Ηλεκτρομαγνητισμός - Λύσεις

Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2023

Διδάσκων: Δροσόπουλος Αναστάσιος

1 Θέμα (4 μον.)

Υπολογίστε απόκλιση και στροβιλισμό των παρακάτω διανυσματικών πεδίων:

$$\mathbf{A} = 5x^2y\ \hat{\mathbf{x}} + y^2\ \hat{\mathbf{y}} - xyz^3\ \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = \rho z^2\ \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho^2 \sin^2\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + 5\rho z\ \hat{\mathbf{z}}$$

Λύση

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 10xy + 2y - 3xyz^2$$
$$\nabla \times \mathbf{A} = -xz^3\ \hat{\mathbf{x}} + yz^3\ \hat{\mathbf{y}} - 5x^2\ \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 2z^2 + \rho \sin(2\phi) + 5\rho$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = (2\rho - 5)z\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + 3\rho \sin^2\phi\ \hat{\mathbf{z}}$$

2 Θέμα (4 μον.)

Δέσμη ηλεκτρονίων σχηματίζει ρεύμα πυκνότητας

$$\mathbf{J} = \begin{cases} J_0\left(1 - \dfrac{\rho^2}{a^2}\right)\ \hat{\mathbf{z}} & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$

Προσδιορίστε a) το ολικό ρεύμα και b) το $|\mathbf{H}|$ για όλα τα ρ.

Λύση

Το ολικό ρεύμα που περνά από κύκλο ακτίνας a στο επίπεδο $z = 0$ με κέντρο $(0, 0, 0)$:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S J_0\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)\ \hat{\mathbf{z}} \cdot (\rho d\phi d\rho\ \hat{\mathbf{z}}) = J_0 2\pi \int_0^a \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)\rho d\rho =$$

$$= J_0\pi \int_{\rho=0}^a \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) d(\rho^2) = J_0\pi\left(a^2 - \frac{a^4}{2a^2}\right) = \frac{J_0\pi a^2}{2}$$

Με το νόμο ρεύματος Ampere

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\ \ = I$$

Επιλέγουμε διαδρομή Ampere κύκλο ακτίνας ρ στο επίπεδο $z = 0$ με κέντρο $(0, 0, 0)$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\rho < a$ και $\rho > a$. Με τον κανόνα δεξιού χεριού θα έχουμε $\mathbf{H} = H_\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Οπότε, για $\rho < a$

$$\oint_L H_\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \rho d\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = H_\phi \rho 2\pi = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J_0\pi \int_{\rho=0}^{\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) d(\rho^2) = J_0\pi\left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{2a^2}\right) \Rightarrow$$

$$H_\phi = \frac{J_0 \pi \rho^2}{2\pi\rho}\left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2}\right) = \frac{J_0\rho}{2}\left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2}\right) = \frac{J_0\rho}{4}\left(2 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

Και για $\rho > a$

$$H_\phi \rho 2\pi = \frac{J_0 \pi a^2}{2} \Rightarrow H_\phi = \frac{J_0 \pi a^2}{4\pi\rho} = \frac{J_0 a^2}{4\rho}$$

3 Θέμα (2 μον.)

Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα μεταδίδεται στην κατεύθυνση $+\hat{\mathbf{z}}$ στο κενό. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\mathbf{E} = E_0\ \mathbf{e}$ όπου $E_0 = 2\mu\mathrm{V/m}$ και $\mathbf{e} = \cos\phi\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\ \hat{\mathbf{y}}$. Ποιο είναι το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H} = H_0\ \mathbf{h}$;

Δίδονται: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Λύση

Η χαρακτηριστική εμπέδηση του κενού είναι:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73\ \Omega$$

και

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta} = 5.309\ \mathrm{nA/m}$$

Ηλεκτρικό πεδίο, μαγνητικό πεδίο και κατεύθυνση μετάδοσης σχηματίζουν δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα. Άρα

$$\mathbf{h} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e} = -\sin\phi\ \hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\ \hat{\mathbf{y}}$$