγνητική σταθερά

Αυτό είναι το μαγνητικό ανάλογο της ενέργειας ανά μονάδα όγκου σε ένα ηλεκτρικό πεδίο στο κενό, $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

Πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας σε ένα υλικό

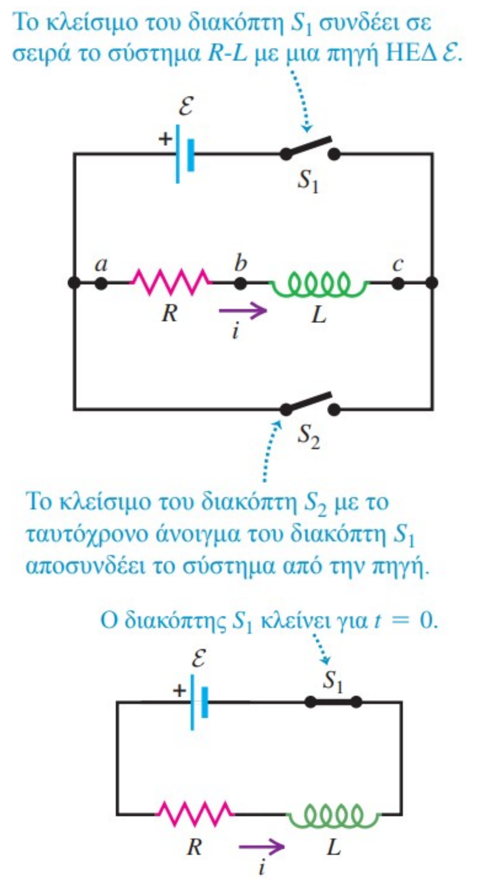
$$u = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (30.11)$$

Μέτρο του μαγνητικού πεδίου

Μαγνητική διαπερατότητα του υλικού

Αποδεικνύεται ότι αυτή είναι η ορθή έκφραση για την ενέργεια ανά μονάδα όγκου που συνδέεται με οποιαδήποτε διάταξη μαγνητικού πεδίου σε ένα υλικό σταθερής διαπερατότητας.

30.11 Ένα κύκλωμα R-L.



ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ R-L I

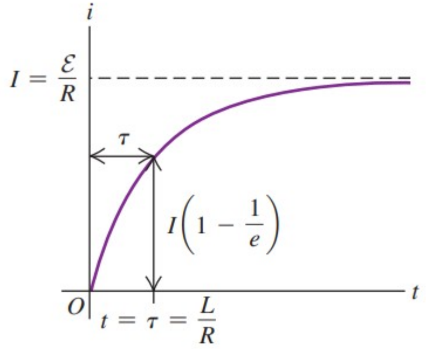
Αύξηση του Ρεύματος σε Ένα Κύκλωμα R-L

Υποθέστε ότι και οι δύο διακόπτες είναι ανοιχτοί και ότι σε κάποια αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνουμε τον διακόπτη S_1. Έστω ότι i είναι το ρεύμα σε κάποια χρονική στιγμή t μετά το κλείσιμο του διακόπτη S_1 και έστω ότι di/dt είναι ο ρυθμός μεταβολής του εκείνη τη στιγμή. Οι διαφορές δυναμικού υ_{ab} (στα άκρα του αντιστάτη) και υ_{bc} (στα άκρα του πηνίου) είναι:

$$\upsilon_{ab} = iR \quad \text{και} \quad \upsilon_{bc} = L\frac{di}{dt}$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα βρόχου του Kirchhoff, αρχίζοντας από τον αρνητικό πόλο και προχωρώντας στον βρόχο με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού:

$$\mathcal{E} - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \qquad (30.12)$$



30.12 Γραφική παράσταση του i συναρτήσει του t κατά την αύξηση του ρεύματος σε ένα κύκλωμα R-L με μία ΗΕΔ σε σειρά. Το τελικό ρεύμα είναι $I = E/R$· έπειτα από μια σταθερά χρόνου τ, το ρεύμα είναι το $1 - 1/e$ αυτής της τιμής.

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε:

$$\int_0^i \frac{di'}{i' - (\mathcal{E}/R)} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt'$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \qquad (30.14)$$

Σταθερά χρόνου για ένα κύκλωμα R-L $\quad \tau = \frac{L}{R}$ (L: Επαγωγή, R: Αντίσταση) (30.16)

Σε χρόνο ίσο με 2τ, το ρεύμα φθάνει στο 86 % της τελικής του τιμής· σε χρόνο 5τ, στο 99,3 % και σε 10τ στο 99,995 %.

Η **ενεργειακή θεώρηση** μας προσφέρει πρόσθετη κατανόηση της συμπεριφοράς ενός κυκλώματος R-L. Πολλαπλασιάζοντας με i την (30.12)

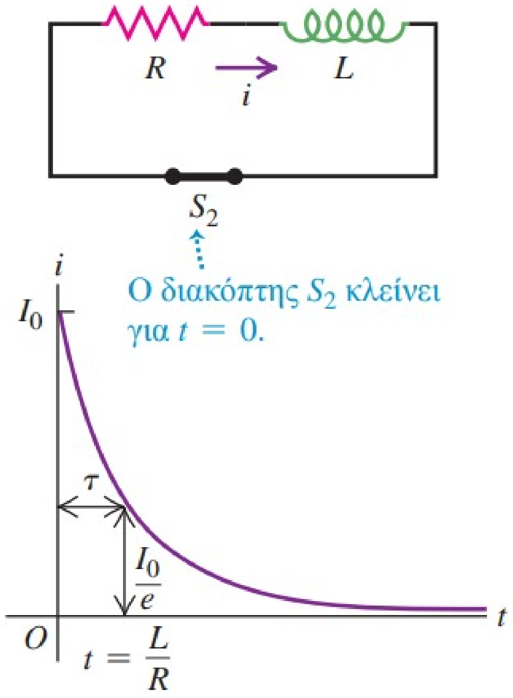
$$\mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt} \qquad (30.17)$$

Από την ισχύ $\mathcal{E}i$ που παρέχεται από την πηγή, ένα μέρος (i^2R) καταναλώνεται στον αντιστάτη και ένα άλλο μέρος ($Li\ di/dt$) αποθηκεύεται στο πηνίο. Κάτι ανάλογο με την ανάλυση ισχύος για τη φόρτιση ενός πυκνωτή.

ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ R-L II

Απόσβεση του Ρεύματος σε Ένα Κύκλωμα R-L

30.13 Γραφική παράσταση του i συναρτήσει του t κατά την απόσβεση του ρεύματος σε ένα κύκλωμα R-L. Έπειτα από μια σταθερά χρόνου τ, το ρεύμα είναι το $1/e$ της αρχικής του τιμής.



Υποθέστε τώρα ότι ο διακόπτης S_1 στο κύκλωμα του Σχ. 30.11 έχει κλείσει για αρκετό χρόνο ώστε το ρεύμα να έχει φθάσει στην τιμή I_0. Μηδενίζουμε το χρονόμετρό μας για να ορίσουμε ξανά την αρχή του χρόνου, κλείνουμε τον διακόπτη S_2 τη στιγμή $t = 0$, παρακάμπτοντας την μπαταρία. (Την ίδια στιγμή πρέπει να ανοίξουμε τον S_1 για να προφυλάξουμε την μπαταρία.) Το ρεύμα μέσω των R και L δεν μηδενίζεται ακαριαία αλλά φθίνει ομαλά, όπως φαίνεται στο Σχ. 30.13.

Η εξίσωση βρόχου του αντίστοιχου κανόνα του Kirchhoff βρίσκεται από την Εξ. (30.12) με απλή παράλειψη του όρου $\mathcal{E}$.

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία βρίσκουμε:

$$i = I_0 e^{-(R/L)t} \qquad (30.18)$$

όπου I_0 είναι το αρχικό ρεύμα τη στιγμή $t = 0$. Η σταθερά χρόνου, $\tau = L/R$, είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ελαττωθεί το ρεύμα στο $1/e$, ή περίπου στο 37 % της αρχικής του τιμής.

Η ενέργεια που απαιτείται για να διατηρείται το ρεύμα κατά τη διάρκεια της απόσβεσης παρέχεται από την αποθηκευμένη ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου.

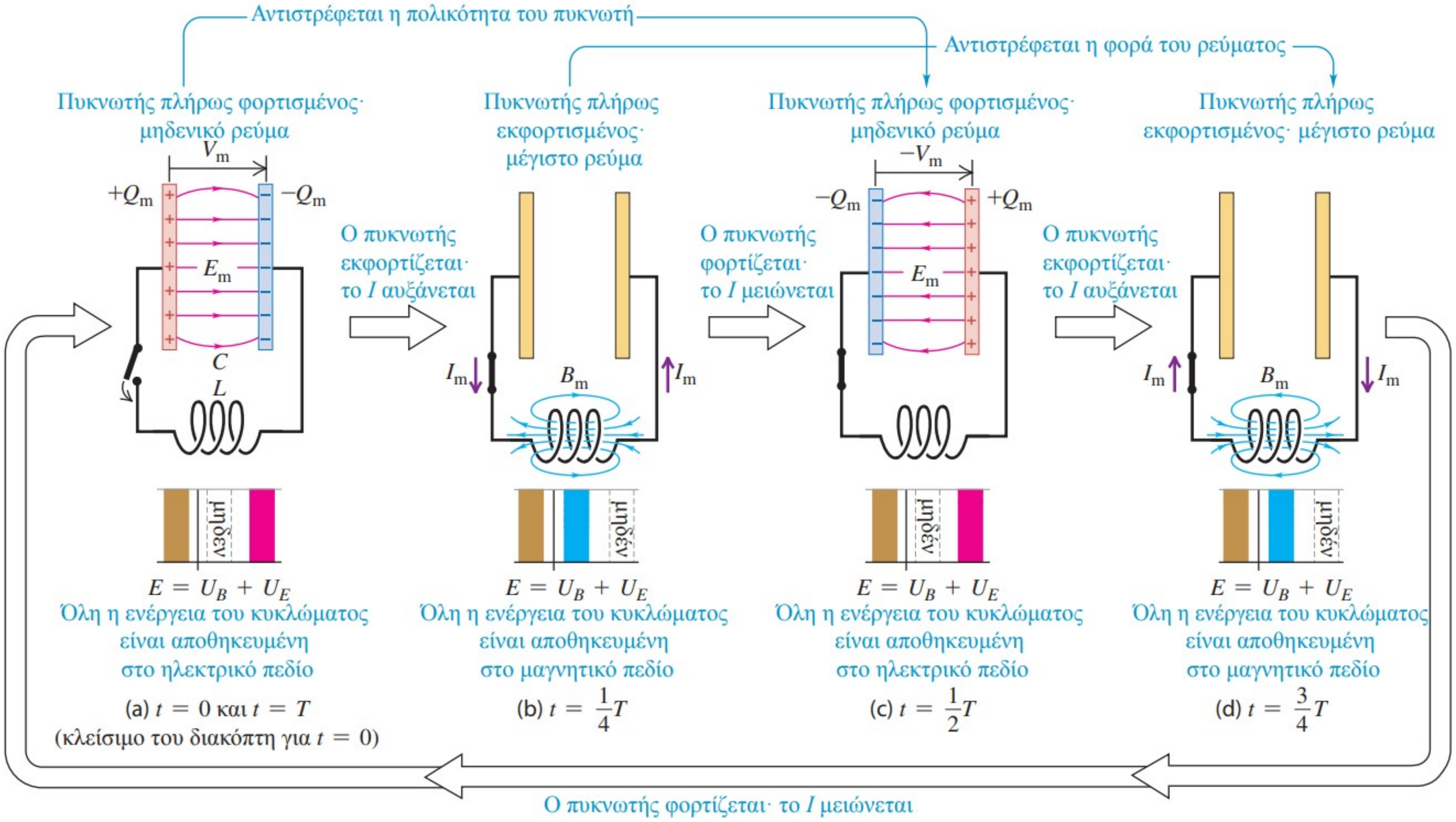
Στη θέση της Εξ. (30.17) έχουμε:

$$0 = i^2 R + Li\frac{di}{dt} \qquad (30.19)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το $Li\, di/dt$ είναι αρνητικό· η Εξ. (30.19) δείχνει ότι η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο **ελαττώνεται** με ρυθμό ίσο με τον ρυθμό κατανάλωσης ενέργειας, i^2R, στον αντιστάτη.

ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ L-C I

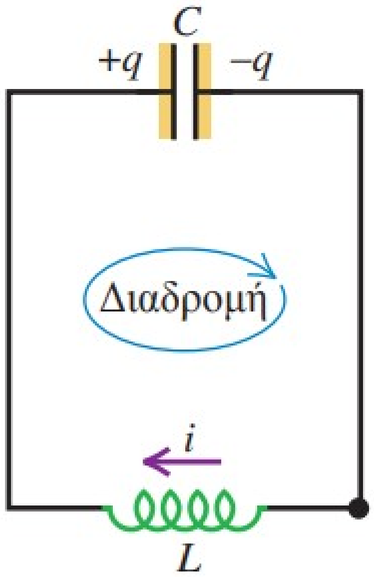
Ένα κύκλωμα που περιέχει ένα πηνίο και έναν πυκνωτή δείχνει μια εντελώς νέα μορφή συμπεριφοράς, που χαρακτηρίζεται από ταλαντούμενο ρεύμα και φορτίο.



30.14 Σε ένα ταλαντούμενο κύκλωμα L-C, το φορτίο στον πυκνωτή και το ρεύμα μέσω του πηνίου μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με τον χρόνο. Η ενέργεια μεταπίπτει μεταξύ της μαγνητικής ενέργειας στο πηνίο (U_B) και της ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή (U_E). Όπως συμβαίνει και στην απλή αρμονική κίνηση, η ολική ενέργεια E παραμένει σταθερή.

Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις σε ένα Κύκλωμα L-C

30.15 Εφαρμογή του κανόνα βρόχου του Kirchhoff σε κύκλωμα L-C. Φαίνεται η φορά διαδρομής στον βρόχο που θεωρούμε για την εξίσωση του βρόχου.



$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \qquad\qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.20)$$

Η Εξ. (30.20) έχει ακριβώς την ίδια μορφή με την εξίσωση που βρήκαμε για την απλή αρμονική κίνηση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad\qquad x = A\cos(\omega t + \phi)$$

όπου το πλάτος A και η γωνία φάσης φ εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

Σε ένα κύκλωμα L-C το φορτίο του πυκνωτή q παίζει τον ρόλο της μετατόπισης x, και το ρεύμα $i = dq/\mathrm{d}t$ είναι ανάλογο της ταχύτητας του σωματίου $\upsilon_x = dx/dt$. Η επαγωγή L είναι ανάλογη της μάζας m, και το αντίστροφο της χωρητικότητας, $1/C$, είναι ανάλογο της σταθεράς ελατηρίου k, επομένως:

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \qquad (30.21)$$

Το στιγμιαίο ρεύμα $i = dq/dt$ είναι: $i = -\omega Q\sin(\omega t + \phi)$ (30.23)

Γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης σε ένα κύκλωμα L-C

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (30.22)$$

Χωρητικότητα

Επαγωγή

Οι σταθερές Q και φ στις Εξ. (30.21) και (30.23) προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Ενέργεια σε Ένα Κύκλωμα L-C

Το κύκλωμα L-C είναι επίσης ένα διατηρητικό σύστημα. Ας θεωρήσουμε και πάλι ότι Q είναι το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου ½ Li^2 στο πηνίο κάθε χρονική στιγμή αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια ½ mv^2 του ταλαντούμενου σώματος και η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου $q^2/2C$ στον πυκνωτή αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια ½ kx^2 του ελατηρίου. Το άθροισμα αυτών των ενεργειών ισούται με την ολική ενέργεια $Q^2/2C$ του συστήματος:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \qquad (30.25)$$

Η ολική ενέργεια στο κύκλωμα L-C είναι σταθερή· ταλαντώνεται μεταξύ της ηλεκτρικής και της μαγνητικής μορφής, ακριβώς όπως η ολική μηχανική ενέργεια στην απλή αρμονική κίνηση είναι σταθερή και ταλαντώνεται μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής μορφής.

ΠΙΝΑΚΑΣ 30.1

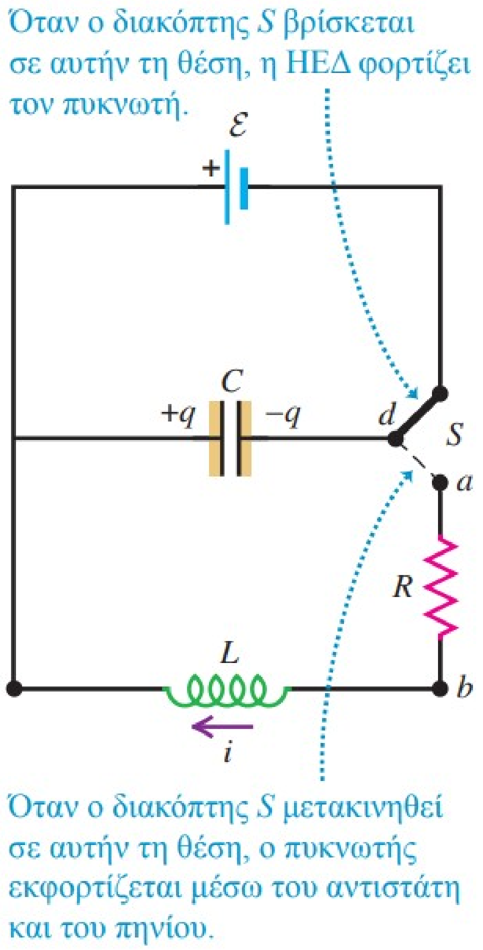
Ταλάντωση Συστήματος Ελατηρίου-Μάζας Συγκρινόμενη με Ηλεκτρική Ταλάντωση σε Κύκλωμα L-C

Σύστημα Ελατηρίου-Μάζας	Κύκλωμα Πηνίου-Πυκνωτή
Κινητική ενέργεια $= \frac{1}{2}mv_x^2$	Μαγνητική ενέργεια $= \frac{1}{2}Li^2$
Δυναμική ενέργεια $= \frac{1}{2}kx^2$	Ηλεκτρική ενέργεια $= q^2/2C$
$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$	$\frac{1}{2}Li^2 + q^2/2C = Q^2/2C$
$v_x = \pm\sqrt{k/m}\sqrt{A^2 - x^2}$	$i = \pm\sqrt{1/LC}\sqrt{Q^2 - q^2}$
$v_x = dx/dt$	$i = dq/dt$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
$x = A\cos(\omega t + \phi)$	$q = Q\cos(\omega t + \phi)$

Στον **Πίνακα 30.1** συνοψίζονται οι αναλογίες μεταξύ της απλής αρμονικής κίνησης και των ταλαντώσεων στο κύκλωμα L-C. **Η εμφανής παραλληλία που φαίνεται εκεί είναι τόσο ισχυρή που μας επιτρέπει να λύσουμε περίπλοκα μηχανικά προβλήματα κατασκευάζοντας ανάλογα ηλεκτρικά κυκλώματα και μετρώντας τα ρεύματα και τα δυναμικά που αντιστοιχούν στις μηχανικές ποσότητες που πρέπει να προσδιοριστούν. Αυτή είναι η βασική αρχή πολλών αναλογικών υπολογιστών. Αυτή η αναλογία μπορεί να επεκταθεί στις αποσβενόμενες ταλαντώσεις.**

ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ L-R-C ΣΕ ΣΕΙΡΑ I

30.17 Ένα κύκλωμα L-R-C σε σειρά.



Εξαιτίας της αντίστασης, η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια στο κύκλωμα καταναλώνεται και μετατρέπεται σε άλλες μορφές, όπως σε εσωτερική ενέργεια στα υλικά του κυκλώματος. Η αντίσταση σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι ανάλογη προς την τριβή σε ένα μηχανικό σύστημα.

Ανάλυση Ενός Κυκλώματος L-R-C σε Σειρά

Πρώτα κλείνουμε τον διακόπτη προς τα πάνω, συνδέοντας τον πυκνωτή με μια πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$ για αρκετά μακρό χρονικό διάστημα ώστε να είμαστε σίγουροι ότι ο πυκνωτής αποκτά το τελικό του φορτίο $Q = C\mathcal{E}$ και κάθε αρχική ταλάντωση έχει πλήρως αποσβεστεί. Έπειτα, τη χρονική στιγμή $t = 0$ θέτουμε τον διακόπτη στη θέση προς τα κάτω, αφαιρώντας την πηγή από το κύκλωμα και θέτοντας τον πυκνωτή σε σειρά με τον αντιστάτη και το πηνίο. Σημειώστε ότι το αρχικό ρεύμα είναι αρνητικό, αντίθετης φοράς προς αυτήν που φαίνεται να έχει το i στο Σχ. 30.17.

Αρχίζοντας από το σημείο a και διασχίζοντας τον βρόχο κατά τη διεύθυνση $abcda$, έχουμε:

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Αντικαθιστώντας το i με dq/dt και αναδιατάσσοντας τους όρους βρίσκουμε:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.27)$$

Υπάρχουν γενικές μέθοδοι εύρεσης λύσεων της Εξ. (30.27). Η μορφή της λύσης είναι διαφορετική για την υποκρίσιμα αποσβενόμενη (μικρή R) και για την υπεραποσβενόμενη (μεγάλη R) περίπτωση. Όταν το R^2 είναι μικρότερο από $4L/C$, η λύση έχει τη μορφή (υποκρίσιμα αποσβενόμενη συμπεριφορά):

$$q = Ae^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t + \phi\right) \qquad (30.28)$$

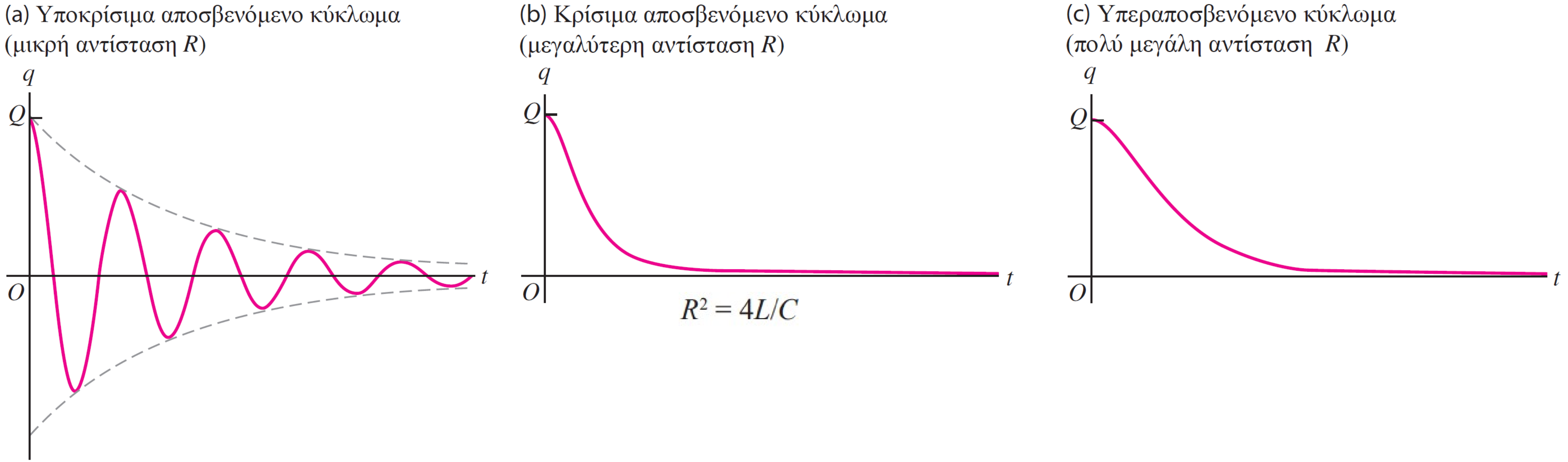
Γωνιακή συχνότητα των υποκρίσιμα αποσβε-νόμενων ταλαντώσεων σε ένα κύκλωμα L-R-C σε σειρά

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (30.29)$$

Αντίσταση (R), Επαγωγή (L), Επαγωγή (L), Χωρητικότητα (C)

ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ L-R-C ΣΕ ΣΕΙΡΑ II

30.16 Γραφικές παραστάσεις του φορτίου του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου σε ένα κύκλωμα L-R-C σε σειρά με αρχικό φορτίο Q .



Η συμπεριφορά ενός κυκλώματος L-R-C σε σειρά είναι εντελώς ανάλογη προς αυτήν ενός αποσβενόμενου αρμονικού ταλαντωτή (Θυμηθείτε την αντιστοιχία μηχανικών - ηλεκτρικών παραμέτρων, διαφάνεια 11):

$$-kx - bv_x = ma_x \qquad \text{ή} \qquad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Αν αντικαταστήσετε τη x με το q προκύπτει η Εξ 30.27

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.27)$$

Στην **υποκρίσιμα αποσβενόμενη** περίπτωση, η σταθερά φάσης φ στο συνημίτονο της Εξ. (30.28) δίνει τη δυνατότητα παρουσίας τόσο αρχικού φορτίου όσο και αρχικού ρεύματος τη χρονική στιγμή $t = 0$, ανάλογα προς έναν υποκρίσιμα αποσβενόμενο αρμονικό ταλαντωτή που του δίνεται αρχική μετατόπιση και αρχική ταχύτητα.