Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 05

Α. Δροσόπουλος

25-10-2023

Outline

Topic

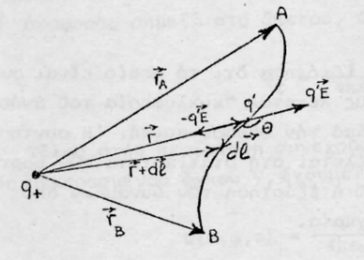
1. Μαθηματικό υπόβαθρο
2. Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό - Δυναμική Ενέργεια
3. Διαφορικός λογισμός

Συντηρητικά πεδία

Χαρακτηριστική ιδιότητα ηλεκτροστατικού πεδίου είναι ότι το έργο που χρειάζεται για τη μετακίνηση φορτίου q μεταξύ δυο σημείων είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται αποκλειστικά από τα δυο σημεία.

Τα πεδία αυτά ονομάζονται *συντηρητικά* ή *αστρόβιλα*.

Στα συντηρητικά πεδία είναι πάντοτε δυνατόν να βρούμε μια βαθμωτή συνάρτηση η οποία να περιγράφει το πεδίο. Τη δυναμική συνάρτηση ή δυναμικό.



Σχήμα: Παραγωγή έργου κατά τη μετακίνηση φορτίου σε πεδίο.

Συντηρητικά πεδία (2)

Έστω θετικό σημειακό φορτίο q' που βρίσκεται μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$ που οφείλεται σε θετικό φορτίο q. Η δύναμη από το πεδίο στο q' είναι $q'\mathbf{E}$.

Θεωρούμε την εφαρμογή μιας εξωτερικής δύναμης $-q'\mathbf{E}$ (το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η εξωτερική δύναμη αντιτίθεται στη δύναμη του πεδίου). Η $-q'\mathbf{E}$ πρέπει να είναι απειροστά μεγαλύτερη από την $q'\mathbf{E}$ ώστε η μετακίνηση από το A στο B να πραγματοποιείται χωρίς το φορτίο q να αποκτά επιτάχυνση και επομένως κινητική ενέργεια. Τέτοια μετακίνηση απαιτεί άπειρο χρόνο. Δεν υπάρχει πρόβλημα, δεδομένου ότι η μετακίνηση δεν υλοποιείται αλλά θεωρείται. Υπό την επίδραση αυτής της εξωτερικής δύναμης έχουμε στοιχειώδη μετατόπιση $d\mathbf{l}$ και παράγεται στοιχειώδες έργο

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q'\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q'Edl\cos\theta = -q'Edr$$

όπου dr η μεταβολή του μέτρου του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}$ του φορτίου q' κατά τη στοιχειώδη μετατόπιση $d\mathbf{l}$. Το συνολικά παραγόμενο έργο κατά τη μετακίνηση από το A στο B δίδεται από

$$W = -q' \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Το παραγόμενο έργο είναι ανεξάρτητο της τροχιάς μετακίνησης και εξαρτάται αποκλειστικά από τις θέσεις A και B. Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου είναι συντηρητικό.

Συντηρητικά πεδία (3)

Στην περίπτωση ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται σε σύστημα φορτίων q_i, σύμφωνα με την αρχή επαλληλίας, το συνολικά παραγόμενο έργο κατά τη μετακίνηση ενός θετικού φορτίου q' μεταξύ των σημείων A και B είναι

$$W = -q' \sum_i \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -q' \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

όπου

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$$

Εφόσον κάθε όρος του αθροίσματος είναι ανεξάρτητος της τροχιάς τότε και το άθροισμα θα είναι επίσης ανεξάρτητο της τροχιάς. Για κλειστή τροχιά

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, η «κυκλοφορία του διανύσματος $\mathbf{E}$» είναι μηδέν. Πεδίο συντηρητικό.

Η συντηρητική φύση του ηλεκτροστατικού πεδίου οφείλεται στη στατικότητα των φορτίων και την κεντρική φύση των δυνάμεων ενώ η εξάρτηση από το τετράγωνο της απόστασης δεν είναι αναγκαία.

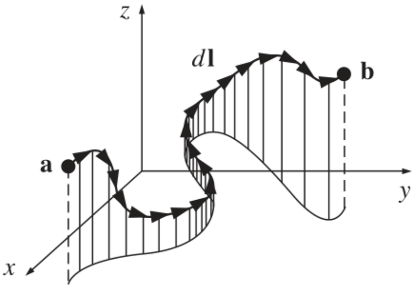
Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{v}$ σε μια συγκεκριμένη καμπύλη από το σημείο $\mathbf{a}$ στο σημείο $\mathbf{b}$ της καμπύλης είναι:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

όπου $d\mathbf{l}$ το διάνυσμα της απειροστής μετατόπισης. Αν η καμπύλη είναι κλειστή ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$) τότε:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$



Επικαμπύλια ολοκληρώματα (2)

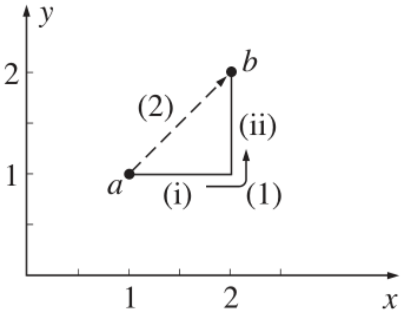
Σε κάθε σημείο της καμπύλης παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{v}$ σε αυτό το σημείο επί την μετατόπιση $d\mathbf{l}$ μέχρι το επόμενο σημείο της καμπύλης.

Παράδειγμα: Έργο που παράγει μια δύναμη.

Η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται από τη συγκεκριμένη καμπύλη εκτός αν το πεδίο είναι συντηρητικό (conservative) οπότε εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου $\mathbf{v} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2x(y+1)\,\hat{\mathbf{y}}$ από το σημείο $\mathbf{a} = (1,1,0)$ στο σημείο $\mathbf{b} = (2,2,0)$ κατά μήκος των διαδρομών (1) και (2). Ποια η τιμή του ολοκληρώματος στην κλειστή διαδρομή (1)-(2);



Παράδειγμα (2)

Η μετατόπιση είναι $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$. Η διαδρομή (1) αποτελείται από το τμήμα (i) όπου $dy = dz = 0$ και

$$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}}, \quad y = 1, \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = y^2 dx = dx, \quad \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 dx = 1$$

Για το τμήμα (ii) όπου $dx = dz = 0$

$$d\mathbf{l} = dy\,\hat{\mathbf{y}}, \quad x = 2, \quad \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 2x(y+1)dy = 4(y+1)dy, \quad \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 4\int_1^2 (y+1)dy = 10$$

άρα συνολικά για τη διαδρομή (1)

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 1 + 10 = 11$$

Παράδειγμα (3)

Για τη διαδρομή (2), $x = y,\ dx = dy,\ dz = 0$

$$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = x^2 dx + 2x(x+1)dx = (3x^2+2x)dx$$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (3x^2+2x)dx = (x^3+x^2)\Big|_1^2 = 10$$

Για την κλειστή διαδρομή (1)-(2)

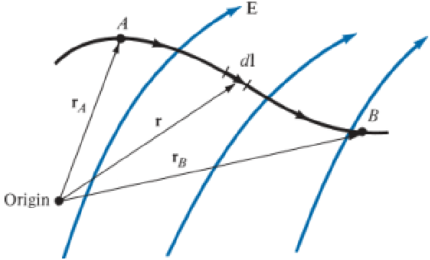
$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 11 - 10 = 1$$

Topic

1. Μαθηματικό υπόβαθρο
2. Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό - Δυναμική Ενέργεια
3. Διαφορικός λογισμός

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο $\mathbf{E}$ από το νόμο Coulomb ή, αν η κατανομή φορτίου που δημιουργεί το πεδίο είναι συμμετρική, από τον νόμο Gauss. Υπάρχει άλλος ένας τρόπος, από το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό U. Μάλιστα αυτός ο τρόπος είναι ευκολότερος εφόσον δουλεύουμε με βαθμωτή αντι για διανυσματική συνάρτηση.



Σχήμα: Μεταφορά φορτίου q σε ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση 2

Έστω ότι θέλουμε να μετακινήσουμε ένα σημειακό φορτίο q από το A στο B σε χώρο που υπάρχει ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$. Από τον νόμο Coulomb, η δύναμη από το πεδίο στο q είναι $\mathbf{F}_\pi = q\mathbf{E}$ οπότε η εξωτερική δύναμη που χρειάζεται για να γίνει η μετακίνηση πρέπει να είναι $\mathbf{F}_\varepsilon = -q\mathbf{E}$.

Το στοιχειώδες έργο που δίνει η εξωτερική δύναμη κατά τη στοιχειώδη μετατόπιση $d\mathbf{l}$ είναι:

$$dW = -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει το γεγονός ότι το έργο παράγεται από την εξωτερική δύναμη που αντιτίθεται στη δύναμη του πεδίου. Επομένως, το συνολικό έργο που καταναλώνεται ή αλλιώς, η δυναμική ενέργεια που απαιτείται για τη μετακίνηση του φορτίου q από το A στο B είναι:

$$W = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Ηλεκτρικό δυναμικό - Τάση 3

Διαιρώντας με το φορτίο έχουμε το μέγεθος

$$U_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

γνωστό σαν *διαφορά δυναμικού* μεταξύ Α και Β ή *ηλεκτρική τάση*, μιας και φανερώνει πόσο μεγάλη είναι η τάση αλληλοεξουδετέρωσης των συγκεκριμένων φορτίων.

- Για τη διαφορά δυναμικού U_{AB} το Α είναι το αρχικό σημείο και το Β το τελικό.
- Εάν U_{AB} αρνητική, υπάρχει έλλειμα δυναμικής ενέργειας στη μετακίνηση του φορτίου q από το Α στο Β που σημαίνει ότι το έργο το παράγει το πεδίο. Εάν U_{AB} θετική, υπάρχει κέρδος δυναμικής ενέργειας, που σημαίνει ότι το έργο το παράγει η εξωτερική δύναμη και η ενέργεια αποθηκεύεται στο πεδίο.
- Η διαφορά δυναμικού U_{AB} είναι ανεξάρτητη από τη διαδρομή και εξαρτάται μόνο από αρχικό και τελικό σημείο (πεδίο συντηρητικό).
- Μονάδες της U_{AB} είναι Joule/Coulomb (J/C) ή volt (V).

Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό

Εάν ορίσουμε αυθαίρετα σημείο αναφοράς το Α, σημαίνει ότι έχουμε μια βαθμωτή συνάρτηση για κάθε σημείο Β που μας δίνει το έργο ανά μονάδα φορτίου που απαιτείται για την μεταφορά του από το σημείο αναφοράς στο Β. Η συνάρτηση αυτή είναι το βαθμωτό δυναμικό ή δυναμική συνάρτηση ή απλά δυναμικό πεδίου. Όπως προκύπτει, το δυναμικό του σημείου αναφοράς είναι μηδέν.

Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό (2)

Όταν τα φορτία (που δημιουργούν το πεδίο) βρίσκονται σε πεπερασμένες μεταξύ τους αποστάσεις επιλέγουμε συνήθως σαν σημείο αναφοράς το άπειρο. Το δυναμικό κάποιου σημείου P στο χώρο είναι τότε

$$U_P = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Το δυναμικό πεδίου που οφείλεται σε ένα σημειακό φορτίο q είναι

$$U_P = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{P} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

όπου r η απόσταση μεταξύ q και P.

Για σύστημα φορτίων $q_1, q_2, \ldots q_N$ που βρίσκονται σε πεπερασμένες μεταξύ τους αποστάσεις, με επαλληλία

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό (3)

Και για συνεχή κατανομή φορτίου σε πεπερασμένο όγκο V

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

όπου $U(\mathbf{r})$ το δυναμικό στη θέση $\mathbf{r}$, $\rho(\mathbf{r}')$ η πυκνότητα φορτίων στο σημείο $\mathbf{r}'$, dV' στοιχειώδης όγκος στην περιοχή του σημείου $\mathbf{r}'$ και $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ η απόσταση μεταξύ των σημείων $\mathbf{r}$ και $\mathbf{r}'$.

Παρατηρείστε ότι στις εκφράσεις του δυναμικού η απόσταση στον παρονομαστή βρίσκεται στην πρώτη δύναμη ενώ για το πεδίο $\mathbf{E}$ βρίσκεται στην δεύτερη δύναμη.

Το έργο το οποίο παράγεται κατά τη μετακίνηση φορτίου q από σημείο 1 σε σημείο 2 είναι

$$W = q(U_2 - U_1) = qU_{12}$$

όπου U_{12} η διαφορά των δυναμικών μεταξύ των σημείων 1 και 2.

Παράδειγμα

Έστω δυο σημειακά φορτία $Q_1 = -4\ \mu\text{C}$, $Q_2 = 5\ \mu\text{C}$ τοποθετημένα στα σημεία $(2, -1, 3)$ και $(0, 4, -2)$ αντίστοιχα (μονάδες μήκους m). Με την παραδοχή ότι το δυναμικό στο ∞ είναι 0, ποιο είναι το δυναμικό στο $(1, 0, 1)$;

$$U(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\|\mathbf{r} - \mathbf{r'}_1\|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0\|\mathbf{r} - \mathbf{r'}_2\|}$$

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r'}_1\| = \|(1, 0, 1) - (2, -1, 3)\| = 2.4495\ \text{m}$$

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r'}_2\| = \|(1, 0, 1) - (0, 4, -2)\| = 5.0990\ \text{m}$$

$$U(1, 0, 1) = -5871.7\ \text{V}$$

Παράδειγμα

Έστω σημειακό φορτίο $Q = 5$ nC στο $(-3, 4, 0)$ (μονάδες μήκους m) και γραμμή $y = 1, z = 1$ με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας $\rho_L = 2$ nC/m. Να βρεθούν:

1. Το δυναμικό U στο $A(5, 0, 1)$ αν $U = 0$ V στο $O(0, 0, 0)$.
2. Το δυναμικό U στο $B(-2, 5, 3)$ αν $U = 100$ V στο $C(1, 2, 1)$.
3. Αν $U = -5$ V στο $O(0, 0, 0)$ ποια η διαφορά δυναμικού U_{CB};

Το δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου αναλύεται σε $U = U_Q + U_L$ όπου U_Q η συνεισφορά από το σημειακό φορτίο και U_L η συνεισφορά από το γραμμικό. Για το σημειακό:

$$U_Q = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot dr\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

Για τη φορτισμένη γραμμή:

$$U_L = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot d\rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + C_2$$

και

$$U = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

Παράδειγμα 2

όπου $C = C_1 + C_2$, σταθερά, ρ η απόσταση από τη γραμμή $y = 1, z = 1$ στο σημείο που υπολογίζεται το δυναμικό και r η απόσταση από το Q στο ίδιο σημείο.

Για την περίπτωση (1) θέλουμε r και ρ για τα σημεία O και A. Η απόσταση ρ από οποιοδήποτε σημείο (x, y, z) του χώρου, στη γραμμή $y = 1, z = 1$, που είναι παράλληλη στον άξονα x είναι η απόσταση μεταξύ (x, y, z) και $(x, 1, 1)$. Οπότε

$$\rho = \|(x, y, z) - (x, 1, 1)\| = \sqrt{(y-1)^2 + (z-1)^2}$$

και

$$\rho_O = \|(0,0,0) - (0,1,1)\| = \sqrt{2} \qquad r_O = \|(0,0,0) - (-3,4,0)\| = 5$$
$$\rho_A = \|(5,0,1) - (5,1,1)\| = 1 \qquad r_A = \|(5,0,1) - (-3,4,0)\| = 9$$

Επομένως:

$$U_A - U_O = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{\rho_O}{\rho_A} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_O}\right) = U_A = 8.4766 \text{ V}$$

Με την παραπάνω αφαίρεση αποφύγαμε τον υπολογισμό της σταθεράς C.

Παράδειγμα 3

Για την περίπτωση (2) θέλουμε r και ρ για τα σημεία B και C.

$$\rho_B = \|(-2,5,3)-(-2,1,1)\| = \sqrt{20} \qquad r_B = \|(-2,5,3)-(-3,4,0)\| = \sqrt{11}$$

$$\rho_C = \|(1,2,1)-(1,1,1)\| = 1 \qquad r_C = \|(1,2,1)-(-3,4,0)\| = \sqrt{21}$$

$$U_B - U_C = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\,\ln\frac{\rho_C}{\rho_B} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}\right) = -50.175\text{V} \Rightarrow U_B = 49.825 \text{ V}$$

Για την περίπτωση (3) τα πράγματα είναι πιο απλά. Δεν χρειαζόμαστε την αναφορά που δίδεται για το U_O και για την διαφορά CB το U_B το υπολογίσαμε και το U_C δίδεται. Άρα

$$U_{CB} = U_B - U_C = -50.175 \text{ V}$$

Δυναμική ενέργεια

Για να προσδιορίσουμε την ενέργεια που έχει ένα σύμπλεγμα φορτίων θα πρέπει να δούμε πόσο έργο χρειάζεται να καταναλώσουμε για να το δημιουργήσουμε. Έστω ότι θέλουμε να φτιάξουμε ένα σύμπλεγμα τριών φορτίων q_1, q_2, q_3 σε αρχικά κενό χώρο. Φέρνουμε το φορτίο q_1 από το άπειρο στο P_1. Δεν καταναλώνουμε έργο γιατί ο χώρος είναι κενός και δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο. Η μεταφορά του q_2 από το άπειρο στο P_2 καταναλώνει έργο $q_2 U_{21}$ όπου U_{21} το δυναμικό στο P_2 από το φορτίο q_1 στο P_1. Ομοίως και για τη μεταφορά του q_3 στο P_3 καταναλώνεται έργο $q_3(U_{32} + U_{31})$. Το ολικό έργο είναι:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + q_2 U_{21} + q_3(U_{32} + U_{31})$$

Αν σχηματίσουμε το σύμπλεγμα με ανάστροφη φορά φορτίων:

$$W = W_3 + W_2 + W_1 = 0 + q_2 U_{23} + q_1(U_{12} + U_{13})$$

Αθροισμα

$$2W = q_1(U_{12} + U_{13}) + q_2(U_{21} + U_{23}) + q_3(U_{31} + U_{32}) = q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3 \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3\right)$$

Δυναμική ενέργεια 2

Επομένως για $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots q_N$ φορτία η δυναμική ενέργεια W_i για το q_i λόγω αλληλεπιδράσεως με τα υπόλοιπα φορτία $q_{j\neq i}$ θα είναι

$$W_i = \sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

όπου r_{ij} η απόσταση των φορτίων q_i, q_j. Η συνολική ενέργεια W του συστήματος θα είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους δυναμικών ενεργειών W_i

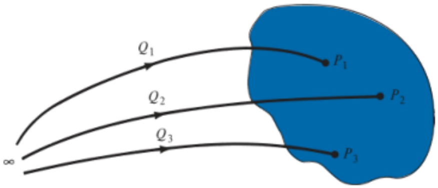
$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} W_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Ο παράγοντας $1/2$ εμφανίζεται γιατί οι όροι $q_i q_j / r_{ij}$ και $q_j q_i / r_{ji}$ παριστάνουν την ενέργεια του ίδιου ζεύγους. Η σχέση γενικεύεται

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \left(\sum_{j\neq i}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i$$

Τονίζεται εδώ ότι το U_i είναι το συνολικό δυναμικό από όλα τα φορτία που δημιουργούν πεδίο στο χώρο πλην του q_i στο σημείο που βρίσκεται το q_i.

Δυναμική ενέργεια 3



Σχήμα: Δημιουργία συμπλέγματος φορτίων

Για συνεχή κατανομή φορτίων στο χώρο πυκνότητας ρ η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$W = \frac{1}{2}\int_V U\rho dV$$

όπου V ο συνολικός χώρος φορτίου.

Δυναμική ενέργεια 4

Επομένως, η δυναμική ενέργεια συστήματος φορτίων ισούται με το έργο που καταναλώθηκε για τη μεταφορά των φορτίων από το άπειρο στις θέσεις που βρίσκονται στο σύστημα. Αποτέλεσμα της μεταφοράς είναι η δημιουργία στο χώρο ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$. Λέμε λοιπόν ότι το έργο που καταναλώθηκε μετατράπηκε σε ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου ή ότι είναι αποθηκευμένο στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργήθηκε.

Για συντηρητικά πεδία η αποθηκευμένη ενέργεια μπορεί να μετατραπεί πάλι σε μηχανικό έργο αν τα φορτία αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν (π.χ. κλείσιμο κυκλώματος). Κάθε στοιχείο όγκου του πεδίου περικλείει ενέργεια που προφανώς εξαρτάται από την ένταση του πεδίου στο χώρο του στοιχείου.

Θα δούμε στα παρακάτω ότι αυτή η ηλεκτροστατική ενέργεια σαν συνάρτηση του πεδίου είναι

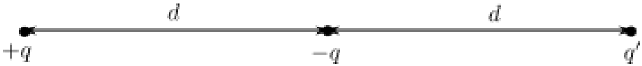
$$W_E = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})dV = \frac{1}{2}\int_V \epsilon_0 E^2 dV$$

και ορίζουμε πυκνότητα ηλεκτροστατικής ενέργειας w_E σε $\mathrm{J/m^3}$ το μέγεθος

$$w_E = \frac{dW_E}{dV} = \frac{1}{2}\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\,\epsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon_0}$$

Άσκηση

Ποια είναι η σχέση μεταξύ των φορτίων $+q$, $-q$ και q' ώστε η δύναμη στο φορτίο $+q$ να είναι μηδέν; Ποια είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος; Ερμηνεύστε το πρόσημο της έκφρασης της δυναμικής ενέργειας.



Λύση

Η δύναμη στο $+q$ από το $-q$ είναι ελκτική. Για να μηδενίζεται η ολική δύναμη, η επι μέρους δύναμη από το q' πρέπει να είναι απωστική. Άρα:

$$K\frac{q^2}{d^2} = K\frac{qq'}{4d^2} \Rightarrow q' = 4q$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} Q_i U_i$$

όπου Q_i είναι $+q$, $-q$, q' αντίστοιχα και U_i είναι τα αντίστοιχα δυναμικά σε κάθε φορτίο από όλα τα άλλα φορτία. Άρα:

$$W_E = \frac{1}{2}\left[q\left(-K\frac{q}{d} + K\frac{q'}{2d}\right) - q\left(K\frac{q}{d} + K\frac{q'}{d}\right) + q'\left(-K\frac{q}{d} + K\frac{q}{2d}\right)\right] =$$

$$= \frac{K}{2}\left[\left(-\frac{q^2}{d} + \frac{4q^2}{2d}\right) - \left(\frac{q^2}{d} + \frac{4q^2}{d}\right) + \left(-\frac{4q^2}{d} + \frac{4q^2}{2d}\right)\right] =$$

$$= \frac{K}{2}\left[-\frac{q^2}{d} - \frac{q^2}{d} - \frac{4q^2}{d} - \frac{4q^2}{d} + \frac{4q^2}{2d} + \frac{4q^2}{2d}\right] =$$

$$= -\frac{K}{2}\frac{6q^2}{d} = -K\frac{3q^2}{d} = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Topic

1. Μαθηματικό υπόβαθρο
2. Διαφορά Δυναμικού - Δυναμικό - Δυναμική Ενέργεια
3. **Διαφορικός λογισμός**

Διαφορικός λογισμός

Έστω συνάρτηση $f(x)$. Η παράγωγος df/dx μας δίνει το ρυθμό μεταβολής, πόσο γρήγορα αλλάζει η $f(x)$ (αύξηση ή ελάττωση) όταν αλλάζει η μεταβλητή x.

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

Έστω συνάρτηση $f(x, y, z)$. Ο ρυθμός μεταβολής είναι πιο σύνθετος εδώ γιατί βρισκόμαστε στον τρισδιάστατο χώρο και εξαρτάται από την κατεύθυνση. Από λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}) = \nabla f \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{όπου} \qquad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

η κλίση ή βάθμωση (gradient, grad) της συνάρτησης f. Συμβολίζεται: ∇f, grad$f$.

Βάθμωση

Η βάθμωση μιας βαθμωτής συνάρτησης (βαθμωτό πεδίο) στον τρισδιάστατο χώρο είναι διανυσματικό πεδίο όπου σε κάθε σημείο του χώρου μας δίνει το διάνυσμα του μέγιστου ρυθμού μεταβολής του πεδίου. Πρόσημο θετικό σημαίνει μέγιστη αύξηση. Πρόσημο αρνητικό σημαίνει μέγιστη ελάττωση.

Ο τελεστής ανάδελτα (del operator) σε καρτεσιανές:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

είναι διανυσματικός τελεστής που δρα στην συνάρτηση που ακολουθεί. Αν η συνάρτηση είναι βαθμωτή, έχουμε την βάθμωση που είδαμε.

Αν είναι διανυσματική, έχουμε δυο ειδών αποτελέσματα.

1. $\nabla \cdot \mathbf{A}$ Απόκλιση (divergence, div) που είναι βαθμωτή συνάρτηση.
2. $\nabla \times \mathbf{A}$ Στροβιλισμός (curl, rot) που είναι διανυσματική συνάρτηση.

Παράδειγμα

Υπολογίστε τη βάθμωση του μέτρου του διανύσματος θέσης $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Έχουμε:

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{z}} =$$

$$= \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$$

Ποιο είναι το νόημα του παραπάνω αποτελέσματος;

Άσκηση

Υπολογίστε τη βάθμωση των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$
2. $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$
3. $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$

Απαντήσεις:

$$\nabla f = 2\,x\hat{\mathbf{x}} + 3\,y^2\hat{\mathbf{y}} + 4\,z^3\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla f = 2\,xy^3z^4\hat{\mathbf{x}} + 3\,x^2y^2z^4\hat{\mathbf{y}} + 4\,x^2y^3z^3\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla f = e^x \ln(z) \sin(y)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos(y)\,e^x \ln(z)\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{e^x \sin(y)}{z}\hat{\mathbf{z}}$$

Άσκηση

Το ύψος κάποιου λόφου (σε m) δίδεται από:

$$h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$$

όπου x και y οι αποστάσεις αντίστοιχα (σε km) ανατολικά και βόρεια κάποιας πόλης που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

- Σε ποιο σημείο βρίσκεται η κορυφή του λόφου;
- Πόσο είναι το ύψος του;
- Πόσο απότομη είναι η κλίση του λόφου (σε m/km) σε σημείο που βρίσκεται 1 km ανατολικά και 1 km βόρεια της πόλης. Προς ποια κατεύθυνση στο σημείο αυτό η κλίση γίνεται πιο απότομη;

Κορυφή του λόφου $\nabla h = 0$. Οπότε:

$$\nabla h = (-60\,x + 20\,y - 180)\,\hat{\mathbf{x}} + (20\,x - 80\,y + 280)\,\hat{\mathbf{y}}$$

Άσκηση (συν)

$$\left.\begin{array}{rcl} -60\,x + 20\,y - 180 & = & 0 \\ 20\,x - 80\,y + 280 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x = -2 \\ y = 3 \end{array}$$

που σημαίνει 2 km δυτικά και 3 km βόρεια της πόλης.

Το ύψος του λόφου είναι $h(-2,3) = 720$ m.

Κλίση του λόφου στο σημείο $(1,1)$ είναι: $\nabla h(1,1) = 220(-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$.

Μέτρο της κλίσης: $|\nabla h| = 220\sqrt{2} \sim 311.1$ m/km

Κατεύθυνση: βορειοδυτική.

Άσκηση

Έστω $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ το διάνυσμα απόστασης από κάποιο σταθερό σημείο (x', y', z') στο μεταβλητό σημείο (x, y, z) και έστω $\mathscr{r}$ το μήκος του. Δείξτε ότι:

- $\nabla(\mathscr{r}^2) = 2\boldsymbol{\mathscr{r}}$
- $\nabla(1/\mathscr{r}) = -\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}/\mathscr{r}^2$
- Ποια είναι η γενική σχέση για $\nabla(\mathscr{r}^n)$;

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}} \qquad \mathscr{r} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\nabla(\mathscr{r}^2) = \frac{\partial}{\partial x}[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}()\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}()\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= 2(x - x')\hat{\mathbf{x}} + 2(y - y')\hat{\mathbf{y}} + 2(z - z')\hat{\mathbf{z}} = 2\boldsymbol{\mathscr{r}}$$

Άσκηση (συν)

$$\nabla(1/\mathscr{r}) = \frac{\partial}{\partial x}[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-1/2}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}()^{-1/2}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}()^{-1/2}\,\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= -\frac{1}{2}()^{-3/2}2(x-x')\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}()^{-3/2}2(y-y')\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}()^{-3/2}2(z-z')\,\hat{\mathbf{z}} =$$

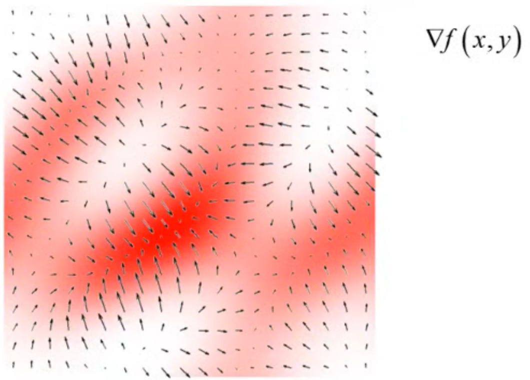
$$= -()^{-3/2}[(x-x')\,\hat{\mathbf{x}} + (y-y')\,\hat{\mathbf{y}} + (z-z')\,\hat{\mathbf{z}}] = -\frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3} = -\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$$

$$\nabla(\mathscr{r}^n) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{r}^n)\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathscr{r}^n)\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathscr{r}^n)\,\hat{\mathbf{z}} = n\,\mathscr{r}^{n-1}\frac{\partial \mathscr{r}}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \cdots =$$

$$= n\,\mathscr{r}^{n-1}\frac{2(x-x')}{2\,\mathscr{r}}\,\hat{\mathbf{x}} + \cdots = n\,\mathscr{r}^{n-1}\frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = n\,\mathscr{r}^{n-1}\,\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$$

Βαθμίδα ή βάθμωση (grad) βαθμωτού πεδίου

Γενίκευση της παραγώγου σε περισσότερες διαστάσεις. Χαρακτηρίζει τον ρυθμό μεταβολής της τιμής ενός βαθμωτού πεδίου στην κατεύθυνση που είναι μέγιστος. Η βάθμωση (grad, gradient) παράγει ένα διανυσματικό πεδίο.



Σχήμα: Βαθμίδα βαθμωτού πεδίου

Βαθμίδα ή βάθμωση (grad) βαθμωτού πεδίου 2

Σαν γενίκευση της παραγώγου ισχύουν επίσης:

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

$$\nabla f^n = n f^{n-1}\nabla f$$

όπου f και g βαθμωτά πεδία στον τρισδιάστατο χώρο και n ακέραιος.

Σημειώνουμε ότι:

- Το μέτρο της βάθμωσης ∇f ισούται με τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής της f στο χώρο.
- Η βάθμωση ∇f δείχνει την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f στο χώρο.
- Η βάθμωση ∇f σε κάθε σημείο στο χώρο είναι κάθετη στη σταθερή επιφάνεια $f = c$ που περνά από αυτό το σημείο.
- Η προβολή (ή συνιστώσα) της βάθμωσης ∇f στην κατεύθυνση κάποιου μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{a}$ είναι $\nabla f \cdot \mathbf{a}$ και ονομάζεται η παράγωγος κατεύθυνσης του πεδίου f στην κατεύθυνση του $\mathbf{a}$.
- Για $\mathbf{A} = \nabla f$, το f είναι το βαθμωτό δυναμικό του $\mathbf{A}$.

Παράδειγμα

Για το πεδίο $W = x^2y^2 + xyz$, υπολογίστε τη βάθμωση ∇W και την παράγωγο κατεύθυνσης $dW/d\ell$ στην κατεύθυνση $\mathbf{a} = (3, 4, 12)$ στο σημείο $(2, -1, 0)$.

$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial W}{\partial y}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial W}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} = (2xy^2 + yz)\,\hat{\mathbf{x}} + (2x^2y + xz)\,\hat{\mathbf{y}} + (xy)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Στο σημείο $(2, -1, 0)$ έχουμε $\nabla W = (4, -8, -2)$ οπότε

$$\frac{dW}{d\ell} = \nabla W \cdot \hat{\mathbf{a}} = (4, -8, -2) \cdot \frac{(3, 4, 12)}{\|(3, 4, 12)\|} = -3.3846$$

Σχέση ηλεκτρικού πεδίου με δυναμικό

Από τα παραπάνω έχουμε για το δυναμικό $U(x, y, z)$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}) = \nabla U \cdot d\mathbf{l}$$

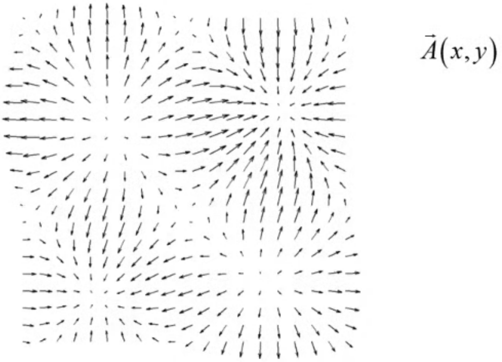
Δεδομένου ότι $dU = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ έχουμε

$$\mathbf{E} = -\nabla U$$

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στον ορισμό του δυναμικού σαν έργο ανά μονάδα φορτίου κάποιας εξωτερικής δύναμης που αντιτίθεται στο πεδίο και όχι της δύναμης του πεδίου. Άρα, η φορά της έντασης του πεδίου δείχνει τη φορά κατά την οποία το δυναμικό ελαττώνεται.

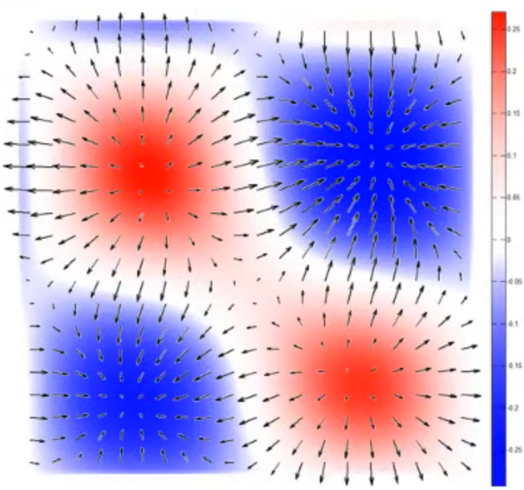
Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου

Η απόκλιση διανυσματικού πεδίου φανερώνει τα σημεία του πεδίου όπου «πηγάζει» ή «εξαφανίζεται». Σύγκλιση ή απόκλιση (πηγές, sources, καταβόθρες, sinks).
Συμβολίζεται: $\nabla \cdot \mathbf{A}$, div$\mathbf{A}$.



Σχήμα: Ξεκινάμε με ένα διανυσματικό πεδίο.

Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 2



$$\nabla \bullet \vec{A}(x,y)$$

Σχήμα: Με την απόκλιση καταλήγουμε σε βαθμωτό.

Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης

Ξεκινάμε από τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$ μέσα από μια κλειστή επιφάνεια S που περικλείει κάποιον όγκο V. Θεωρούμε ότι το πεδίο είναι ορισμένο μέσα στον όγκο V και η απόκλιση (ανεξάρτητα από συστήματα συντεταγμένων) ορίζεται

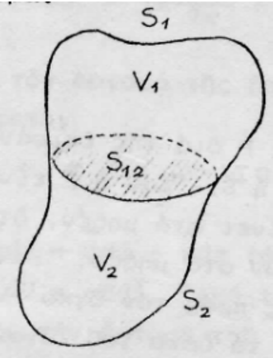
$$\text{div}\,\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

Ο Gauss συνεχίζει με το θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης: «Το επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$ μέσα από κλειστή επιφάνεια S ισούται με το ολοκλήρωμα της απόκλισης στον όγκο V που περικλείεται από την επιφάνεια S».

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

Για την απόδειξη ξεκινάμε από το διαχωρισμό ενός όγκου V σε δυο.

Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης 2



Σχήμα: Η S_{12} χωρίζει τον V σε V_1 και V_2.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_1+S_{12}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_1 + \oint_{S_2+S_{12}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_2$$

Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης 3

Συνεχίζοντας τις υποδιαιρέσεις

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_1 + \oint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{N} \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_i$$

και

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} V_i \left(\frac{\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right)$$

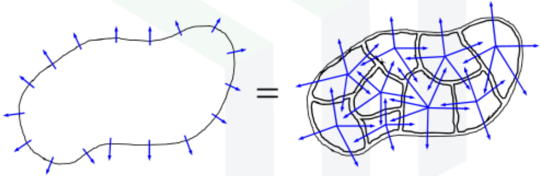
Για $N \to \infty$ και $V_i \to 0$ η παράσταση στην παρένθεση είναι η απόκλιση του $\mathbf{A}$, το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα και ο V_i γίνεται dV.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$$

Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης 4

Divergence Theorem

$$\oiint_S \vec{F} \bullet d\vec{s} = \iiint_V \left(\nabla \bullet \vec{F} \right) dv$$



The divergence theorem allows us to write a closed-contour surface integral as a volume integral.

Σχήμα: Συνδέει ροή διανυσματικού πεδίου μέσα από μια κλειστή επιφάνεια με την απόκλιση του πεδίου στον εσωκλεισμένο όγκο

Νόμος Gauss από εξισώσεις Maxwell

Αν αντί του τυχαίου $\mathbf{A}$ θεωρήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και το νόμο Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Και για όγκο V οποιουδήποτε σχήματος και μεγέθους και σε κάθε σημείο του χώρου

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

η διαφορική μορφή του νόμου Gauss.

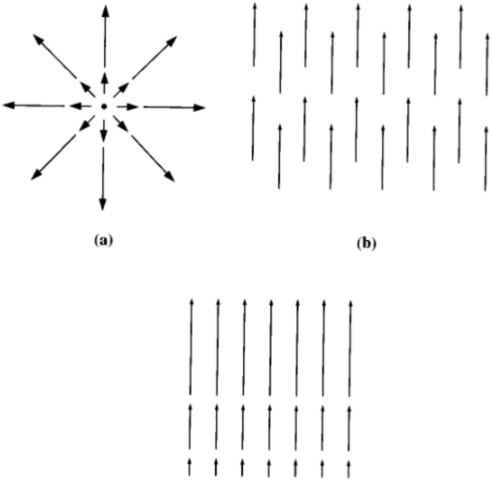
Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 3

Η απόκλιση διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}(x, y, z)$ στο τρισδιάστατο χώρο εκφράζεται στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{x}} \, \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \, \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x \, \hat{\mathbf{x}} + A_y \, \hat{\mathbf{y}} + A_z \, \hat{\mathbf{z}} \right) =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 4



(a) (b) (c)