# Ηλεκτρομαγνητισμός
## Διάλεξη 01

Α. Δροσόπουλος

11-10-2023

# Outline

# Topic

1. **Μαθηματικό υπόβαθρο**

2. Φορτίο

# Φάσορες

Μια αρμονική (ημιτονοειδής) συνάρτηση μπορεί να γραφτεί σαν

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

Με την ταυτότητα Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

μπορούμε να γράψουμε την αρμονική συνάρτηση σαν

$$y(t) = \Re e\big[Ae^{j(\omega t+\theta)}\big] = \Re e\big[Ae^{j\omega t}e^{j\theta}\big]$$

Σε γραμμικά προβλήματα η συχνότητα $\omega$ είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει σταθερό όρο $e^{j\omega t}$ που παραλείπεται όταν έχουμε αρμονικές συναρτήσεις. Οπότε:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta) \longleftrightarrow Y = Ae^{j\theta} = A\underline{/\theta}$$

Μια χρήσιμη επισκόπηση έννοιας φάσορα βρίσκεται στο link phasor.

# Πολική και καρτεσιανή μορφή

$$Y = a + jb = A\underline{/\theta}$$

όπου

| καρτεσιανή σε πολική | πολική σε καρτεσιανή |
|---|---|
| $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ | $a = A\cos\theta$ |
| $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ | $b = A\sin\theta$ |

# Άλγεβρα φασόρων

$$F_1 = a_1 + jb_1 = A_1\underline{/\theta_1}$$
$$F_2 = a_2 + jb_2 = A_2\underline{/\theta_2}$$

| | |
|---|---|
| πρόσθεση: | $F_1 + F_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$ |
| αφαίρεση: | $F_1 - F_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$ |
| πολλαπλασιασμός: | $F_1 \cdot F_2 = (A_1 \cdot A_2)\underline{/\theta_1 + \theta_2}$ |
| διαίρεση: | $F_1 / F_2 = (A_1 / A_2)\underline{/\theta_1 - \theta_2}$ |

παραγώγιση: $$\frac{dF(t)}{dt} \longrightarrow j\omega F(\omega)$$

ολοκλήρωση: $$\int F(t)dt \longrightarrow \frac{1}{j\omega}F(\omega) = -(j/\omega)F(\omega)$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες στις δυο τελευταίες σχέσεις ανατρέξτε στους μετασχηματισμούς Fourier στα μαθηματικά σας.

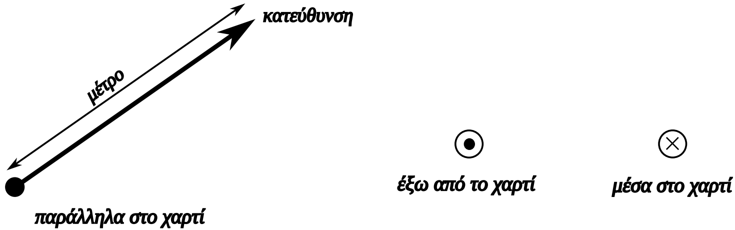
# Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

Ένα βαθμωτό (μονόμετρο) μέγεθος χαρακτηρίζεται πλήρως μόνο από το μέτρο του, κάποια τιμή που μπορεί να είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Οι φάσορες είναι βαθμωτά μεγέθη. Παραδείγματα: 7, $\pi$, $-1.345$, $98.2 + j4.6$. Μάζα, απόσταση, θερμοκρασία, τάση, κ.α.

Ένα διανυσματικό μέγεθος εκτός από το μέτρο του διαθέτει και κατεύθυνση. Παραδείγματα: ταχύτητα, δύναμη, ηλεκτρομαγνητικά πεδία, ορμή, μετατόπιση.

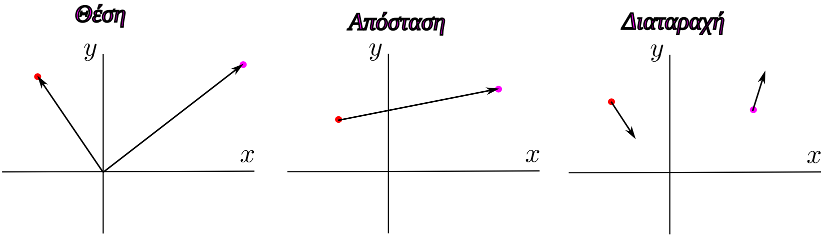
Υπάρχουν και άλλα φυσικά μεγέθη, οι τανυστές (tensors). Τα βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη είναι υποπερίπτωσή τους.

# Σκίτσο διανύσματος

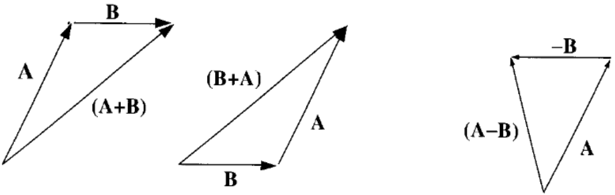



**Σχήμα:** Σκίτσο διανύσματος. Προσοχή. Παρόλο που φαίνεται ότι το διάνυσμα δείχνει κάτι μακριά από το αρχικό σημείο, αυτό που περιγράφει αναφέρεται στο συγκεκριμένο αρχικό σημείο και μόνο σε αυτό.

# Πληροφορία που παρέχει ένα διάνυσμα




**Σχήμα:** Πληροφορία που παρέχει ένα διάνυσμα. Θέση, σχετικά με κάποιο σημείο αναφοράς. Απόσταση, ανεξάρτητα από σημείο αναφοράς. Κατευθυνόμενη διαταραχή.




**Σχήμα:** Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

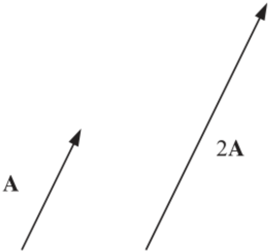
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad \text{αντιμεταθετική}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad \text{προσεταιριστική}$$

Αφαίρεση: Πρόσθεση αντιθέτου

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$$

# Πράξεις με διανύσματα 2

## Πολ/σμός με βαθμωτό μέγεθος



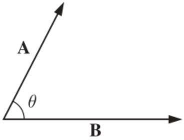

**Σχήμα:** Πολ/σμός με βαθμωτό μέγεθος

Πολ/σμός με θετικό αριθμό πολ/ζει μέτρο, δεν πειράζει κατεύθυνση. Πολ/σμός με αρνητικό αριθμό πολ/ζει μέτρο και αντιστρέφει κατεύθυνση.

$$a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B} \quad \text{επιμεριστική}$$

# Πράξεις με διανύσματα 3

## Εσωτερικό γινόμενο




**Σχήμα:** Εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta$$

Εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος. Ισχύουν:

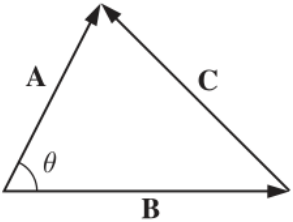
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \text{αντιμεταθετική}$$
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \qquad \text{επιμεριστική}$$

Γεωμετρικά: Προβολή του ενός στο άλλο επί το μέτρο του άλλου.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \qquad \text{παράλληλα}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{κάθετα}$$

# Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$ στο παρακάτω τρίγωνο.



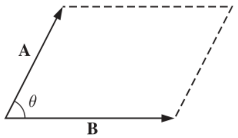

Έχουμε $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΕΙΔΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

Νόμος συνημιτόνων.

# Πράξεις με διανύσματα 4
## Εξωτερικό γινόμενο




**Σχήμα:** Εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin\theta \, \hat{\mathbf{n}}$$

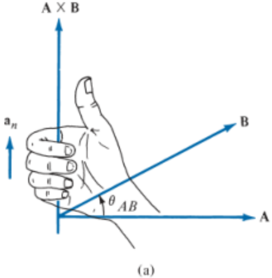
όπου $\hat{\mathbf{n}}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ και με κατεύθυνση που ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού. Δάκτυλα δεξιού χεριού στο πρώτο διάνυσμα. Τα περιστρέφουμε μέσω της μικρότερης γωνίας στο δεύτερο και ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του $\hat{\mathbf{n}}$.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} & \text{όχι αντιμεταθετική} \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} & \text{επιμεριστική} \end{array}$$

Γεωμετρικά: $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$.

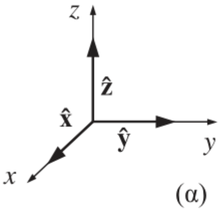
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \qquad \text{παράλληλα}$$

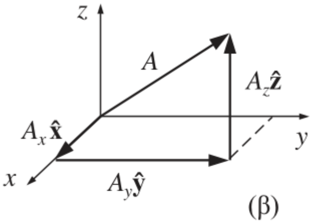
# Εξωτερικό γινόμενο 2




**Σχήμα:** Εξωτερικό γινόμενο. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού ή τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

# Καρτεσιανές συντεταγμένες




$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) + (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$(A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}$$

$$a\mathbf{A} = (aA_x)\hat{\mathbf{x}} + (aA_y)\hat{\mathbf{y}} + (aA_z)\hat{\mathbf{z}}$$

και επειδή: $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1, \ \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

# Καρτεσιανές συντεταγμένες 2

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}} = 0\\
&\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}}\\
&\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}\\
&\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})\times(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$(A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

# Παράδειγμα 1a

Εάν $\mathbf{A} = (10, -4, 6)$ και $\mathbf{B} = (2, 1, 0)$ υπολογίστε:

- την συνιστώσα του $\mathbf{A}$ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{y}}$
- το μέτρο του διανύσματος $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$
- ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$

---

Προφανώς, $A_y = -4$.

$3\mathbf{A} - \mathbf{B} = 3(10, -4, 6) - (2, 1, 0) = (30, -12, 18) - (2, 1, 0) = (28, -13, 18)$ και
$\|3\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \sqrt{28^2 + (-13)^2 + 18^2} = \sqrt{1277} = 35.74$

Εάν $\mathbf{C} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ τότε ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{C}$ είναι:

$$\hat{\mathbf{a}}_C = \frac{\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|} = \frac{(14, -2, 6)}{\sqrt{14^2 + (-2)^2 + 6^2}} = (0.91132, -0.13019, 0.39057)$$

Παρατηρείστε ότι $\|\hat{\mathbf{a}}_C\| = 1$ όπως θα περιμέναμε.

# Παράδειγμα 1b

```
>> A=[10 -4 6]; B=[2 1 0];
>> 3*A-B
ans =
   28  -13   18
>> norm(3*A-B)
ans = 35.735
>> C=A+2*B
C =
   14   -2    6
>> ac = C/norm(C)
ac =
   0.9113  -0.1302   0.3906
>> norm(ac)
>> ans = 1
```

# Παράδειγμα 2

Έστω σημεία $P$, $Q$ τοποθετημένα στα $(0, 2, 4)$ και $(-3, 1, 5)$ αντίστοιχα. Υπολογίστε:

- την θέση του διανύσματος $\mathbf{r}_P$
- το διάνυσμα μετατόπισης από το $P$ στο $Q$
- την απόσταση μεταξύ $P$ και $Q$
- διάνυσμα παράλληλο στο $PQ$ με μέτρο $10$

---

$\mathbf{r}_P = (0, 2, 4) = 2\hat{\mathbf{a}}_y + 4\hat{\mathbf{a}}_z$

$\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (-3, 1, 5) - (0, 2, 4) = (-3, -1, 1)$ ή $\mathbf{r}_{PQ} = -3\hat{\mathbf{a}}_x - \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$

Η απόσταση μεταξύ $P$ και $Q$ είναι: $d = \|\mathbf{r}_{PQ}\| = \sqrt{9 + 1 + 1} = 3.3166$

Διάνυσμα παράλληλο στο $PQ$ με μέτρο $10$ είναι:

$$\pm 10 \frac{\mathbf{r}_{PQ}}{\|\mathbf{r}_{PQ}\|} = \pm 10 \frac{(-3, -1, 1)}{3.3166} = \pm(-9.0453, -3.0151, 3.0151)$$

# Παράδειγμα 2b

```
>> p=[0 2 4]; q=[-3 1 5];
>> r=q-p
r =
  -3  -1   1
>> d=norm(r)
d = 3.3166
>> 10*r/norm(r)
ans =
  -9.0453  -3.0151   3.0151
```

# Τεστ εσωτερικού γινομένου

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να δείξει αν δυο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν ναι, η προβολή του ενός στο άλλο είναι μηδενική, άρα το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$$

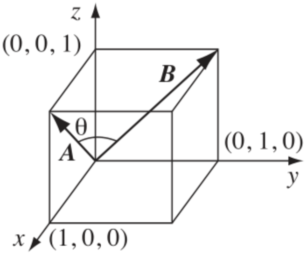
# Τεστ εξωτερικού γινομένου

Το εξωτερικό γινόμενο μπορεί να δείξει αν δυο διανύσματα είναι παράλληλα μεταξύ τους. Αν ναι, η γωνία μεταξύ τους είναι μηδέν άρα και το εξωτερικό γινόμενο είναι μηδέν.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$$

# Παράδειγμα

Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν δύο διαγώνιοι διαδοχικών εδρών ενός κύβου.




$$\mathbf{A} = (1, 0, 1) \qquad \mathbf{B} = (0, 1, 1)$$

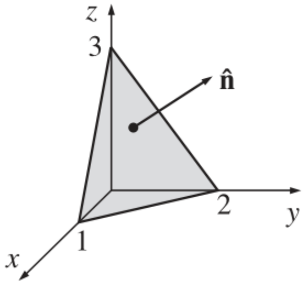
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\theta = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

# Άσκηση 1

Χρησιμοποιήστε το εξωτερικό γινόμενο για να βρείτε τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ που είναι κάθετο στο επίπεδο του σχήματος.




Το εξωτερικό γινόμενο δυο οποιονδήποτε διανυσμάτων στο επίπεδο θα μας δώσει το κάθετο. Έστω

$$\mathbf{A} = (0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0) \qquad \mathbf{B} = (0,0,3) - (1,0,0) = (-1,0,3)$$

# Άσκηση 1a

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

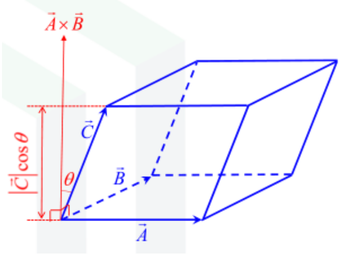
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|}$$

```
>> A=[-1 2 0]; B=[-1 0 3];
>> C=cross(A,B)
C =
   6   3   2
>> n=C/norm(C)
n =
   0.8571   0.4286   0.2857
```

# Τριπλά γινόμενα

Βαθμωτό τριπλό γινόμενο:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$




**Σχήμα:** Βαθμωτό τριπλό γινόμενο ο όγκος του σχηματιζόμενου παραλληλεπιπέδου.

Διανυσματικό τριπλό γινόμενο:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

# Παράδειγμα

Δοθέντων δυο διανυσμάτων $\mathbf{A} = (3, 4, 1)$ και $\mathbf{B} = (0, 2, -5)$ ποια η γωνία μεταξύ τους;

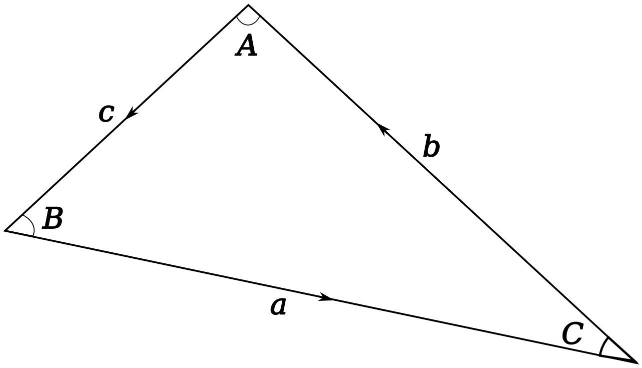
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \qquad \|\mathbf{A}\| = \sqrt{26} \qquad \|\mathbf{B}\| = \sqrt{29}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|} = 0.10925 \qquad \theta = 83.728^\circ$$

```
>> A=[3 4 1]; B=[0 2 -5];
>> dot(A,B)
ans = 3
>> norm(A)
>> ans = 5.0990
>> norm(B)
ans = 5.3852
>> dot(A,B)/(norm(A)*norm(B))
ans = 0.1093
>> theta = acos(dot(A,B)/(norm(A)*norm(B)))*180/pi
theta = 83.728
```

# Παράδειγμα

Δοθέντος τριγώνου με πλευρές $a, b, c$ υπολογίστε τους κανόνες συνημιτόνου και ημιτόνου.



# Παράδειγμα (συν)

Κανόνας συνημιτόνου

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a}$$

$$a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

όπου $(\pi - A)$ η γωνία μεταξύ $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$.

Κανόνας ημιτόνου

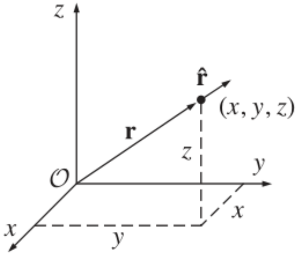
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

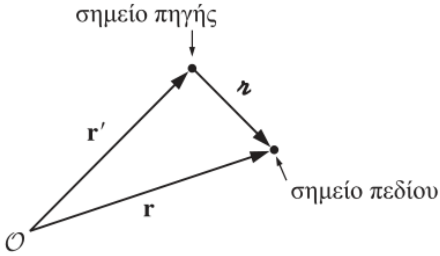
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{c}\times\mathbf{a}\| \Rightarrow$$

$$ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

# Διάνυσμα θέσης




Η θέση ενός σημείου $(x, y, z)$ προσδιορίζεται από το διάνυσμα θέσης με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το συγκεκριμένο σημείο.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} = (x, y, z)$$

μέτρο: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

και το μοναδιαίο διάνυσμα θέσης

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

# Διάνυσμα μετατόπισης και διάνυσμα απόστασης

Απειροστό διάνυσμα μετατόπισης από το $(x, y, z)$ στο $(x + dx, y + dy, z + dz)$:

$$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

Οι εφαρμογές μας συνήθως αφορούν δυο σημεία. Σημείο πηγής, $\mathbf{r}'$, που βρίσκεται ένα ηλεκτρικό φορτίο και σημείο πεδίου, $\mathbf{r}$, εκεί που υπολογίζουμε το πεδίο.

Το διάνυσμα απόστασης από το σημείο πηγής μέχρι το σημείο πεδίου είναι:

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

το μέτρο του:

$$\mathscr{r} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$$

και μοναδιαίο διάνυσμα από $\mathbf{r}'$ σε $\mathbf{r}$:

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

# Διάνυσμα απόστασης

## σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathscr{r} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

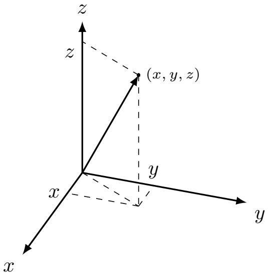
$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \frac{(x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

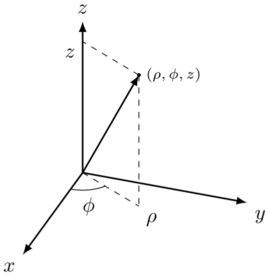
# Άσκηση

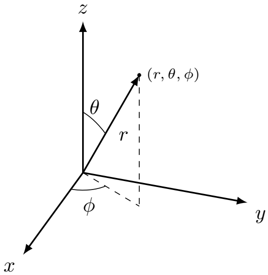
Υπολογίστε το διάνυσμα απόστασης $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ από το σημείο πηγής $(2, 8, 7)$ μέχρι το σημείο πεδίου $(4, 6, 8)$. Υπολογίστε κατόπιν τα $\mathscr{r}$ και $\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$.

---

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (4, 6, 8) - (2, 8, 7) = (2, -2, 1)$$
$$\mathscr{r} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$
$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$



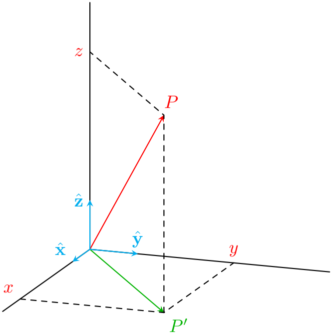




Δεξιόστροφα και ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων:

Καρτεσιανό, κυλινδρικό, σφαιρικό.

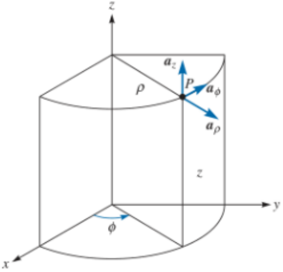
# Σύστημα αξόνων: καρτεσιανό

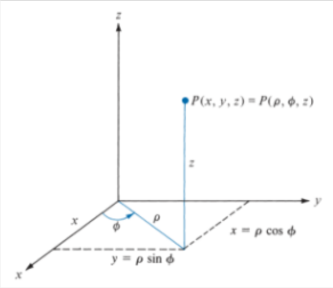



**Σχήμα:** Καρτεσιανό σύστημα αξόνων στον 3D χώρο.

$$-\infty < x < +\infty$$
$$-\infty < y < +\infty$$
$$-\infty < z < +\infty$$

# Σύστημα αξόνων: κυλινδρικό

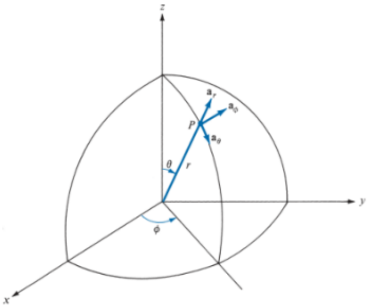


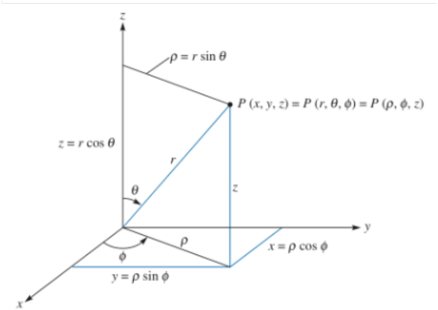




**Σχήμα:** Κυλινδρικό σύστημα αξόνων

$$0 \leq \rho < +\infty$$
$$0 \leq \phi \leq 360^\circ$$
$$-\infty < z < +\infty$$

# Σύστημα αξόνων: σφαιρικό

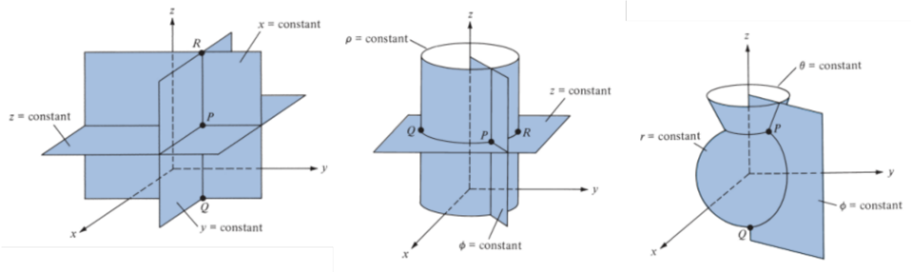



**Σχήμα:** Σφαιρικό σύστημα αξόνων

$$0 \leq r < +\infty$$
$$0 \leq \phi \leq 360^\circ$$
$$0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

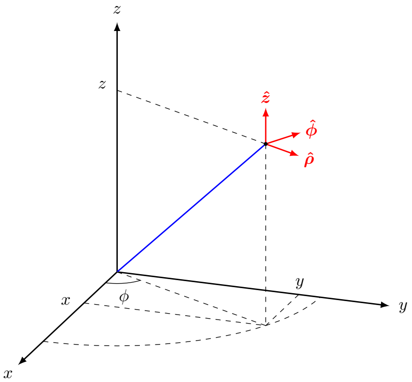
# Επιφάνειες σταθερής τιμής




**Σχήμα:** Επιφάνειες σταθερής τιμής

# Κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες $(\rho, \phi, z)$ σημείου $P$ ορίζονται όπως στο σχήμα.




Διάνυσμα σε αυτό το σύστημα:

$$\mathbf{A} = A_\rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z\, \hat{\mathbf{z}}$$

# Κυλινδρικές συντεταγμένες (συν)

Μετατροπές συντεταγμένων:

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\phi & \qquad \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\
y &= \rho\sin\phi & \qquad \phi &= \tan^{-1}(y/x) \\
z &= z & \qquad z &= z
\end{aligned}
$$

Μοναδιαία διανύσματα:

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\rho}} &= \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\
\hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\
\hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

Προσοχή. Τα μοναδιαία διανύσματα σε κυλινδρικές συντεταγμένες ΔΕΝ είναι σταθερά.

# Κυλινδρικές συντεταγμένες (συν)

Η στοιχειώδης μετατόπιση

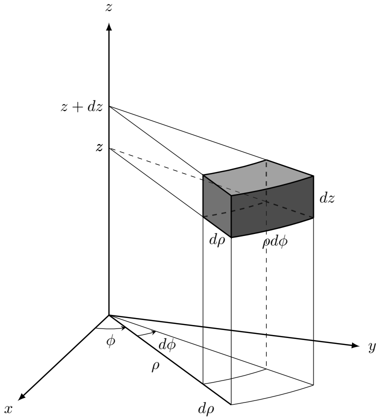
$$d\mathbf{l} = dl_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + dl_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dl_z\,\hat{\mathbf{z}} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

Ο στοιχειώδης όγκος: $dV = dl_r dl_\phi dz = \rho d\rho d\phi dz$

Η στοιχειώδης επιφάνεια εξαρτάται από το επίπεδο.

$$\begin{array}{lcrcl} \rho \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\phi dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & = & \rho d\phi dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \phi \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\rho dl_z\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} & = & d\rho dz\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ z \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\rho dl_\phi\,\hat{\mathbf{z}} & = & \rho d\rho d\phi\,\hat{\mathbf{z}} \end{array}$$

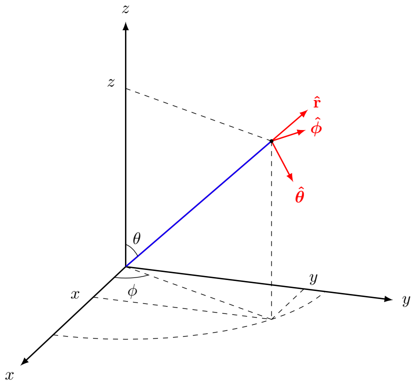
# Κυλινδρικές συντεταγμένες (συν)




**Σχήμα:** Στοιχειώδης όγκος σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

# Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες $(r, \theta, \phi)$ σημείου $P$ ορίζονται όπως στο σχήμα.




Διάνυσμα σε αυτό το σύστημα:

$$\mathbf{A} = A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

# Σφαιρικές συντεταγμένες (συν)

Μετατροπές συντεταγμένων:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\phi\sin\theta & \qquad r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
y &= r\sin\phi\sin\theta & \qquad \theta &= \tan^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right) \\
z &= r\cos\theta & \qquad \phi &= \tan^{-1}(y/x)
\end{aligned}
$$

Μοναδιαία διανύσματα:

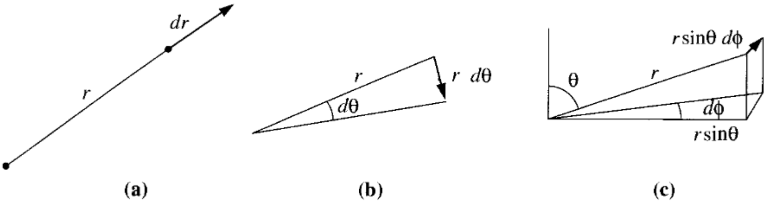
$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \cos\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\phi\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}
$$

Προσοχή. Τα μοναδιαία διανύσματα σε σφαιρικές συντεταγμένες ΔΕΝ είναι σταθερά.

# Σφαιρικές συντεταγμένες (συν)

Η στοιχειώδης μετατόπιση

$$d\mathbf{l} = dl_r\,\hat{\mathbf{r}} + dl_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dl_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

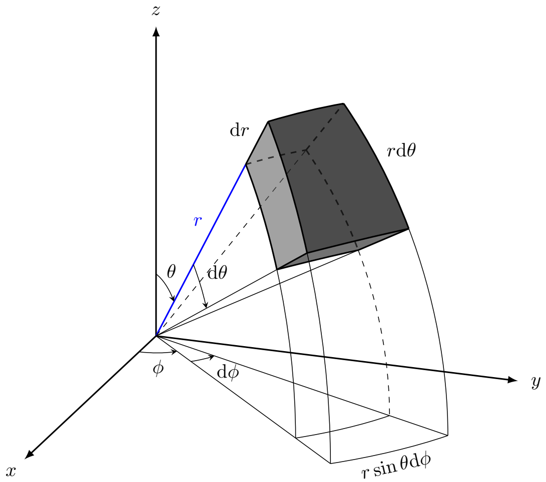



Ο στοιχειώδης όγκος: $dV = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

Η στοιχειώδης επιφάνεια εξαρτάται από το επίπεδο.

$$\begin{array}{llll} r \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\theta dl_\phi\,\hat{\mathbf{r}} & = & r^2\sin\theta d\theta d\phi\,\hat{\mathbf{r}} \\ \theta \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_r dl_\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} & = & r\sin\theta dr d\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \phi \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_r dl_\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} & = & r dr d\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{array}$$

# Σφαιρικές συντεταγμένες (συν)




**Σχήμα:** Στοιχειώδης όγκος σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

# Συστήματα αξόνων: σχέσεις

## Κυλινδρικές σε Καρτεσιανές

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z \end{cases}$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\begin{cases} A_x &= A_\rho \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - A_\phi \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y &= A_\rho \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + A_\phi \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z &= A_z \end{cases}$$

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi & = & \tan^{-1}(y/x) \\ z & = & z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} \sin\phi & = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\phi & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_\rho & = & A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \\ A_\phi & = & -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \\ A_z & = & A_z \end{array}\right.$$

# Συστήματα αξόνων: σχέσεις

## Σφαιρικές σε Καρτεσιανές

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r\sin\theta\cos\phi \\ y & = & r\sin\theta\sin\phi \\ z & = & r\cos\theta \end{array} \right.$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_x & = & \dfrac{A_r x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta x z}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} - \dfrac{A_\phi y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y & = & \dfrac{A_r y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta y z}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} + \dfrac{A_\phi x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z & = & \dfrac{A_r z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \dfrac{A_\theta \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array} \right.$$

# Συστήματα αξόνων: σχέσεις

## Καρτεσιανές σε Σφαιρικές

Αλλαγές μεταβλητών:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r & = & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta & = & \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi & = & \tan^{-1}(y/x) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \cos\theta & = & \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \sin\theta & = & \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\phi & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\phi & = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right.$$

Αλλαγές συνιστωσών:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_r & = & A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z \cos\theta \\ A_\theta & = & A_x \cos\theta\cos\phi + A_y \cos\theta\sin\phi - A_z \sin\theta \\ A_\phi & = & -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \end{array} \right.$$

# Αποστάσεις μεταξύ δυο σημείων

Η απόσταση $d$ μεταξύ δυο σημείων με διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ δίδεται από

$$d = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$$

και στα τρία συστήματα συντεταγμένων είναι:

καρτεσιανό: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

κυλινδρικό: $d = \sqrt{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2}$

σφαιρικό: $d = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2 \cos\theta_1 - 2r_1 r_2 \sin\theta_2 \sin\theta_1 \cos(\phi_2 - \phi_1)}$

# Άσκηση 1.01

Εάν $\mathbf{A} = (1, \alpha, 1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, 1, 1)$ και $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ κάθετα μεταξύ τους, ποια η τιμή της παραμέτρου $\alpha$;

---

Σύμφωνα με το τεστ εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \alpha + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

# Άσκηση 1.01

Εάν $\mathbf{A} = (1, \alpha, 1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, 1, 1)$ και $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ κάθετα μεταξύ τους, ποια η τιμή της παραμέτρου $\alpha$;

---

Σύμφωνα με το τεστ εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \alpha + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

# Άσκηση 1.02

Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του $\mathbf{A} = (6, 2, -3)$ στο $\mathbf{B} = (3, -4, 0)$ καθώς και το μέτρο της προβολής του $\mathbf{B}$ στο $\mathbf{A}$;

---

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta$$

Προβολή $\mathbf{A}$ στο $\mathbf{B}$

$$A\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} = 2$$

Προβολή $\mathbf{B}$ στο $\mathbf{A}$

$$B\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A} = 1.4286$$

# Άσκηση 1.02

Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του $\mathbf{A} = (6, 2, -3)$ στο $\mathbf{B} = (3, -4, 0)$ καθώς και το μέτρο της προβολής του $\mathbf{B}$ στο $\mathbf{A}$;

---

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta$$

Προβολή $\mathbf{A}$ στο $\mathbf{B}$

$$A\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} = 2$$

Προβολή $\mathbf{B}$ στο $\mathbf{A}$

$$B\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A} = 1.4286$$

# Άσκηση 1.02 (συν)

```
octave:1> A=[6 2 -3]; B=[3 -4 0];
octave:2> dot(A,B)/norm(B)
ans = 2
octave:3> dot(A,B)/norm(A)
ans = 1.4286
octave:4> dot(A,B)
ans = 10
octave:5> norm(A)
ans = 7
octave:6> norm(B)
ans = 5
```

# Άσκηση 1.03

Έστω $\mathbf{A} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{C} = (4, -6, 10)$. Υπολογίστε τα μεγέθη:

- $\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C}$
- $(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\|$
- $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- γωνία μεταξύ $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$

---

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C} = (17, -25, 48)$$

$$(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\| = (0.081111, 0.811107, 1.378882)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} = (0, -1, 5)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -32$$

$$\cos^{-1}\left[\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right] = 86.69^\circ$$

# Άσκηση 1.03

Έστω $\mathbf{A} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{C} = (4, -6, 10)$. Υπολογίστε τα μεγέθη:

- $\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C}$
- $(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\|$
- $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- γωνία μεταξύ $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$

---

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C} = (17, -25, 48)$$

$$(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\| = (0.081111, 0.811107, 1.378882)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} = (0, -1, 5)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -32$$

$$\cos^{-1}\left[\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right] = 86.69^\circ$$

# Άσκηση 1.03 (συν)

```
octave:7> A=[-2 5 1]; B=[1 0 3]; C=[4 -6 10];
octave:8> A-B+5*C
ans =

   17  -25   48

octave:9> (2*A+5*B)/norm(C)
ans =

   0.081111   0.811107   1.378882

octave:10> x=[1 0 0];
octave:11> cross(x,A)
ans =

   0  -1   5

octave:12> dot(A,cross(B,C))
ans = -32
octave:13> acos( dot(A,B)/(norm(A)*norm(B)) ) * 180/pi
ans = 86.690
```

# Άσκηση 1.04

Έστω $\mathbf{A} = (4, 2, -1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, 3)$. Εαν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ παράλληλα, υπολογίστε $\alpha$ και $\beta$.

---

Σύμφωνα με το τεστ εξωτερικού γινομένου πρέπει

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 4 & 2 & -1 \\ \alpha & \beta & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(6+\beta)\hat{\mathbf{x}} - (12+\alpha)\hat{\mathbf{y}} + (4\beta - 2\alpha)\hat{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = -12 \qquad \beta = -6 \qquad 4\beta - 2\alpha = 0$$

# Άσκηση 1.04

Έστω $\mathbf{A} = (4, 2, -1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, 3)$. Εαν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ παράλληλα, υπολογίστε $\alpha$ και $\beta$.

---

Σύμφωνα με το τεστ εξωτερικού γινομένου πρέπει

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 4 & 2 & -1 \\ \alpha & \beta & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(6 + \beta)\hat{\mathbf{x}} - (12 + \alpha)\hat{\mathbf{y}} + (4\beta - 2\alpha)\hat{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = -12 \qquad \beta = -6 \qquad 4\beta - 2\alpha = 0$$

# Άσκηση 1.05

Μετατρέψτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των παρακάτω σημείων σε κυλινδρικές και σφαιρικές. $P(2, 5, 1)$, $Q(-3, 4, 0)$, $R(6, 2, -4)$.

---

$$
\begin{array}{lll}
P: & (5.3852, 68.199^\circ, 1) & (5.4772, 79.480^\circ, 68.199^\circ) \\
Q: & (5, 126.87^\circ, 0) & (5, 90^\circ, 126.87^\circ) \\
R: & (6.3246, 18.435^\circ, -4) & (7.4833, 122.31^\circ, 18.435^\circ)
\end{array}
$$

# Άσκηση 1.05

Μετατρέψτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των παρακάτω σημείων σε κυλινδρικές και σφαιρικές. $P(2, 5, 1)$, $Q(-3, 4, 0)$, $R(6, 2, -4)$.

---

$$
\begin{array}{lll}
P: & (5.3852, 68.199^\circ, 1) & (5.4772, 79.480^\circ, 68.199^\circ) \\
Q: & (5, 126.87^\circ, 0) & (5, 90^\circ, 126.87^\circ) \\
R: & (6.3246, 18.435^\circ, -4) & (7.4833, 122.31^\circ, 18.435^\circ)
\end{array}
$$

# Άσκηση 1.05 (συν)

```
octave:14> x=2; y=5; z=1;
octave:15> rho=sqrt(x^2+y^2)
rho = 5.3852
octave:16> phi=atan2(y,x)
phi = 1.1903
octave:17> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 68.199
octave:18> help atan2

octave:21> r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
r = 5.4772
octave:22> theta=acos(z/r)*180/pi
theta = 79.480
octave:23> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 68.199
```

# Άσκηση 1.05 (συν)

```
octave:24> x=-3; y=4; z=0;
octave:25> rho=sqrt(x^2+y^2)
rho = 5
octave:26> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 126.87

octave:27> r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
r = 5
octave:28> theta=acos(z/r)*180/pi
theta = 90
octave:29> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 126.87
```

# Άσκηση 1.05 (συν)

```
octave:30> x=6; y=2; z=-4;
octave:31> rho=sqrt(x^2+y^2)
rho = 6.3246
octave:32> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 18.435

octave:33> r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
r = 7.4833
octave:34> theta=acos(z/r)*180/pi
theta = 122.31
octave:35> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 18.435
```

# Άσκηση 1.06

Εκφράστε τα παρακάτω διανύσματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

- $\mathbf{A} = \rho \sin\phi \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \cos\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} - 2z \, \hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = 4r \cos\phi \, \hat{\mathbf{r}} + r \, \hat{\boldsymbol{\theta}}$
- $\mathbf{F} = (4/r^2) \, \hat{\mathbf{r}}$

---

Κυλινδρικές: $\mathbf{A} = A_\rho \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z \, \hat{\mathbf{z}}$

Καρτεσιανές: $\mathbf{A} = A_x \, \hat{\mathbf{x}} + A_y \, \hat{\mathbf{y}} + A_z \, \hat{\mathbf{z}}$

$$A_x = 0$$

$$A_y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A_z = -2z$$

# Άσκηση 1.06 (συν)

Σφαιρικές: $\mathbf{B} = 4r\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = B_r\,\hat{\mathbf{r}} + B_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + B_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

Καρτεσιανές: $\mathbf{B} = B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}} + B_z\,\hat{\mathbf{z}}$

$$B_x = \frac{x(4x+z)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$B_y = \frac{y(4x+z)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$B_z = \frac{4xz}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

# Άσκηση 1.06 (συν)

Σφαιρικές: $\mathbf{F} = (4/r^2)\,\hat{\mathbf{r}} = F_r\,\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

Καρτεσιανές: $\mathbf{F} = F_x\,\hat{\mathbf{x}} + F_y\,\hat{\mathbf{y}} + F_z\,\hat{\mathbf{z}}$

$$F_x = \frac{4x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$F_y = \frac{4y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = \frac{4z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

# Άσκηση 1.07

Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των παρακάτω ζευγών σημείων.

- $(2, 1, 5)$ και $(6, -1, 2)$
- $(3, \pi/2, -1)$ και $(5, 3\pi/2, 5)$
- $(10, \pi/4, 3\pi/4)$ και $(5, \pi/6, 7\pi/4)$
- $(4, 30^\circ, 0^\circ)$ και $(6, 90^\circ, 180^\circ)$

---

```
octave:5> r1=[2 1 5]; r2=[6 -1 2]; d=norm(r1-r2)
d = 5.3852

octave:6> r1=[3 pi/2 -1]; r2=[5 3*pi/2 5];
octave:7> d=sqrt(r2(1)^2 + r1(1)^2 - 2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2)-r1(2)) + (r2(3)-r1(3))^2)
d = 10

octave:8> r1=[10 pi/4 3*pi/4]; r2=[5 pi/6 7*pi/4];
octave:9> d=sqrt((r2(1)^2 + r1(1)^2 - 2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2))*cos(r1(2)) -
          2*r1(1)*r2(1)*sin(r2(2))*sin(r1(2))*cos(r2(3)-r1(3))))
d = 9.9558

octave:11> r1=[4 30*pi/180 0]; r2=[6 90*pi/180 180*pi/180];
octave:12> d=sqrt((r2(1)^2 + r1(1)^2 - 2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2))*cos(r1(2)) -
           2*r1(1)*r2(1)*sin(r2(2))*sin(r1(2))*cos(r2(3)-r1(3))))
d = 8.7178
```

# Topic

1. Μαθηματικό υπόβαθρο

2. Φορτίο

# Ηλεκτρικό φορτίο

Η μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ υλικών σωμάτων οδηγεί στην παραδοχή μιας φυσικής οντότητας, του ηλεκτρικού φορτίου, που η παρουσία του γίνεται αντιληπτή, μεταξύ άλλων, από αναπτυσσόμενες ελκτικές ή απωστικές δυνάμεις μεταξύ φορτισμένων σωμάτων. Την οντότητα του ηλεκτρικού φορτίου την δεχόμαστε αξιωματικά για να εξηγήσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα που παρατηρούμε γύρω μας. Εντελώς ανάλογα αποδεχόμαστε και την οντότητα της μάζας για υλικά σώματα.

Ενδιαφέρον το μοντέλο Bohr και αυτό της κβαντομηχανικής.

Τα φορτία στη φύση τα διακρίνουμε σε δυο είδη, θετικά και αρνητικά. Η ονομασία είναι αυθαίρετη (Benjamin Franklin) γιατί δεν υπάρχει ιδιότητα του ηλεκτρικού φορτίου που να δικαιολογεί αυτόν τον χαρακτηρισμό. Εκείνο που χαρακτηρίζει τα φορτία είναι η έλξη μεταξύ αντιθέτων (ετερωνύμων) και η άπωση μεταξύ ομοίων (ομονύμων) φορτίων.

# Από διαλέξεις Ηλεκτρομαγνητισμού Walter Lewin

Εισαγωγικά πειράματα από MIT.

Walter Lewin

- walt01, What holds our world together
- walt02, πρώτο πείραμα στατικού ηλεκτρισμού, επαγωγή, ανταλλαγή φορτίου
- walt03, φόρτιση μονωτή - εισαγωγή
- walt04, φόρτιση μονωτή - πείραμα
- walt05, beating Simon
- walt06, flying hair

Λεπτομέρειες για γεννήτρια van de Graaff διαχωρισμού φορτίων με μηχανική τριβή.

Στο eclass, waltA.7z, τα παραπάνω video.