Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 12

Α. Δροσόπουλος

22-11-2023

Outline

Topic

1. Ασκήσεις
2. Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

Ασκήσεις

- από βιβλίο Κεφάλαιο 23

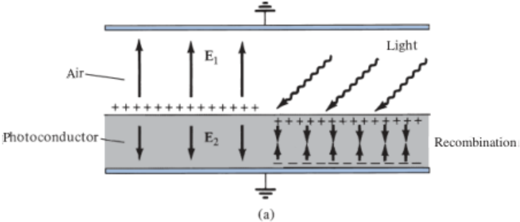
Topic

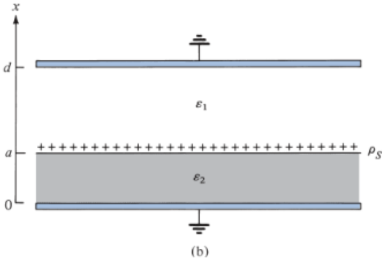
1. Ασκήσεις
2. Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

Εφαρμογή 2

Το κοινό, ξηρογραφικό, φωτοτυπικό μηχάνημα είναι ηλεκτροστατική εφαρμογή. Η φωτοαγώγιμος επιφάνεια αρχικά φορτίζεται ομοιόμορφα. Η σελίδα που είναι για φωτοτυπία φωτίζεται κατάλληλα και το φως εστιάζεται στο επάνω μέρος της φωτοαγώγιμης επιφάνειας. Τα φορτία από το κάτω μέρος συνδυάζονται με αυτά στο επάνω για εξουδετέρωση. Η εικόνα της φωτοτυπίας σχηματίζεται στο λεπτό στρώμα φορτισμένου γραφίτη που απλώνεται στη φωτοαγώγιμη επιφάνεια. Το ηλεκτρικό πεδίο προσελκύει το φορτισμένο γραφίτη στο χαρτί, αυτό θερμαίνεται και λειώνει εκεί σχηματίζοντας τη φωτοτυπία. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στις δυο επιφάνειες του φωτοαγωγού;

Εφαρμογή 2 (συνέχεια 1)





Εφαρμογή 2 (συνέχεια 2)

Το ολικό φορτίο είναι μηδέν άρα χρησιμοποιούμε την εξίσωση Laplace. Το δυναμικό επίσης εξαρτάται μόνο από το x και έχουμε:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Με διπλή ολοκλήρωση: $V = Ax + B$. Ξεχωρίζουμε τις δυο περιοχές πάνω και κάτω από την $x = a$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 x + B_1, \quad x > a \\ V_2 &= A_2 x + B_2, \quad x < a \end{aligned}$$

Οι οριακές συνθήκες στα γειωμένα ηλεκτρόδια είναι:

$$\begin{aligned} V_1(x = d) &= 0 \\ V_2(x = 0) &= 0 \end{aligned}$$

Στη φωτοαγώγιμη επιφάνεια:

$$\begin{gathered} V_1(x = a) = V_2(x = a) \\ D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \end{gathered}$$

Εφαρμογή 2 (συνέχεια 3)

Επομένως:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 &=& A_1 d + B_1 \\ 0 &=& 0 + B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} B_1 &=& -A_1 d \\ B_2 &=& 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} A_1 a + B_1 &=& A_2 a \\ D_{1n} - D_{2n} &=& \rho_S \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} A_1(a-d) - A_2 a &=& 0 \\ -\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2 &=& \rho_S \end{array}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla V$ με

$$\rho_S = D_{1n} - D_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = -\epsilon_1 \frac{dV_1}{dx} + \epsilon_2 \frac{dV_2}{dx} = -\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2$$

Λύνοντας ως προς A_1, A_2 έχουμε

$$A_1 = \frac{a\rho_S}{(a-d)\epsilon_2 - a\epsilon_1} \qquad A_2 = \frac{(a-d)\rho_S}{(a-d)\epsilon_2 - a\epsilon_1}$$

Εφαρμογή 2 (συνέχεια 4)

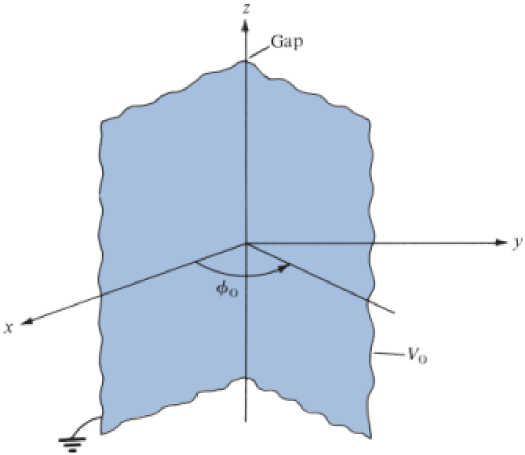
και

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{dV_1}{dx}\,\hat{\mathbf{x}} = -A_1\hat{\mathbf{x}} = \frac{\rho_S}{\epsilon_1\left[1 + \dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\dfrac{d}{a} - \dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right]}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{dV_2}{dx}\,\hat{\mathbf{x}} = -A_2\hat{\mathbf{x}} = \frac{\rho_S\left(1 - \dfrac{d}{a}\right)}{\epsilon_1\left[1 + \dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\dfrac{d}{a} - \dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right]}\,\hat{\mathbf{x}}$$

Παράδειγμα 1

Αγώγιμα ημι-επίπεδα $\phi = 0$ και $\phi = \pi/6$ διαχωρίζονται με ένα πολύ λεπτό μονωτικό διάκενο (άξονας z). Εάν $V(\phi = 0) = 0$ και $V(\phi = \pi/6) = 100$ V υπολογίστε V και $\mathbf{E}$ στην περιοχή μεταξύ των επιπέδων.



Παράδειγμα 1 (συνέχεια 1)

Εφόσον το V εξαρτάται μόνο από την ϕ χρησιμοποιούμε εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$$

εφόσον $\rho = 0$ εξαιρείται λόγω του διακένου. Ολοκλήρωση δυο φορές δίνει:

$$V = A\phi + B$$

Με οριακές συνθήκες

$$\text{για } \phi = 0, V = 0, \qquad 0 = 0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$\text{για } \phi = \phi_0, V = V_0, \qquad V_0 = A\phi_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\phi_0}$$

$$\text{Οπότε } V = \frac{V_0}{\phi_0}\phi$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια 2)

και

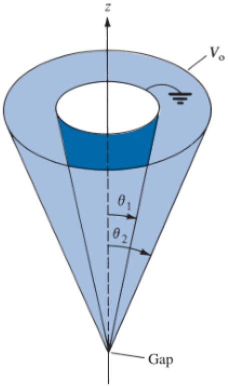
$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{d\phi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{V_0}{\rho\phi_0}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Αντικαθιστώντας $V_0 = 100$ V και $\phi_0 = \pi/6$

$$V = \frac{600}{\pi}\,\phi \qquad \text{και} \qquad \mathbf{E} = -\frac{600}{\pi\rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Παράδειγμα 2

Δυο αγώγιμες κωνικές επιφάνειες ($\theta = \pi/10$ και $\theta = \pi/6$) έχουν ένα μικροσκοπικό διάκενο στην κορυφή τους ($r = 0$) και δεν είναι σε επαφή. Αν $V(\theta = \pi/10) = 0$ και $V(\theta = \pi/6) = 50\ \mathrm{V}$, βρείτε V και $\mathbf{E}$ στο χώρο μεταξύ τους.



Παράδειγμα 2 (συνέχεια 1)

Το V εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ επομένως η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dV}{d\theta} \right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dV}{d\theta} \right] = 0$$

εφόσον $r = 0$ και $\theta = 0, \pi$ εξαιρούνται. Η πρώτη ολοκλήρωση δίνει

$$\sin\theta \frac{dV}{d\theta} = A \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{\sin\theta}$$

Η δεύτερη ολοκλήρωση δίνει

$$V = A \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = A \int \frac{d\theta}{2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)} = A \int \frac{(1/2)\sec^2(\theta/2) d\theta}{\tan(\theta/2)} =$$

$$= A \int \frac{d[\tan(\theta/2)]}{\tan(\theta/2)} = A \ln[\tan(\theta/2)] + B$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια 2)

Οριακές συνθήκες τώρα:

$$V(\theta = \theta_1) = 0 \Rightarrow A \ln[\tan(\theta_1/2)] + B = 0 \Rightarrow B = -A \ln[\tan(\theta_1/2)] \Rightarrow$$

$$V = A \ln\left[\frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right]$$

$$V(\theta = \theta_2) = V_0 \Rightarrow A \ln\left[\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right] = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln\left[\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right]}$$

και $$V = \frac{V_0 \ln\left[\frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right]}{\ln\left[\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right]}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια 3)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{A}{r\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{V_0}{r\sin\theta\ln\left[\dfrac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right]}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Για $\theta_1 = \pi/10$, $\theta_2 = \pi/6$, $V_0 = 50$ V έχουμε

$$V = 95.1\ \ln\left[\frac{\tan(\theta/2)}{0.158}\right]\ \mathrm{V}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{95.1}{r\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\ \mathrm{V/m}$$