Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 14

Α. Δροσόπουλος

29-11-2023

Outline

Topic

Ασκήσεις

- από βιβλίο Κεφάλαιο 23
- από βιβλίο Κεφάλαιο 24

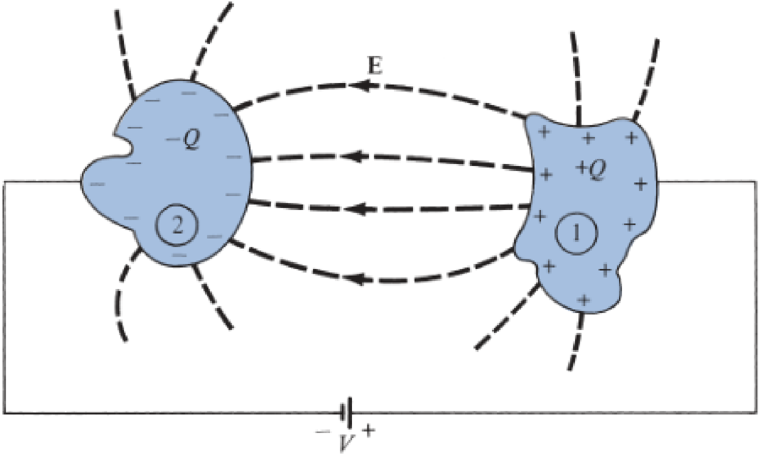
Topic

1. Ασκήσεις
2. Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες
3. Περίληψη Ηλεκτροστατικά προβλήματα

Χωρητικότητα

Όταν ένας απομονωμένος αγωγός φορτίζεται με φορτίο Q το δυναμικό του V αυξάνεται. Ο λόγος των δυο ονομάζεται χωρητικότητα του αγωγού γιατί δείχνει το ποσό του φορτίου που μπορεί να «χωρέσει» στον αγωγό για συγκεκριμένο δυναμικό. Ο ορισμός γενικεύεται σε συστήματα που αποτελούνται από πολλούς αγωγούς.

Η πιο διαδεδομένη περίπτωση είναι για σύστημα ζεύγους αγωγών με ίσο και αντίθετο φορτίο. Τέτοιο σύστημα ονομάζεται πυκνωτής και οι δυο αγωγοί είναι οι οπλισμοί του πυκνωτή με ενδιάμεσα κενό/αέρα ή κάποιο διηλεκτρικό. Οι δυο οπλισμοί έχουν διαφορετικό δυναμικό και οι γραμμές ηλεκτρικής ροής ξεκινούν κάθετα στην επιφάνεια από αυτόν με το θετικό φορτίο (αγωγός 1) και καταλήγουν στον άλλο με το αρνητικό φορτίο (αγωγός 2).


E
−Q
2
+Q
1
−
V
+

Χωρητικότητα (συνέχεια 2)

Η διαφορά δυναμικού (τάση) μεταξύ των οπλισμών είναι:

$$V = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

όπου $\mathbf{E}$ το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών. Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι τότε:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

όπου το ενδιαφέρον μας είναι στο μέτρο της τάσης V και έχουμε αγνοήσει το αρνητικό πρόσημο. Η μονάδα της χωρητικότητας είναι το Farad (F) με συνήθεις τιμές στα μF ή pF.

Όπως και για την αντίσταση μπορούμε:

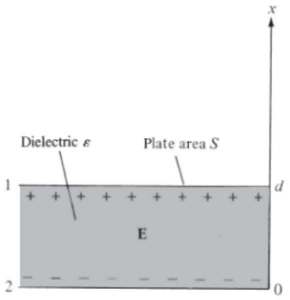
1. Να υποθέσουμε το Q. Να προσδιορίσουμε το V συναρτήσει του Q (νόμος Coulomb ή Gauss) και να βρούμε τη C.
2. Να υποθέσουμε το V. Να προδιορίσουμε το Q συναρτήσει του V (εξίσωση Laplace) και να βρούμε τη C.

Πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς

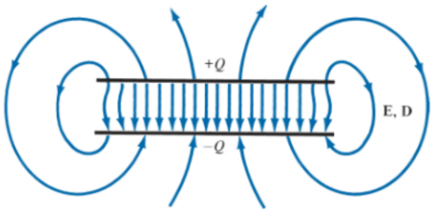
Έστω πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω κάθε οπλισμός έχει επιφάνεια S και απόσταση μεταξύ τους d. Έστω ότι οι οπλισμοί έχουν φορτίο $+Q$ και $-Q$ αντίστοιχα που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο ώστε

$$\rho_S = \frac{Q}{S}$$

Θέλουμε την τάση και το πεδίο μεταξύ οπλισμών καθώς και τη χωρητικότητα του πυκνωτή.



(a)



(b)

Πυκνωτής (συνέχεια 1)

Ιδανικά, η απόσταση d είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις των οπλισμών και μπορούμε να αγνοήσουμε τη σκέδαση στα άκρα και να θεωρήσουμε το πεδίο μεταξύ οπλισμών ότι είναι ομογενές.

Από την ηλεκτρική ροή και το πεδίο παραλλήλου ζεύγους αγώγιμων επιφανειών απείρων διαστάσεων (Διάλεξη 3, σελ 23)

$$\mathbf{D} = -\rho_S\,\hat{\mathbf{x}} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon}(-\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{Q}{\epsilon S}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$V = -\int_2^1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_0^d \left(-\frac{Q}{\epsilon S}\,\hat{\mathbf{x}}\right)\cdot dx\,\hat{\mathbf{x}} = \frac{Qd}{\epsilon S}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d}$$

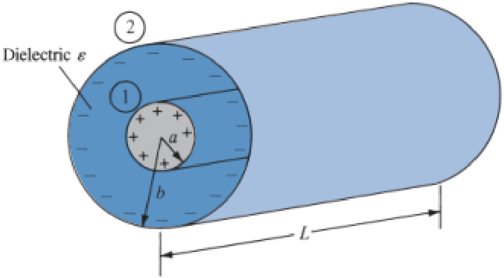
Η παραπάνω σχέση δίνει έναν πρακτικό τρόπο να μετρήσουμε την ϵ_r κάποιου διηλεκτρικού. Μετράμε την χωρητικότητα C_0 με αέρα και C με διηλεκτρικό και έχουμε $\epsilon_r = C/C_0$.

Ομοίως, η ηλεκτρική ενέργεια που μπορεί να αποθηκευτεί στον πυκνωτή είναι:

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{1}{2}\int_v \epsilon\frac{Q^2}{\epsilon^2 S^2}dv = \frac{\epsilon Q^2 Sd}{2\epsilon^2 S^2} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{d}{\epsilon S}\right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

Ομοαξονικός πυκνωτής

Ομοαξονικό καλώδιο ή ομοαξονικός κυλινδρικός πυκνωτής.



Θεωρούμε μήκος L, ακτίνα κεντρικού αγωγού είναι a και ακτίνα εξωτερικού μεταλλικού περιβλήματος b. Ο χώρος μεταξύ αγωγών περιέχει διηλεκτρικό ϵ. Οι αγωγοί είναι φορτισμένοι με φορτία $+Q$ και $-Q$ αντίστοιχα.

Ομοαξονικός πυκνωτής (συνέχεια 1)

Θεώρημα Gauss με κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας ρ όπου $a < \rho < b$

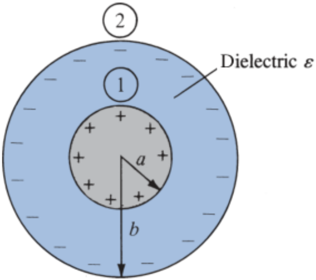
$$Q = \epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon E 2\pi\rho L \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$V = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_b^a \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right) \cdot d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}$$

Σφαιρικός πυκνωτής

Σφαιρικός πυκνωτής είναι ένα σύστημα με δυο ομόκεντρες αγώγιμες σφαιρικές επιφάνειες.



Θεωρούμε ακτίνα εσωτερικής επιφάνειας a, εξωτερικής b. Χώρος μεταξύ επιφανειών διηλεκτρικό ϵ. Οι επιφάνειες είναι φορτισμένες με φορτία $+Q$ και $-Q$ αντίστοιχα.

Σφαιρικός πυκνωτής (συνέχεια 1)

Θεώρημα Gauss με σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r όπου $a < r < b$

$$Q = \epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon E 4\pi r^2 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$V = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\right) \cdot dr\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

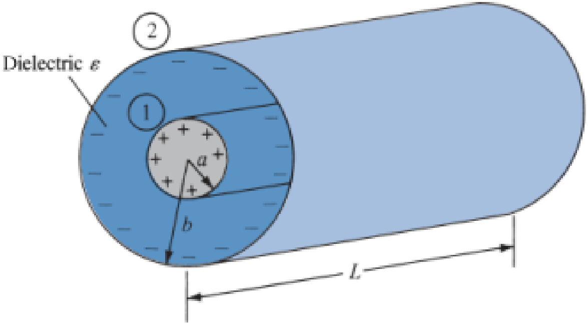
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

Με $b \to \infty$, $C = 4\pi\epsilon a$ έχουμε την χωρητικότητα μεμονωμένης σφαίρας που είναι κατά προσέγγιση ίδια και για άλλα σχήματα με περίπου ίδιες διαστάσεις. Χρήσιμο στον υπολογισμό παρασιτικής χωρητικότητας στοιχείων.

Παράδειγμα 5

Ένα ομοαξονικό καλώδιο περιέχει μονωτικό υλικό αγωγιμότητας σ. Εάν η ακτίνα του κεντρικού αγωγού είναι a και του εξωτερικού μεταλλικού περιβλήματος b δείξτε ότι η αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους είναι:

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$$



Παράδειγμα 5 (συνέχεια 1)

Θεωρούμε $V(a) = 0$ και $V(b) = V_0$ και η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = 0 \Rightarrow \rho\frac{dV}{d\rho} = A \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$$

$$V = A\ln\rho + B$$

Από τις οριακές συνθήκες

$$V(\rho = a) = 0 \Rightarrow 0 = A\ln a + B \Rightarrow B = -A\ln a$$

$$V(\rho = b) = V_0 \Rightarrow V_0 = A\ln b + B = A\ln b - A\ln a = A\ln\frac{b}{a} \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln(b/a)}$$

και έχουμε:

$$V = A\ln\rho - A\ln a = A\ln(\rho/a) = \frac{V_0}{\ln(b/a)}\ln(\rho/a)$$

Παράδειγμα 5 (συνέχεια 2)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{A}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{V_0}{\rho\ln(b/a)}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad d\mathbf{S} = -\rho d\phi dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{L}\frac{V_0\sigma}{\rho\ln(b/a)}dz\rho d\phi = \frac{2\pi L\sigma V_0}{\ln(b/a)}$$

Η αντίσταση ανά μονάδα μήκους είναι

$$R = \frac{V_0}{I\cdot L} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$$

και η αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους είναι

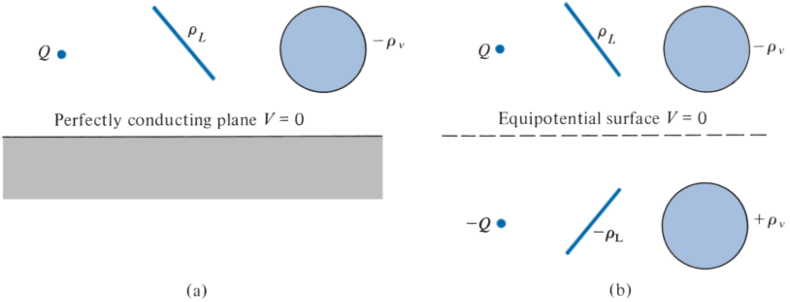
$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$$

Μέθοδος ειδώλων (method of images)

Η μέθοδος ειδώλων (Kelvin, 1848) χρησιμοποιείται για προσδιορισμό $V, \mathbf{E}, \mathbf{D}$ και ρ_S που οφείλονται σε φορτία παρουσία αγωγών. Με τη μέθοδο αυτή αποφεύγουμε την επίλυση των εξισώσεων Laplace και Poisson αξιοποιώντας το γεγονός ότι η επιφάνεια ενός αγωγού είναι ισοδυναμική. Αν και δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα ηλεκτροστατικά προβλήματα, εκεί που μπορεί, μετατρέπει ένα δύσκολο πρόβλημα σε απλό.

Σύμφωνα με τη μέθοδο ειδώλων μια δοθείσα κατανομή φορτίου πάνω από ένα τέλεια αγώγιμο απείρων διαστάσεων επίπεδο μπορεί να αντικατασταθεί από την ίδια την κατανομή φορτίου, το είδωλό της και μια ισοδυναμική επιφάνεια στην θέση του αγώγιμου επιπέδου.

Μέθοδος ειδώλων (συνέχεια 1)

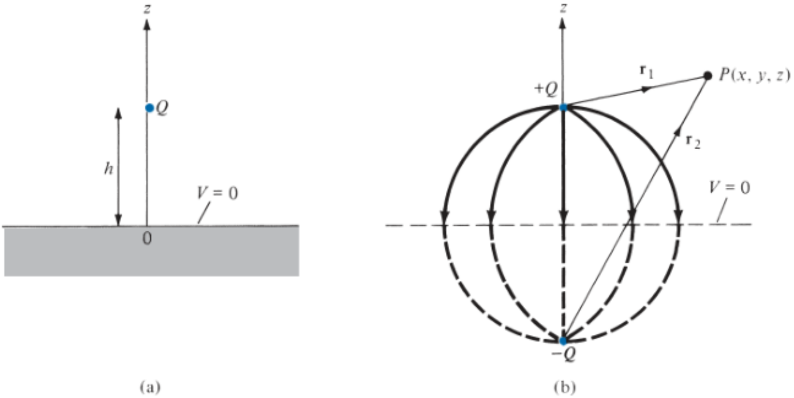


Παράδειγμα σημειακού φορτίου, γραμμικής κατανομής φορτίου και κατανομής φορτίου στο χώρο με την εφαρμογή της μεθόδου ειδώλων.

Συνθήκες εφαρμογής:

1. Τα φορτία είδωλα πρέπει να βρίσκονται στην αγώγιμη περιοχή (ικανοποιείται η εξίσωση Poisson).
2. Τα φορτία είδωλα πρέπει να είναι τοποθετημένα έτσι, ώστε στην αγώγιμη επιφάνεια το δυναμικό είναι μηδενικό ή σταθερό (ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες).

Σημειακό φορτίο επάνω από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο



Σχήμα: (a) Σημειακό φορτίο και αγώγιμο γειωμένο επίπεδο. (b) Σύστημα φορτίων με μέθοδο ειδώλων.

Σημειακό φορτίο επάνω από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο (συνέχεια 1)

Φορτίο Q σε απόσταση h από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο απείρων διαστάσεων. Το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο $P(x,y,z)$ είναι:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{Q\mathbf{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{-Q\mathbf{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3}$$

$$\mathbf{r}_1 = (x,y,z) - (0,0,h) = (x,y,z-h)$$

$$\mathbf{r}_2 = (x,y,z) - (0,0,-h) = (x,y,z+h)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(x,y,z-h)}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{3/2}} - \frac{(x,y,z+h)}{[x^2+y^2+(z+h)^2]^{3/2}}\right]$$

$$V = V_+ + V_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2+y^2+(z+h)^2]^{1/2}}\right]$$

για $z \geq 0$ και $V = 0$ για $z \leq 0$. Επίσης $V(z=0) = 0$.

Σημειακό φορτίο επάνω από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο (συνέχεια 2)

Η επιφανειακή πυκνότητα του επαγώμενου φορτίου υπολογίζεται τώρα

$$\rho_S = D_n = \epsilon_0 E_n \Big|_{z=0} = \frac{-Qh}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$$

και το ολικό επαγώμενο φορτίο

$$Q_i = \int \rho_S dS = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Qh\, dx\, dy}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$$

και με αλλαγή μεταβλητών $\rho^2 = x^2 + y^2$, $dxdy = \rho d\rho d\phi$

$$Q_i = -\frac{Qh}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\phi}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} = -\frac{Qh}{2\pi}2\pi\int_0^{\infty}(\rho^2+h^2)^{-3/2}\frac{1}{2}d(\rho^2) =$$

$$= \frac{Qh}{(\rho^2+h^2)^{1/2}}\Bigg|_0^{\infty} = -Q$$

όπως θα αναμέναμε.

Topic

Περίληψη Ηλεκτροστατικά προβλήματα

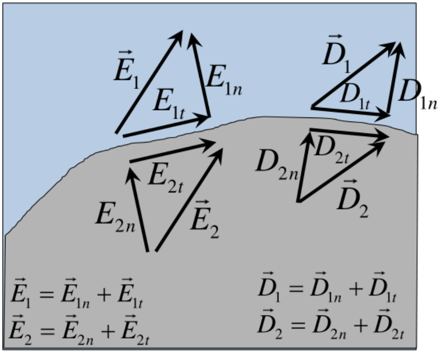
- Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες είναι εκείνα όπου τα δυναμικά ή οι παράγωγές τους είναι γνωστά στις οριακές επιφάνειες μιας περιοχής και καλούμαστε να προσδιορίσουμε το δυναμικό πεδίο μέσα στην περιοχή. Αυτό γίνεται με επίλυση εξίσωσης Poisson $(\rho_v \neq 0)$ ή Laplace $(\rho_v = 0)$.
- Σε μη ομογενή περιοχή (ϵ εξαρτάται από τη θέση στο χώρο) η εξίσωση Poisson είναι
$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v$$
Σε ομογενή περιοχή (ϵ σταθερά, δεν εξαρτάται από τη θέση στο χώρο) η εξίσωση Poisson είναι
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$
Σε περιοχή μηδενικού φορτίου $(\rho_v = 0)$ η εξίσωση Poisson γίνεται εξίσωση Laplace
$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0 \qquad \text{ή} \qquad \nabla^2 V = 0$$

Περίληψη (συνέχεια 1)

- Δοθέντος ενός ηλεκτροστατικού στοιχείου με κάποια κατανομή φορτίου θέλουμε να δούμε τι πεδίο σχηματίζεται στο στοιχείο.
- Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση Laplace ή Poisson με διπλή ολοκλήρωση αν το δυναμικό V εξαρτάται από μια μεταβλητή ή με τη μέθοδο διαχωριζομένων μεταβλητών αν εξαρτάται από περισσότερες. Εφαρμογή των οριακών συνθηκών οδηγούν στη μοναδική λύση.
- Ο υπολογισμός της αντίστασης R ή της χωρητικότητας C ενός στοιχείου μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ένα τέτοιο πρόβλημα οριακών συνθηκών. Για προσδιορισμό της R θεωρούμε τάση V_0 μεταξύ των άκρων του στοιχείου, λύνουμε την εξίσωση Laplace, υπολογίζουμε το ρεύμα $I = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ και τελικά την $R = V_0/I$. Ομοίως, για την χωρητικότητα C, θεωρούμε τάση V_0 μεταξύ των οπλισμών του στοιχείου, λύνουμε την εξίσωση Laplace, υπολογίζουμε το φορτίο $Q = \int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ και τελικά την $C = Q/V_0$.
- Πρόβλημα οριακών συνθηκών σε σύστημα με κατανομή φορτίου που συμπεριλαμβάνει αγώγιμο επίπεδο ή γωνία που σχηματίζεται από αγώγιμα επίπεδα μπορεί να λυθεί με την μέθοδο ειδώλων. Σύμφωνα με αυτή, αντικαθιστούμε την αγώγιμη επιφάνεια με ισοδυναμική και προσθέτουμε την εικονική κατανομή ειδώλων στο σύστημά μας. Ακολουθεί η διαδικασία λύσης με τις γνωστές τεχνικές.

- Δεν έχουμε ηλεκτροστατικά πεδία μέσα σε αγωγούς, $\rho_v = 0,\ \mathbf{E} = 0,\ \nabla V = 0$.
- Τι συμβαίνει στις διαχωριστικές επιφάνειες διηλεκτρικό-διηλεκτρικό, διηλεκτρικό-αγωγός; Αναλύουμε $\mathbf{E}$ και $\mathbf{D}$ σε τοπικά κάθετη και εφαπτόμενη συνιστώσα στην διαχωριστική επιφάνεια. Για διηλεκτρικό-διηλεκτρικό και $\rho_S = 0$ ισχύει:

Boundary Conditions



Tangential Components:

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Normal Components:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \qquad D_{1n} = D_{2n}$$

Refraction:

$$\frac{\tan\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan\theta_2}{\varepsilon_2}$$

Not Snell's Law

Περίληψη οριακές συνθήκες (συνέχεια 1)

- Για διηλεκτρικό-αγωγό, καταρχήν δεν έχουμε ηλεκτροστατικά πεδία μέσα σε αγωγούς. Στη διαχωριστική επιφάνεια έχουμε

μέρος διηλεκτρικού	$E_t = 0$	$D_n = \rho_S$
μέρος αγωγού	$\mathbf{E} = 0$	$\mathbf{D} = 0$