

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 11

A. Δροσόπουλος

15-11-2023

- 1 Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες
- 2 Ασκήσεις

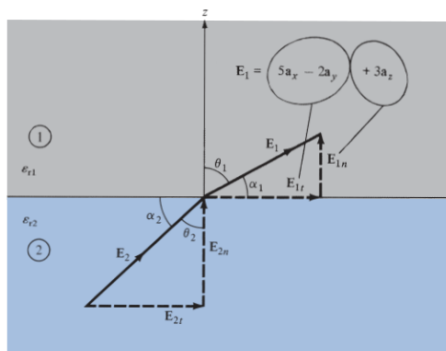
1 Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

2 Ασκήσεις

Παράδειγμα

Δυο ομογενή, εκτεταμένα, ιστροπικά διηλεκτρικά έχουν κοινή επαφή το επίπεδο $z = 0$. Για $z > 0$, $\epsilon_{r1} = 4$ και για $z < 0$, $\epsilon_{r2} = 3$. Στο χώρο $z \geq 0$ έχουμε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_1 = (5, -2, 3)$ kV/m. Υπολογίστε:

- \mathbf{E}_2 για $z \leq 0$.
- Τις γωνίες που σχηματίζουν τα $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ με την διεπαφή.
- Την πυκνότητα ενέργειας σε J/m³ στα δυο διηλεκτρικά.
- Την ενέργεια σε κύβο ακμής 2 m με κέντρο στο $(3, 4, -5)$.



Παράδειγμα (λύση 1)

Κάθετες συνιστώσες: $\mathbf{E}_{1n} = (\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 3)$ $\mathbf{E}_{2n} = (\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}}$

Επίσης, για παράλληλες συνιστώσες: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t \Rightarrow$

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = (5, -2, 0) \quad \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} = (5, -2, 0)$$

και για το \mathbf{E}_2

$$\mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_{1n} \Rightarrow \mathbf{E}_{2n} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \mathbf{E}_{1n} = \frac{4}{3}(3\hat{\mathbf{z}}) = 4\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} = (5, -2, 4) \text{ kV/m}$$

Από το σχήμα, οι γωνίες που σχηματίζουν τα \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 με την διεπαφή:

$$\tan \theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = 1.7951 \Rightarrow \theta_1 = 60.9^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 90^\circ - \theta_1 = 29.1^\circ$$

$$\tan \theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = 1.3463 \Rightarrow \theta_2 = 53.4^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 90^\circ - \theta_2 = 36.6^\circ$$

Παράδειγμα (λύση 2)

Οι πυκνότητες ενέργειας:

$$w_{E1} = \frac{1}{2} \epsilon_1 |\mathbf{E}_1|^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} (25 + 4 + 9) \times 10^6 = 6.72 \times 10^{-4} \text{ J/m}^3$$

$$w_{E2} = \frac{1}{2} \epsilon_2 |\mathbf{E}_2|^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} (25 + 4 + 16) \times 10^6 = 5.97 \times 10^{-4} \text{ J/m}^3$$

Ο κύβος βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή 2. Οπότε:

$$W_E = w_{E2} \times 2^3 = 4.775 \times 10^{-3} \text{ J} = 4.775 \text{ mJ}$$

Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

Ο προσδιορισμός του ηλεκτρικού πεδίου στα προηγούμενα γινόταν είτε με το νόμο Coulomb είτε με το νόμο Gauss εφόσον ήταν γνωστή η κατανομή του φορτίου. Εναλλακτικά, μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και η σχέση $\mathbf{E} = -\nabla V$ εάν το δυναμικό πεδίο ήταν γνωστό στην περιοχή ενδιαφέροντος. Στην πράξη όμως και η κατανομή φορτίου και το δυναμικό πεδίο είναι άγνωστα.

Αυτό που συνήθως γνωρίζουμε είναι απλώς φορτίο και δυναμικό σε κάποια σύνορα, διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ υλικών και θέλουμε \mathbf{E} και V για ολόκληρη την περιοχή. Σε αυτά τα προβλήματα χρησιμοποιούμε εξισώσεις Laplace ή Poisson ή μέθοδο ειδώλων ([method of images](#)) και τα προβλήματα ονομάζονται προβλήματα οριακών συνθηκών ([boundary value problems](#)).

Τα παραπάνω μαθηματικά εργαλεία μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε μεταξύ άλλων στην εύρεση αντίστασης και χωρητικότητας για διάφορα ηλεκτρικά αντικείμενα / στοιχεία.

Εξισώσεις Poisson και Laplace

Για γραμμικά, ισότροπα υλικά ισχύει ο νόμος Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_v$$

και για ηλεκτροστατικά πεδία

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, για ανομοιογενή υλικά:

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = \rho_v \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v$$

ενώ για ομογενή:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Οι παραπάνω δυο εξισώσεις αποτελούν την εξίσωση Poisson. Στην ειδική περίπτωση όπου $\rho_v = 0$ (περιοχή χωρίς ελεύθερα φορτία) έχουμε

$$\nabla^2 V = 0$$

την εξίσωση Laplace.

Εξισώσεις Poisson και Laplace (συνέχεια 1)

Εξίσωση Laplace στα τρία συστήματα συντεταγμένων

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Χρησιμοποιείται και σε άλλα πεδία.

Θεώρημα μοναδικότητας (uniqueness theorem)

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων και το ερώτημα γεννάται αν δίνουν διαφορετικές λύσεις. Ή αλλιώς, εάν έχουμε μια λύση της εξίσωσης Laplace για συγκεκριμένες οριακές συνθήκες, υπάρχει κάποια άλλη; Διαφορετική; Η λύση που έχουμε είναι μοναδική; Απάντηση: Ναι. Η απόδειξη με εις άτοπο απαγωγή.

Έστω δυο λύσεις V_1 , V_2 της εξίσωσης Laplace που ικανοποιούν τις ίδιες οριακές συνθήκες. Άρα:

$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad \nabla^2 V_2 = 0, \quad V_1 = V_2 \text{ στο σύνορο}$$

Για τη διαφορά τους $V_d = V_1 - V_2$ έχουμε:

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 V_2 - \nabla^2 V_1 = 0, \quad V_d = 0 \text{ στο σύνορο}$$

Έστω $\mathbf{A} = V_d \nabla V_d$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

και τη σχέση $\nabla^2 V_d = 0$ έχουμε:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

Θεώρημα μοναδικότητας (συνέχεια 1)

και με το θεώρημα απόκλισης:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου S η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο v και αποτελεί το σύνορο/όριο στο πρόβλημά μας, έχουμε:

$$\int_v \nabla V_d \cdot \nabla V_d \, dv = \oint_S V_d \nabla V_d \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \int_v |\nabla V_d|^2 \, dv = 0$$

που σημαίνει $|\nabla V_d| = 0$ παντού στο χώρο v και άρα V_d σταθερό παντού στο χώρο v συμπεριλαμβανομένου του συνόρου. Και επειδή $V_1 = V_2$ στο σύνορο, είναι ίσα και παντού στο χώρο v . Τελικά η λύση είναι μία και μοναδική.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η μοναδικότητα λύσης και για την εξίσωση Poisson.

Αναγκαία στοιχεία για λύση προβλήματος οριακών συνθηκών

- Η κατάλληλη διαφορική εξίσωση (Laplace ή Poisson).
- Οι συγκεκριμένες οριακές συνθήκες.
- Η περιοχή λύσης.

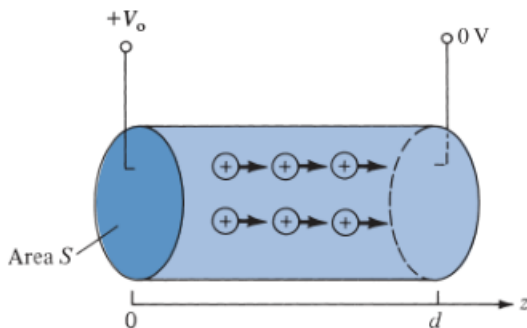
Αν λείπει κάτι από τα παραπάνω δεν μπορούμε να έχουμε πλήρη λύση.

Η γενική διαδικασία για επίλυση προβλήματος οριακών συνθηκών είναι:

- 1 Επίλυση εξίσωσης Laplace ($\rho_v = 0$) ή Poisson ($\rho_v \neq 0$) είτε με απευθείας ολοκλήρωση αν η V είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής είτε με χωρισμό μεταβλητών αν η V είναι συνάρτηση περισσοτέρων της μιας μεταβλητής. Η λύση αυτή είναι γενική, με κάποιες άγνωστες σταθερές ολοκλήρωσης.
- 2 Από τις οριακές συνθήκες προσδιορίζονται αυτές οι σταθερές και η λύση γίνεται μοναδική.
- 3 Έχοντας το V , βρίσκουμε $\mathbf{E} = -\nabla V$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.
- 4 Μπορούμε να συνεχίσουμε στην εύρεση του φορτίου Q ενός αγωγού με $Q = \int_S \rho_S dS$, όπου $\rho_S = D_n$ η κάθετη συνιστώσα του \mathbf{D} στον αγωγό. Η χωρητικότητα ενός ζεύγους αγωγών είναι τότε $C = Q/V$. Μπορούμε επίσης να βρούμε την αντίσταση $R = V/I$ όπου $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.

Η ηλεκτροδυναμική άντληση (Electrohydrodynamic pumping, EHD pumping) είναι μέθοδος μη μηχανικής άντλησης όπου διηλεκτρικό υγρό σε έντονο ηλεκτρικό πεδίο αλληλεπιδρά με φορτισμένα σωματίδια και κινείται. Η ροή του υγρού μπορεί να απάγει θερμότητα από στοιχεία που λειτουργούν σε συνθήκες υψηλής ισχύος και να επιτυγχάνει ψύξη.

Εφαρμογή 1 (συνέχεια 1)



Έστω το παραπάνω μοντέλο EHD αντλίας. Η περιοχή μεταξύ των ηλεκτροδίων περιέχει μια ομοιόμορφη κατανομή φορτίου ρ_0 που παράγεται στο αριστερό ηλεκτρόδιο και συλλέγεται στο δεξί. Υπολογίστε την πίεση της αντλίας εάν $\rho_0 = 25\text{ mC/m}^3$ και $V_0 = 22\text{ kV}$.

Εφαρμογή 1 (συνέχεια 1)

Εφόσον $\rho_v \neq 0$ χρησιμοποιούμε εξίσωση Poisson με $\rho_v = \rho_0$:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_0}{\epsilon}$$

Η συμμετρία του προβλήματος και οι οριακές συνθήκες $V(z=0) = V_0$ και $V(z=d) = 0$ δείχνουν ότι η εξάρτησή μας είναι μόνο στην συντεταγμένη z . Οπότε

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \Rightarrow \dots \Rightarrow V = -\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon} + Az + B$$

όπου A και B σταθερές ολοκλήρωσης. Εφαρμογή οριακών συνθηκών δίνει:

$$\text{για } z = 0, V = V_0 \quad V_0 = B$$

$$\text{για } z = d, V = 0 \quad 0 = -\frac{\rho_0 d^2}{2\epsilon} + Ad + V_0 \Rightarrow A = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}$$

$$\text{και } V = -\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon} + \left(\frac{\rho_0 d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d} \right) z + V_0$$

Εφαρμογή 1 (συνέχεια 2)

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz} \hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\rho_0 z}{\epsilon} - \frac{\rho_0 d}{2\epsilon} + \frac{V_0}{d} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

και η δύναμη:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{E} dq = \int_v \rho_0 \mathbf{E} dv = \rho_0 \int dS \int_{z=0}^d \mathbf{E} dz = \rho_0 S \left[\frac{V_0 z}{d} + \frac{\rho_0}{2\epsilon} (z^2 - zd) \right] \Bigg|_0^d \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{F} = \rho_0 S V_0 \hat{\mathbf{z}}$$

Η πίεση είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας:

$$P = \frac{F}{S} = \rho_0 V_0 = 25 \times 10^{-3} \times 22 \times 10^3 = 550 \text{ N/m}^2$$

Σε ατμόσφαιρες, είναι 0.00543 atm.

1 Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

2 Ασκήσεις

- από παλιά θέματα 220216 και 220831
- από βιβλίο Κεφάλαιο 23