

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 03

A. Δροσόπουλος

18-10-2023

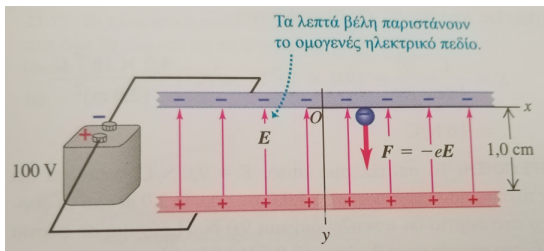
1 Παραδείγματα

1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 21.7 - σελ 768

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δυο παραλλήλων αγωγίμων πλακών όπως φαίνεται στο σχήμα, έχει μέτρο $E = 10^4 \text{ N/C}$. Ηλεκτρόνιο εν ηρεμία αφήνεται ελεύθερο στην επάνω πλάκα. Δίδεται φορτίο $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ και μάζα $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ηλεκτρονίου.

- Ποια είναι η επιτάχυνσή του;
- Ποια είναι η ταχύτητά του και η κινητική του ενέργεια όταν φθάσει στην κάτω πλάκα;
- Πόσος χρόνος απαιτείται για να διανύσει αυτήν την απόσταση;



$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-eE}{m} = -1.76 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$$

Εφόσον $v_0 = 0$ και για $a = |a_y|$, έχουμε

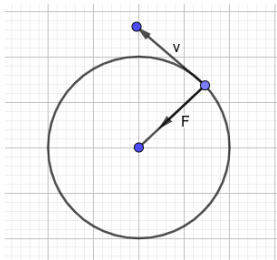
$$\left. \begin{array}{l} v = at \\ s = (1/2)at^2 \end{array} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{2as} = 5.93 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 1.6 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$t = \frac{v}{a} = 3.37 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Άσκηση 8

Υπολογίστε κλασσικά τη συχνότητα περιστροφής, τη γραμμική ταχύτητα και τη στροφορμή του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου ($R = 0.53 \text{ \AA}$, $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$). Δίδεται $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$.



Άσκηση 8 - Λύση

$$F = \frac{mv^2}{R} = K \frac{e^2}{R^2} \Rightarrow v = e \sqrt{\frac{K}{mR}} = 2.187 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 6.568 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$L = mvR = 1.056 \times 10^{-34} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

```
>> K=9e9; e=1.602e-19; m=9.11e-31; R=0.53e-10;
>> v=e*sqrt(K/(m*R))
v = 2187190.66266
>> printf("v = %g\n",v)
v = 2.18719e+06
>> w=v/R
>> w = 4.1268e+16
>> f=w/(2*pi)
f = 6567966140516086
>> printf("f = %g\n",f)
f = 6.56797e+15
>> L=m*v*R
L = 1.0560e-34
```

Πεδίο σημειακού φορτίου

Έστω στάσιμο σημειακό φορτίο Q . Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο γύρω του;

Από τον νόμο Coulomb

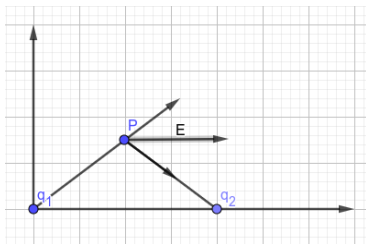
$$\mathbf{E} = K \frac{Q}{z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

όπου z η απόσταση μεταξύ φορτίου και σημείου που υπολογίζουμε το πεδίο με $\hat{\mathbf{z}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία που τα συνδέει.

Το δοκιμαστικό φορτίο στο σημείο που υπολογίζουμε το πεδίο είναι πάντα θετικό άρα η φορά είναι απωστική αν $Q > 0$ και ελκτική αν $Q < 0$.

Πεδίο δυο σημειακών φορτίων

Έστω δυο στάσιμα σημειακά φορτία q_1, q_2 (ετερόνυμα στο σχήμα)



$$\mathbf{E} = Kq_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1\|^3} + Kq_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2\|^3}$$

όπου $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$ τα διανύσματα θέσης των φορτίων και \mathbf{r} το διάνυσμα θέσης του πεδίου.
Σαρώνουμε τον χώρο γύρω από τα φορτία.

Βλ σελ 19-22 από PanPhysicsKef 21.

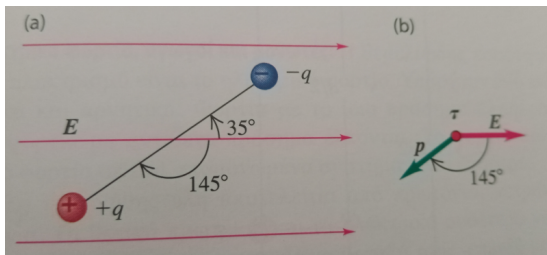
Ανίχνευση πεδίων με δίπολα

- [walt07](#), Walter Lewin

Παράδειγμα 21.13 - σελ 779

Έστω ηλεκτρικό δίπολο με φορτία $\pm 1.6 \times 10^{-19}$ C και απόσταση 0.125 nm σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου $E = 5 \times 10^5$ N/C όπως στο σχήμα. Υπολογίστε:

- την ολική δύναμη που ασκεί το πεδίο στο δίπολο
- τη διπολική ροπή (μέτρο και φορά)
- τη ροπή που ασκεί το πεδίο στο δίπολο
- τη δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση που φαίνεται



- Συνισταμένη δύναμη μηδέν
- Μέτρο διπολικής ροπής: $p = qd = 2 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$. Σε καρτεσιανό σύστημα με άξονα x παράλληλο στο πεδίο και y κάθετο σε αυτό και προς τα πάνω, το διάνυσμα της διπολικής ροπής είναι:

$$\mathbf{p} = p \cos(-145^\circ) \hat{\mathbf{x}} + p \sin(35^\circ) \hat{\mathbf{y}} = -1.64 \times 10^{-29} \hat{\mathbf{x}} + 1.15 \times 10^{-29} \hat{\mathbf{y}} \text{ C} \cdot \text{m}$$

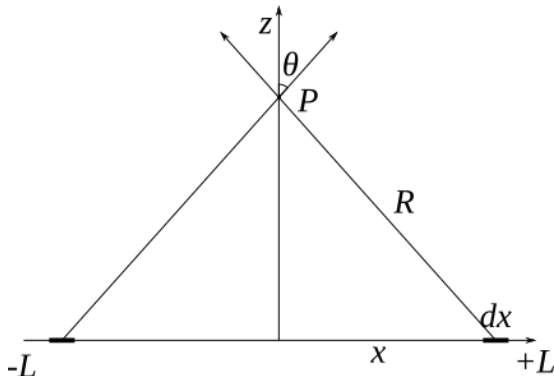
- Η ροπή που ασκεί το πεδίο στο δίπολο:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = -5.74 \times 10^{-24} \hat{\mathbf{z}} \text{ N} \cdot \text{m}$$

- Δυναμική ενέργεια: $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = 8.19 \times 10^{-24} \text{ J}$

Παράδειγμα 21.10 - σελ 772

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z από τη μέση ευθυγράμμου τμήματος μήκους $2L$ με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου λ .



Βολεύει να πάρουμε συμμετρικά κομμάτια στοιχειώδους φορτίου στα $\pm x$ έτσι ώστε να μηδενιστεί η οριζόντια συνιστώσα. Οπότε

$$d\mathbf{E} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda dx}{R^2} \right) \cos\theta \hat{\mathbf{z}}$$

$$\cos\theta = z/R \quad R = \sqrt{z^2 + x^2}$$

και για την z συνιστώσα:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{2\lambda z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{z^2 \sqrt{z^2 + x^2}} \right]_0^L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2\lambda L}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \right]$$

και $\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{z}}$ όπου χρησιμοποιήσαμε τον μετασχηματισμό $x = z \tan\theta$ για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

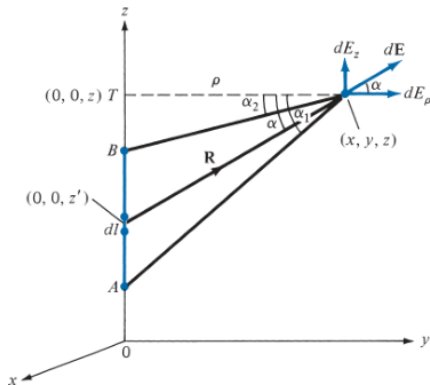
Μακριά από το τμήμα ($z \gg L$) αυτό γίνεται

$$E_z \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}$$

όπου $Q = 2\lambda L$ το φορτίο. Μοιάζει με σημειακό.

Γενίκευση πεδίου ευθυγράμμου τμήματος

Θεωρούμε ευθύγραμμη και ομοιόμορφα κατανεμημένη κατανομή φορτίου από A έως B και ζητούμε το ηλεκτροστατικό πεδίο σε κάποιο σημείο του χώρου όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο ευθύγραμμου φορτισμένου τμήματος

Γενίκευση 2

Το σύστημα έχει κυλινδρική συμμετρία και θεωρούμε την γραμμική κατανομή φορτίου στον άξονα z από A έως B . Έχουμε $dQ = \rho_L dl' = \rho_L dz'$ και το σημείο P που υπολογίζουμε το πεδίο έχει συντεταγμένες (x, y, z) . Οπότε:

$$\mathbf{R} = \mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x, y, z) - (0, 0, z') = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{\rho_L dl'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{z}}{z^3} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}}}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz'$$

$$R = |\mathbf{R}| = \frac{\rho}{\cos \alpha} \quad z - z' = \rho \tan \alpha \Rightarrow z' = z - \rho \tan \alpha \Rightarrow dz' = -\rho \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \tan \alpha \hat{\mathbf{z}}}{(\rho / \cos \alpha)^3} \rho \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\cos \alpha \hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] d\alpha \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} [-(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \hat{\boldsymbol{\rho}} + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \hat{\mathbf{z}}]$$

Στην ειδική περίπτωση όπου το φορτισμένο ευθύγραμμο τμήμα εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$ έχουμε $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = -\pi/2$, η συνιστώσα z εξαφανίζεται και

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

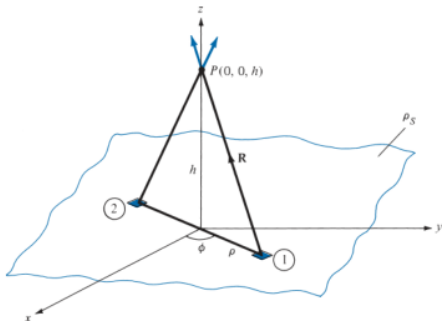
Τι σημαίνει η τελευταία σχέση;

Σημαίνει ότι πάτε στο επίπεδο που σχηματίζει το σημείο και η ευθεία. Το σημείο εφαρμογής του διανύσματος \mathbf{E} είναι ακριβώς αυτό το σημείο. Έχει συνιστώσα $\hat{\rho}$ και συνιστώσα \hat{z} . Η συνισταμένη είναι το ολικό πεδίο \mathbf{E} στο σημείο εκείνο.

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας

Θεωρούμε επίπεδη επιφάνεια, απείρων διαστάσεων, φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα φορτίου ρ_S . Το στοιχειώδες φορτίο dQ μιας στοιχειώδους επιφάνειας dS σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$dQ = \rho_S dS = \rho_S \rho d\phi d\rho$$



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας 2

Η συνεισφορά του dQ στο ολικό πεδίο \mathbf{E} στο σημείο $P(0, 0, h)$ είναι

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}$$

όπου

$$\mathbf{r} = h \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{r}' = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + h \hat{\mathbf{z}} \quad \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = (\rho^2 + h^2)^{1/2}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S \rho d\phi d\rho [-\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + h \hat{\mathbf{z}}]}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

Λόγω συμμετρίας για κάθε στοιχειώδες φορτίο dQ σε γωνία ϕ υπάρχει το συμμετρικό του στη γωνία $\phi + \pi$ που μηδενίζει τη συνιστώσα $\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Οπότε

$$\mathbf{E} = \int_S d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{h\rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_S h 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} (\rho^2 + h^2)^{-3/2} \frac{1}{2} d(\rho^2) \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S h}{2\epsilon_0} \left[-(\rho^2 + h^2)^{-1/2} \right] \Bigg|_0^{\infty} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$$

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας 3

Όπως φαίνεται το πεδίο είναι ανεξάρτητο της απόστασης από το φορτισμένο επίπεδο καθώς και το σημείο παρατήρησης του πεδίου P .

Στην πράξη, σε πυκνωτή με δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες χρησιμοποιούμε τον παραπάνω τύπο κατά προσέγγιση και βλέπουμε ότι το πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των πλακών του πυκνωτή είναι:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} + \frac{(-\rho_S)}{2\epsilon_0} (-\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$$