Ηλεκτρομαγνητισμός
Διάλεξη 02

Α. Δροσόπουλος

11-10-2024

Outline

Topic

1. Εισαγωγικά

2. Μαθηματικό υπόβαθρο

Έννοια πεδίου

Το θεμελιώδες πρόβλημα που καλείται να λύσει η ηλεκτρομαγνητική θεωρία είναι:

Έχουμε κάποια φορτία ΕΔΩ. Τι γίνεται σε κάποια άλλα φορτία ΕΚΕΙ;

Λέμε ότι ο χώρος γύρω από ένα ηλεκτρικό φορτίο είναι διάχυτος από ηλεκτρομαγνητικό πεδίο («οσμή» φορτίου, βλ. βιβλίο Griffiths). Ένα δεύτερο φορτίο στο χώρο αλληλεπίδρασης (χώρο «οσμής») του παραπάνω πεδίου καταλαβαίνει κάποια δύναμη. Τα πεδία είναι αυτά που μεταφέρουν αυτή τη δύναμη.

Όταν το φορτίο επιταχύνεται, ένα κομμάτι του πεδίου «ξεκολλά» και ταξιδεύει με τη ταχύτητα του φωτός μεταφέροντας ενέργεια, ορμή και στροφορμή (ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία). Η ύπαρξη αυτής της ακτινοβολίας μας αναγκάζει να αποδεχθούμε την ύπαρξη των πεδίων σαν φυσικές οντότητες εξίσου πραγματικές όπως η γνωστή μας ύλη.

Επομένως πάμε από τη μελέτη δυνάμεων μεταξύ φορτίων στη θεωρία πεδίων και των αλληλεπιδράσεών τους με φορτία. Τα πεδία δημιουργούνται από φορτία και ανιχνεύονται από φορτία.

Έννοια φορτίου

Φορτίο είναι η φυσική οντότητα που αποδεχόμαστε για να εξηγήσουμε τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα.

- Δυο ειδών φορτία. Θετικά και αρνητικά. Αντιστοίχιση αυθαίρετη. Ομώνυμα απωθούνται ετερώνυμα έλκονται. Στη φύση τα φορτία εμφανίζονται σε δομές όπου σχεδόν αντισταθμίζονται πλήρως τα θετικά και αρνητικά φορτία.
- Διατήρηση. Ολική διατήρηση (global conservation) - τοπική διατήρηση (local conservation). Η ολική επιτρέπει εξαφάνιση φορτίου (π.χ. Ελλάδα) και ταυτόχρονη εμφάνιση αλλού (π.χ. Αμερική). Η τοπική επιβάλει την ύπαρξη κάποιας συνεχούς διαδρομής από το εδώ στο εκεί (εξίσωση συνεχείας).
- Κβάντωση. Δεν είναι συνεχές ρευστό. Υπάρχει διακριτή ελάχιστη ποσότητα, το θεμελιώδες φορτίο. Ηλεκτρόνιο $-e$, πρωτόνιο $+e$. Σε κανονικές συνθήκες όμως εργαζόμαστε με μεγάλο αριθμό φορτίων και μπορούμε να το θεωρήσουμε συνεχές ρευστό.
- Αναλλοίωτο. Δεν μεταβάλλεται με την ταχύτητα όπως η μάζα.

Μονάδες: Θα δουλέψουμε στο σύστημα μονάδων SI.

Topic

Φάσορες

Μια αρμονική (ημιτονοειδής) συνάρτηση μπορεί να γραφτεί σαν

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

Με την ταυτότητα Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

μπορούμε να γράψουμε την αρμονική συνάρτηση σαν

$$y(t) = \mathfrak{Re}\big[Ae^{j(\omega t+\theta)}\big] = \mathfrak{Re}\big[Ae^{j\omega t}e^{j\theta}\big]$$

Σε γραμμικά προβλήματα η συχνότητα ω είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει σταθερό όρο $e^{j\omega t}$ που παραλείπεται όταν έχουμε αρμονικές συναρτήσεις. Οπότε:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta) \longleftrightarrow Y = Ae^{j\theta} = A\underline{/\theta}$$

Μια χρήσιμη επισκόπηση έννοιας φάσορα βρίσκεται στο link phasor.

Πολική και καρτεσιανή μορφή

$$Y = a + jb = A\underline{/\theta}$$

όπου

καρτεσιανή σε πολική	πολική σε καρτεσιανή
$A = \sqrt{a^2 + b^2}$	$a = A\cos\theta$
$\theta = \tan^{-1}(b/a)$	$b = A\sin\theta$

Άλγεβρα φασόρων

$$F_1 = a_1 + jb_1 = A_1 \underline{/\theta_1}$$
$$F_2 = a_2 + jb_2 = A_2 \underline{/\theta_2}$$

πρόσθεση:	$F_1 + F_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
αφαίρεση:	$F_1 - F_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$
πολλαπλασιασμός:	$F_1 \cdot F_2 = (A_1 \cdot A_2) \underline{/\theta_1 + \theta_2}$
διαίρεση:	$F_1 / F_2 = (A_1 / A_2) \underline{/\theta_1 - \theta_2}$
παραγώγιση:	$\dfrac{dF(t)}{dt} \longrightarrow j\omega F(\omega)$
ολοκλήρωση:	$\int F(t)dt \longrightarrow \dfrac{1}{j\omega} F(\omega) = -(j/\omega) F(\omega)$

Για περισσότερες λεπτομέρειες στις δυο τελευταίες σχέσεις ανατρέξτε στους μετασχηματισμούς Fourier στα μαθηματικά σας.

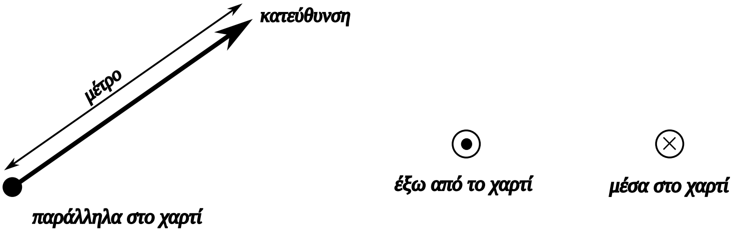
Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

Ένα βαθμωτό (μονόμετρο) μέγεθος χαρακτηρίζεται πλήρως μόνο από το μέτρο του, κάποια τιμή που μπορεί να είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Οι φάσορες είναι βαθμωτά μεγέθη. Παραδείγματα: 7, π, -1.345, $98.2 + j4.6$. Μάζα, απόσταση, θερμοκρασία, τάση, κ.α.

Ένα διανυσματικό μέγεθος εκτός από το μέτρο του διαθέτει και κατεύθυνση. Παραδείγματα: ταχύτητα, δύναμη, ηλεκτρομαγνητικά πεδία, ορμή, μετατόπιση.

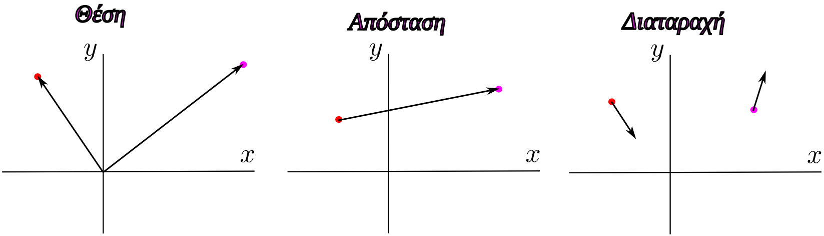
Υπάρχουν και άλλα φυσικά μεγέθη, οι τανυστές (tensors). Τα βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη είναι υποπερίπτωσή τους.

Σκίτσο διανύσματος

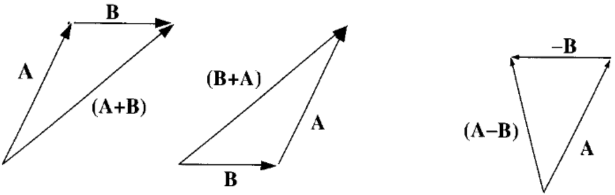


Σχήμα: Σκίτσο διανύσματος. Προσοχή. Παρόλο που φαίνεται ότι το διάνυσμα δείχνει κάτι μακριά από το αρχικό σημείο, αυτό που περιγράφει αναφέρεται στο συγκεκριμένο αρχικό σημείο και μόνο σε αυτό.

Πληροφορία που παρέχει ένα διάνυσμα



Σχήμα: Πληροφορία που παρέχει ένα διάνυσμα. Θέση, σχετικά με κάποιο σημείο αναφοράς. Απόσταση, ανεξάρτητα από σημείο αναφοράς. Κατευθυνόμενη διαταραχή.



Σχήμα: Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

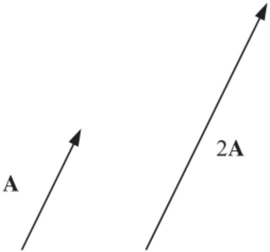
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad \text{αντιμεταθετική}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad \text{προσεταιριστική}$$

Αφαίρεση: Πρόσθεση αντιθέτου

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$$

Πράξεις με διανύσματα 2

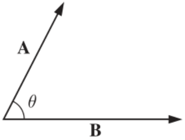
Πολ/σμός με βαθμωτό μέγεθος



Σχήμα: Πολ/σμός με βαθμωτό μέγεθος

Πολ/σμός με θετικό αριθμό πολ/ζει μέτρο, δεν πειράζει κατεύθυνση. Πολ/σμός με αρνητικό αριθμό πολ/ζει μέτρο και αντιστρέφει κατεύθυνση.

$$a(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B} \quad \text{επιμεριστική}$$



Σχήμα: Εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta$$

Εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος. Ισχύουν:

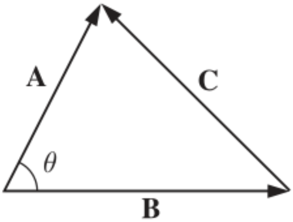
$$\begin{aligned} &\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} && \text{αντιμεταθετική} \\ &\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} && \text{επιμεριστική} \end{aligned}$$

Γεωμετρικά: Προβολή του ενός στο άλλο επί το μέτρο του άλλου.

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB && \text{παράλληλα} \\ &\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 && \text{κάθετα} \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$ στο παρακάτω τρίγωνο.



Έχουμε $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΕΙΔΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.

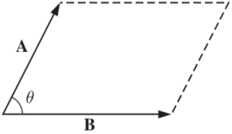
$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

Νόμος συνημιτόνων.

Πράξεις με διανύσματα 4

Εξωτερικό γινόμενο



Σχήμα: Εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin\theta \, \hat{\mathbf{n}}$$

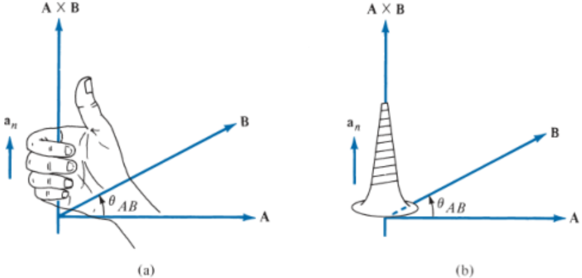
όπου $\hat{\mathbf{n}}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ και με κατεύθυνση που ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού. Δάκτυλα δεξιού χεριού στο πρώτο διάνυσμα. Τα περιστρέφουμε μέσω της μικρότερης γωνίας στο δεύτερο και ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του $\hat{\mathbf{n}}$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} && \text{όχι αντιμεταθετική} \\ &\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} && \text{επιμεριστική} \end{aligned}$$

Γεωμετρικά: $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$.

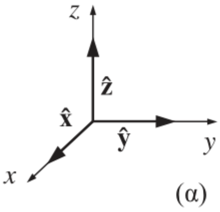
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \qquad \text{παράλληλα}$$

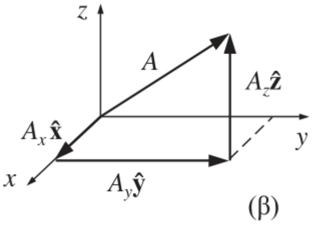
Εξωτερικό γινόμενο 2



Σχήμα: Εξωτερικό γινόμενο. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού ή τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

Καρτεσιανές συντεταγμένες





$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) + (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$(A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}$$

$$a\mathbf{A} = (aA_x)\hat{\mathbf{x}} + (aA_y)\hat{\mathbf{y}} + (aA_z)\hat{\mathbf{z}}$$

και επειδή: $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1,\ \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = 0$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Καρτεσιανές συντεταγμένες 2

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}} = 0\\
&\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}}\\
&\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}\\
&\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})\times(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$(A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 1a

Εάν $\mathbf{A} = (10, -4, 6)$ και $\mathbf{B} = (2, 1, 0)$ υπολογίστε:

- την συνιστώσα του $\mathbf{A}$ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{y}}$
- το μέτρο του διανύσματος $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$
- ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$

Προφανώς, $A_y = -4$.

$3\mathbf{A} - \mathbf{B} = 3(10, -4, 6) - (2, 1, 0) = (30, -12, 18) - (2, 1, 0) = (28, -13, 18)$ και
$\|3\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \sqrt{28^2 + (-13)^2 + 18^2} = \sqrt{1277} = 35.74$

Εάν $\mathbf{C} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ τότε ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{C}$ είναι:

$$\hat{\mathbf{a}}_C = \frac{\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|} = \frac{(14, -2, 6)}{\sqrt{14^2 + (-2)^2 + 6^2}} = (0.91132, -0.13019, 0.39057)$$

Παρατηρείστε ότι $\|\hat{\mathbf{a}}_C\| = 1$ όπως θα περιμέναμε.

Παράδειγμα 1b

```
>> A=[10 -4 6]; B=[2 1 0];
>> 3*A-B
ans =
   28  -13   18
>> norm(3*A-B)
ans = 35.735
>> C=A+2*B
C =
   14   -2    6
>> ac = C/norm(C)
ac =
   0.9113  -0.1302   0.3906
>> norm(ac)
>> ans = 1
```

Παράδειγμα 2

Έστω σημεία P, Q τοποθετημένα στα $(0, 2, 4)$ και $(-3, 1, 5)$ αντίστοιχα. Υπολογίστε:

- την θέση του διανύσματος $\mathbf{r}_P$
- το διάνυσμα μετατόπισης από το P στο Q
- την απόσταση μεταξύ P και Q
- διάνυσμα παράλληλο στο PQ με μέτρο 10

$\mathbf{r}_P = (0, 2, 4) = 2\hat{\mathbf{a}}_y + 4\hat{\mathbf{a}}_z$

$\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (-3, 1, 5) - (0, 2, 4) = (-3, -1, 1)$ ή $\mathbf{r}_{PQ} = -3\hat{\mathbf{a}}_x - \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$

Η απόσταση μεταξύ P και Q είναι: $d = \|\mathbf{r}_{PQ}\| = \sqrt{9 + 1 + 1} = 3.3166$

Διάνυσμα παράλληλο στο PQ με μέτρο 10 είναι:

$$\pm 10 \frac{\mathbf{r}_{PQ}}{\|\mathbf{r}_{PQ}\|} = \pm 10 \frac{(-3, -1, 1)}{3.3166} = \pm(-9.0453, -3.0151, 3.0151)$$

Παράδειγμα 2b

```
>> p=[0 2 4]; q=[-3 1 5];
>> r=q-p
r =
  -3  -1   1
>> d=norm(r)
d = 3.3166
>> 10*r/norm(r)
ans =
  -9.0453  -3.0151   3.0151
```

Τεστ εσωτερικού γινομένου

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να δείξει αν δυο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν ναι, η προβολή του ενός στο άλλο είναι μηδενική, άρα το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$$

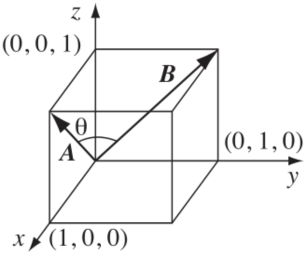
Τεστ εξωτερικού γινομένου

Το εξωτερικό γινόμενο μπορεί να δείξει αν δυο διανύσματα είναι παράλληλα μεταξύ τους. Αν ναι, η γωνία μεταξύ τους είναι μηδέν άρα και το εξωτερικό γινόμενο είναι μηδέν.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$$

Παράδειγμα

Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν δύο διαγώνιοι διαδοχικών εδρών ενός κύβου.



$$\mathbf{A} = (1, 0, 1) \qquad \mathbf{B} = (0, 1, 1)$$

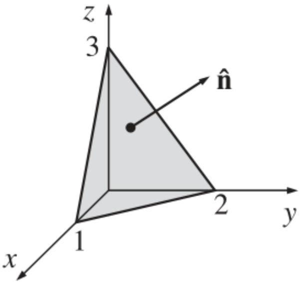
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\theta = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

Άσκηση 1

Χρησιμοποιήστε το εξωτερικό γινόμενο για να βρείτε τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ που είναι κάθετο στο επίπεδο του σχήματος.



Το εξωτερικό γινόμενο δυο οποιονδήποτε διανυσμάτων στο επίπεδο θα μας δώσει το κάθετο. Έστω

$$\mathbf{A} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \qquad \mathbf{B} = (0, 0, 3) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 3)$$

Άσκηση 1a

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

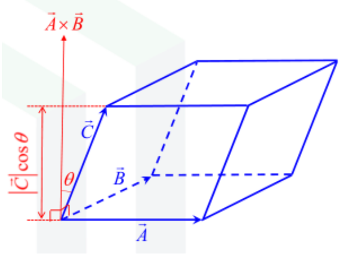
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|}$$

```
>> A=[-1 2 0]; B=[-1 0 3];
>> C=cross(A,B)
C =
   6   3   2
>> n=C/norm(C)
n =
   0.8571   0.4286   0.2857
```

Τριπλά γινόμενα

Βαθμωτό τριπλό γινόμενο:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



Σχήμα: Βαθμωτό τριπλό γινόμενο ο όγκος του σχηματιζόμενου παραλληλεπιπέδου.

Διανυσματικό τριπλό γινόμενο:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

Παράδειγμα

Δοθέντων δυο διανυσμάτων $\mathbf{A} = (3, 4, 1)$ και $\mathbf{B} = (0, 2, -5)$ ποια η γωνία μεταξύ τους;

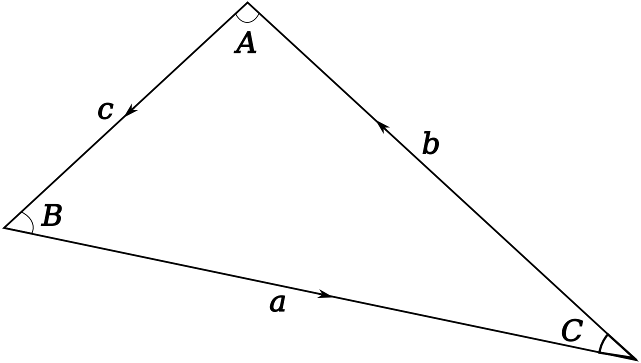
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \qquad \|\mathbf{A}\| = \sqrt{26} \qquad \|\mathbf{B}\| = \sqrt{29}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|} = 0.10925 \qquad \theta = 83.728^\circ$$

```
>> A=[3 4 1]; B=[0 2 -5];
>> dot(A,B)
ans = 3
>> norm(A)
>> ans = 5.0990
>> norm(B)
ans = 5.3852
>> dot(A,B)/(norm(A)*norm(B))
ans = 0.1093
>> theta = acos(dot(A,B)/(norm(A)*norm(B)))*180/pi
theta = 83.728
```

Παράδειγμα

Δοθέντος τριγώνου με πλευρές a, b, c υπολογίστε τους κανόνες συνημιτόνου και ημιτόνου.



Παράδειγμα (συν)

Κανόνας συνημιτόνου

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a}$$

$$a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

όπου $(\pi - A)$ η γωνία μεταξύ **b** και **c**.

Κανόνας ημιτόνου

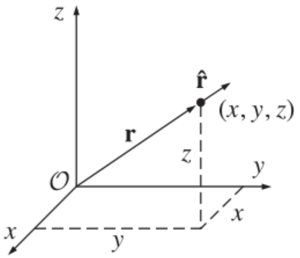
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

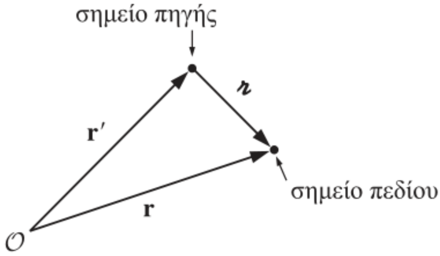
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{c}\times\mathbf{a}\| \Rightarrow$$

$$ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Διάνυσμα θέσης





Η θέση ενός σημείου (x, y, z) προσδιορίζεται από το διάνυσμα θέσης με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το συγκεκριμένο σημείο.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} = (x, y, z)$$

$$\text{μέτρο: } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

και το μοναδιαίο διάνυσμα θέσης

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Διάνυσμα μετατόπισης και διάνυσμα απόστασης

Απειροστό διάνυσμα μετατόπισης από το (x, y, z) στο $(x + dx, y + dy, z + dz)$:

$$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

Οι εφαρμογές μας συνήθως αφορούν δυο σημεία. Σημείο πηγής, $\mathbf{r}'$, που βρίσκεται ένα ηλεκτρικό φορτίο και σημείο πεδίου, $\mathbf{r}$, εκεί που υπολογίζουμε το πεδίο.

Το διάνυσμα απόστασης από το σημείο πηγής μέχρι το σημείο πεδίου είναι:

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

το μέτρο του:

$$\mathscr{r} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$$

και μοναδιαίο διάνυσμα από $\mathbf{r}'$ σε $\mathbf{r}$:

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

Διάνυσμα απόστασης
σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathscr{r} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

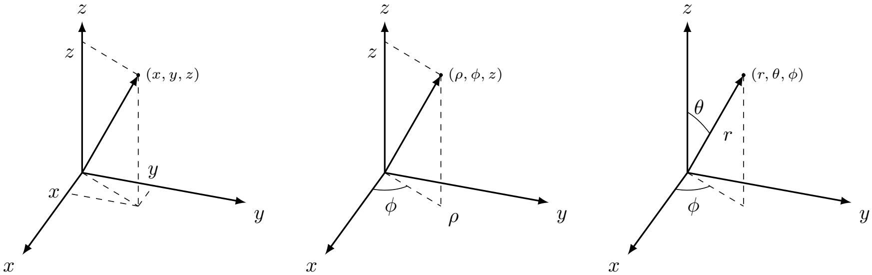
$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \frac{(x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

Άσκηση

Υπολογίστε το διάνυσμα απόστασης $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ από το σημείο πηγής $(2, 8, 7)$ μέχρι το σημείο πεδίου $(4, 6, 8)$. Υπολογίστε κατόπιν τα $\mathscr{r}$ και $\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$.

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (4, 6, 8) - (2, 8, 7) = (2, -2, 1)$$
$$\mathscr{r} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$
$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

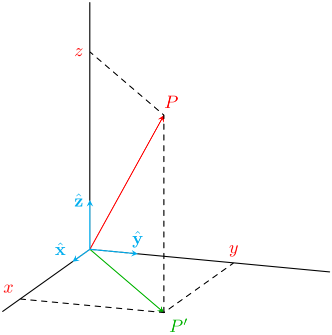
Συστήματα συντεταγμένων



Δεξιόστροφα και ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων:

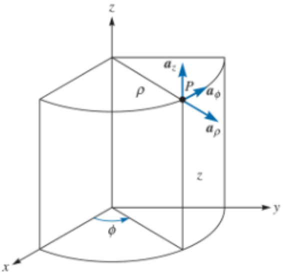
Καρτεσιανό, κυλινδρικό, σφαιρικό.

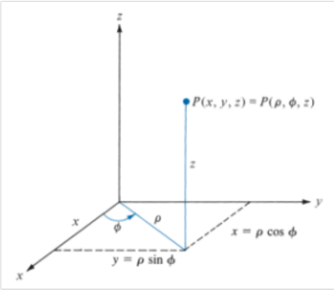
Σύστημα αξόνων: καρτεσιανό



Σχήμα: Καρτεσιανό σύστημα αξόνων στον 3D χώρο.

$$-\infty < x < +\infty$$
$$-\infty < y < +\infty$$
$$-\infty < z < +\infty$$

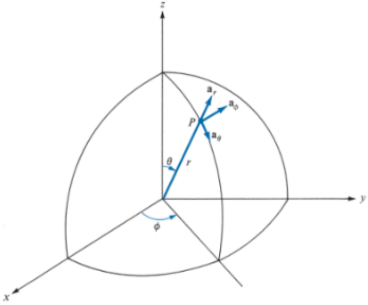


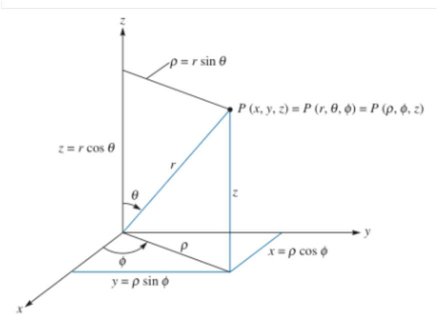


Σχήμα: Κυλινδρικό σύστημα αξόνων

$$0 \leq \rho < +\infty$$
$$0 \leq \phi \leq 360^\circ$$
$$-\infty < z < +\infty$$

Σύστημα αξόνων: σφαιρικό

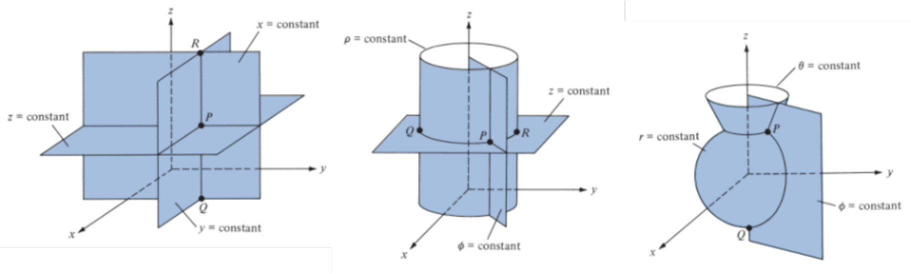




Σχήμα: Σφαιρικό σύστημα αξόνων

$$0 \leq r < +\infty$$
$$0 \leq \phi \leq 360^\circ$$
$$0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

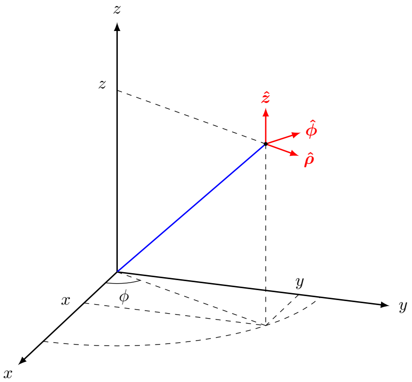
Επιφάνειες σταθερής τιμής



Σχήμα: Επιφάνειες σταθερής τιμής

Κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z) σημείου P ορίζονται όπως στο σχήμα.



Διάνυσμα σε αυτό το σύστημα:

$$\mathbf{A} = A_\rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z\, \hat{\mathbf{z}}$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες (συν)

Μετατροπές συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi & \qquad \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y &= \rho\sin\phi & \qquad \phi &= \tan^{-1}(y/x) \\ z &= z & \qquad z &= z \end{aligned}$$

Μοναδιαία διανύσματα:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}} &= \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Προσοχή. Τα μοναδιαία διανύσματα σε κυλινδρικές συντεταγμένες ΔΕΝ είναι σταθερά.

Κυλινδρικές συντεταγμένες (συν)

Η στοιχειώδης μετατόπιση

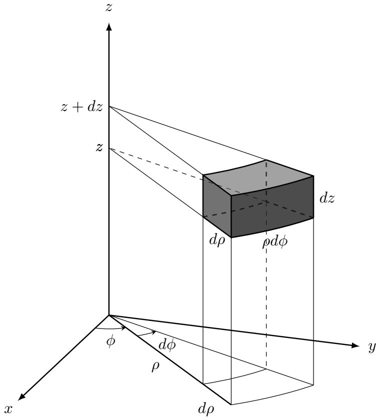
$$d\mathbf{l} = dl_\rho \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + dl_\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dl_z \, \hat{\mathbf{z}} = d\rho \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz \, \hat{\mathbf{z}}$$

Ο στοιχειώδης όγκος: $dV = dl_r dl_\phi dz = \rho d\rho d\phi dz$

Η στοιχειώδης επιφάνεια εξαρτάται από το επίπεδο.

$$\begin{array}{lcrcl}
\rho \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\phi dz \, \hat{\boldsymbol{\rho}} & = & \rho d\phi dz \, \hat{\boldsymbol{\rho}} \\
\phi \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\rho dl_z \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} & = & d\rho dz \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
z \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\rho dl_\phi \, \hat{\mathbf{z}} & = & \rho d\rho d\phi \, \hat{\mathbf{z}}
\end{array}$$

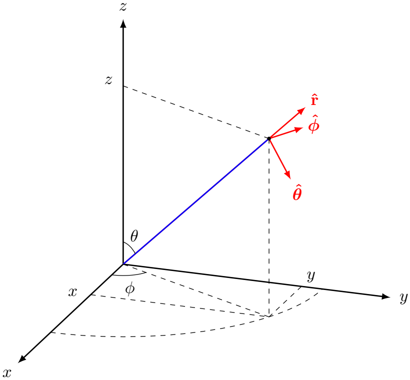
Κυλινδρικές συντεταγμένες (συν)



Σχήμα: Στοιχειώδης όγκος σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) σημείου P ορίζονται όπως στο σχήμα.



Διάνυσμα σε αυτό το σύστημα:

$$\mathbf{A} = A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (συν)

Μετατροπές συντεταγμένων:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\phi\sin\theta & \qquad r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
y &= r\sin\phi\sin\theta & \qquad \theta &= \tan^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right) \\
z &= r\cos\theta & \qquad \phi &= \tan^{-1}(y/x)
\end{aligned}
$$

Μοναδιαία διανύσματα:

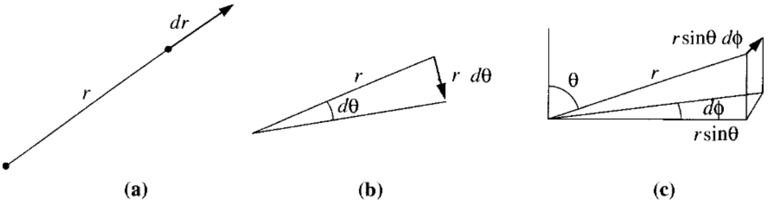
$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \cos\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\phi\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}
$$

Προσοχή. Τα μοναδιαία διανύσματα σε σφαιρικές συντεταγμένες ΔΕΝ είναι σταθερά.

Σφαιρικές συντεταγμένες (συν)

Η στοιχειώδης μετατόπιση

$$d\mathbf{l} = dl_r\,\hat{\mathbf{r}} + dl_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dl_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

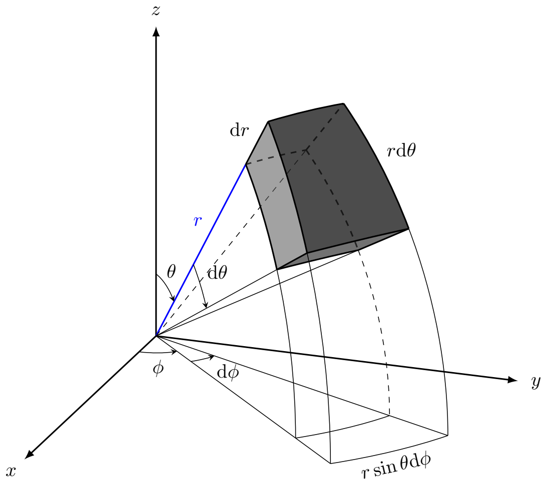


Ο στοιχειώδης όγκος: $\quad dV = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

Η στοιχειώδης επιφάνεια εξαρτάται από το επίπεδο.

$$\begin{array}{lclcl}
r \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\theta dl_\phi\,\hat{\mathbf{r}} & = & r^2\sin\theta d\theta d\phi\,\hat{\mathbf{r}} \\
\theta \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_r dl_\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} & = & r\sin\theta dr d\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\phi \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_r dl_\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} & = & r dr d\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}
\end{array}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (συν)



Σχήμα: Στοιχειώδης όγκος σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Συστήματα αξόνων: σχέσεις
Κυλινδρικές σε Καρτεσιανές

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \rho \cos\phi \\ y & = & \rho \sin\phi \\ z & = & z \end{array} \right.$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_x & = & A_\rho \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - A_\phi \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y & = & A_\rho \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + A_\phi \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z & = & A_z \end{array} \right.$$

Συστήματα αξόνων: σχέσεις

Καρτεσιανές σε Κυλινδρικές

Αλλαγές μεταβλητών:
$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi & = & \tan^{-1}(y/x) \\ z & = & z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} \sin\phi & = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\phi & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$$

Αλλαγές συνιστωσών:
$$\left\{\begin{array}{lcl} A_\rho & = & A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \\ A_\phi & = & -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \\ A_z & = & A_z \end{array}\right.$$

Συστήματα αξόνων: σχέσεις

Σφαιρικές σε Καρτεσιανές

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\begin{cases} A_x = \dfrac{A_r x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta xz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} - \dfrac{A_\phi y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y = \dfrac{A_r y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta yz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} + \dfrac{A_\phi x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z = \dfrac{A_r z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \dfrac{A_\theta \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

Συστήματα αξόνων: σχέσεις
Καρτεσιανές σε Σφαιρικές

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta & = & \cos^{-1} \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi & = & \tan^{-1}(y/x) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \cos\theta & = & \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \sin\theta & = & \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\phi & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\phi & = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right.$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_r & = & A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z \cos\theta \\ A_\theta & = & A_x \cos\theta\cos\phi + A_y \cos\theta\sin\phi - A_z \sin\theta \\ A_\phi & = & -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \end{array} \right.$$