Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 13

Α. Δροσόπουλος

24-11-2023

Outline

Topic

1. Ασκήσεις
2. Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

Ασκήσεις

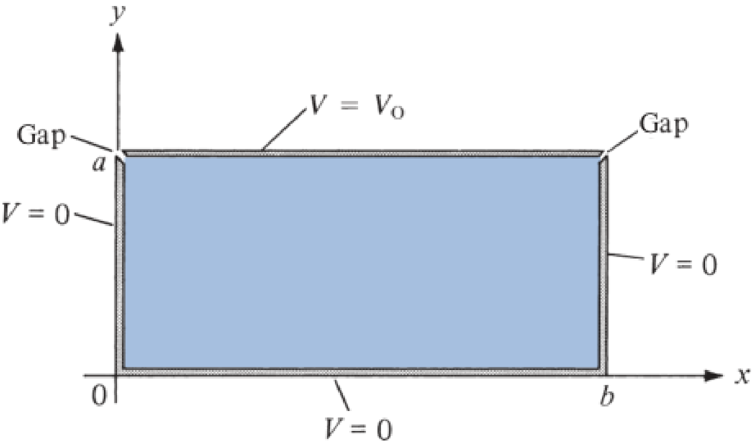
- από βιβλίο Κεφάλαιο 23

Topic

1. Ασκήσεις
2. Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

Παράδειγμα 3

Σε ορθογώνια μεταλλική κατασκευή απείρου μήκους με διατομή όπως φαίνεται στο σχήμα προσδιορίστε το δυναμικό στο εσωτερικό του. Υπολογίστε την τιμή του δυναμικού στο σημείο $(a/2, 3a/4)$ όταν $V_0 = 100$ V και $b = 2a$.



Παράδειγμα 3 (συνέχεια 1)

Το δυναμικό εδώ εξαρτάται μόνο από τις διαστάσεις x και y και είναι συνάρτηση $V(x,y)$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η εξίσωση Laplace είναι:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

με οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}
V(x = 0, 0 \leq y < a) &= 0 \\
V(x = b, 0 \leq y < a) &= 0 \\
V(0 \leq x \leq b, y = 0) &= 0 \\
V(0 < x < b, y = a) &= V_0
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 2)

Λύνουμε τη εξίσωση Laplace με μέθοδο διαχωριζομένων μεταβλητών (separation of variables), δηλ αναζητούμε λύση της μορφής:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Laplace

$$X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

όπου λ σταθερά διαχωρισμού. Επομένως:

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$Y'' - \lambda Y = 0$$

Οι οριακές συνθήκες γίνονται τώρα:

$$V(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$
$$V(b, y) = X(b)Y(y) = 0 \Rightarrow X(b) = 0$$
$$V(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$
$$V(x, a) = X(x)Y(a) = V_0 \quad \text{(μη διαχωρίσιμες)}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 3)

Περίπτωση 1:

Παράμετρος $\lambda = 0$:

$$X'' = 0 \Rightarrow X = Ax + B$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow Ab + 0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

Οπότε:

$$X(x) = 0 \Rightarrow V = 0$$

που δεν έχει νόημα οπότε $\lambda \neq 0$.

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 4)

Περίπτωση 2:

Παράμετρος $\lambda < 0$, έστω $\lambda = -\alpha^2$.

$$X'' - \alpha^2 X = 0 \quad \text{ή} \quad (D^2 - \alpha^2)X = 0 \quad \text{όπου} \quad D = \frac{d}{dx}$$

$$DX = \pm \alpha X$$

Για το $+$ πρόσημο έχουμε

$$\frac{dX}{dx} = \alpha X \Rightarrow \frac{dX}{X} = \alpha dx \Rightarrow X = A_1 e^{\alpha x}$$

Ομοίως και για το $-$ πρόσημο

$$X = A_2 e^{-\alpha x}$$

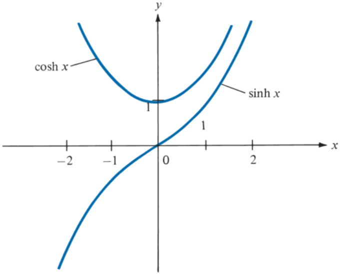
με τελική λύση

$$X(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 5)

Συνηθίζεται εδώ να μετασχηματίζουμε τις εκθετικές εξισώσεις σε εξισώσεις με υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα.

$$\cosh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} \quad \sinh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$



$$e^{\alpha x} = \cosh \alpha x + \sinh \alpha x \quad e^{-\alpha x} = \cosh \alpha x - \sinh \alpha x$$

$$X(x) = (A_1 + A_2) \cosh \alpha x + (A_1 - A_2) \sinh \alpha x = B_1 \cosh \alpha x + B_2 \sinh \alpha x$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 6)

Με τις οριακές συνθήκες

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + B_2 \sinh \alpha b$$

και επειδή $\sinh \alpha b \neq 0$ πρέπει $B_2 = 0$.

Ούτε αυτή η λύση έχει νόημα οπότε λ δεν μπορεί να είναι αρνητικό.

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 7)

Περίπτωση 3:

Παράμετρος $\lambda > 0$, έστω $\lambda = \beta^2$.

$$X'' + \beta^2 X = 0 \quad \text{ή} \quad (D^2 + \beta^2)X = 0 \Rightarrow DX = \pm j\beta X$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως πριν

$$X(x) = c_1 e^{j\beta x} + c_2 e^{-j\beta x}$$

και από τον τύπο του Euler $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ έχουμε
$e^{j\beta x} = \cos\beta x + j\sin\beta x$ και $e^{-j\beta x} = \cos\beta x - j\sin\beta x$, οπότε

$$X(x) = (c_1 + c_2)\cos\beta x + j(c_1 - c_2)\sin\beta x = d_1\cos\beta x + d_2\sin\beta x$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 8)

και με τις οριακές συνθήκες

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = d_1 \cdot 1 + 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + d_2 \sin \beta b$$

Έχουμε $d_2 \neq 0$ (αλλιώς έχουμε πάλι εξίσωση που δεν βγάζει νόημα). Τότε

$$\sin \beta b = 0 \Rightarrow \beta b = n\pi \Rightarrow \beta = \frac{n\pi}{b}, \; n = 1, 2, 3, ...$$

Αποκλείσαμε $n = 0$ καθώς και $n = -1, -2, -3, ...$ μιας και η τιμή της λ δεν αλλάζει. Επομένως η λύση είναι

$$X_n(x) = d_n \sin \frac{n\pi x}{b}$$

Πάμε τώρα για λύση της $Y(y)$. Έχουμε

$$Y'' - \beta^2 Y = 0 \Rightarrow Y = h_1 \cosh \beta y + h_2 \sinh \beta y$$

και από τις οριακές συνθήκες

$$Y(0) = 0 \Rightarrow 0 = h_1 \cdot 1 + 0 \Rightarrow h_1 = 0$$

$$Y_n(y) = h_n \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 9)

και η λύση για το δυναμικό είναι:

$$V_n(x,y) = d_n h_n \sin\frac{n\pi x}{b} \sinh\frac{n\pi y}{b}$$

Με το θεώρημα υπέρθεσης εφόσον τα $V_1, V_2, \ldots$ είναι λύσεις της Laplace τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους είναι επίσης λύση. Η γενική λοιπόν λύση είναι:

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{b} \sinh\frac{n\pi y}{b}$$

με c_n σταθερές που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

Με την οριακή συνθήκη στο επάνω μέρος της κατασκευής έχουμε

$$V(x,a) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{b} \sinh\frac{n\pi a}{b}$$

που είναι ανάπτυγμα σειράς Fourier του V_0.

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 10)

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέρη της εξίσωσης με $\sin(m\pi x/b)$ και ολοκληρώνοντας για $0 < x < b$ έχουμε

$$\int_0^b V_0 \sin\frac{m\pi x}{b}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\frac{n\pi a}{b} \int_0^b \sin\frac{m\pi x}{b} \sin\frac{n\pi x}{b}\,dx$$

Με την ορθογωνιότητα της ημιτονικής συνάρτησης

$$\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \end{cases}$$

έχουμε (μόνο τα $m = n$ είναι μη μηδενικά)

$$\int_0^b V_0 \sin\frac{n\pi x}{b}\,dx = c_n \sinh\frac{n\pi a}{b} \int_0^b \sin^2\frac{n\pi x}{b}\,dx \Rightarrow$$

$$-V_0 \frac{b}{n\pi} \cos\frac{n\pi x}{b}\bigg|_0^b = c_n \sinh\frac{n\pi a}{b} \frac{1}{2} \int_0^b \left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{b}\right) dx \Rightarrow$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 11)

$$\frac{V_0 b}{n\pi}(1-\cos n\pi) = c_n \sinh\frac{n\pi a}{b}\frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$c_n \sinh\frac{n\pi a}{b} = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi) \Rightarrow$$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

και η τελική λύση:

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

Συνήθως αρκεί η άθροιση των πρώτων λίγων όρων.

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 12)

Για $x = a/2$ και $y = 3a/4$ με $b = 2a$ έχουμε:

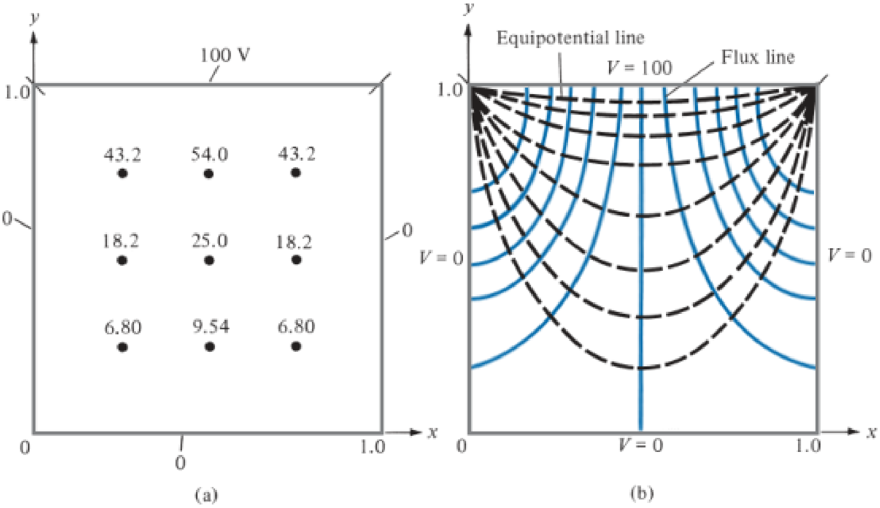
$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sinh\left(\frac{3n\pi}{8}\right)}{n\sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

```
V0=100; c = 4*V0/pi; csum = 0;
for n=1:2:30
  sumv = sin(n*pi/4)*sinh(3*n*pi/8)/(n*sinh(n*pi/2));
  csum += sumv;
  printf(" %4d  %12.8f  %10.6f \n",n,sumv,csum)
end
printf(" V = %g Volt \n",c*csum)
```

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 13)

```
   1    0.45172814    0.451728
   3    0.07250830    0.524236
   5   -0.01985073    0.504386
   7   -0.00646484    0.497921
   9    0.00229255    0.500213
  11    0.00085521    0.501069
  13   -0.00032994    0.500739
  15   -0.00013037    0.500608
  17    0.00005245    0.500661
  19    0.00002140    0.500682
  21   -0.00000883    0.500673
  23   -0.00000367    0.500670
  25    0.00000154    0.500671
  27    0.00000065    0.500672
  29   -0.00000028    0.500672
V = 63.7475 Volt
```

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 14)



Σχήμα: Για $a = b = 1$ m, $V_0 = 100$ V

Αντίσταση

Στα προηγούμενα έχουμε βρει την αντίσταση αγωγού μήκους ℓ και ομοιόμορφης διατομής S που βρίσκεται υπό τάση:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S} = \rho \frac{\ell}{S}$$

Εάν η διατομή δεν είναι ομοιόμορφη η παραπάνω σχέση δεν ισχύει. Έχουμε τότε:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

που είναι πρόβλημα οριακών συνθηκών.

Αντίσταση (συνέχεια 1)

Η διαδικασία που ακολουθούμε τότε είναι:

1. Επιλογή κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων.
2. Υπόθεση ότι V_0 η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο τερματικών του αγωγού.
3. Επίλυση εξίσωσης Laplace $\nabla^2 V = 0$ για εύρεση του δυναμικού V.
   Υπολογισμός $\mathbf{E} = -\nabla V$, και $I = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$.
4. Υπολογισμός $R = V_0 / I$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να υποθέσουμε ρεύμα I_0, να υπολογίσουμε το V και κατόπιν την αντίσταση $R = V / I_0$.

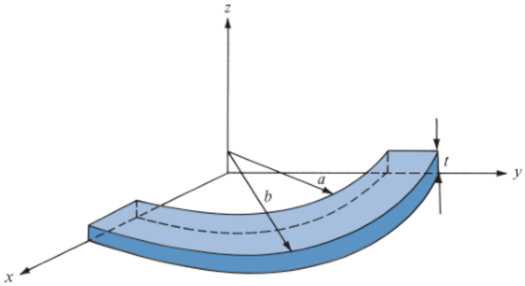
Παράδειγμα 4

Μεταλλική ράβδος αγωγιμότητας σ κάμπτεται σχηματίζοντας τόξο 90° με εσωτερική ακτίνα a, εξωτερική b και πάχος t όπως στο σχήμα. Δείξτε ότι η αντίσταση μεταξύ των επιφανειών $\rho = a$ και $\rho = b$ είναι:

$$R_1 = \frac{2\ln(b/a)}{\sigma\pi t}$$

και η αντίσταση μεταξύ των επιφανειών $z = 0$ και $z = t$ είναι:

$$R_2 = \frac{4t}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$$



Παράδειγμα 4 (συνέχεια 1)

Πρώτο ερώτημα:

Έστω τάση V_0 μεταξύ των κυρτών επιφανειών $\rho = a$ και $\rho = b$ έτσι ώστε $V(\rho = a) = 0$ και $V(\rho = b) = V_0$. $V = V(\rho)$ και η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = 0 \Rightarrow \rho\frac{dV}{d\rho} = A \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$$

$$V = A\ln\rho + B$$

Από τις οριακές συνθήκες

$$V(\rho = a) = 0 \Rightarrow 0 = A\ln a + B \Rightarrow B = -A\ln a$$

$$V(\rho = b) = V_0 \Rightarrow V_0 = A\ln b + B = A\ln b - A\ln a = A\ln\frac{b}{a} \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln(b/a)}$$

και έχουμε:

$$V = A\ln\rho - A\ln a = A\ln(\rho/a) = \frac{V_0}{\ln(b/a)}\ln(\rho/a)$$

Παράδειγμα 4 (συνέχεια 2)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{A}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{V_0}{\rho\ln(b/a)}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad d\mathbf{S} = -\rho d\phi dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{z=0}^{t}\frac{V_0\sigma}{\rho\ln(b/a)}dz\rho d\phi = \frac{\pi}{2}\frac{tV_0\sigma}{\ln(b/a)}$$

και

$$R_1 = \frac{V_0}{I} = \frac{2\ln(b/a)}{\sigma\pi t}$$

Παράδειγμα 4 (συνέχεια 3)

Δεύτερο ερώτημα:

Έστω τάση V_0 μεταξύ των επιπέδων επιφανειών $z = 0$ και $z = t$ έτσι ώστε $V(z = a) = 0$ και $V(z = t) = V_0$. $V = V(z)$ και η εξίσωση Laplace είναι:

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow V = Az + B$$

Από τις οριακές συνθήκες:

$$V(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$V(t) = V_0 \Rightarrow V_0 = At \Rightarrow A = V_0/t$$

Οπότε: $$V = \frac{V_0}{t} z \qquad \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\,\hat{\mathbf{z}} = -\frac{V_0}{t}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\frac{\sigma V_0}{t}\,\hat{\mathbf{z}} \qquad d\mathbf{S} = -\rho d\phi d\rho\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=a}^{b} \frac{V_0 \sigma}{t} \rho d\phi d\rho = \frac{V_0 \sigma}{t} \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2}{2} \Bigg|_a^b = \frac{V_0 \sigma \pi (b^2 - a^2)}{4t}$$

και

$$R_2 = \frac{V_0}{I} = \frac{4t}{\sigma \pi (b^2 - a^2)}$$

Εναλλακτικά, επειδή η διατομή είναι ίδια μεταξύ των δυο επιφανειών

$$R_2 = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{t}{\sigma(\pi/4)(b^2 - a^2)} = \frac{4t}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$$