# Ηλεκτρομαγνητισμός

## Διάλεξη 08

Α. Δροσόπουλος

03-11-2023

# Outline

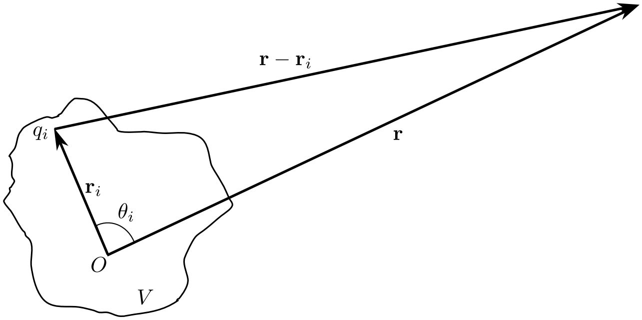
1. Δίπολο
2. Ασκήσεις
3. Διαφάνειες Βιβλίου

# Topic

# Ηλεκτρικό δίπολο

Έστω $N$ σημειακά φορτία $q_i$, στις θέσεις $\mathbf{r}_i$, σε όγκο $V$. Το δυναμικό σε σημείο $\mathbf{r}$ είναι

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|}$$




**Σχήμα:** Σύστημα σημειακών φορτίων με διανύσματα θέσης πεδίου και πηγών $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_i$ αντίστοιχα.

# Ηλεκτρικό δίπολο 2

Έχουμε

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\|^2 = r^2 + r_i^2 - 2rr_i\cos\theta_i = r^2\left[1 - 2\cos\theta_i\left(\frac{r_i}{r}\right) + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\|^{-1} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\theta_i\left(\frac{r_i}{r}\right) + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Με το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + nx^{n-1} + x^n$$

με $\quad n = -\dfrac{1}{2} \quad$ και $\quad x = -2\cos\theta_i\left(\dfrac{r_i}{r}\right) + \left(\dfrac{r_i}{r}\right)^2 \quad$ έχουμε

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\|^{-1} = \frac{1}{r}\left[1 + \cos\theta_i\left(\frac{r_i}{r}\right) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta_i - 1)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 + \cdots\right.$$

# Ηλεκτρικό δίπολο 3

Το δυναμικό γίνεται

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i^2 \frac{3\cos^2\theta_i - 1}{2} + \cdots =$$

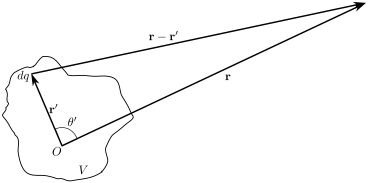
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{n=0}^{N} q_i \left(\frac{r_i}{r}\right)^n P_n(\cos\theta_i)$$

και για συνεχή κατανομή με πυκνότητα φορτίου $\rho(\mathbf{r}')$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int_V \rho(\mathbf{r}')dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\int_V \rho(\mathbf{r}')r'\cos\theta'\, dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\int_V \rho(\mathbf{r}')r'^2 \frac{3\cos^2\theta' - 1}{2}\, dV + \cdots =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{r^{(n+1)}}\int (r')^n P_n(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}')dV$$

όπου $P_n(\cos\theta)$ τα πολυώνυμα Legendre.




**Σχήμα:** Συνεχή κατανομή φορτίου με διανύσματα θέσης πεδίου και πηγών $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ αντίστοιχα.

# Ηλεκτρικό δίπολο 4

- Υπενθυμίζεται ότι θεωρούμε το πεδίο μακρυά από τις πηγές.
- Τα παραπάνω αναπτύγματα είναι οι πολυπολικές εκφράσεις του δυναμικού. Οι όροι των αναπτυγμάτων ονομάζονται με τη σειρά: μονοπολικός, διπολικός, τετραπολικός και εξαρτώνται από το $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ αντίστοιχα.
- Αριθμητής του πρώτου όρου είναι το ολικό φορτίο $Q$. Για $Q \neq 0$ είναι ο σημαντικότερος όρος με όλους τους άλλους αμελητέους. Το δυναμικό είναι ίσο με σημειακού φορτίου $Q$ στην αρχή των αξόνων.
- Αριθμητής του δεύτερου όρου είναι η προβολή στο $\mathbf{r}$ της ποσότητας

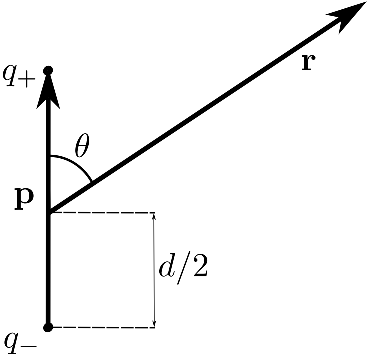
$$\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \qquad \text{ή} \qquad \int_V \rho(\mathbf{r}')r' dV$$

  Η ποσότητα αυτή λέγεται διπολική ροπή του συστήματος φορτίων $q_i$ ή της κατανομής $\rho(\mathbf{r}')$.
- Για $Q = 0$ ο μονοπολικός όρος μηδενίζεται και ο ισχυρότερος είναι ο διπολικός.
- Η απλούστερη περίπτωση για $Q = 0$ είναι σύστημα δυο ίσων και ετεροσήμων φορτίων $q_+$, $q_-$ σε απόσταση $d$. Το σύστημα αυτό λέγεται ηλεκτρικό δίπολο.

# Ηλεκτρικό δίπολο 5

Από τον διπολικό όρο έχουμε

$$\sum_{i=1}^{2} q_i r_i \cos\theta_i = q\frac{d}{2}\Big[\cos\theta - \cos(\pi-\theta)\Big] = qd\cos\theta = p\cos\theta = \mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}$$




**Σχήμα:** Δίπολο και ηλεκτρική ροπή

# Ηλεκτρικό δίπολο 6

όπου $\mathbf{p}$ η ηλεκτρική ροπή του διπόλου με μέτρο $qd$ και φορά από το αρνητικό στο θετικό φορτίο. Για μακρινές αποστάσεις από το δίπολο $(r \gg d)$ το πεδίο του θετικού φορτίου εξουδετερώνεται σχεδόν από το πεδίο του αρνητικού (όχι εντελώς) αλλά σε κοντινές αποστάσεις η διαφορά είναι μεγάλη και δεν αρκεί ο διπολικός όρος από μόνος του να αποδώσει το δυναμικό (θυμηθείτε την αρχική προσέγγιση).

Όταν ο διπολικός όρος είναι μηδέν ο σημαντικότερος όρος είναι ο τετραπολικός, κ.ο.κ.

Το δυναμικό διπόλου με κέντρο διπόλου στην αρχή των αξόνων είναι

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

και με κέντρο διπόλου στο $\mathbf{r}'$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}$$

# Ηλεκτρικό δίπολο 7

Το ηλεκτρικό πεδίο για κέντρο διπόλου στην αρχή των αξόνων σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{E} = -\nabla U = -\left[\frac{\partial U}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right] = \frac{qd\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{qd\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} =$$

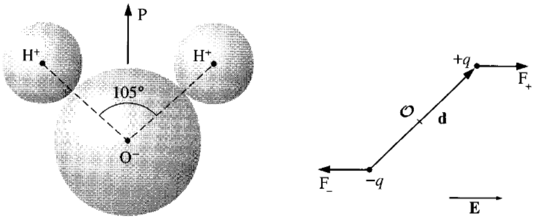
$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Παρατηρούμε εδώ ότι το σημειακό ηλεκτρικό φορτίο, μόνο του, αποτελεί *μονόπολο* και το ηλεκτρικό πεδίο του μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με $r^2$ ενώ το δυναμικό του αντιστρόφως ανάλογα με $r$. Για το δίπολο οι μεταβολές είναι $r^3$ και $r^2$ αντίστοιχα. Οι δομές αυτές επεκτείνονται και σε μεγαλύτερης τάξης πολύπολα με αντίστοιχες μεταβολές σε πεδίο και δυναμικό.

# Ηλεκτρικό δίπολο 8

Δίπολο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο υφίσταται ζεύγος δυνάμεων, $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}$ και $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}$ που εφαρμόζει ροπή

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) = \left[\frac{\mathbf{d}}{2} \times (q\mathbf{E})\right] + \left[-\frac{\mathbf{d}}{2} \times (-q\mathbf{E})\right] = q\mathbf{d} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

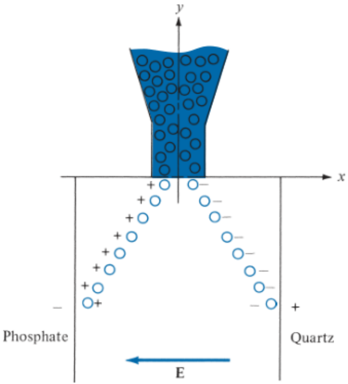



**Σχήμα:** Μόριο νερού (αριστερά). Ζεύγος δυνάμεων σε δίπολο (δεξιά).

# Topic

# Άσκηση

Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην πρακτική εφαρμογή διαχωρισμού στερεών. Π.χ. σε ορυκτό που έχει πρώτα διασπαστεί σε κόκκους χαλαζία και φωσφορούχο πέτρωμα ο διαχωρισμός γίνεται με εφαρμογή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως στο σχήμα. Να βρεθεί ο διαχωρισμός όταν οι κόκκοι/σωματίδια πέσουν διάστημα $80$ cm. Θεωρούμε ότι όλα τα σωματίδια έχουν την ίδια μάζα $m$ και φορτίο $Q$. Δίδονται $E = 500$ kV$/$m και $Q/m = 9$ μC$/$kg για θετικά και αρνητικά φορτισμένα σωματίδια.



# Άσκηση 2

Αγνοώντας τις δυνάμεις Coulomb μεταξύ σωματιδίων βλέπουμε ότι το πεδίο $\mathbf{E}$ δρα οριζόντια και η βαρύτητα κάθετα. Επομένως τα σωματίδια κινούνται και ισχύει

$$Q\mathbf{E} = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Q}{m}E \Rightarrow x = \frac{Q}{2m}Et^2 + c_1 t + c_2$$

$$-mg = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -g \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3 t + c_4$$

όπου $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ σταθερές ολοκλήρωσης. Θεωρώντας αρχική θέση και ταχύτητα μηδέν, μηδενίζονται αυτές οι σταθερές. Οπότε η τροχιά είναι:

$$x = \frac{Q}{2m}Et^2 \qquad \text{και} \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Για $y = -80$ cm $= -0.8$ m και $g = 9.8$ m/s$^2$

$$t^2 = \frac{0.8 \times 2}{9.8} = 0.1633 \text{ s}^2$$

$$x = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{5} \times 0.1633 = 0.3673 \text{ m}$$

και η μεταξύ τους απόσταση είναι $2x = 73.47$ cm.

# Άσκηση

Πεπερασμένο φορτισμένο επίπεδο $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $z = 0$ έχει πυκνότητα φορτίου $\rho_S = xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}$ $\mathrm{nC/m}$. Να βρεθούν:

- το ολικό φορτίο $Q$
- το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ στο $(0, 0, 5)$
- τη δύναμη που υφίσταται σε σημειακό φορτίο $-1$ $\mathrm{mC}$ στο $(0, 0, 5)$

---

$$Q = \int_S \rho_S dS = \int_0^1 \int_0^1 xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2} dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y \left[ \int_0^1 (x^2 + y^2 + 25)^{3/2} d(x^2) \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y \frac{2}{5} (x^2 + y^2 + 25)^{5/2} \Big|_0^1 dy = \cdots = 33.15 \ \mathrm{nC}$$

# Άσκηση 2

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\rho_S dS}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{\mathbf{R}} = \int_S \frac{\rho_S dS}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

όπου $\mathbf{r}-\mathbf{r}' = (0,0,5)-(x,y,0) = (-x,-y,5)$. Οπότε

$$\mathbf{E} = \int_0^1\int_0^1 K\times 10^{-9}\frac{xy(x^2+y^2+25)^{3/2}(-x,-y,5)dxdy}{(x^2+y^2+25)^{3/2}} = \int_0^1\int_0^1 9xy(-x,-y,5)dxdy =$$

$$= -\left[9\int_0^1\int_0^1 x^2ydxdy\right]\hat{\mathbf{x}} - \left[9\int_0^1\int_0^1 xy^2dxdy\right]\hat{\mathbf{y}} + \left[45\int_0^1\int_0^1 xydxdy\right]\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= (-1.5,-1.5,11.25)\ \mathrm{V/m}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = (1.5,1.5,-11.25)\ \mathrm{mN}$$

# Άσκηση 2.14

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σφαίρας ακτίνας $R$ με πυκνότητα φορτίου ανάλογη με την απόσταση από το κέντρο, $\rho = kr$, όπου $k$ σταθερά.

---

Από νόμο Gauss εντός της σφαίρας:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r=0}^{r} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} kr\, r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi =$$

$$= \frac{k\, 4\pi}{\epsilon_0} \frac{r^4}{4} = \frac{\pi k}{\epsilon_0} r^4 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{kr^2}{4\epsilon_0}\, \hat{\mathbf{r}}$$

Εκτός της σφαίρας:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi k}{\epsilon_0} R^4 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2}\, \hat{\mathbf{r}}$$

# Άσκηση D4.9

Ηλεκτρικό δίπολο στην αρχή των αξόνων έχει ροπή $\mathbf{p} = 3\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ nC · m. Υπολογίστε το δυναμικό στα σημεία $A(2, 3, 4)$ και $B(2.5, 30^\circ, 40^\circ)$.

---

Δυναμικό διπόλου με κέντρο διπόλου στην αρχή των αξόνων είναι

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

```
K=9e9; p=[3 -2 1]*1e-9; r=[2 3 4];
U=K*dot(p,r)/norm(r)^3 = 0.2305 V
```

Για το B σε σφαιρικές το μετατρέπουμε σε καρτεσιανές και

```
r=2.5; theta=30*pi/180; phi=40*pi/180;
R=[r*sin(theta)*cos(phi) r*sin(theta)*sin(phi) r*cos(theta)];
U=K*dot(p,R)/norm(R)^3 = 1.9761 V
```

# Άσκηση D4.10

Ηλεκτρικό δίπολο στην αρχή των αξόνων έχει ροπή $\mathbf{p} = 6\hat{\mathbf{z}}$ nC $\cdot$ m. Υπολογίστε το δυναμικό στο σημείο $P(4, 20^\circ, 0^\circ)$. Υπολογίστε επίσης το $\mathbf{E}$ στο $P$.

---

```
K=9e9; p=[0 0 6]*1e-9;
r=4; theta=20*pi/180; phi=0*pi/180;
R=[r*sin(theta)*cos(phi) r*sin(theta)*sin(phi) r*cos(theta)];
U=K*dot(p,R)/norm(R)^3 = 3.1715 V
E=(K*norm(p)/norm(R)^3)*[2*cos(theta) sin(theta)] = [1.5857 0.2886] V/m
```

άρα $U(P) = 3.1715$ V και $\mathbf{E}(P) = 1.5857\,\hat{\mathbf{r}} + 0.2886\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ V/m από

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

# Topic

1 Δίπολο

2 Ασκήσεις

3 **Διαφάνειες Βιβλίου**

# Κεφάλαιο 24

Χωρητικότητα και διηλεκτρικά